

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2015

№ 6(38)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), В.Ю. Хайруллина (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.12.2015.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9.35. Уч.-изд. л. 10.47. Тираж 300 экз. Заказ № 40.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 1515.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С. Линии на параболоиде, близкие к геодезическим	5
Гриншпон С.Я., Фуксон С.Л. Отношения ортогональности в мультипликативной группе $\mathbb{Q}_+$	18
Забарина А.И., Гусельникова У.А., Фомина Е.А. О коммутирующих элементах группы.....	27
Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром.....	33
Приходовский М.А. Об усовершенствовании критериев оценки распределения сейсмичности по широтным интервалам	46
Сергеева Д.В. Левоинвариантные меры на топологических n -арных подполугруппах бинарных групп	50
Шукюров А.Ш. Об одной работе Хмылевой и Бухтиной	56

МЕХАНИКА

Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Математическое моделирование течения двухфазной среды.....	60
Кулешов А.А., Солоненко В.А., Ящук А.А. Мониторинг и визуализация напряженно-деформированного состояния причальной конструкции в режиме реального времени	73
Орлова Ю.Н., Орлов М.Ю. Исследование процесса взрывного нагружения льда	81
Пономарева М.А., Филина М.П., Якутенок В.А. Течение неньютоновской жидкости в квадратной каверне при малых числах Рейнольдса	90
Чуруксаева В.В., Старченко А.В. Математическая модель и численный метод для расчета турбулентного течения в русле реки	100
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	115

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S. Lines close to geodetic lines on a paraboloid	5
Grinshpon S.Y., Fukson S.L. Orthogonalities in the multiplicative group $\mathbb{Q}_+$	18
Zabarina A.I., Guselnikova U.A., Fomina E.A. On commuting elements of a group	27
Ivanov D.Yu. Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel	33
Prikhodovsky M.A. On an improvement of evaluation criteria for the seismicity distribution over latitude intervals	46
Sergeeva D.V. Left-invariant measures on topological n-ary subsemigroup of binary groups	50
Shukurov A.Sh. On a paper by Khmyleva and Bukhtina	56

MECHANICS

Vasenin I.M., Dyachenko N.N. Mathematical modeling of the two-phase flow	60
Kuleshov A.A., Solonenko V.A., Yashchuk A.A. Monitoring system and visualization of the stress-strain state for the berth construction in real time	73
Orlova Yu.N., Orlov M.Yu. The study of the process of explosive loading of ice	81
Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. Non-Newtonian fluid flow in a lid-driven cavity at low Reynolds numbers	90
Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. A mathematical model and numerical method for computation of a turbulent river stream	100
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	115

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/38/1

М.С. Бухтяк

ЛИНИИ НА ПАРАБОЛОИДЕ, БЛИЗКИЕ К ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ

Завершено решение задачи, поставленной в [1]. Свойства линии пересечения параболоида вращения с демиквадрикой дополнены фактами, убеждающими в целесообразности избранного подхода к построениям линий на параболоиде, близких к геодезическим линиям и обладающих свойствами, достаточно удобными для использования их в качестве линий раскроя сетеполотна. Основной результат – демонстрация близости главных нормалей найденных линий (они названы SG-линиями) и геодезических.

Ключевые слова: *параболоид, геодезическая линия, нормальная конгруэнция, демиквадрика, линейчатое пространство.*

1. Постановка проблемы

В [1] поставлена задача об отыскании на параболоиде вращения линий, которые локально близки к геодезическим линиям, без осложнений допускают отнесение к натуральному параметру, а также определяются своими концевыми точками. В той же работе обоснована перспективность использования в качестве такой линии сечения параболоида куском демиквадрики Q , ограничивающими лучами которого служат две нормали параболоида. С этой целью в специальном линейном комплексе прямых, пересекающих ось параболоида, выделено подмножество $\tilde{K}$ прямых, непараллельных директориальной плоскости α параболоида. Наличие оси и указанной плоскости позволило ввести систему координат на $\tilde{K}$, отождествляющую его с областью в $\mathbb{R}^3$.

Нормальной конгруэнции параболоида соответствует алгебраическая поверхность Σ в $\mathbb{R}^3$. В работе [1] оценена степень близости прямой в $\mathbb{R}^3$, изображающей демиквадрику Q , к поверхности Σ . В той же работе поставлен следующий вопрос. Пусть L – линия пересечения демиквадрики Q и параболоида. Необходимо оценить угловое отклонение главных нормалей линии L от нормалей параболоида в соответствующих точках. В [1] этот вопрос не решен, поскольку используемая в ней модель приводит к чрезмерно сложным вычислениям. Здесь мы применим иную модель, которая проигрывает в применении к нормальной конгруэнции параболоида, но удобна для решения поставленной здесь задачи.

2. Локальная карта на многообразии прямых

Линейчатое пространство [2, 3] наделяется структурой дифференцируемого многообразия [4] различными способами. Нас будет интересовать локальная карта, примененная автором в [5]. Именно, пусть в трехмерном аффинном пространстве A_3 задана неподвижная пара параллельных (и не совпадающих) плоскостей Π_1 и Π_2 . Вершину репера O помещаем в плоскость Π_1 , векторы e_1 и e_2 параллельны обеим плоскостям. Вектор e_3 , отложенный из точки O , имеет концевую точку в плоскости Π_2 . Область Λ локальной карты содержит все прямые в A_3 , пересекающие пару плоскостей Π_1, Π_2 . Если прямая l пересекает плоскость Π_1 в точке $A(x_1, x_2, 0)$, а плоскость Π_2 в точке $B(x_3, x_4, 1)$, то локальными координатами прямой l объявляем четверку чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) .

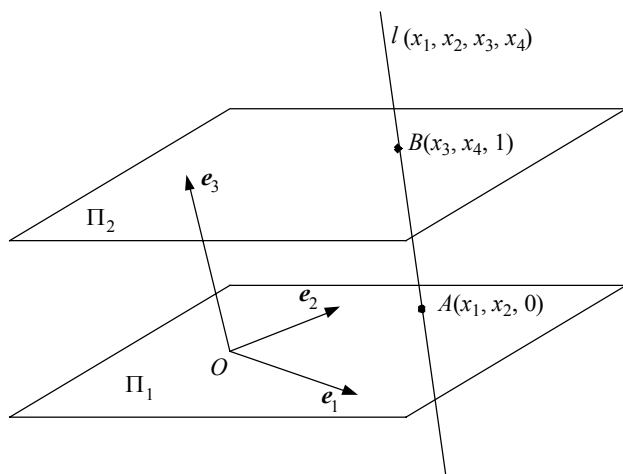


Рис. 1. Правило присвоения локальных координат прямой $l \in \Lambda$

Гомеоморфизм

$$\Lambda \ni l \xrightarrow{f} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad (2.1)$$

позволяет ввести на Λ структуру 4-мерного точечно-векторного пространства. Его свойствам посвящена работа [5]. При этом группа преобразований пространства A_3 – эквиаффинная. Отдавая предпочтения метрическим свойствам указанного пространства, сужаем эквиаффинную группу до группы движений, а репер $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ полагаем ортонормированным.

Мы не видим оснований для терминологического различения прямой $l \in \Lambda$ и соответствующей ей точкой $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ и будем писать $l(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Если, кроме того, имеем $n(y_1, y_2, y_3, y_4)$, то определяем расстояние между прямыми:

$$\rho(l, n) \triangleq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2}.$$

Заметим также, что наши построения не претерпевают существенных изменений, если расстояние между параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 взять равным не единице, а другой отличной от нуля константе. Правило (2.1) остается неизменным.

3. Конгруэнция нормалей параболоида вращения. Координатное представление

Рассмотрим кусок параболоида вращения

$$R = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad 0 \leq u \leq r, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (3.1)$$

Здесь r – радиус вырезающего цилиндра. На практике $r < F$, и мы можем одно из условий в (3.1) записать (и это существенно) иначе:

$$0 \leq u < F.$$

Пару неподвижных плоскостей выбираем следующим образом. $\Pi_1 = (xOy)$, Π_2 задана уравнением

$$z = \frac{F}{4}.$$

Не нарушая общности, полагаем

$$F = 1.$$

Взаимное расположение куска параболоида, плоскостей Π_1 и Π_2 и нормали l параболоида пояснено на рис. 2.

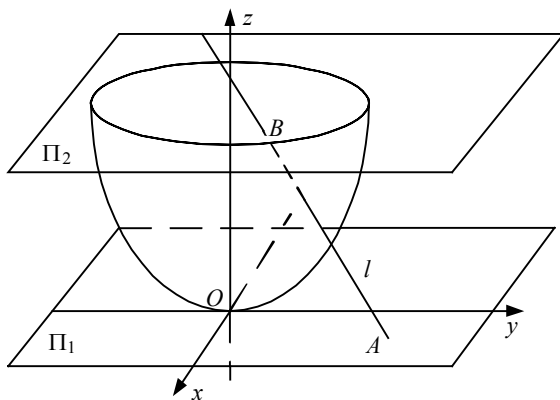


Рис. 2. Кусок параболоида и сопутствующие объекты:
плоскости Π_1 , Π_2 и нормали l

Нормаль, отвечающая значениям параметров u и v , есть годограф вектор-функции

$$N = \left\{ u \cos v \left(1 - \frac{t}{2} \right), u \sin v \left(1 - \frac{t}{2} \right), t + \frac{u^2}{4} \right\}.$$

Если A – точка пересечения нормали с плоскостью Π_1 и B – точка пересечения нормали с плоскостью Π_2 , то

$$A = \left\{ \frac{u}{8} \cos v(8+u^2), \frac{u}{8} \sin v(8+u^2), 0 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{u}{8} \cos v(7+u^2), \frac{u}{8} \sin v(7+u^2), \frac{1}{4} \right\}.$$

Точка в $\mathbb{R}^4$, изображающая нормаль (попросту, сама нормаль), пробегает 2-поверхность, заданную вектор-функцией

$$r \equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \left\{ \frac{u}{8} \cos v(8+u^2), \frac{u}{8} \sin v(8+u^2), \frac{u}{8} \cos v(7+u^2), \frac{u}{8} \sin v(7+u^2) \right\}. \quad (3.2)$$

Эта 2-поверхность принадлежит гиперквадрике (детерминантное многообразие [6, ст. 99])

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0. \quad (3.3)$$

Она также принадлежит гиперповерхности 6-го порядка

$$14y_1^2 - 6y_1 y_2 - 16y_2^2 + 49y_1 - 64y_2 + (y_1 - y_2)^3 = 0, \quad (3.4)$$

где

$$y_1 = 64(x_1^2 + x_2^2), \quad y_2 = 64(x_3^2 + x_4^2). \quad (3.5)$$

Впрочем, 2-поверхность (3.2) допускает и другое задание. Разрешая (3.3) параметрически

$$x_3 = tx_1, \quad x_4 = tx_2, \quad (3.6)$$

где t – новый вещественный параметр, и учитывая (3.5), приводим уравнение (3.4) к виду

$$(x_1^2 + x_2^2) f_1 f_2 = 0.$$

Здесь

$$f_1 = 64x_1^2 t^3 - 192t^2 x_1^2 + 192x_1^2 t - 64x_1^2 - 7 + 8t + 64t^3 x_2^2 - 192t^2 x_2^2 + 192tx_2^2 - 64x_2^2,$$

$$f_2 = 64x_1^2 t^3 + 192t^2 x_1^2 + 192x_1^2 t + 64x_1^2 + 7 + 8t + 64t^3 x_2^2 + 192t^2 x_2^2 + 192tx_2^2 + 64x_2^2.$$

Стоит заметить, что

$$\begin{aligned} f_1 &= 64(t-1)^3 (x_1^2 + x_2^2 + 8t - 7), \\ f_2 &= 64(t+1)^3 (x_1^2 + x_2^2 + 8t + 7). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если применено (3.6), то при различных значениях параметра t получаем линии в плоскости $x_1 O x_2$: это окружности вещественного радиуса при $t \in \left[-\frac{7}{8}, -1 \right) \cup \left(1, \frac{7}{8} \right]$

и мнимого радиуса при остальных вещественных значениях t .

Если ввести новые переменные

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad z_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \quad z_4 = \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}},$$

то, как видно из (3.2),

$$z_1 = z_3 = \cos v, \quad z_2 = z_4 = \sin v$$

и, следовательно, формулы (3.7) отображают поверхность Σ на тор Клиффорда [7, с. 13].

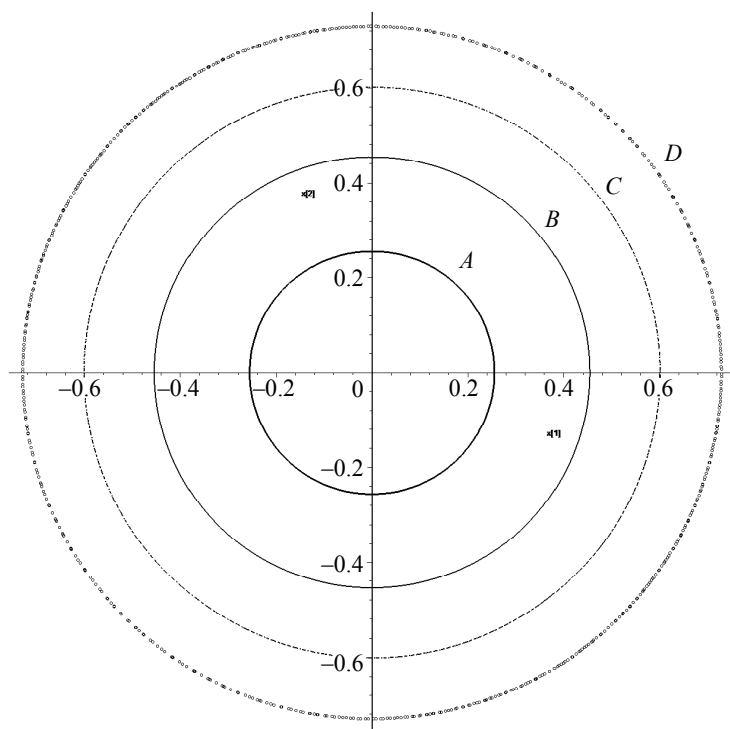


Рис. 3. Проекция на координатную плоскость x_1Ox_2 линий, высекаемых на поверхности Σ уравнениями (3.6). Линия A соответствует значению $t = 0.876$, для $B : t = 0.878$, для $C : t = 0.880$, Для $D : t = 0.882$

4. Отклонение демиквадрики от нормальной конгруэнции

Как и в [1], строим кусок гиперболического параболоида, взяв в качестве опорных прямых [1] две нормали параболоида вращения. В нашем четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ он изображается отрезком, концевые точки которого A_1, A_2 принадлежат поверхности (3.2). Нас интересует оценка близости точек отрезка $[A_1A_2]$ к поверхности, изображающей нормальную конгруэнцию параболоида вращения. Эта задача может показаться излишней ввиду [1]. Но там использована принципиально иная модель, и выводы, к которым мы придем в данном пункте, либо подтвердят ранее сделанные выводы, либо потребуют их пересмотра.

Действуем так, как в [1]. Вводим в рассмотрение плоскость Γ полярных координат (uOv) . Точки A_1, A_2 определятся из (3.2) своими радиус-векторами, полученными соответственно при $u = u_1, v = v_1$ и при $u = u_2, v = v_2$. В плоскости Γ точкам A_1, A_2 биективно соответствуют точки E_1, E_2 . причем выбор полярной

системы координат в плоскости (uOv) и полярных радиусов точек E_1 , E_2 совпадает так, как в [1], то есть приводит к соотношениям

$$u_2 = R - u_1, v_2 = -v_1.$$

Иллюстрацией служит заимствованный в [1] рис. 3.

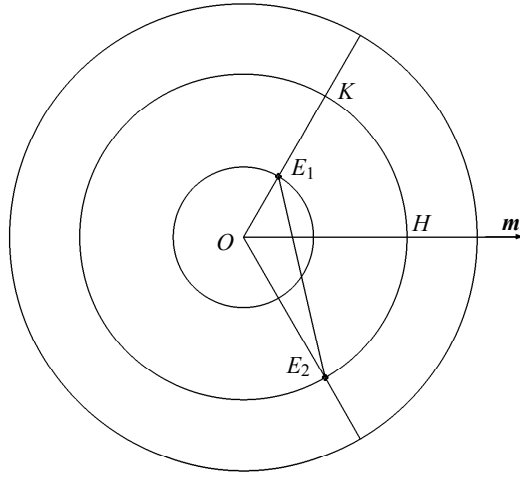


Рис. 3. Точки E_1 и E_2 на полярной плоскости.

$$\angle HOK = v, \angle HOE_2 = -v, |OE_1| = u_1, |OE_2| = 1 - u_1.$$

Тогда

$$A_1 = \left\{ \frac{u_1}{8} \cos v_1 (8 + u_1^2), \frac{u_1}{8} \sin v_1 (8 + u_1^2), \frac{u_1}{8} \cos v_1 (7 + u_1^2), \frac{u_1}{8} \sin v_1 (7 + u_1^2) \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \frac{1 - u_1}{8} \cos v_1 (8 + (1 - u_1)^2), \frac{u_1 - 1}{8} \sin v_1 (8 + (1 - u_1)^2), \right.$$

$$\left. \frac{1 - u_1}{8} \cos v_1 (7 + (1 - u_1)^2), \frac{u_1 - 1}{8} \sin v_1 (7 + (1 - u_1)^2) \right\}.$$

Радиус-вектор текущей точки отрезка $[A_1 A_2]$ имеет вид

$$L = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

где

$$a_1 = \frac{1}{8} \cos v_1 (8u_1 + u_1^3 - 19u_1 t - 2u_1^3 t + 9t + 3tu_1^2),$$

$$a_2 = \frac{1}{8} \sin v_1 (8u_1 + u_1^3 + 3u_1 t - 9t - 3tu_1^2),$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \cos v_1 (7u_1 + u_1^3 - 17u_1 t - 2u_1^3 t + 8t + 3tu_1^2),$$

$$a_4 = \frac{1}{8} \sin v_1 (7u_1 + u_1^3 + 3u_1 t - 8t - 3tu_1^2),$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

Квадрат расстояния от текущей точки отрезка $[A_1A_2]$ до текущей точки поверхности (3.2) имеет вид

$$\Psi = \sum_{i=1}^4 (r_i - a_i)^2.$$

Подробное исследование экстремумов этой функции весьма затруднительно, если проводить его в символьном виде. Вместо этого мы, действуя как в [1], проведем численную оценку верхних значений наименьших расстояний для вполне правдоподобных ситуаций.

**Верхние оценки максимальных значений функции Ψ
при различных значениях параметров u_1, v_1, t**

	Меньший радиус $u_1 = \frac{1}{8}$			Меньший радиус $u_1 = \frac{1}{6}$		
t	$v_1 = \frac{\pi}{8}$	$v_1 = \frac{\pi}{8}$	$v_1 = \frac{\pi}{7}$	$v_1 = \frac{\pi}{3}$	$v_1 = \frac{\pi}{7}$	$v_1 = \frac{\pi}{3}$
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.03501	0.00000	0.01962
1/8	0.00002	0.00001	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002
1/4	0.00006	0.00004	0.00004	0.00006	0.00006	0.00008
3/8	0.00010	0.00007	0.00007	0.00011	0.00011	0.00015
1/2	0.00013	0.00008	0.00009	0.00015	0.00013	0.00019
5/8	0.00012	0.00008	0.00008	0.00015	0.00012	0.00018
3/4	0.00008	0.00005	0.00006	0.00010	0.00008	0.00013
7/8	0.00003	0.00002	0.00002	0.00004	0.00003	0.00004
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Продолжение таблицы

	Меньший радиус $u_1 = \frac{1}{4}$			Меньший радиус $u_1 = \frac{1}{3}$		
t	$v_1 = \frac{\pi}{8}$	$v_1 = \frac{\pi}{7}$	$v_1 = \frac{\pi}{8}$	$v_1 = \frac{\pi}{7}$	$v_1 = \frac{\pi}{3}$	$v_1 = \frac{\pi}{3}$
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1/8	$0.502 \cdot 10^{-5}$	$0.535 \cdot 10^{-5}$	$0.161 \cdot 10^{-5}$	$0.181 \cdot 10^{-5}$	$0.229 \cdot 10^{-5}$	$0.675 \cdot 10^{-5}$
1/4	0.00002	0.00002	$0.522 \cdot 10^{-5}$	$0.600 \cdot 10^{-5}$	0.00001	0.00003
3/8	0.00003	0.00003	$0.892 \cdot 10^{-5}$	0.00001	0.00003	0.00006
1/2	0.00003	0.00004	0.00001	0.00001	0.00004	0.00008
5/8	0.00003	0.00004	0.00001	0.00001	0.00005	0.00009
3/4	0.00002	0.00002	$0.699 \cdot 10^{-5}$	$0.849 \cdot 10^{-5}$	0.00004	0.00007
7/8	$0.741 \cdot 10^{-5}$	$0.833 \cdot 10^{-5}$	$0.250 \cdot 10^{-5}$	$0.306 \cdot 10^{-5}$	0.00001	0.00002
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

5. Отклонение главных нормалей линии L от нормалей параболоида

Здесь используются те же величины, что и в пункте 4: меньший радиус u_1 , больший радиус $u_2 = R - u_1$, а также половина угла расхождения радиус-векторов проекций пары точек на координатную плоскость xOy . Главный параметр – угол ψ в радианах между главной нормалью исследуемой линии и нормалью параболоида в соответствующей точке. Опуская вычислительные детали (они весьма сложны), приводим итоговый рис. 4.

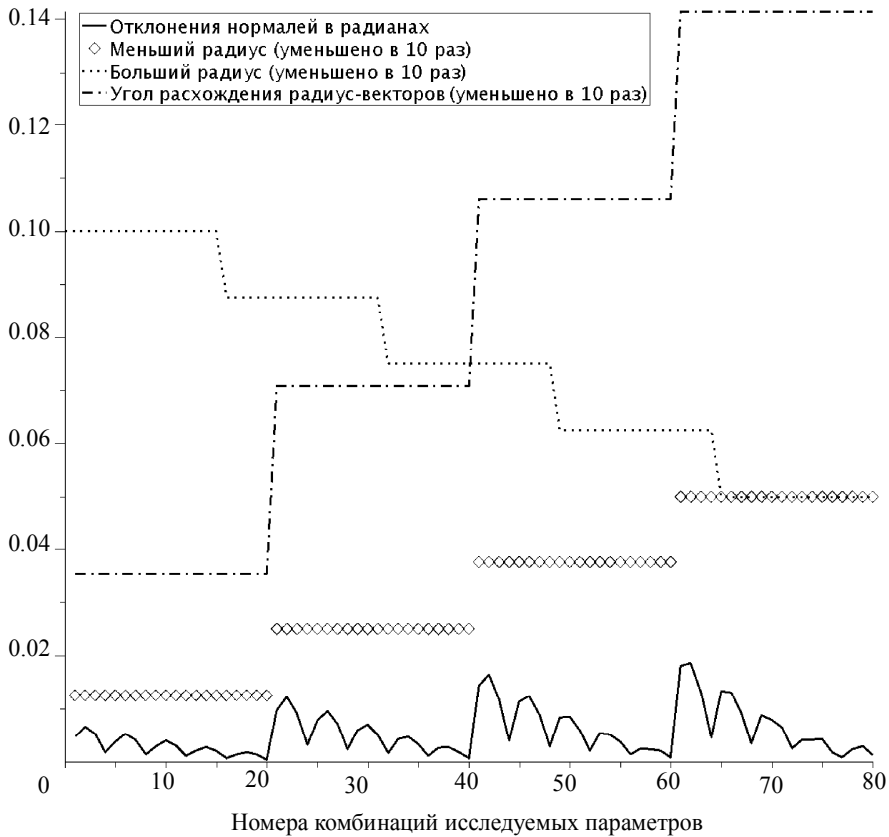


Рис. 4. Влияние параметров u_1 , u_2 , v_1 на величину ψ

На основании графика можно заключить, что от чего бы ни зависело поведение переменной ψ , размах колебаний (а они не уменьшались в 10 раз) позволяет надеяться на такое отклонение нормалей исследуемой линии от нормалей параболоида, которое оправдывает использование указанных линий (в разумных пределах) вместо геодезических линий параболоида вращения.

6. SG-линии

Линии, о которых идет речь в этой и предыдущей статьях, суть линии пересечения параболоида вращения с демиквадрикой, для которой двумя прямыми служат нормали параболоида. Как мы выяснили, эти линии довольно хорошо воспроизводят свойства геодезических, не являясь на самом деле таковыми. Автору показалось уместным присвоить этим линиям обозначение SG-линии (от английского *Substitute Geodesic*).

Вообще, удобный исходный материал для демиквадрики – пространственный четырехугольник [8]. Действительно, пусть $(A_1 A_2 B_2 B_1)$ – пространственный четырехугольник. Пусть

$$M = (1-t)A_1 + tA_2, \quad N = (1-t)B_1 + tB_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, при $t \in \mathbb{R}$ прямые MN заполняют демиквадрику, включающую прямые $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$, а при $0 \leq t \leq 1$ получаем часть демиквадрики, ограниченную этими прямыми.

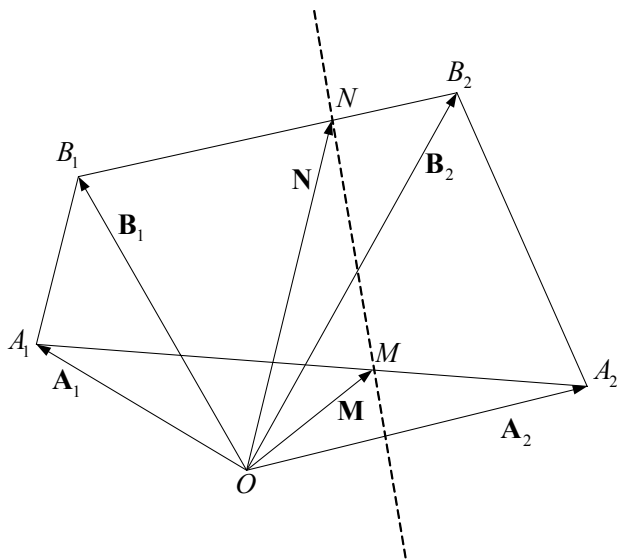


Рис. 5. Схема построения демиквадрики
по пространственному четырехугольнику $(A_1 A_2 B_2 B_1)$

Обозначим демиквадрику, построенную на пространственном четырехугольнике $(A_1 A_2 B_2 B_1)$ символом $D(A_1 A_2 B_2 B_1)$, а параболоид – символом P . Тогда SG-линия есть $P \cap D(A_1 A_2 B_2 B_1)$. При этом произвол в отыскании SG-линии не столь велик. Точки A_1, A_2 – те точки параболоида, которые предполагается соединить SG-линией. Прямые $A_1 B_1, A_2 B_2$ направлены по нормальям параболоида в точках A_1, A_2 . Кроме того, если выбор точек B_1, B_2 уже совершен, то заменяя их на точки C_1, C_2 так, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\overline{A_1 C_1} = \lambda \overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 C_2} = \lambda \overline{A_2 B_2}$ и получим ту же самую демиквадрику.

Один из безусловно естественных способов определения положения точек B_1, B_2 сводится к помещению их в плоскость $z = 0$. Тогда ситуация передается рис. 6. Точки A_1, A_2 лежат на параболоиде. Точки B_1, B_2 суть точки пересечения нормалей параболоида в точках A_1, A_2 с плоскостью $z = 0$. Поверхность $(A_1 A_2 B_2 B_1)$ – кусок демиквадрики $D(A_1 A_2 B_2 B_1)$, а линия L (линия пересечения демиквадрики с параболоидом) есть SG-линия.

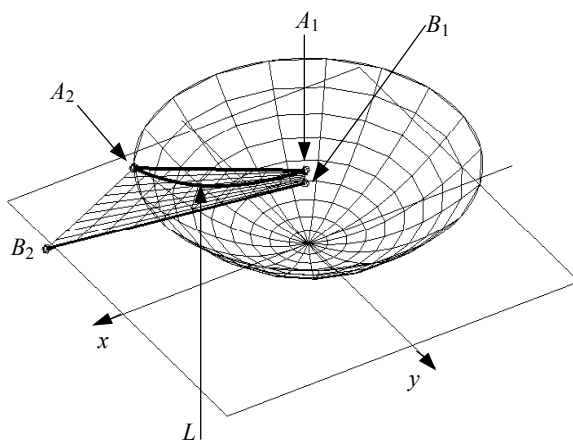


Рис. 6. SG-линия – один из вариантов (отрезок $[B_1 B_2]$ в плоскости xOy)

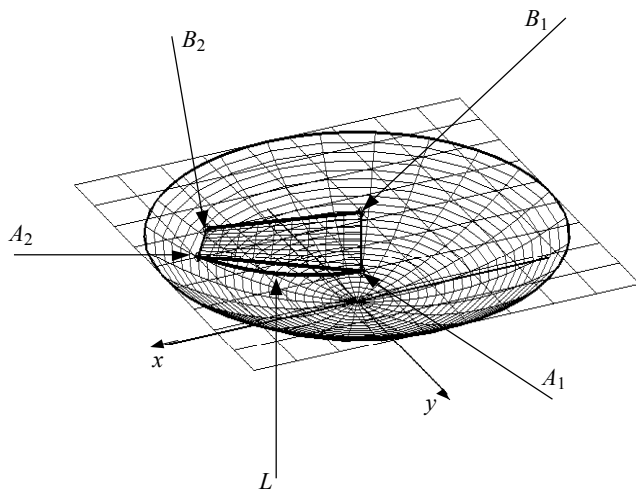


Рис. 7. SG-линия – иной вариант (отрезок $[B_1 B_2]$ в плоскости $z = \frac{F}{4}$).

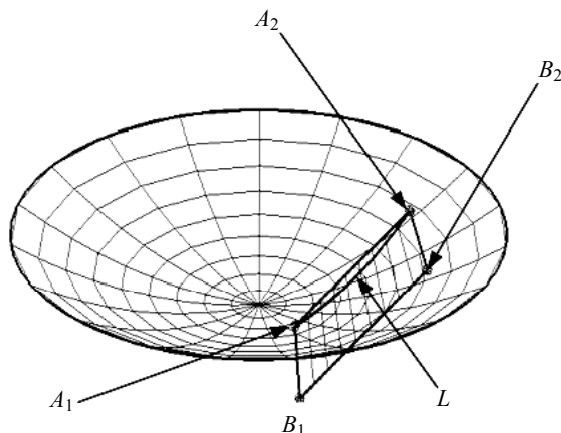


Рис. 8. SG-линия. Отрезки A_1B_1 , A_2B_2 одинаковой длины отложены на нормалях параболоида в соответствующих точках A_1 и A_2

Если не применять искусственное сокращение числа параметров, то SG-линия определяется заданием величин F , u_1 , v_1 , u_2 , v_2 . Уравнение SG-линии при переменных указанных величинах чрезвычайно сложно. Автором разработана программа, которая при заданных значениях перечисленных пяти параметров составляет вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, годографом которой является искомая SG-линия. Если параболоид задан не вектор-функцией (3.1), а уравнением

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}, \quad (6.1)$$

то SG-линия определится набором значений F , x_1 , y_1 , x_2 , y_2 .

7. Сравнение с геодезической линией

Сопоставление SG-линий и геодезических линий параболоида уже проведено выше (в данной статье и в [1]). Но это сопоставление в очевидном смысле косвенное. Прямое же сравнение в общем случае затруднено хотя бы тем, что уравнения SG-линий при произвольных определяющих её параметрах чрезвычайно громоздко. Однако вполне осуществим следующий вычислительный эксперимент. Указав на параболоиде точку A_1 и касательное направление в этой точке, решаем задачу Коши для дифференциальных уравнений геодезической. Для полученного решения $u = u(t)$, $v = v(t)$ указываем промежуток изменения параметра t от 0 до некоей константы t_1 . Точку на параболоиде, для которой $t = t_1$, считаем точкой A_2 . Для пары точек A_1, A_2 строим SG-линию (ради определенности – по схеме рис. 8). Сравниваются длина геодезической (вычисленная, разумеется, приближенно) с длиной SG-линии (тоже вычисленной приближенно). Эксперимент фрагментарен, но, по крайней мере, в случае успеха поддерживает гипотезу о близости линий.

Дифференциальные уравнения, определяющие геодезические линии на достаточно гладкой поверхности, хорошо известны (например, [9]) и здесь не приво-

дятся. Параболоид задаем уравнением (6.1) – там, где это удобно. В ином случае – вектор-функцией (3.1). В этом случае линия на параболоиде задается параметрически:

$$u = u(t), v = v(t), \quad (7.1)$$

а дифференциальные уравнения геодезических имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} u(t) &= - \frac{u(t) \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right)}{4F^2 + (v(t))^2 + (u(t))^2}, \\ \frac{d^2}{dt^2} v(t) &= - \frac{v(t) \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right)}{4F^2 + (v(t))^2 + (u(t))^2}. \end{aligned}$$

Для приближенного решения данной системы с помощью системы Maple в виде отрезка ряда Тейлора полагаем

$$u(0) = 0.2; \quad v(0) = 0.2; \quad u'(0) = 0.5; \quad v'(0) = -0.25.$$

Приближенные значения искомых функций

$$\begin{aligned} u(t) &\approx 0.2000 + 0.5000t - 0.0005t^2 - 0.0004t^3 + 0.1624 \cdot 10^{-5}t^4 + \\ &+ 0.1283 \cdot 10^{-5}t^5 - 0.8592 \cdot 10^{-8}t^6 - 0.5625 \cdot 10^{-8}t^7 + 5.2480 \cdot 10^{-11}t^8 + \\ &+ 2.8743 \cdot 10^{-11}t^9 - 3.4329 \cdot 10^{-13}t^{10} - 1.6046 \cdot 10^{-13}t^{11}, \\ v(t) &\approx 0.2000 - 0.2500t - 0.0005t^2 + 0.0002t^3 + 0.6722 \cdot 10^{-6}t^4 - \\ &- 0.6461 \cdot 10^{-6}t^5 - 0.1334 \cdot 10^{-8}t^6 + 0.2845 \cdot 10^{-8}t^7 + 5.276 \cdot 10^{-13}t^8 - \\ &- 1.459 \cdot 10^{-11}t^9 + 2.848 \cdot 10^{-14}t^{10} + 8.175 \cdot 10^{-14}t^{11}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Пусть

$$0 \leq t \leq 8.$$

Тогда, согласно (7.2), (7.1) и (3.1),

$$A_1(0.2000, 0.2000, 0.0050), \quad A_2(3.9986, -1.7409, 1.1887). \quad (7.3)$$

Длина геодезической линии $[A_1 A_2]$ равна (приближенно)

$$4.47181517.$$

Для той же пары точек (7.3) находим параметрические уравнения SG-линии, длина её (приближенно) составляет

$$4.47181558.$$

Разница длин (в процентах) оценивается величиной

$$0.91014 \cdot 10^{-5} \, \%.$$

8. Заключение

Соображения, приведенные в [1] и в настоящей работе, позволяют считать полезным использование SG-линий в теории и практике раскроя сетеполотна для параболических рефлекторов вне зависимости от их типа (осесимметричный либо офсетный). Примеры такого использования – в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтыак М.С. Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 5–19.
2. Картан Э. Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства. М.; Л., 1933. 72 с.
3. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ НКТП, ГТТЛ, 1937. 263 с.
4. де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956. 250 с.
5. Бухтыак М.С. Об одном перенесении // Геометрический сборник. Вып. 20. Томск: ТГУ, 1979. С. 44–51.
6. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979. Т. 2. 1103 с.
7. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2011. V. 4. No. 1. 64 p.
8. <http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/mline.htm>
9. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.

Статья поступила 01.09.2015 г.

Bukhtyak M.S. LINES CLOSE TO GEODETIC LINES ON A PARABOLOID

DOI 10.17223/19988621/38/1

The problem posed in [1] has been completely solved. Properties of the line at which a paraboloid of revolution intersects a demiquadric are updated with facts convincing that the selected approach is feasible for constructing lines lying on the paraboloid, close to geodesic lines, and having properties comfortable enough to use them as tailoring lines of a metallic mesh. The main result is a demonstration of proximity of principal normals of the identified lines (they are called SG-lines) and geodesic lines.

Keywords: paraboloid, geodesic line, normal congruence, demiquadrics, ruled space.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. Normal'naya kongruentsiya paraboloida. Demikvadriki. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 5(37), pp. 5–19. (in Russian)
2. Kartan E. *Metod podvizhnogo repere, teoriya nepreryvnykh grupp i obobshchennye prostranstva*. Moscow, Leningrad, 1933. 72 p. (in Russian)
3. Finikov S.P. *Proektivno-differentsial'naya geometriya*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP Publ., GTTL Publ., 1937. 263 p. (in Russian)
4. de Ram Zh. *Differentsiruemye mnogoobraziya*. Moscow, IL Publ., 1956. 250 p. (in Russian)
5. Bukhtyak M.S. Ob odnom perenesenii. *Geometricheskii sbornik*. Vyp. 20. Tomsk, TGU Publ., 1979, pp. 44–51. (in Russian)
6. *Matematicheskaya entsiklopediya*. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1979, vol. 2. 1103 p. (in Russian)
7. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2011, vol. 4, no. 1. 64 p.
8. <http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/mline.htm>
9. Rashevskiy P.K. *Kurs differentsial'noy geometrii*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1950. 428 p. (in Russian)

УДК 512.541.32

DOI 10.17223/19988621/38/2

С.Я. Гриншпон, С.Л. Фуксон

ОТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ
В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЕ $\mathbb{Q}_+$

В марте 2013 года International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences опубликовал статью «Perpendicularity in an Abelian Group». Основная цель статьи – введение понятия бинарного отношения ортогональности в произвольной абелевой группе. Данная работа посвящена ортогональностям в мультипликативной группе $\mathbb{Q}_+$. Нами найдены два способа построения бесконечного множества новых ортогональностей $\mathbb{Q}_+$, а также установлена связь между известными ранее и полученными нами ортогональностями $\mathbb{Q}_+$.

Ключевые слова: ортогональность, абелева группа, отношение делимости в $\mathbb{Q}_+$, свободная абелева группа.

Всё больше геометрические понятия проникают в пространство изучения алгебры. Отношение ортогональности в различных алгебраических структурах вызывает интерес математиков. Так, например, Davis изучает ортогональность в кольцах [1], им также предложен интересный подход к введению ортогональности в абелевых группах [2]. О понятии ортогональности в орторешётках см. [3] и [4]. Ортогональность элементов определяется также в любой l -группе (то есть в группе, на которой можно задать структуру решётки, согласованную с операцией в группе) [5]. В [5] отмечается, что понятие ортогональности играет важную роль во всей теории l -групп. В [6] полностью исследованы ортогональности в прямых суммах циклических групп вида $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где p – простое число. Цель данной работы – получить некоторые результаты об ортогональностях мультипликативной абелевой группы положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$.

В [7] Naukkanen и другие вводят понятие ортогональности в абелевой группе с помощью аксиом, которые оказываются вполне естественными, если придать им геометрическую интерпретацию.

Пусть $G = (G, +)$ – аддитивная абелева группа. Пусть $\perp$ – бинарное отношение в G , удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(A1) \quad \forall a \in G : \exists b \in G : a \perp b,$$

$$(A2) \quad \forall a \in G \setminus \{0\} : a \not\perp a,$$

$$(A3) \quad \forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a,$$

$$(A4) \quad \forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b + c),$$

$$(A5) \quad \forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b.$$

Отношение $\perp$ называется ортогональностью в G [7].

Так как в настоящей работе будет рассматриваться мультипликативная группа, то аксиомы (A2), (A4), (A5) лучше переписать в следующем виде:

$$(A2) \quad \forall a \in G \setminus \{1\} : a \not\perp a,$$

$$(A4) \quad \forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b \cdot c),$$

$$(A5) \quad \forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp b^{-1}.$$

Авторы [7] приводят различные примеры ортогональностей, исследуют ортогональности циклической группы $\mathbb{Z}_n$ и строят некоторые ортогональности мультипликативной группы $\mathbb{Q}_+$, где $\mathbb{Q}_+$ – множество положительных рациональных чисел. Авторы утверждают, что группа $\mathbb{Q}_+$ обладает, как минимум, тремя ортогональностями и затем изучают их взаимосвязи. В настоящей статье мы приводим доказательства некоторых результатов, сформулированных в [7], показываем, что авторами [7] была допущена ошибка при построении одной из трёх ортогональностей, а также строим двумя способами бесконечное множество новых ортогональностей $\mathbb{Q}_+$.

1. Известные ортогональности в $\mathbb{Q}_+$

Пусть $\mathbb{P}$ – множество простых чисел.

Очевидно, что любое рациональное положительное число может быть записано в виде

$$c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(c)},$$

где $v_p(c) \in \mathbb{Z}$ для каждого $p \in \mathbb{P}$ и лишь конечное число из них ненулевые. Если $v_p(c) \neq 0$, то p – простой множитель c .

Рассмотрим множество S всех последовательностей $(n_2, n_3, \dots, n_p, \dots)$, где индекс пробегает множество простых чисел и каждое $n_p \in \mathbb{Z}$. На множестве S определим операцию почленного сложения. Получаем аддитивную группу $\langle S; + \rangle$. $\langle S; + \rangle$ – свободная абелева группа счётного ранга [8, т. 1, с. 89]. С каждым элементом группы $\mathbb{Q}_+$ связана последовательность целых чисел из S . Так, числу c ставится в соответствие последовательность $(v_2(c), v_3(c), \dots, v_p(c), \dots)$.

В [7] приводятся без доказательства следующие утверждения (предложение 1, теорема 3, теорема 5). Приведём эти утверждения и их доказательства.

Предложение 1. Отображение $f : c \rightarrow (v_2(c), v_3(c), \dots, v_p(c), \dots)$ является изоморфизмом группы $\langle \mathbb{Q}_+; \cdot \rangle$ на группу $\langle S; + \rangle$.

Доказательство. 1) Очевидно, что каждый элемент из $\langle S; + \rangle$ является образом элемента из $\langle \mathbb{Q}_+; \cdot \rangle$.

2) Разные элементы $\langle \mathbb{Q}_+; \cdot \rangle$ переводятся в разные элементы $\langle S; + \rangle$, поскольку разные рациональные числа имеют либо разные простые множители, либо разные показатели при этих множителях.

3) Покажем, что f сохраняет операцию. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}_+$, тогда

$$\begin{aligned} a &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}, \quad b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(b)}. \\ f(a \cdot b) &= f\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a) + v_p(b)}\right) = (v_2(a) + v_2(b), \dots, v_p(a) + v_p(b), \dots) = \\ &= (v_2(a), \dots, v_p(a), \dots) + (v_2(b), \dots, v_p(b), \dots) = f(a) + f(b). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Каждый элемент S часто называют вектором.

Определение 2[7]. Скалярным произведением чисел a и b будем называть скалярное произведение векторов $f(a)$ и $f(b)$:

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b).$$

Определим $|c|$, положив $v_p(|c|) = |v_p(c)|$ для всех $p \in \mathbb{P}$ [7].

Определим бинарное отношение $\perp_1$ следующим образом:

$$a \perp_1 b \Leftrightarrow \langle |a|, |b| \rangle = 0 \quad [7].$$

Теорема 3. Отношение $\perp_1$ является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство.

(A1) В роли b достаточно взять $b = 1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot \dots \cdot p^0 \cdot \dots$,

$$f(|b|) = (0, 0, \dots) \Rightarrow \forall a \in G \left(\langle |a|, |b| \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| \cdot 0 = 0 \right).$$

$$(A2) \quad \langle |a|, |a| \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall p v_p(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$(A3) \quad \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(b)| |v_p(a)| = 0.$$

$$(A4) \quad \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p (v_p(a) = 0 \vee v_p(b) = 0),$$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(c)| = 0 \Rightarrow \forall p (v_p(a) = 0 \vee v_p(c) = 0),$$

следовательно, $\sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b \cdot c)| = 0$.

$$(A5) \quad \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p (|v_p(a)| = 0 \vee |v_p(b)| = 0).$$

$$|v_p(b)| = 0 \Rightarrow |v_p(b^{-1})| = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b^{-1})| = 0.$$

Таким образом, бинарное отношение $\perp_1$ является ортогональностью группы

$\mathbb{Q}_+$. $\blacksquare$

Пример 4. Пусть $a = \frac{49}{50}$, $b = \frac{1}{3}$.

$$a = 2^{-1} \cdot 5^{-2} \cdot 7^2, \quad b = 3^{-1},$$

$$|a| = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 2450, \quad |b| = 3^1 = 3,$$

$$f(a) = (-1, 0, -2, 2, 0, 0, \dots), \quad f(b) = (0, -1, 0, 0, \dots),$$

$$f(|a|) = (1, 0, 2, 2, 0, 0, \dots), \quad f(|b|) = (0, 1, 0, 0, \dots),$$

$$\langle |a|, |b| \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 + \dots = 0.$$

Таким образом, $\frac{49}{50} \perp_1 \frac{1}{3}$.

Теорема 5. Бинарное отношение $\perp_2$, определённое как

$$a \perp_2 b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0,$$

является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство. Аксиомы (A1), (A2), (A3) проверяются аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 3. Покажем справедливость аксиом (A4) и (A5).

$$(A4) \quad a \perp_2 b \wedge a \perp_2 c \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(c) = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b \cdot c) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) (v_p(b) + v_p(c)) = \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) + \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(c) = 0. \end{aligned}$$

$$(A5) \quad a \perp_2 b \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = 0 \Rightarrow -\sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = 0 \Rightarrow a \perp_2 b^{-1}.$$

В силу справедливости аксиом (A1) – (A5), отношение $\perp_2$ является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$. ■

Пример 6. $6 \perp_2 \frac{2}{3}$, однако $6 \not\perp_1 \frac{2}{3}$.

$$6 = 2^1 \cdot 3^1, \quad \frac{2}{3} = 2^1 \cdot 3^{-1},$$

$$\left\langle 6, \frac{2}{3} \right\rangle = 0 \Rightarrow 6 \perp_2 \frac{2}{3},$$

$$\left\langle |6|, \left| \frac{2}{3} \right| \right\rangle = 2 \neq 0 \Rightarrow 6 \not\perp_1 \frac{2}{3}.$$

Последняя ортогональность группы $\mathbb{Q}_+$, указанная в [7], связана с работой Eugeni и Rizzi [3]. В этой работе авторы определяют отношение делимости в $\mathbb{Q}_+$ следующим образом:

$$\frac{n}{v} \gamma \frac{m}{u} \Leftrightarrow n \mid m \wedge v \mid u.$$

Замечание 7 [3]. Для любых двух чисел $a, b \in \mathbb{Q}_+$ существует $\text{НОД}_\gamma(a, b)$, такой, что

$$d = \text{НОД}_\gamma\left(\frac{m}{u}, \frac{n}{v}\right) = \frac{\text{НОД}(m, n)}{\text{НОД}(u, v)}.$$

Авторы [7] определяют отношение $\perp_{ER}$ следующим образом:

$$a \perp_{ER} b \Leftrightarrow \text{НОД}_\gamma(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(m, n) = \text{НОД}(u, v) = 1.$$

В [7] утверждается, что $\perp_{ER}$ – ортогональность. Однако, проверяя, является ли $\perp_{ER}$ ортогональностью, мы приходим к противоречию с аксиомой (A5): из того, что $a = \frac{m}{u}$, $b = \frac{n}{v}$, $\left(b^{-1} = \frac{v}{n}\right)$ и $(m, n) = (u, v) = 1$, не всегда следует $(m, v) = (u, n) = 1$.

Пример 8. Пусть $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{3}{16}$ ($b^{-1} = \frac{16}{3}$).

$$\text{НОД}_\gamma\left(\frac{2}{9}, \frac{3}{16}\right) = 1 \Rightarrow a \perp_{ER} b$$

Однако $\text{НОД}_\gamma\left(\frac{2}{9}, \frac{16}{3}\right) \neq 1 \Rightarrow a \not\perp_{ER} b^{-1}$.

2. Новые способы построения ортогональности в $\mathbb{Q}_+$

Нам удалось построить бесконечное множество ортогональностей мультипликативной группы $\mathbb{Q}_+$ следующими двумя способами.

Рассмотрим произвольную последовательность положительных действительных чисел $K = \{k_i\}$. Обозначим через p_i i -е простое число. Для любых $a, b \in \mathbb{Q}_+$ можно составить следующую сумму:

$$s_{a,b} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b),$$

где лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Зададим отношение $\perp_K$ следующим образом:

$$a \perp_K b \Leftrightarrow s_{a,b} = 0.$$

Теорема 9. Для произвольной последовательности $K = \{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ положительных действительных чисел отношение $\perp_K$ – ортогональность в $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную последовательность $\{k_i\}$.

(A1) Достаточно положить $b = 1$. Тогда

$$\forall a \in G, s = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(1) = 0.$$

(A2) Так как $\forall i \ k_i > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$(A3) \quad \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(b) \cdot v_{p_i}(a) = 0.$$

$$(A4) \quad a \perp_K b \wedge a \perp_K c \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(c) = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b \cdot c) &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot (v_{p_i}(b) + v_{p_i}(c)) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(c) = 0. \end{aligned}$$

$$(A5) \quad a \perp_K b \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b^{-1}) = - \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow a \perp_K b^{-1}.$$

Таким образом, отношение $\perp_K$ является ортогональностью в $\mathbb{Q}_+$.

Пример 10. Пусть $K = \{n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a = \frac{24}{625} = \frac{2^3 \cdot 3}{5^4}, \quad b = 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1,$$

$$f(a) = (3, 1, -4, 0, \dots), \quad f(b) = (2, 3, 1, 0, \dots),$$

$$s_{a,b} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \cdot 1 = 0.$$

Тогда

$$a \perp_K b.$$

Рассмотрим второй способ построения бесконечного множества ортогональностей $\mathbb{Q}_+$. Пусть числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$ такие, что для любых $s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выполняется

$$r_1^s \neq r_2^t.$$

Для любых $a, b \in \mathbb{Q}_+$ положим

$$\begin{aligned} a \perp_{r_1, r_2} b &\Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (a = r_1^u \wedge b = r_2^v) \vee (a = r_2^v \wedge b = r_1^u) \vee \\ &a = 1 \vee b = 1. \end{aligned}$$

Теорема 11. Отношение $\perp_{r_1, r_2}$ — ортогональность в $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство. Проверим справедливость аксиом (A1) – (A5).

(A1) Положим $b = 1$. Из определения отношения $\perp_{r_1, r_2}$ следует, что для любого a справедливо $a \perp_{r_1, r_2} 1$.

(A2) Если предположить, что $a \perp_{r_1, r_2} a$ и $a \neq 1$, то $a = r_1^u = r_2^v$, однако

$$r_1^s \neq r_2^t \text{ ни для каких } s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(A3) очевидно.

$$(A4) \ a \perp_{r_1, r_2} b \Rightarrow a = r_1^u, b = r_2^v,$$

$$a \perp_{r_1, r_2} c \Rightarrow a = r_1^u, c = r_2^w.$$

Тогда

$$b \cdot c = r_2^v \cdot r_2^w = r_2^{v+w} \Rightarrow a \perp_{r_1, r_2} (b \cdot c).$$

$$(A5) \ a \perp_{r_1, r_2} b \Rightarrow a = r_1^u, b = r_2^v,$$

$$b^{-1} = r_2^{-v} \Rightarrow a \perp_{r_1, r_2} b^{-1}.$$

Таким образом, отношение $\perp_{r_1, r_2}$ – ортогональность в $\mathbb{Q}_+$.

Пример 12. Пусть $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{3}{5}$. Заметим, что для любых $s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выполняется $r_1^s \neq r_2^t$. Предполагая противное, получаем, что для некоторых $s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^s = \left(\frac{3}{5}\right)^t$ или $2^s \cdot 3^{-s} = 3^t \cdot 5^{-t}$, что невозможно.

$$1) \text{ Пусть } a = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad b = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2;$$

тогда $a \perp_{r_1, r_2} b$.

$$2) \text{ Пусть } a = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad b = \frac{27}{125} = \left(\frac{3}{5}\right)^3;$$

тогда $a \perp_{r_1, r_2} b$.

3. Связь ортогональностей в $\mathbb{Q}_+$

В данном разделе мы ответим на вопрос, как ортогональности, описанные выше, соотносятся друг с другом.

Обозначим через R объединение всех $\perp_{r_1, r_2}$ ортогональностей, а через D – объединение всех $\perp_K$ ортогональностей. Имеет место следующая

Теорема 13. Всякая ортогональность $\mathbb{Q}_+$ содержится в R .

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}_+$, $a \perp b$. Покажем, что существуют $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющие условию $\forall s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} (r_1^s \neq r_2^t)$, что $a \perp_{r_1, r_2} b$.

В роли r_1 достаточно взять a , а r_2 принять равным b . Тогда при $u = v = 1$ $a = r_1^u$ и $b = r_2^v$, а значит, $a \perp_{r_1, r_2} b$. Заметим, что $a^s \neq b^t$, используя предложение 1(d) из [7], имеем $a \perp b \Rightarrow a^s \perp b^t$. В силу антирефлексивности отношения ортогональности $a^s \neq b^t$. ■

Следствие 14. Объединение всех ортогональностей $\mathbb{Q}_+$ совпадает с R .

Докажем теорему о связи ортогональностей.

Теорема 15. Имеют место следующие включения:

$$\perp_1 \subset \perp_2 \subset D \subset R,$$

причём каждое из включений является строгим.

Доказательство. 1) Докажем $\perp_1 \subset \perp_2$.

Пусть $a \perp_1 b$.

$$a \perp_1 b \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p (v_p(a) = 0 \vee v_p(b) = 0) \Rightarrow$$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = 0 \Rightarrow a \perp_2 b.$$

Пример 6 иллюстрирует, что обратное включение не имеет места, а значит, включение $\perp_1 \subset \perp_2$ является строгим.

2) Докажем включение $\perp_2 \subset D$.

Пусть $a \perp_2 b$. Покажем, что найдётся такая последовательность $K = \{k_i\}$, что $a \perp_K b$.

$$a \perp_2 b \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = 0 \Rightarrow \exists \{k_i\} : \sum_{i=1}^{\infty} k_i v_{p_i}(a) v_{p_i}(b) = 0, \text{ в частности, при } \{k_i\} = \{1\} \quad a \perp_K b.$$

Для доказательства того, что $D \not\subset \perp_2$, приведём пример.

Пример 16. Пусть $K = \{k_i\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^9, \quad b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2},$$

$$f(a) = (1, 2, 9, 0, \dots), \quad f(b) = (4, 2, -2, 0, \dots),$$

$$s_{a,b} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot (-2) = 0,$$

следовательно, $a \perp_K b$. Заметим, что $a \not\perp_2 b$, а значит, включение $\perp_2 \subset D$ строгое.

3) $D \subset R$ в силу теоремы 13. Обратное включение неверно.

Так, например, пусть $r_1 = \frac{2}{9}$, $r_2 = \frac{2}{5}$ ($\forall s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : r_1^s \neq r_2^t$).

Пусть $a = r_1 = \frac{2}{9}$, $b = r_2 = \frac{2}{5}$, тогда $a \perp_{r_1, r_2} b$, так как $a = r_1^1$, $b = r_2^1$.

Однако, так как $f(a) = (1, -2, 0, 0, \dots)$, $f(b) = (1, 0, -1, 0, \dots)$, то ни при какой последовательности $K = \{k_i\}$, где каждый её член строго больше нуля,

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} k_i v_p(a) v_p(b) \neq 0 \Rightarrow a \not\perp_K b.$$

Таким образом, включение $D \subset R$ строгое.

Каждое из включений обосновано, теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis G. Rings with orthogonality relation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. V. 4. P. 163–178.
2. Davis G. Orthogonality relation on abelian groups // Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. 1975. V. 19. P. 173–179.
3. Eugeni F., Rizzi B. An incidence algebra on rational numbers // Rendiconti di Matematica. 1979. V. 12.

4. Birkhoff G. Lattice theory. Rhode Island: Providence, 1965.
5. Копытов В.М. Решёточно-упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
6. Фуксон С.Л. Ортогональности группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 46–54.
7. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J. K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. V. 13.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.

Статья поступила 27.09.2015 г.

Grinshpon S.Ya., Fukson S.L. ORTHOGONALITIES IN THE MULTIPLICATIVE GROUP $\mathbb{Q}_+$

DOI 10.17223/19988621/38/2

The relation of orthogonality in various algebraic structures arouses the interest of mathematicians. For example, Davis proposed an interesting approach to the introduction of orthogonality in Abelian groups (Orthogonality relation on Abelian groups. Journal of the Australian Mathematical Society. Series A, vol. 19, 1975); F. Eugeni, B. Rizzi (An incidence algebra on rational numbers. Rendiconti di Matematica, vol. 12, 1979) and G. Birkhoff (Lattice theory. Providence. Rhode Island, 1965) explored orthogonality in ortholattices; Kopytov V.M. (Lattice-Ordered Groups, Nauka, Moscow, 1984) notes that the concept of orthogonality plays an important role in the whole theory of l-groups.

Haukkanen and others (Perpendicularity in an Abelian group. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 13, 2013) introduced the concept of orthogonality in an Abelian group with the help of axioms.

The purpose of the present paper is to get some results about orthogonality in the multiplicative Abelian group of positive rational numbers. We describe the known orthogonality and show that one of the relations of that was introduced in the article of Haukkanen is not an orthogonality. We construct an infinite set of new orthogonality in by two different ways.

Keywords: orthogonality, Abelian group, divisibility in $\mathbb{Q}_+$, free Abelian group.

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

FUKSON Sof'ya Leonidovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: fouk.son.ya@gmail.com

REFERENCES

1. Davis G. Rings with orthogonality relation. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1971, vol. 4, pp. 163–178.
2. Davis G. Orthogonality relation on abelian groups. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A*, 1975, vol. 19, pp. 173–179.
3. Eugeni F., Rizzi B. An incidence algebra on rational numbers. *Rendiconti di Matematica*, 1979, vol. 12.
4. Birkhoff G. *Lattice theory*. Rhode Island, Providence, 1965.
5. Kopytov V.M. *Reshetочно-uporyadochennyye gruppy*. Moscow, Nauka Publ., 1984. (in Russian)
6. Fukson S.L. Ortogonal'nosti gruppy $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 4(36), pp. 46–54. (in Russian)
7. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2013, vol. 13.
8. Fuks L. *Beskonechnyye abelevyye gruppy, vol. 1*. Moscow, Mir Publ., 1974. 335 p. (in Russian)

УДК 512.543

DOI 10.17223/19988621/38/3

А.И. Забарина, У.А. Гусельникова, Е.А. Фомина

О КОММУТИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ГРУППЫ

Изучены некоторые свойства тривиально коммутирующих и нетривиально коммутирующих элементов группы. Установлена их связь с множеством инволюций группы. Показано, что множество нетривиально коммутирующих элементов конечной группы образует коммутативный нормальный делитель. Исследован вопрос о мощности множества тривиально коммутирующих элементов конечных и обобщённо диэдральных групп.

Ключевые слова: группа, инволюция, коммутирующий элемент, сопряжённый элемент, обобщённо диэдральная группа.

Работа над одной из задач IV студенческой олимпиады по алгебре Московского государственного университета (2009 год) стала началом небольшого исследования свойств коммутирующих элементов произвольной группы.

1. Определения и простейшие свойства тривиально коммутирующих и нетривиально коммутирующих элементов

Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ есть произвольная неединичная группа.

Определение 1. Элемент g называется *тривиально коммутирующим*, если он не коммутирует ни с каким элементом, кроме самого себя и единицы [1].

Определение 2. Элемент, не являющийся *тривиально коммутирующим*, будем называть *нетривиально коммутирующим*.

Очевидно, каждый элемент центра группы является нетривиально коммутирующим элементом.

Множества всех тривиально коммутирующих элементов, нетривиально коммутирующих элементов и инволюций группы будем обозначать соответственно через U , W , J .

Предложение 1. $U \subset J$.

Доказательство. В группе для каждого неединичного элемента g всегда существуют два элемента, с которыми он коммутирует: e и g^{-1} . Если $g \in U$, то $g = g^{-1}$. Значит, $g \in J$. #

Очевидно, если $|G| = 2$, то $|U| = |W| = 1$.

Для всех остальных абелевых групп $|U| = 0$, $W = G$. Поэтому дальше нас будут интересовать неабелевы группы.

Непосредственные вычисления показывают, что в S_3 ровно три тривиально коммутирующих элемента:

$$U = \{(12), (23), (13)\}.$$

В группе кватернионов Q_8 множество U является пустым.

2. Свойства элементов U и W произвольной группы

Отметим некоторые свойства элементов U и W произвольной группы.

Предложение 2.

1) Элемент, сопряжённый тривиально коммутирующему элементу, есть тривиально коммутирующий элемент; элемент, сопряжённый нетривиально коммутирующему элементу есть нетривиально коммутирующий элемент:

$$\forall u \in U \quad \forall w \in W \quad \forall g \in G \quad (u^g \in U \wedge w^g \in W).$$

2) Произведение двух тривиально коммутирующих элементов есть нетривиально коммутирующий элемент:

$$u_1 \in U \wedge u_2 \in U \Rightarrow u_1 u_2 \in W.$$

Доказательство.

1) а) Выясним, какие элементы группы коммутируют с элементом u^g .

Пусть $u^g a = a u^g$, где $a \in G$. Имеем

$$g u g^{-1} a = a g u g^{-1} \Rightarrow u g^{-1} a g = g^{-1} a g u \Rightarrow u a^{g^{-1}} = a^{g^{-1}} u.$$

Так как $u \in U$, то

$$a^{g^{-1}} = e \quad \text{или} \quad a^{g^{-1}} = u.$$

Следовательно,

$$a = e \quad \text{или} \quad a = u^g,$$

то есть u^g – тривиально коммутирующий элемент.

б) Пусть $w \in W$, тогда по определению

$$\exists a \in G \quad (w a = a w \wedge a \neq e \wedge a \neq w).$$

Отсюда

$$w g^{-1} g a = a g^{-1} g w \wedge g a g^{-1} \neq g e g^{-1} \wedge g a g^{-1} \neq g w g^{-1} \Rightarrow$$

$$g w g^{-1} g a g^{-1} = g a g^{-1} g w g^{-1} \wedge a^g \neq e \wedge a^g \neq w^g \Rightarrow$$

$$w^g a^g = a^g w^g, \quad \text{где} \quad a^g \neq e, \quad a^g \neq w^g,$$

то есть w^g – нетривиально коммутирующий элемент.

2) Пусть $u_1, u_2 \in U$.

Если

$$u_1 = u_2,$$

то

$$u_1 u_2 = e \in W.$$

Пусть теперь $u_1 \neq u_2$ и $u_1 u_2 = v$. Предположим, что v – тривиально коммутирующий элемент, тогда

$$o(v) = o(u_1) = o(u_2) = 2 \Rightarrow$$

$$v = v^{-1} \Rightarrow u_1 u_2 = (u_1 u_2)^{-1} = u_2^{-1} u_1^{-1} = u_2 u_1,$$

что противоречит определению 1. Следовательно, v – нетривиально коммутирующий элемент. #

Теорема 3. Если множество тривиально коммутирующих элементов конечной группы не пусто, то их ровно половина: пусть $|G| = n$, $|U| \neq 0$, тогда $|U| = |W|$.

Доказательство. Рассмотрим $U = \{u_1, \dots, u_s\}$ и $u^* \in U$. Согласно предложению 2,

$$\{u_1 u^*, \dots, u_s u^*\} \subset W.$$

Следовательно, $|U| \leq |W|$.

С другой стороны, так как

$$Z(u^*) = \{e, u^*\},$$

то

$$|G/Z(u^*)| = n/2.$$

Легко видеть, что отображение

$$f: \{u^{*g} \mid g \in G\} \rightarrow G/Z(u^*),$$

такое что

$$f(u^{*g}) = gZ(u^*),$$

является биекцией.

В силу предложения 2,

$$|U| \geq |\{u^{*g} \mid g \in G\}| = n/2.$$

Следовательно, $|U| \geq |W|$. Таким образом, $|U| = |W|$. #

Следствие 4. Пусть $|G| = n$, $U \neq \emptyset$. Тогда

1) $\forall w \in W \quad \forall u^* \in U \quad \exists u', u'' \in U (w = u^* u' = u'' u^*)$.

2) Множество тривиально коммутирующих элементов совпадает с множеством инволюций группы: $U = J$.

3) $|G| = n = 4q + 2$.

Доказательство.

1) Согласно теореме 3, $U = \{u_1, \dots, u_{n/2}\}$. Пусть $u^* \in U$.

Тогда

$$\{u^* u_1, \dots, u^* u_{n/2}\} = \{u_1 u^*, \dots, u_{n/2} u^*\} = W.$$

2) Согласно предложению 1, $U \subset J$. Предположим теперь, что найдётся инволюция j , которая является нетривиально коммутирующим элементом. Тогда, согласно пункту 1) данного следствия,

$$j = u^* u_k, \text{ где } u^* \neq u_k.$$

Имеем

$$j = j^{-1} \Rightarrow u^* u_k = (u^* u_k)^{-1} = u_k^{-1} (u^*)^{-1} = u_k u^* \Rightarrow u^* u_k = u_k u^*,$$

что противоречит определению 1. Значит, $J \subset U$. С учётом предложения 1, получаем $U = J$.

3) Согласно [2, с. 28, № 3.13], $n/2 = 2q + 1$, то есть $n = 4q + 2$. #

Обратимся теперь к нетривиально коммутирующим элементам.

Теорема 5. Пусть $|G| = n$, $U \neq \emptyset$. Тогда W есть коммутативный нормальный делитель группы G .

Доказательство. Воспользуемся критерием подгруппы. Пусть $a, b \in W$. Зафиксируем $u^* \in U$. Имеем

$$ab^{-1} = u^* u^* (u'' u^*)^{-1} = u^* u'' \in W.$$

Далее:

$$[a, b] = (u^* u_i)^{-1} (u^* u_j)^{-1} (u^* u_i) (u^* u_j) = (u_i u^* u_j)^2 = u_k^2 = e.$$

Заметим, наконец, что, согласно предложению 2,

$$\forall w \in W \quad \forall g \in G (w^g \in W). \#$$

Обратимся теперь к произвольным группам.

Предложение 6. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева группа, имеющая инволюции, $\langle D(A), \circ \rangle$ – обобщённо диэдральная группа [2, с. 15–16, № 1.46]. Тогда множество U тривиально коммутирующих элементов группы $D(A)$ является пустым.

Доказательство. По определению

$$D(A) = \{(a, \varepsilon) \mid a \in A, \varepsilon = \pm 1; (x, \varepsilon_1) \circ (y, \varepsilon_2) = (xy^{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 \varepsilon_2)\}.$$

Легко видеть, что множество всех инволюций J группы $D(A)$ есть

$$\{(a, -1) \mid a \in A\} \cup \{(a, 1) \mid a \in A, o(a) = 2\}.$$

Убедимся, что ни одна из инволюций группы $D(A)$ не является тривиально коммутирующим элементом.

Пусть $a^* \in A$, $o(a^*) = 2$. Тогда

$$\forall a \in A ((a, -1) \circ (a^*, 1) = (aa^*, -1) = (a^*a, -1) = (a^*, 1) \circ (a, -1)).$$

Таким образом, в группе $D(A)$ нет тривиально коммутирующих элементов. #

Теорема 7. Пусть $D(A)$ – обобщённо диэдральная группа, где группа A не содержит инволюций. Тогда множество всех тривиально коммутирующих элементов U группы $D(A)$ есть множество $\{(a, -1) | a \in A\}$ и $|U| = |W|$.

Доказательство. Покажем, что

$$\forall a \in A (|Z(a, -1)| = 2).$$

Пусть $g \in A$ и

$$(a, -1) \circ (g, \varepsilon) = (g, \varepsilon) \circ (a, -1).$$

Отсюда

$$ag^{-1} = ga^\varepsilon = a^\varepsilon g.$$

При $\varepsilon = 1$ получаем

$$ag^{-1} = ag \Rightarrow g^{-1} = g \Rightarrow g = e$$

(так как инволюций в A нет), то есть $(g, \varepsilon) = (e, 1)$.

Если $\varepsilon = -1$, то

$$ag^{-1} = a^{-1}g = (ag^{-1})^{-1} \Rightarrow ag^{-1} = e, \text{ то есть } g = a.$$

Следовательно, $(g, \varepsilon) = (a, -1)$.

Так как других инволюций в $D(A)$ нет, то

$$U = \{(a, -1) | a \in A\}.$$

Согласно определению 2, $W = \{(a, 1) | a \in A\}$, отсюда $|U| = |W|$. #

Теорема 8. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ – группа, множество инволюций J которой не пусто, и множество $H = G \setminus J$ является её подгруппой, $H \neq \{e\}$. Тогда

1) H – коммутативный нормальный делитель G ; $|G/H| = 2$;

2) Множество тривиально коммутирующих элементов U группы G совпадает с J и $|W| = |U|$;

3) $G \cong D(H)$.

Доказательство.

1) Каждый элемент g группы G либо принадлежит H , либо J . Так как

$$\forall g \in H \forall h \in H (h^g \in H),$$

то убедимся, что

$$\forall j \in J \forall h \in H (jhj = h^{-1}).$$

Достаточно заметить, что $jh \in J$. Действительно, если $jh \notin J$, то $jh \in H$. Отсюда $j \in H$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $jh \in J$, то есть $jh = h^{-1}j$.

Следовательно, $H \triangleleft G$.

Вычислим индекс подгруппы H в группе G . Предположим, что произведение двух различных инволюций есть инволюция: пусть $j \neq k$, и $jk = j^*$, где $o(j) = o(k) = o(j^*) = 2$. Тогда

$$\forall h \in H (j^*hj^* = h^{-1} = (jk)^{-1}h(jk) = kjhjk = h) -$$

получили противоречие. Следовательно,

$$\forall h \in H (jH = kH),$$

то есть $|G/H| = 2$.

Вычислим $[h_1, h_2]$. Имеем

$$[h_1, h_2] = (jh_1j) \cdot (jh_2j)h_1h_2 = (h_1h_2)^{-1}h_1h_2 = e.$$

Пункт 1) доказан.

2) Пусть $j \in J$. Так как

$$\forall h \in H (jh = h^{-1}j),$$

то

$$(jh = hj \Rightarrow h^{-1}j = hj \Rightarrow h = e).$$

Если $k \in J, k \neq j$, то

$$(jk = kj \Rightarrow (jk)^2 = jkkj = e),$$

где $jk \in H$ (смотри доказательство пункта 1) данной теоремы), $(jk) \neq e$ – получили противоречие.

Следовательно,

$$\forall j \in J (Z(j) = \{e, j\}), \text{ то есть } U = J.$$

Отсюда $W = H$.

Так как $|G/H| = 2$, то $|U| = |W|$. Пункт 2) доказан.

3) Убедимся, что

$$\forall j \in J \langle H, j \rangle = \{h, hj \mid h \in H\}.$$

Достаточно заметить, что

$$h_1(h_2j)^{-1} = h_1jh_2^{-1} = h_1h_2j,$$

$$(h_2j)h_1^{-1} = h_2hj;$$

$$(hj)(h_2j)^{-1} = h_1h_2^{-1}.$$

Так как

$$\forall k \in J (kj \in H),$$

то $k = hj$. Следовательно, $\forall j \in J (G = \{h, hj \mid h \in H\})$.

Зададим отображение $f: G \rightarrow D(H)$, такое, что

$$\forall h \in H f(h) = (h, 1), f(hj) = (h, -1).$$

Очевидно, что f – биекция. Проверим сохранение операции:

$$f(h_1h_2) = (h_1h_2, 1) = (h_1, 1) \circ (h_2, 1) = f(h_1) \circ f(h_2),$$

$$f(h_1h_2j) = (h_1h_2, -1) = (h_1, 1) \circ (h_2, -1) = f(h_1) \circ f(h_2j),$$

$$f(h_1jh_2) = f(h_1h_2^{-1}j) = (h_1h_2^{-1}, -1) = (h_1, -1) \circ (h_2, 1) = f(h_1j) \circ f(h_2),$$

$$f(h_1jh_2j) = f(h_1h_2^{-1}) = (h_1h_2^{-1}, 1) = (h_1, -1) \circ (h_2, -1) = f(h_1j) \circ f(h_2j).$$

Таким образом, $G \cong D(H)$. #

ЛИТЕРАТУРА

1. Четвёртая студенческая олимпиада по алгебре Московского государственного университета (2 декабря 2009) [Электронный ресурс]. URL: <http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/2009/problems-09.pdf>.
2. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с.

Статья поступила 20.10.2015 г.

Zabarina A. I., Guselnikova U. A., Fomina E. A. ON COMMUTING ELEMENTS OF A GROUP

DOI 10.17223/19988621/38/3

Let G be an arbitrary group. An element g is trivially commuting if it does not commute with any other elements but itself and unity. We call an element as non-trivially commuting if it is not trivially commuting. Sets of all trivially commuting elements, non-trivially commuting elements, and involutions of the group are denoted by U, W, J .

Proposition 1. $U \subset J$.

Proposition 2.

1) An element conjugate to a trivially commuting element is a trivially commuting element; an element conjugate to a not trivially commuting element is a non-trivially commuting element
элемент: $\forall u \in U \quad \forall w \in W \quad \forall g \in G \quad (u^g \in U \quad w^g \in W)$.

2) A product of two trivially commuting elements is a non-trivially commuting element:
 $u_1 \in U, \quad u_2 \in U \Rightarrow u_1 u_2 \in W$.

Theorem 3. If the set of trivially commuting elements of a finite group is not empty, they are exactly half to the group: let $|G| = n$, $|U| \neq 0$, then $|U| = |W|$.

Corollary 4. Let $|G| = n$, $|U| \neq 0$, then

1) $\forall w \in W \quad \forall u^* \in U \quad \exists u', u'' \in U \quad (w = u^* u' = u'' u^*)$;

2) $U = J$;

3) $|G| = n = 4q + 2$.

Theorem 5. Let $|G| = n$, $|U| \neq 0$, then W is a commutative normal divisor of the group G .

Proposition 6. Let $\langle A, \cdot \rangle$ be an Abelian group with the involution and $\langle D(A), \circ \rangle$ be a generalized dihedral group. Then the set U of trivial commuting elements of the group $D(A)$ is empty.

Theorem 7. Let $\langle D(A), \circ \rangle$ be a generalized dihedral group and let the group A have no involutions. Then the set U of trivially commuting elements of the group $D(A)$ is the set $\{(a, -1) \mid a \in A\}$, $|U| = |W|$.

Theorem 8. Let $\langle G, \cdot \rangle$ be a group, the set of involutions J of the group G be not empty, and the set $H = G \setminus J$ be a subgroup, $H \neq \{e\}$. Then

1) H is a commutative normal divisor of G ; $|G/H| = 2$;

2) The set U of trivially commuting elements of the group G coincides with J and $|W| = |U|$;

3) $G \cong D(H)$.

Keywords: group, involution, commuting element, conjugate element, generalized dihedral group.

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: aizabarina@gmail.com

GUSELNIKOVA Ulyana Aleksandrovna (Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: guselnikova.ulyana@yandex.ru

FOMINA Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

1. *Chetvertaya studencheskaya olimpiada po algebre Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta (2 dekabrya 2009)* [Elektronnyy resurs]. URL: <http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/2009/problems-09.pdf>. (in Russian)
2. Belonogov V.A. *Zadachnik po teorii grupp*. Moscow, Nauka Publ., 2000. 240 p. (in Russian)

УДК 517.968.25

DOI 10.17223/19988621/38/4

Д.Ю. Иванов

УСТОЙЧИВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРНО-ПОЛУГРУППОВЫМ ЯДРОМ

Исследуются возникающие в задачах теплопроводности двумерные граничные интегральные уравнения, операторные ядра которых выражаются через пространственно-временную C_0 -полугруппу. При условии $\partial\Omega \in C^{k+2}$ доказана устойчивая разрешимость интегральных уравнений в пространствах k раз непрерывно дифференцируемых на границе $\partial\Omega$ векторных функций со значениями в пространствах типа Соболева, определяемых степенями генератора C_0 -полугруппы.

Ключевые слова: *граничное интегральное уравнение, теплопроводность, существование, единственность, устойчивость.*

Одним из методов, применяемых для аналитического решения достаточно широкого класса краевых задач нестационарной теплопроводности, является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1, с. 175]. На его основе для решения начально-краевых задач теплопроводности был разработан ряд численных методов, традиционно объединяемых под общим названием «методы граничных элементов» [2, с. 156; 3–8]. В связи с необходимостью строгого обоснования таких численных методов, связанного с вопросами аппроксимации и устойчивости, были проведены исследования, посвященные устойчивой разрешимости соответствующих ГИУ в пространствах дифференцируемых функций [5, 6, 9, 10].

В настоящей работе исследуются двумерные векторные ГИУ типа Фредгольма второго рода с операторным ядром, выраженным через C_0 -полугруппу $U(\tau)$. Как показано в работе [11], такие ГИУ позволяют решить векторные краевые задачи первого, второго и третьего рода для линейных дифференциально-операторных уравнений $\Delta_2 u = Bu$ в плоской ограниченной односвязной открытой области Ω^+ или ее внешности $\Omega^- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$. Операторный коэффициент B является генератором C_0 -полугруппы $U(\tau)$ в пространстве $L_2 \equiv L_2(I_Y \times I_T)$ ($I_Y \equiv [0, Y]$, $I_T \equiv [0, T]$): $Bf = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - U(\tau)f)$. В свою очередь, указанные краевые задачи суть возможные постановки начально-краевых задач теплопроводности на временном промежутке I_T в однородном цилиндре $\Omega^+ \times I_Y$ или $\Omega^- \times I_Y$ с неоднородными граничными условиями первого, второго и третьего рода на боковой поверхности цилиндра, нулевыми граничными условиями первого, второго или третьего рода (в зависимости от оператора B) на основаниях цилиндра и нулевым

начальным условием. Двумерные векторные ГИУ не совпадают с обычными скалярными ГИУ типа Вольтерра – Фредгольма для таких задач теплопроводности, но представляют собой по существу прямые суммы скалярных ГИУ типа Вольтерра-Фредгольма в плоских областях $\Omega^\pm$, порождаемые спектральным разложением пространственной составляющей C_0 -полугруппы.

Преимущество таких двумерных ГИУ по сравнению с обычными состоит в возможности экономного вычисления разрешающих их сеточных операторов в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора. В работах [12, 13] построены соответствующие вычислительные схемы, исследованы их аппроксимирующие свойства и вопросы устойчивости. При обосновании этих положений возникает необходимость установления инвариантности пространств $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$ относительно прямых и обратных операторов ГИУ, а также ограниченности таких операторов в указанных пространствах (здесь $C^k(\partial\Omega, H_B^n(I_Y \times I_T))$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $\partial\Omega$ векторных функций со значениями в $H_B^n(I_Y \times I_T)$; $\partial\Omega$ – граница области Ω^+ ; $H_B^n(I_Y \times I_T)$ – пространство типа Соболева, определяемое $n+1$ степенью оператора $\mathbf{B}$). Основную задачу настоящей статьи составляет доказательство наличия у таких операторов перечисленных свойств.

Хотя исследуемые здесь интегральные уравнения и отличаются сами по себе от традиционно изучаемых, приведем еще несколько отличий полученных здесь результатов от аналогичных результатов других авторов. Разрешимость ГИУ в пространствах дифференцируемых функций, насколько мне известно, исследовалась или на границах типа C^∞ [6, 9, 10], или липшицевых [5], причем в последнем случае, как и в [6, 9], лишь в пространствах, являющихся соболевскими по всем переменным. В работе [10] доказана устойчивая разрешимость ГИУ второго рода в пространствах типа $C^k(I_T, C^n(\partial\Omega))$ или $C^k(I_T, H^n(\partial\Omega))$ ($H^n(\partial\Omega)$ – пространство Соболева), причем в областях Ω произвольной размерности, но в предположении неограниченно гладкой границы. Поэтому стоит отметить, что в настоящей работе устойчивая разрешимость ГИУ в пространстве $C^k(\partial\Omega, H_B^n(I_Y \times I_T))$ доказана при менее обременительном условии $\partial\Omega \in C^{k+2}$.

Работа [14] представляет собой более ранний этап настоящего исследования: результаты получены лишь в пространствах $C(\partial\Omega, H_B^n(I_Y \times I_T))$ и $C^k(\partial\Omega, L_2)$; достаточное условие $\partial\Omega \in C^{k+2}$, по существу, только объявлено, но отсутствует часть доказательства, где оно используется (здесь теорема 1); исследовались лишь первая и вторая краевые задачи.

В конце настоящей работы сделано указание на справедливость утверждений, аналогичных полученным, для стационарных и нестационарных задач теплопроводности в плоской области и стационарных задач в цилиндре, а также целого класса абстрактных краевых задач для уравнения $\Delta_2 u = \mathbf{B} u$.

Постановки задач и предварительные сведения

Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Рассмотрим четыре краевые задачи ($i = 1, 2$):

$$a^2 \Delta_2 u_i^\pm = B u_i^\pm \quad (x = (x_1, x_2) \in \Omega^\pm), \quad (1^\pm)$$

$$u_1^\pm = w_1^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2a)$$

$$\partial_n u_2^\pm - \eta u_2^\pm = w_2^\pm \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2b)$$

решения которых – функции $u_i^\pm(x)$ со значениями в L_2 , определенные на $\overline{\Omega^\pm}$. Здесь $w_i^\pm(x)$ – функции со значениями в L_2 , заданные на $\partial\Omega$; n – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке x , направленная внутрь области Ω^+ ; $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$, ∂_n – сильные производные векторных функций; $a > 0$ – коэффициент температуропроводности, $\eta \geq 0$ – коэффициент теплообмена на боковой поверхности цилиндра. Оператор B определен в пространстве L_2 как $B \equiv B_t + B_y + pE$ на пересечении областей определения операторов B_t и B_y . Здесь E – тождественный оператор; оператор B_t : $(B_t f)(y, t) = \partial_t f(y, t)$, задан на абсолютно непрерывных по t функциях $f(y, t) \in L_2$, таких, что $\partial_t f \in L_2$ и $f|_{t=0} = 0$ при почти всех $y \in I_Y$; оператор B_y : $(B_y f)(y, t) = -a^2 \partial_{yy}^2 f(y, t)$, задан на абсолютно непрерывно дифференцируемых по y функциях $f(y, t) \in L_2$, таких, что $\partial_{yy}^2 f \in L_2$ и $(\partial_y f - \lambda_0 f)|_{y=0} = (\partial_y f + \lambda_Y f)|_{y=Y} = 0$ ($0 \leq \lambda_0, \lambda_Y \leq \infty$) при почти всех $t \in I_T$; $p > -\mu_1$, где $\mu_1 \geq 0$ – наименьшее собственное значение оператора B_y ($\mu_1 = 0$ лишь при $\lambda_0 = \lambda_Y = 0$). Оператор B замкнут как сумма двух замкнутых операторов в пространстве L_2 , порождающих C_0 -полугруппы и действующих вдоль различных переменных [15]. Оператор B порождает экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу $U(\tau)$: $\|U(\tau)\| \leq \exp[-(p + \mu_1)\tau]$, причем $U(\tau)$ – нулевые операторы при $\tau \geq T$.

Будем считать, что если по условию значения векторной функции принадлежат банахову пространству, то предельные операции над этими значениями по умолчанию осуществляются в норме этого пространства. Обозначим через $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в L_2 , определенных на множестве $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 1. Решением уравнения $(1^\pm)$ будем называть функцию $u^\pm(x) \in C^2(\Omega^\pm)$ со значениями в $D(B)$ (области определения оператора B), обращающую уравнение $(1^\pm)$ в истинное равенство.

Определение 2. Решением задачи $\{P_1^\pm\}$ будем называть функцию $u_1^\pm \in C(\overline{\Omega^\pm})$, являющуюся решением уравнения $(1^\pm)$ и удовлетворяющую гра-

ничному условию (2а). В случае задачи $\{P_1^-\}$ будем требовать также выполнения условия: $\|\mathbf{u}_1^-\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Определение 3. Решением задачи $\{P_2^\pm\}$ будем называть функцию $\overline{\mathbf{u}_2^\pm} \in C(\Omega^\pm)$, являющуюся решением уравнения $(1^\pm)$ и имеющую с внутренней (внешней) стороны $\partial\Omega$ правильную нормальную производную $\partial_n^\pm \mathbf{u}_2^\pm$ ($\partial_n \mathbf{u}_2^\pm(x \pm \xi \mathbf{n}) \rightarrow \partial_n^\pm \mathbf{u}_2^\pm(x)$ при $\xi \rightarrow +0$ равномерно относительно $x \in \partial\Omega$), определяемую равенством (2b): $\partial_n^\pm \mathbf{u}_2^\pm = \mathbf{w}_2^\pm + \eta \mathbf{u}_2^\pm$. В случае задачи $\{P_2^-\}$ будем требовать также выполнения условия $|x| \|\mathbf{u}^-\|_{L_2} \|\nabla \mathbf{u}^-\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ ($\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2}^2 = \|\partial_{x_1} \mathbf{u}\|_{L_2}^2 + \|\partial_{x_2} \mathbf{u}\|_{L_2}^2$).

Пусть $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ – нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящие через точки x' и x соответственно и направленные внутрь области Ω^+ ; дифференцирование ∂_{n_1} и ∂_{n_2} осуществляется по точкам x' и x соответственно. Зададим на множествах $\Omega^\pm$ векторные функции $\mathbf{p}_i^\pm(x)$ ($i=1,2$) со значениями в пространстве L_2 с помощью криволинейных интегралов первого рода:

$$\mathbf{p}_1^\pm(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{n_1} \mathbf{K}(r) \mathbf{v}_1^\pm(x') ds', \quad \mathbf{p}_2^\pm(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}(r) \mathbf{v}_2^\pm(x') ds',$$

где $r \equiv |x - x'|$, $\mathbf{v}_i^\pm(x)$ – векторные функции со значениями в L_2 , заданные на $\partial\Omega$; $\mathbf{K}(r)$ ($r > 0$) – функция со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в L_2 , определяемая равенствами

$$\mathbf{K}(r) \mathbf{f} \equiv (4\pi)^{-1} \int_{I_T} \tau^{-1} \exp[-r^2/(4a^2\tau)] U(\tau) \mathbf{f} d\tau \quad (\mathbf{f} \in L_2).$$

Согласно работе [11], при условиях $\partial\Omega \in C^2$ и $\mathbf{v}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$, функции $\mathbf{p}_1^\pm$ и $\mathbf{p}_2^\pm$ являются векторными аналогами потенциалов двойного и простого слоев соответственно. Если $\partial\Omega \in C^2$ и $\mathbf{w}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$, то задачи $\{P_i^\pm\}$ однозначно разрешимы и их решения представимы в виде соответствующих функций $\mathbf{p}_i^\pm$ с неизвестными $\mathbf{v}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$, однозначно определяемыми ГИУ:

$$\mathbf{G}_i^\pm \mathbf{v}_i^\pm \equiv \mp (-1)^i 2^{-1} \mathbf{v}_i^\pm + \mathbf{G}_i \mathbf{v}_i^\pm = \mathbf{w}_i^\pm, \quad (3_i^\pm)$$

$$(\mathbf{G}_1 \mathbf{f})(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{n_1} \mathbf{K}(r) \mathbf{f}(x') ds',$$

$$(\mathbf{G}_2 \mathbf{f})(x) \equiv \int_{\partial\Omega} [\partial_{n_2} \mathbf{K}(r) - \eta \mathbf{K}(r)] \mathbf{f}(x') ds'$$

$$(x \in \partial\Omega).$$

Анализ интегральных операторов в пространствах дифференцируемых функций

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, где s – длина дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки в определенном направлении и заканчивающейся в точке $x = (x_1, x_2)$. Функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv (-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Очевидно, что если функции $x_1(s)$, $x_2(s)$ принадлежат классу $C^k(\overline{I_S})$, т.е. имеют непрерывные производные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ до порядка k включительно, то $\partial\Omega \in C^k$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если функции $x_1(s)$, $x_2(s)$ принадлежат классу $C^k(\overline{I_S})$. Кроме того, пусть s и s' – значения параметра, соответствующие точкам x и x' , и пусть $\sigma \equiv s' - s$.

Введем в рассмотрение функции $\psi_m(s, s')$ ($m = 0, 1, 2$), заданные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ при $s' \neq s$ равенствами $\psi_m = \rho_m / \sigma^2$, где

$$\rho_0(s, s') \equiv (4a^2)^{-1} r^2 = (4a^2)^{-1} \{[x_1(s') - x_1(s)]^2 + [x_2(s') - x_2(s)]^2\},$$

$$\rho_1(s, s') \equiv (8\pi a^2)^{-1} r \partial_{n_1} r = (8\pi a^2)^{-1} \{-[x_1(s') - x_1(s)]x'_2(s') + [x_2(s') - x_2(s)]x'_1(s')\},$$

$$\rho_2(s, s') \equiv (8\pi a^2)^{-1} r \partial_{n_2} r = (8\pi a^2)^{-1} \{-[x_1(s) - x_1(s')]x'_2(s) + [x_2(s) - x_2(s')]x'_1(s)\},$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s, s) \equiv (4a^2)^{-1}, \quad \psi_1(s, s) = \psi_2(s, s) \equiv (16\pi a^2)^{-1} [x''_1(s)x'_2(s) - x''_2(s)x'_1(s)].$$

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0, 1, \dots\}$). Тогда существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^i \partial_{s'}^j \psi_m$ ($i = \overline{0, n-j}$, $j = \overline{0, n}$, $m = 0, 1, 2$).

Лемма. Пусть I – замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция $f(z, \zeta)$ имеет в области $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j f$ ($i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n'}$), причем $n < n'$ и $\partial_\zeta^j f|_{\zeta=z} = 0$ при $z \in I$, $j = \overline{0, q-1}$, где $q = n' - n$. Тогда функция $h(z, \zeta)$, заданная при $\zeta \neq z$ равенством $h(z, \zeta) \equiv f/(\zeta - z)^q$, а при $\zeta = z$ равенством $h(z, z) \equiv \partial_\zeta^q f|_{\zeta=z}/q!$, имеет в области $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$ при $i = \overline{0, n-j}$, $j = \overline{0, n}$.

Доказательство леммы. Зададим на множестве $I \times I$ функции $g_{k,l,m}(z, \zeta)$ так, что при $\zeta \neq z$

$$g_{k,l,m}(z, \zeta) \equiv \frac{\partial_z^m \partial_\zeta^{k+l} f|_{\zeta=z}}{k!} + \frac{\partial_z^m \partial_\zeta^{k+l+1} f|_{\zeta=z}}{(k+1)!} (\zeta - z) + \dots + \frac{\partial_z^m \partial_\zeta^{n'-1} f|_{\zeta=z}}{(n'-1-l)!} (\zeta - z)^{n'-1-k-l} +$$

$$+ \frac{1}{(n'-1-l)! (\zeta - z)^k} \int_z^\zeta \partial_z^m \partial_\zeta^{n'} f|_{\zeta=t} (\zeta - t)^{n'-1-l} dt \quad (l = \overline{0, n'-k}, k = \overline{q, n'}, m = \overline{0, n})$$

(если $k+l=n'$, то функция $g_{k,l,m}(z, \zeta)$ определяется только последним интегральным слагаемым), а при $\zeta = z$ $g_{k,l,m}(z, z) \equiv \partial_z^m \partial_\zeta^{k+l} f|_{\zeta=z} / k!$. Непосредственно проверяется существование непрерывных на $I \times I$ производных $\partial_z g_{k,l,m}$ и $\partial_\zeta g_{k,l,m}$ и выполнение равенств

$$\partial_z g_{k,l,m} = g_{k,l,m+1} + k g_{k+1,l,m}, \quad \partial_\zeta g_{k,l,m} = g_{k,l+1,m} - k g_{k+1,l,m}$$

при $k < n'$, $m < n$ и $k < n'$, $l < n'$ соответственно. Отсюда легко видеть, что производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j g_{q,0,0}$ представляют собой линейные комбинации функций $g_{k,l,m}$ при $k+l \leq q+i+j \leq n'$, $m \leq i$. В силу формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [16, с. 146] имеем $h = g_{q,0,0}$. Следовательно, если $i+j \leq n$, то производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$ существуют и непрерывны. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Можно убедиться, что условия леммы выполняются, если $f = \rho_m$ и $q=2$, при этом для функций ρ_0 и ρ_1 полагаем $z = s'$, $\zeta = s$, а для функции ρ_2 полагаем $z = s$, $\zeta = s'$. Тогда получаем справедливость утверждения леммы для функций $h = \psi_m$. Теорема доказана.

Определим в пространстве $C(\partial\Omega)$ норму: $\|f\|_{C(\partial\Omega)} \equiv \sup_{x \in \partial\Omega} \|f(x)\|_{L_2}$, что делает это пространство банаховым. Введем также в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ ($k=1,2,\dots$), состоящие из функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_S}$ производные $f^{(l)}$: $f^{(l)}(s) \equiv d^l f(x(s))/ds^l$ ($l = \overline{1,k}$), с нормой $\|f\|_{C^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{0 \leq l \leq k} \|f^{(l)}\|_{C(\partial\Omega)}$. Будем считать, что $C^0(\partial\Omega) \equiv C(\partial\Omega)$.

Оператор A , отображающий банахово пространство S само в себя, условимся обозначать как $A[S]$.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_i[C^k(\partial\Omega)]$ ($k \in \mathbb{Z}_+$, $i=1,2$) всюду определены и ограничены.

Доказательство. Введем в рассмотрение вещественные функции $\chi_m(s, \sigma) \equiv \psi_m(s, s+\sigma)$ ($m=0,1,2$). Пусть $f \in C^k(\partial\Omega)$. Запишем выражение $G_i f$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} (G_i f)(s) &= \int_{-S}^S |\sigma|^{-\alpha} Z_i(s, \sigma) f(x(s+\sigma)) d\sigma, \\ Z_i(s, \sigma) f &\equiv \int_0^T \tau^{\alpha/2-1} z_i(s, \sigma, \tau) U(\tau) f d\tau, \\ z_1(s, \sigma, \tau) &\equiv \lambda^{1+\alpha/2} \chi_1(s, \sigma) \exp[-\chi_0(s, \sigma)\lambda], \\ z_2(s, \sigma, \tau) &\equiv \lambda^{\alpha/2} [\chi_2(s, \sigma)\lambda - \tilde{\eta}] \exp[-\chi_0(s, \sigma)\lambda], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha \in (0,1)$ – некоторое фиксированное число; $\lambda = \sigma^2/\tau$, $\tilde{\eta} = 2a^2\eta$; Z_i – функ-

ции со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в L_2 . В силу теоремы 1 существуют непрерывные при $(s, \sigma) \in \overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^l \chi_m$ ($l = \overline{0, k}$). Отсюда с учетом неравенства $\chi_0 > 0$ получаем существование непрерывных и ограниченных на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S} \times (0, \infty)$ производных $\partial_s^l z_i$ ($l = \overline{0, k}$). В результате, принимая во внимание ограниченность операторов $U(\tau)$ ($\tau \geq 0$) в совокупности, приходим к существованию в операторной норме непрерывных на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производных $\partial_s^l Z_i$ ($l = \overline{0, k}$). Тогда, используя представление (4) и учитывая, что $f \in C^k(\partial\Omega)$, имеем $G_i f \in C^k(\partial\Omega)$ и оценки:

$$\begin{aligned} \left\| (G_i f)^{(l)}(s) \right\|_{L_2} &= \left\| \sum_{l'=0}^l C_l^{l'} \int_{-S}^S |\sigma|^{-\alpha} \partial_s^{l'} Z_i(s, \sigma) \partial_s^{l-l'} f(x(s+\sigma)) d\sigma \right\|_{L_2} \leq \\ &\leq 2(1-\alpha)^{-1} S^{1-\alpha} c_{i,l} \max_{0 \leq l' \leq l, s \in \overline{I_S}} \left\| f^{(l')}(s) \right\|_{L_2} \sum_{l'=0}^l C_l^{l'} \leq 2^{k+1} (1-\alpha)^{-1} S^{1-\alpha} c_{i,k} \|f\|_{C^k(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

где $c_{i,l} = \max_{0 \leq l' \leq l, (s, \sigma) \in \overline{I_S} \times \overline{I_S}} \left\| \partial_s^{l'} Z_i(s, \sigma) \right\|$, $s \in \overline{I_S}$, $C_l^{l'} = l! / [(l-l')! l'!]$ ($l = \overline{0, k}$). Из полученных оценок вытекает ограниченность операторов $G_i [C^k(\partial\Omega)]$. Теорема доказана.

Обозначим через H_B^n пространство функций $f \in L_2$, таких, что $B^m f \in L_2$ ($m = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{H_B^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|B^m f\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}$. В силу замкнутости оператора B пространства H_B^n банаховы. Введем в рассмотрение пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k = 0, 1, \dots$, $n = 1, 2, \dots$), состоящие из элементов $f \in C^k(\partial\Omega)$, таких, что $f(x) \in H_B^n$ при $x \in \partial\Omega$ и $B^m f \in C^k(\partial\Omega)$ ($m = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{s \in \overline{I_S}} \left\| f^{(l)}(s) \right\|_{H_B^n}$. Пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ также банаховы. Легко видеть, что если оператор $A[C^k(\partial\Omega)]$ всюду определен и ограничен и коммутирует с операторами B^m ($m = \overline{1, n}$) на множестве $C_n^k(\partial\Omega)$, то оператор $A[C_n^k(\partial\Omega)]$ также всюду определен и ограничен: $\|A\|_{k,n} \leq \|A\|_k$ (здесь $\|A\|_{k,n}$, $\|A\|_k$ – нормы операторов $A[C_n^k(\partial\Omega)]$, $A[C^k(\partial\Omega)]$ соответственно).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_i [C_n^k(\partial\Omega)]$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2$) всюду определены и ограничены.

Доказательство. Используя замкнутость оператора B и выполнение равенств $U(\tau)B = BU(\tau)$ на множестве $D(B)$, несложно убедиться в справедливости равенств $G_i B^m = B^m G_i$ ($m = \overline{1, n}$) на множестве $C_n^k(\partial\Omega)$. Поэтому с учетом теоремы 2 операторы $G_i [C_n^k(\partial\Omega)]$ всюду определены и ограничены. Утверждение доказано.

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$, $\mathbf{w}_i^\pm \in C^k(\partial\Omega)$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $i = 1, 2$) и $\mathbf{v}_i^\pm \in L_2^\times$, где $L_2^\times \equiv L_2(\partial\Omega \times I_Y \times I_T)$. Тогда $\mathbf{v}_i^\pm \in C^k(\partial\Omega)$.

Доказательство. Представим операторы $\mathbf{G}_i$ в виде $\mathbf{G}_{i,\varepsilon}' + \mathbf{G}_{i,\varepsilon}''$, где

$$(\mathbf{G}_{i,\varepsilon}' \mathbf{f})(s) \equiv \int_{-S}^S \mathbf{K}_{i,\varepsilon}'(s, s') \mathbf{f}(x(s')) ds', \quad (\mathbf{G}_{i,\varepsilon}'' \mathbf{f})(s) \equiv \int_{-S}^S \mathbf{K}_{i,\varepsilon}''(s, s') \mathbf{f}(x(s')) ds',$$

$$\mathbf{K}_{i,\varepsilon}'(s, s') \equiv \mathbf{K}_i(s, s') \varphi_\varepsilon(\sigma), \quad \mathbf{K}_{i,\varepsilon}''(s, s') \equiv \mathbf{K}_i(s, s') [1 - \varphi_\varepsilon(\sigma)],$$

$$\mathbf{K}_1(s, s') \mathbf{f} \equiv \partial_{n_1} \mathbf{K}(r) \mathbf{f} = \rho_1(s, s') \int_{I_T} \tau^{-2} \exp[-\rho_0(s, s')/\tau] U(\tau) \mathbf{f} d\tau,$$

$$\mathbf{K}_2(s, s') \equiv \partial_{n_2} \mathbf{K}(r) - \eta \mathbf{K}(r) = \int_{I_T} [\rho_2(s, s') \tau^{-2} - \tilde{\eta} \tau^{-1}] \exp[-\rho_0(s, s')/\tau] U(\tau) \mathbf{f} d\tau,$$

$\varphi_\varepsilon(\sigma) - k$ раз непрерывно дифференцируемая вещественная функция: $\varphi_\varepsilon(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \leq \varepsilon/2$, $0 < \varphi_\varepsilon(\sigma) < 1$ при $\varepsilon/2 < |\sigma| < \varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \geq \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < S$); $\mathbf{K}_{i,\varepsilon}'(s, s')$, $\mathbf{K}_{i,\varepsilon}''(s, s')$, $\mathbf{K}_i(s, s')$ – функции со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в L_2 .

Так как $\partial\Omega \in C^{k+2}$, то на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ при $s' \neq s$ существуют непрерывные производные $\partial_s^l \rho_0$ ($l = \overline{0, k+2}$) и $\partial_s^l \rho_1$, $\partial_s^l \rho_2$ ($l = \overline{0, k+1}$). Кроме того, $\rho_0 > 0$ при $s' \neq s$. Поэтому при $s' \neq s$ в операторной норме существуют непрерывные производные $\partial_s^l \mathbf{K}_i(s, s')$ ($l = \overline{0, k+1}$). Следовательно, если функцию $\mathbf{K}_{i,\varepsilon}''(s, s')$ доопределить при $s' = s$ нулевыми операторами, то на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ существуют непрерывные производные $\partial_s^l \mathbf{K}_{i,\varepsilon}''(s, s')$ ($l = \overline{0, k}$). Тогда, учитывая, что $\mathbf{v}_i^\pm \in L_2^\times$ и $\mathbf{w}_i^\pm \in C^k(\partial\Omega)$, имеем $\mathbf{h}_i^\pm \equiv \mp 2(-1)^i (\mathbf{w}_i^\pm - \mathbf{G}_{i,\varepsilon}'' \mathbf{v}_i^\pm) \in C^k(\partial\Omega)$.

Далее заметим, что согласно теореме 6 [11] функции $\partial_{n_i} \mathbf{K}(r)$ ограничены на $\partial\Omega$, а согласно теореме 3 [11] функция $r^\alpha \mathbf{K}(r)$ ограничена на $\partial\Omega$ при любом $\alpha > 0$. Кроме того, кривая $\partial\Omega \in C^2$ не имеет точек самопересечения, следовательно, существует $c_0 \equiv \max_{(s, s') \in \overline{I_S} \times \overline{I_S}} (\sigma/r)$.

Зафиксируем некоторое число $\alpha \in (0, 1)$. Обозначим $c_i \equiv \max_{(s, s') \in \overline{I_S} \times \overline{I_S}} \|r^{\alpha/2} \mathbf{K}_i\|$, где функции $r^{\alpha/2} \mathbf{K}_i(s, s')$ доопределены при $s' = s$ по непрерывности. Полагая $\varepsilon^{1-\alpha} < (1-\alpha)/(8c_0^\alpha c_i^2 S)$, имеем неравенства:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{i,\varepsilon}'\|^2 &\leq \int_{-S}^S \left(\int_{-S}^S \|r^{\alpha/2} \mathbf{K}_{i,\varepsilon}'(s, s')\|^2 r^{-\alpha} ds' \right) ds \leq \\ &\leq c_0^\alpha \int_{-S}^S \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|r^{\alpha/2} \mathbf{K}_i(s, s+\sigma)\|^2 \sigma^{-\alpha} d\sigma \right) ds \leq 4(1-\alpha)^{-1} c_0^\alpha c_i^2 S \varepsilon^{1-\alpha} < 2^{-1}, \end{aligned}$$

в силу которых к уравнениям $(1 \mp 2(-1)^i G'_{i,\varepsilon}) v_i^\pm = h_i^\pm$, эквивалентным соответствующим уравнениям $(3_i^\pm)$, применима теорема Банаха: функции $v_i^\pm$ представимы в виде рядов $\sum_{n=0}^{\infty} j_{i,n}^\pm$ ($j_{i,n}^\pm \equiv (\pm 2(-1)^i G'_{i,\varepsilon})^n h_i^\pm$), сходящихся в норме $L_2^\times$.

Используя рассуждения предыдущей теоремы и учитывая, что

$$(G'_{i,\varepsilon} f)(s) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\sigma|^{-\alpha} Z_i(s, \sigma) \varphi_\varepsilon(\sigma) f(x(s+\sigma)) d\sigma$$

и $|\varphi_\varepsilon(\sigma)| \leq 1$, получаем существование непрерывных производных $(j_{i,n}^\pm)^{(l)}$ ($l = \overline{0, k}$) на множестве $\overline{I_S}$ и справедливость оценок:

$$\begin{aligned} \left\| \left([\pm 2 G'_{i,\varepsilon}]^n f \right)^{(l)}(s) \right\|_{L_2} &\leq 2^{l+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,l} \max_{0 \leq l' \leq l, s \in \overline{I_S}} \left\| \left([\pm 2 G'_{i,\varepsilon}]^{n-1} f \right)^{(l')}(s) \right\|_{L_2} \leq \dots \\ &\leq \left(2^{l+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,l} \right)^n \max_{0 \leq l' \leq l, s \in \overline{I_S}} \|f^{(l')}(s)\|_{L_2} \leq \left(2^{k+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,k} \right)^n \|f\|_{C^k(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Тогда, налагая дополнительное условие $\varepsilon^{1-\alpha} < 2^{-k-2} (1-\alpha)/c_{i,k}$, получаем оценки:

$$\left\| (j_{i,n}^\pm)^{(l)}(s) \right\|_{L_2} \leq q^n \|h_i^\pm\|_{C^k(\partial\Omega)}$$

($q \equiv 2^{k+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,k} < 1$, $l = \overline{0, k}$, $s \in \overline{I_S}$), вследствие которых ряды $\sum_{n=0}^{\infty} (j_{i,n}^\pm)^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0, k}$) равномерно сходятся на $\overline{I_S}$ в норме L_2 . Тогда в силу $j_{i,n}^\pm \in C^k(\partial\Omega)$ имеем $v_i^\pm \in C^k(\partial\Omega)$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_i^\pm [C^k(\partial\Omega)]$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $i = 1, 2$) ограниченно обратимы.

Доказательство. Согласно теореме 11 [11], уравнения $(3_i^\pm)$ имеют единственные решения $v_i^\pm \in L_2^\times$ при условии $w_i^\pm \in L_2^\times$. Следовательно, в силу теоремы 3 уравнения $(3_i^\pm)$ имеют единственные решения $v_i^\pm \in C^k(\partial\Omega)$, если $w_i^\pm \in C^k(\partial\Omega)$. С учетом теоремы 2 это означает, что операторы $G_i^\pm [C^k(\partial\Omega)]$ являются биекциями, и поскольку они при этом замкнуты, то в силу теоремы о замкнутом графике обратные операторы $(G_i^\pm)^{-1} [C^k(\partial\Omega)]$ ограничены. Утверждение доказано.

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_i^\pm [C_n^k(\partial\Omega)]$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2$) ограниченно обратимы.

Доказательство. Оператор B ограниченно обратим как порождающий экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу [17, с. 136, 149]. С учетом коммутативности операторов $G_i^\pm$ и B^m ($m = \overline{1, n}$) на множестве $C_n^k(\partial\Omega)$ операторы $(G_i^\pm)^{-1}$ и

B^{-m} коммутируют на множестве $C^k(\partial\Omega)$, следовательно, множество $C_n^k(\partial\Omega)$ инвариантно относительно $(G_i^\pm)^{-1}$. В силу следствия 1 и теоремы о замкнутом графике операторы $(G_i^\pm)^{-1}[C^k(\partial\Omega)]$ ограничены. Утверждение доказано.

Заключение

Следствия 2 и 3 являются обоснованием устойчивой разрешимости ГИУ $(3_i^\pm)$ в пространствах $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots$, $C_0^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega)$): при любой правой части $w_i^\pm \in C_n^k(\partial\Omega)$ существует единственное решение $v_i^\pm \in C_n^k(\partial\Omega)$, непрерывно зависящее от $w_i^\pm$ в норме $C_n^k(\partial\Omega)$.

Класс задач, для которых справедливы полученные результаты, можно расширить. С учетом работы [11] для их получения к оператору B достаточно предъявить следующие требования: (А) оператор B порождает экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу и может быть расширен до оператора, допускающего спектральное разложение и также порождающего экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу; (В) операторы G_i должны быть компактны. Таким требованиям, кроме оператора $B = B_l + B_y + pE$, удовлетворяют также операторы $B = pE$ и $B = B_l + pE$ ($p > 0$), в случае которых задачи $\{P_i^\pm\}$ представляют собой соответственно стационарные и нестационарные, задачи теплопроводности в плоской области $\Omega^\pm$, а также оператор $B = B_y + pE$ ($p > -\mu_1$), в случае которого задачи $\{P_i^\pm\}$ представляют собой стационарные задачи теплопроводности в цилиндре $\Omega^\pm \times I_Y$. Вместе с тем стоит отметить, что компактность операторов G_i использовалась в работе [11] лишь для доказательства существования обратного оператора $(G_i^\pm)^{-1}[L_2^\times]$ на основе теории Фредгольма. В работе [18] доказана ограниченная обратимость операторов $G_i[L_2^\times]$, когда оператор B фактически удовлетворяет одному условию (А); при этом получены аппроксимации в виде рядов по неотрицательным степеням полугруппового оператора $U(H)$ ($H > 0$), сходящиеся к оператору $(G_i^\pm)^{-1}$ при $H \rightarrow +0$ в норме $L_2^\times$. Поэтому представленные в настоящей статье и работе [11] результаты относительно задач $\{P_i^\pm\}$ и соответствующих им ГИУ могут быть распространены на достаточно большой класс абстрактных двумерных краевых задач для уравнений $(1^\pm)$, определяемый условием (А), внутри эллиптического случая [17, с. 304].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения. Анализ-4 // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики». Фундаментальные направления. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1988. С. 131–228.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

3. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
4. McIntire E.A. Jr. Boundary integral solutions for the heat equation // Mathematics of computation. 1986. V. 46. No. 173. P. 71–79.
5. Costabel M. Boundary integral operators for the heat equation // Integral Equation Operator Theory. 1990. V. 13. No. 4. P. 498–552.
6. Noon P.J. The single layer heat potential and Galerkin boundary element methods for the heat equation. Ph. D. Thesis. University of Maryland. 1988.
7. Shirota K., Onishi K. A boundary element Galerkin method for the Dirichlet problem of the heat equation in non-smooth domain // Scientiae Mathematicae. 1998. V. 1. No. 1. P. 107–123.
8. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
9. Arnold D.N., Noon P.J. Coercivity of the single layer heat potential // Journal of Computational Mathematics. 1989. V. 7. No. 2. P. 100–104.
10. Hongtao Y. A new analysis of Volterra-Fredholm boundary integral equations of second kind // Northeastern Mathematical Journal. 1997. V. 13. No. 3. P. 325–334.
11. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
12. Иванов Д.Ю. Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цилиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.
13. Иванов Д.Ю. Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 4(22). С. 26–38.
14. Иванов Д.Ю. Анализ двумерных граничных интегральных уравнений, определяющих решения задач теплопроводности в прямых цилиндрах // Перспективы науки. 2014. № 12(63). С. 103–109.
15. Иванов Д.Ю. Замкнутость сумм дифференциальных операторов, возникающих в задачах теплопроводности в пространствах L_2 // Тр. Ин-та системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. М.: КомКнига, 2005. Вып. 9(1). С. 111–123.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.
17. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
18. Иванов Д.Ю. Решение в пространстве L_2 интегрального уравнения, соответствующего задаче теплопроводности в однородном прямом цилиндре на временной полуоси // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2013. № 11-1. С. 20–25.

Статья поступила 26.09.2015 г.

Ivanov D. Yu. STABLE SOLVABILITY IN SPACES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS OF SOME TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS OF HEAT CONDUCTION WITH AN OPERATOR-SEMGROUP KERNEL

DOI 10.17223/19988621/38/4

In this paper, we study two-dimensional vector boundary Fredholm integral equations of the second kind with an operator kernel expressed in terms of a spatial-temporal C_0 -semigroup. Such two-dimensional integral equations allow one to obtain solutions of vector boundary value problems of the first, second, and third kind for linear differential-operator equations $\Delta_2 u = Bu$ in a planar bounded simply connected domain Ω^+ or its exterior $\Omega^- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$. The operator coefficient B is a generator of the C_0 -semigroup in space $L_2(I_Y \times I_T)$ ($I_Y \equiv [0, Y]$, $I_T \equiv [0, T]$). In

turn, these boundary value problems are possible formulations of initial boundary value problems of heat conduction on the time interval I_T in a homogeneous cylinder $\Omega^+ \times I_Y$ or $\Omega^- \times I_Y$ with inhomogeneous boundary conditions of the first, second, and third kind on the lateral surface of the cylinder, zero boundary conditions of the first, second, or third kind (depending on the operator $\mathbf{B}$) on the cylinder bases and zero initial conditions. The main result of this paper is as follows: under condition $\partial\Omega \in C^{k+2}$, the spaces $C^k(\partial\Omega, H_{\mathbf{B}}^n(I_Y \times I_T))$ are invariant with respect to direct and inverse operators of the integral equations, and such operators are bounded in these spaces. Here, $C^k(\partial\Omega, H_{\mathbf{B}}^n(I_Y \times I_T))$ is the space of vector functions, k times continuously differentiable on the border $\partial\Omega$ with values in the Sobolev type space $H_{\mathbf{B}}^n(I_Y \times I_T)$ defined by powers $n + 1$ of the operator $\mathbf{B}$.

Keywords: boundary integral equation, heat conduction, existence, uniqueness, regularity.

IVANOV Dmitrii Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State Academy of Water Transport, Moscow, Russian Federation)

REFERENCES

1. Maz'ya V.G. Granichnye integral'nye uravneniya. Analiz-4. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya «Sovremennye problemy matematiki». Fundamental'nye napravleniya*. Moscow, VINITI Publ., 1988, vol. 27, pp. 131–228. (in Russian)
2. Brebbia C.A., Telles J.C.F. Wrobel L.C. *Boundary element techniques*. Springer-Verlag, 1984. 464 p.
3. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*, 1981, vol. 17, pp. 213–225.
4. McIntire E.A. Jr. Boundary integral solutions for the heat equation. *Mathematics of computation*, 1986, vol. 46, no. 173, pp. 71–79.
5. Costabel M. Boundary integral operators for the heat equation. *Integral Equation Operator Theory*, 1990, vol. 13, no. 4, pp. 498–552.
6. Noon P.J. *The single layer heat potential and Galerkin boundary element methods for the heat equation*. Ph. D. Thesis. University of Maryland, 1988.
7. Shirota K., Onishi K. A boundary element Galerkin method for the Dirichlet problem of the heat equation in non-smooth domain. *Scientiae Mathematicae*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 107–123.
8. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of computation*, 1999, vol. 68, no. 226, pp. 547–557.
9. Arnold D.N., Noon P.J. Coercivity of the single layer heat potential. *Journal of Computational Mathematics*, 1989, vol. 7, no. 2, pp. 100–104.
10. Hongtao Y. A new analysis of Volterra-Fredholm boundary integral equations of second kind. *Northeastern Mathematical Journal*, 1997, vol. 13, no. 3, pp. 325–334.
11. Ivanov D.Yu. Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential equations*, 2010, vol. 46, no. 8. P. 1104–1113.
12. Ivanov D.Yu. Ekonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsindrakh. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2014, no. 9, pp. 16–32. (in Russian)
13. Ivanov D.Yu. Vychislenie operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsindrakh, s ispol'zovaniem polugruppovoy simmetrii. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI*, 2014, vol. 4, no. 4(22), pp. 26–38. (in Russian)
14. Ivanov D.Yu. Analiz dvumernykh granichnykh integral'nykh uravneniy, opredelyayushchikh resheniya zadach teploprovodnosti v pryamykh tsindrakh. *Perspektivy nauki*, 2014, no. 12(63), pp. 103–109. (in Russian)

15. Ivanov D.Yu. Zamknutost' summ differentsial'nykh operatorov, vznikayushchikh v zadachakh teploprovodnosti v prostranstvakh L_2 . *Tr. In-ta sistemnogo analiza RAN. Dinamika neodnorodnykh sistem*. Moscow, KomKniga Publ., 2005. Vyp. 9(1), pp. 111–123. (in Russian)
16. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*, vol. 2. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 810 p. (in Russian)
17. Kreyn S.G. *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 464 p. (in Russian)
18. Ivanov D.Yu. Reshenie v prostranstve L_2 integral'nogo uravneniya, sootvetstvuyushchego zadache teploprovodnosti v odnorodnom pryamom tsilindre na vremennoy poluosi. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2013, no. 11-1, pp. 20–25. (in Russian)

УДК 519.213 + 550.34
DOI 10.17223/19988621/38/5

М.А. Приходовский

ОБ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИИ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕЙСМИЧНОСТИ ПО ШИРОТНЫМ ИНТЕРВАЛАМ

Предлагается корректировка методов исследования распределения сейсмичности по широтным интервалам. Вводятся нормирующие коэффициенты для широтных интервалов, что позволит учитывать такой фактор, как доля площади земной поверхности, которую занимает тот или иной широтный интервал, и более корректно отображать влияние приливных сил на сейсмичность в каждом широтном интервале.

Ключевые слова: *распределение землетрясений, широтный интервал*

В работах [1, 2] рассматривается распределение землетрясений по широтным интервалам. Отмечено, что «в районе полюсов землетрясения практически не происходят вообще, в высоких широтах их количество весьма невелико» [2, с. 52]. Согласно упоминаемой там же, а также в [3] теоретической модели приливного воздействия, максимумы значений энергии, передаваемой литосфере в результате воздействия приливных сил, должны быть расположены в районе 45° северной и южной широты. В то же время из гистограммы [2, с. 52, рис.1], видно, что наибольшее количество землетрясений происходит в интервалах между 0 и 10° ю.ш. и 30 и 40° с.ш. В северном полушарии максимум располагается не на широте 45° , а между 30 и 40° , в южном полушарии совсем близко к экватору, между 0 и 10° , что противоречит фразе «в районе экватора отчётливо виден неглубокий локальный минимум» [2, с. 52]. Всё это также не согласуется с утверждением о том, что «сопоставление теоретической модели с материалами наблюдений показывает достаточно удовлетворительное согласие» [2, с. 53]. Несовпадения свидетельствуют о том, что остаётся ещё много открытых проблем, и исследования в данной области очень актуальны. Проблема воздействия приливных сил на сейсмичность становилась темой изучения примерно в те же годы и в других работах, например [4, с. 219; 5].

Предлагаемый Левиным метод исследования распределения сейсмичности по широтным интервалам обладает следующим существенным недостатком: он учитывает абсолютное количество землетрясений на том или ином широтном интервале, но не учитывает тот очевидный факт, что площади широтных интервалов различны.

Некорректность существующего учёта сейсмичности по широтным интервалам состоит в том, что в указанных источниках рассматривается непосредственно количество землетрясений на том или ином широтном интервале, без учёта площади, занимаемой широтным интервалом на земной поверхности.

Применим понятие условной вероятности, формулу полной вероятности и формулу Байеса к рассмотрению указанных величин. Обозначим через H_i событие, состоящее в том, что точка земной поверхности находится в i -м широтном интервале, тогда $P(H_i)$ – вероятность того, что случайно взятая точка на земной

поверхности находится именно в i -м широтном интервале. Эта величина прямо пропорциональна доле площади, занимаемой данным широтным интервалом на земной поверхности. Обозначим через $P(A/H_i)$ сейсмичность i -го широтного интервала, то есть вероятность того, что на единице площади, принадлежащей i -му широтному интервалу, произойдёт землетрясение. $P(H_i/A)$ – апостериорная вероятность события, состоящего в том, что если землетрясение произошло, то оно произошло именно в i -м широтном интервале. Согласно формуле Байеса,

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)}$$

Плотность распределения вероятности землетрясения на каком-либо широтном интервале в целом и вероятности землетрясения на произвольной единице площади, принадлежащей этому интервалу, – различные величины. Первая соответствует $P(H_i)P(A/H_i)$, вторая $P(A/H_i)$. В работе [2] рассматривается фактическое число землетрясений на каждом широтном интервале, то есть сейсмичность широтного интервала отождествляется с величиной $P(H_i)P(A/H_i)$. В то же время для оценки сейсмичности территории, то есть вероятности землетрясения на одной и той же единице площади, например 1 кв. км, необходимо рассматривать величину $P(A/H_i)$, то есть поделить количество землетрясений на нормирующие коэффициенты, равные площади земной поверхности, приходящейся на тот или иной широтный интервал. Напрямую сопоставлять разность широт с количеством землетрясений не вполне корректно, так как площадь широтного интервала, расположенного между широтами φ_1 и φ_2 , зависит не только от разности широт $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, но и ещё и от абсолютного значения широт, между которыми расположен данный интервал. Эта площадь сильно уменьшается по мере движения от экватора к полюсам, поэтому при изучении плотности распределения землетрясений по широтам более корректно нормировать показатели сейсмичности с учётом фактической площади данного пояса.

Рассчитаем нормирующие коэффициенты $P(H_i)$. Отметим, что в рассматриваемых публикациях $n = 18$, так как взяты широтные интервалы по 10° , однако можно обобщить для любого разбиения.

Ниже выведены коэффициенты нормирования и показана скорректированная гистограмма сейсмичности по широтам. Площадь той части поверхности сферы радиуса R , которая расположена в полосе между широтами φ_1 и φ_2 , составляет $2\pi R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$.

Примечание. Площадь шарового слоя вычисляется либо по известной формуле, либо с помощью двойного интеграла $S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$ для

функции $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Таким образом, доля поверхности Земли, расположенная между широтами φ_1 и φ_2 , составляет $\frac{2\pi R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$. Соответственно доля площади широтного интервала, расположенного между широтами φ_1 и φ_2 , отно-

сительно площади всего полушария, есть $(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$. Чтобы оценить, насколько данная площадь отклоняется от величины $(\varphi_1 - \varphi_2)$, поделим на $1/9$ (так как базовое значение разности широт в [2] изначально полагается 10°). Можно таким же образом вводить и более мелкие широтные интервалы и формировать аналогичные нормирующие коэффициенты для них.

Широтный интервал	$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1$	$\frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$	Нормирующий коэффициент
$0^\circ\text{-}10^\circ$	0,17365	1,56285	0,639856
$10^\circ\text{-}20^\circ$	0,16838	1,51533	0,659922
$20^\circ\text{-}30^\circ$	0,15789	1,42101	0,703725
$30^\circ\text{-}40^\circ$	0,14279	1,28511	0,778143
$40^\circ\text{-}50^\circ$	0,12326	1,10925	0,901510
$50^\circ\text{-}60^\circ$	0,09999	0,89991	1,111222
$60^\circ\text{-}70^\circ$	0,07367	0,66294	1,508432
$70^\circ\text{-}80^\circ$	0,04513	0,40608	2,462569
$80^\circ\text{-}90^\circ$	0,01519	0,13671	7,314754

Описание таблицы. В первом столбце вводятся рассматриваемые широтные интервалы. Во втором столбце показана доля площади поверхности полушария Земли, приходящаяся на диапазон между данными широтами. В третьем столбце вычислены коэффициенты, показывающие, во сколько раз площадь данной полосы больше либо меньше, чем было бы без учёта площади поверхности, а с учётом только разности широт, как было сделано в [2]. В четвертом столбце приводятся величины, обратные к величинам предыдущего столбца, то есть коэффициенты нормировки, на которые нужно умножить, чтобы получить значение сейсмичности в данном диапазоне широт с учётом площади, занимаемой этой полосой на поверхности Земли.

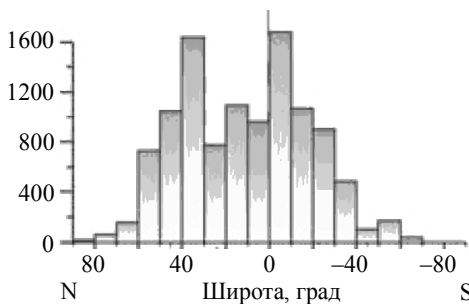


Рис. 1

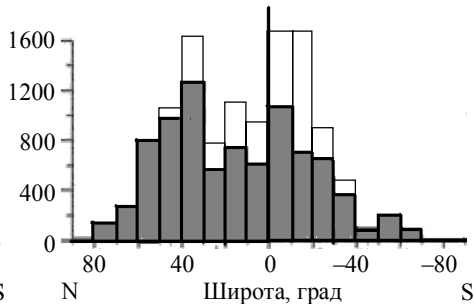


Рис. 2

Слева приводится рис. 1 из [2, с. 52], справа – с учётом корректировки, предлагаемой в данной статье.

Следует отметить, что широтное распределение сейсмичности не может быть связано только с распределением подземной энергии по широтам, а зависит ещё и от особенностей строения земной коры в конкретных областях Земли, то есть от того, где именно проходят геологические разломы, от распределения площади суши и океанов на той или иной широте. Например, в северном полушарии материки занимают гораздо больший процент территории, чем в южном полушарии.

Это значит, что там, как минимум, больше сейсмических станций и больше зафиксированных землетрясений, даже если сейсмичность полушарий была бы примерно одинакова. На гистограммах, как без нормировки (из [2]), так и с нормировкой, публикуемой в данной работе, видна явная асимметрия: сейсмичность северного полушария больше, чем южного, и простирается до широт 80° , тогда как в южном полушарии, несмотря на наличие сейсмостанций в Антарктиде, сейсмичность в широтном интервале $70\text{--}90^\circ$ практически не наблюдается. Сейсмическая активность явно смещена в сторону северного полушария.

Предлагается в исследованиях распределения сейсмичности по широтам использовать нормирующие коэффициенты, вводимые в данной работе, что приведёт к более корректному учёту сейсмичности при исследовании распределения землетрясений по широтным поясам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.В., Чирков Е.Б. Особенности широтного распределения сейсмичности и вращение Земли // Вулканология и сейсмология. 1999. № 6. С. 65–69.
2. Левин Б.В. О природе некоторых периодических изменений в сейсмическом режиме Земли // Вестник ДВО РАН. 2006. № 1. С. 51–58.
3. Левин Б.В., Павлов В.П. Влияние астрономических факторов на вариации плотности энергии в твёрдой оболочке Земли // Изв. РАН. Физика Земли. 2003. № 3. С. 71–76.
4. Физика землетрясений и предвестники / Г.А. Соболев, А.В. Пономарёв. М.: Наука, 2003. 270 с.
5. Приходовский М.А. О сходстве внешних факторов, порождающих циклы солнечной и сейсмической активности // Естественные и технические науки. 2006. № 3. С. 28–31.

Статья поступила 02.09.2015 г.

Prikhodovsky M.A. ON AN IMPROVEMENT OF EVALUATION CRITERIA FOR THE SEISMICITY DISTRIBUTION OVER LATITUDE INTERVALS

DOI 10.17223/19988621/38/5

A modification of methods for studying the seismicity distribution over latitude intervals is proposed. Introducing normalizing factors for latitude intervals makes it possible to take into account the fraction of the Earth's surface occupied by an individual latitudinal range and to more accurately reflect the effect of tidal forces on seismicity in each latitudinal interval.

Keywords: distribution of earthquakes, latitude range.

Prikhodovsky Mikhail Anatolyevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: prihod1@yandex.ru

REFERENCES

1. Levin B.V., Chirkov E.B. Osobennosti shirotного raspredeleniya seysmichnosti i vrashchenie Zemli. *Vulkanologiya i seysmologiya*, 1999, no. 6, pp. 65–69. (in Russian)
2. Levin B.V. O prirode nekotorykh periodicheskikh izmeneniy v seysmicheskom rezhime Zemli. *Vestnik DVO RAN*, 2006, no. 1, pp. 51–58. (in Russian)
3. Levin B.V., Pavlov V.P. Vliyanie astronomicheskikh faktorov na variatsii plotnosti energii v tverдой obolochke Zemli. *Izv. RAN. Fizika Zemli*, 2003, no. 3, pp. 71–76. (in Russian)
4. *Fizika zemletryaseniy i predvestniki* / G.A.Sobolev, A.V.Ponomarev. Moscow, Nauka Publ., 2003. 270 p. (in Russian)
5. Prikhodovsky M.A. O skhodstve vneshnikh faktorov, porozhdayushchikh tsikly solnechnoy i seysmicheskoy aktivnosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2006, no. 3, pp. 28–31. (in Russian)

УДК 517.987

DOI 10.17223/19988621/38/6

Д.В. Сергеева

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ n -АРНЫХ ПОДПОЛУГРУППАХ БИНАРНЫХ ГРУПП

Свертки мер и функций, преобразование Фурье мер на локально компактных абелевых n -арных группах были введены в работе [1]. Развитие гармонического анализа на n -арных алгебраических объектах, наделенных топологией, тесно связано с существованием на подобных объектах ненулевой инвариантной меры. Инвариантные меры на топологических n -арных полугруппах рассматривались в [2] и [3]. В теореме 2 данной работы установлены необходимые и достаточные условия существования левоинвариантной меры на топологических n -арных подполугруппах бинарных групп. Ее можно рассматривать, как распространение результатов работы [4] на случай топологических n -арных полугрупп. Теорема 1 устанавливает результат представляющий интерес для топологической алгебры.

Ключевые слова: левоинвариантная мера, топологическая n -арная полугруппа, идеал n -арной полугруппы.

1. Терминология и обозначения

Терминология и обозначения, относящиеся к n -арным алгебраическим системам, в основном, соответствуют монографии [5]. Последовательность $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_n$ элементов множества X обозначаем $a_1^k c_1^n$. Отображение $[]: X^n \rightarrow X$ называют n -арной операцией на X . Данная операция ассоциативна, если для любой последовательности $x_1^{2n-1} \in X^{2n-1}$ имеют место следующие равенства:

$$\left[x_1^{n-1} \left[x_n^{2n-1} \right] \right] = \left[x_1^j \left[x_{j+1}^{j+n} \right] x_{j+n+1}^{2n-1} \right] \quad (j=1, 2, \dots, n-1).$$

Непустое множество X с ассоциативной n -арной операцией называют n -арной полугруппой. n -Арную полугруппу будем обозначать $\langle X; [] \rangle$ или одной буквой X . n -Арную полугруппу $\langle X, [] \rangle$ называют n -арной группой, если каждое из уравнений

$$\left[x a_1^{n-1} \right] = a \quad \text{и} \quad \left[a_1^{n-1} x \right] = a$$

разрешимо для любой последовательности $a_1^{n-1} a \in X^n$. При $n=2$ n -арную группу будем называть бинарной группой.

Непустое множество $I \subset X$ называют идеалом n -арной полугруппы $\langle X; [] \rangle$, если $\left[x_1^j x x_{j+1}^{n-1} \right] \in I$ для любых $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$, любого $x \in I$ и любого $j=0, 1, \dots, n-1$. Если же $\left[x_1^{n-1} x \right] \in I$ для любых $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$ и любого $x \in I$, то I называют левым идеалом n -арной полугруппы $\langle X; [] \rangle$.

Пусть $K \subset X$, $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$. Множество $\{[x_1^{n-1}k] \mid k \in K\}$ обозначаем $[x_1^{n-1}K]$. Отображение $x \rightarrow [x_1^i x x_{i+1}^{n-1}] (x \in X)$ называют трансляцией n -арной полугруппы $\langle X; [\] \rangle$. При $i = n-1$ трансляцию будем называть левой трансляцией, а при $i = 0$ правой трансляцией.

n -Арная полугруппа $\langle X; [\] \rangle$, наделенная топологией τ , называется топологической полугруппой, если n -арная операция непрерывна по совокупности аргументов. Топологическую n -арную полугруппу будем обозначать парой (X, τ) . Ниже, не оговаривая особо, предполагаем, что все рассматриваемые топологии хаусдорфовы. Идеал $I \subset X$ называем идеалом с открытыми трансляциями на элементы X , если для любого $U \subset I$, $U \in \tau$ и любой трансляции λ множество $\lambda(U)$ является открытым в (X, τ) .

Левоинвариантной мерой на топологической n -арной полугруппе (X, τ) называем счетно-аддитивную неотрицательную функцию μ , определенную на наименьшем σ -кольце $B(X)$ подмножеств X , содержащем семейство $K(X)$ всех компактных подмножеств X , конечную на каждом компактном множестве, такую, что $\mu(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset B, C \in K(X)\}$ для любого $B \in B(X)$ и $\mu([a_1^{n-1}B]) = \mu(B)$ для любых $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$ и $B \in B(X)$, таких, что множество $[a_1^{n-1}B]$ принадлежит $B(X)$. Элементы σ -кольца $B(X)$ называют борелевскими подмножествами топологического пространства (X, τ) .

2. Основные результаты

Далее всюду $\langle G, \cdot \rangle$ – бинарная группа, $n \in N$ и $n > 2$, X – система образующих для G , такая, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \in X$ для любой последовательности $a_i^n \in X^n$. Формула $[a_1^n] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ ($a_i^n \in X^n$) определяет n -арную операцию $[\]$ на X и алгебра $\langle X; [\] \rangle$ является n -арной полугруппой. Ее будем называть n -арной подполугруппой группы $\langle G, \cdot \rangle$.

Пример 1. Группа G – множество целых чисел относительно операции сложения, X – множество всех нечетных положительных чисел, $n = 3$. Тогда X – система образующих для G , для любых x_1, x_2, x_3 из X их сумма принадлежит X . Следовательно, X с тернарной операцией сложения трех чисел является тернарной подполугруппой G .

Теорема 1. Пусть $\langle X; [\] \rangle$ – n -арная подполугруппа бинарной группы G , τ_G – топология на G , такая, что (G, τ_G) является топологической группой, τ – топология на X , причем (X, τ) является топологической n -арной полугруппой. Пусть каждое $U \in \tau_G$, $U \subset X$ является открытым подмножеством (X, τ) и существует непустое множество $V \subset X$, удовлетворяющее следующему условию:

- (i) $V \in \tau_G \cap \tau$ и сужение топологий τ_G и τ на V совпадают.

Тогда существует наибольшее (по включению) множество I среди подмножеств X , удовлетворяющих условию (i). I будет идеалом $\langle X; [] \rangle$, обладающим открытыми трансляциями на элементы X .

Доказательство. Пусть $\{V\}$ – семейство всех подмножеств X , удовлетворяющих условию (i). Покажем, что множество $I = \bigcup \{V \mid V \in \{V\}\}$ также удовлетворяет условию (i). Имеем $I \subset X$ и $I \in \tau_G \cap \tau$. Пусть $U \subset I$ и $U \in \tau_G$. Тогда по предположению теоремы $U \in \tau$. Если же $U \in \tau$, то $U = \bigcup \{V \cap U \mid V \in \{V\}\}$. Имеем $V \cap U \in \tau$. Отсюда следует, что $U \in \tau_G$. Таким образом, множество I удовлетворяет условию (i), т.е. $I \in \{V\}$ и, по построению, является наибольшим подмножеством (по включению) семейства V .

Покажем, что I является идеалом X . Пусть $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$. Имеем: $[x_1^j I x_{j+1}^{n-1}] = x_1 \cdot \dots \cdot x_j \cdot I \cdot x_{j+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} \subset X$ и является открытым подмножеством (G, τ_G) . Следовательно, $[x_1^j I x_{j+1}^{n-1}] \in \tau_G \cap \tau$. Пусть $U \subset [x_1^j I x_{j+1}^{n-1}]$ и $U \in \tau$. Тогда множество $W = x_j^{-1} \cdot \dots \cdot x_1^{-1} \cdot U \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot x_{j+1}^{-1} = \lambda^{-1}(U) \in \tau$, так как трансляция $\lambda(x) = [x_1^j x x_{j+1}^{n-1}]$ ($x \in X$) является непрерывным отображением топологического пространства (X, τ) в себя и $W \subset I$. Следовательно, $W \in \tau_G$ в силу выполнения для I условия (i). Имеем $x_1 \cdot \dots \cdot x_j \cdot W \cdot x_{j+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} = U \in \tau_G$. Отсюда вытекает, что для множества $[x_1^j I x_{j+1}^{n-1}]$ условие (i) выполняется и поэтому $[x_1^j I x_{j+1}^{n-1}] \subset I$. Таким образом, I – идеал $\langle X, [] \rangle$.

Покажем, что если $V \subset I, V \in \tau$, то для любой трансляции λ подгруппы X множество $\lambda(V) \in \tau$. В самом деле $X \supset \lambda(V) = [x_1^j V x_{j+1}^{n-1}] = x_1 \cdot \dots \cdot x_j \cdot V \cdot x_{j+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} \in \tau_G$, так как $V \in \tau_G$, в силу условия (i) для I . Следовательно, $\lambda(V) \in \tau$. Теорема доказана.

Следующий пример иллюстрирует теорему 1.

Пример 2. Пусть группа G – множество действительных чисел с операцией сложения, τ_G – естественная топология на множестве действительных чисел, $n=3$ и $X = \{1, 3, 5\} \cup (6; +\infty)$, топология τ является сужением топологии τ_G на X . Тогда (X, τ) – топологическая n -арная полугруппа. Очевидно, что если $U \in \tau_G$ и $U \subset X$, то $U \subset (6, +\infty)$ и, следовательно, $U \in \tau$. В качестве множества V возьмем непустое открытое в τ_G подмножество $(6, +\infty)$. Тогда условие (i) теоремы 1 будет выполнено. Очевидно, что множество $I = (6, +\infty)$ будет открытым идеалом (X, τ) , обладающим открытыми трансляциями на элементы X , и будет являться наибольшим по включению среди подмножеств X , удовлетворяющих условию (i).

Теорема 2. Пусть на $\langle X; [\] \rangle$ задана хаусдорфова топология τ , такая, что (X, τ) является топологической n -арной полугруппой. Тогда следующие условия равносильны:

(а) на (X, τ) существует ненулевая левинвариантная мера μ , такая, что для любой последовательности $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$ существует компактное множество K , такое, что $\mu([Kx_1^{n-1}]) > 0$;

(б) (X, τ) обладает открытым локально компактным идеалом I с открытыми трансляциями;

(в) на $\langle G, \cdot \rangle$ существует локально компактная топология τ_G , такая, что (G, τ_G) является топологической группой, сужение топологии τ_G на X слабее топологии τ , (X, τ) обладает открытым идеалом I , причем, сужение топологий τ и τ_G на I совпадают.

Доказательство. Пусть выполнено условие (а) теоремы и μ – ненулевая левинвариантная на (X, τ) мера. Пусть $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$ и $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \in G$. На группе $\langle G; \cdot \rangle$ зададим бинарную операцию $*$ следующим образом: $x * y = xa_1^{n-2}y$ ($x, y \in G$). Легко проверяется, что $\langle G; * \rangle$ является бинарной группой, а $\langle X; * \rangle$ – устойчивым подмножеством $\langle G; * \rangle$, a^{-1} является нейтральным элементом $\langle G; * \rangle$ и $a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$ является элементом, обратным для x . Очевидно, что $x * y = [xa_1^{n-2}y]$ для любых x, y из X и что бинарная операция $*$ в $\langle X; * \rangle$ непрерывна по совокупности аргументов. Мера μ является левинвариантной мерой на $\langle X; * \rangle$. Пусть $x \in X$. В силу условия (а) найдется компактное множество K в топологическом пространстве (X, τ) такое, что $\mu(K * x) = \mu([Ka_1^{n-2}x]) > 0$.

Из теоремы 4.8 работы [4] следует, что на $\langle G; * \rangle$ существует локально компактная топология τ_G , такая, что $\langle G; * \rangle$ становится топологической группой, существует непустое множество $V \subset X$, такое, что $V \in \tau_G \cap \tau$ и сужение топологий τ_G и τ на V совпадают.

Покажем, что $\langle G; \cdot \rangle$ с топологией τ_G является топологической группой. В топологическом пространстве (G, τ_G) операция $x \mapsto a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$ ($x \in G$) непрерывна, а операция $(x, y) \mapsto x \cdot a \cdot y$ ($x, y \in G$) непрерывна по совокупности аргументов. Полагая в последней операции $y = a^{-1} \cdot b$, получаем непрерывность операции $x \mapsto x \cdot a \cdot a^{-1} \cdot b = x \cdot b$, для любого $b \in G$. Аналогично устанавливаем непрерывность сдвига $x \mapsto b \cdot x$ ($x \in G$). Так как $x \cdot y = x \cdot a \cdot (a^{-1} \cdot y)$, то бинарная операция $(x, y) \mapsto x \cdot y$ непрерывна по совокупности аргументов. Наконец, из равенства $x^{-1} = a \cdot (a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a$ следует, что операция $x \mapsto x^{-1}$ ($x \in G$) непрерывна в (G, τ_G) .

Из теоремы 1 сразу вытекает справедливость условия (в) теоремы.

Если выполнено условие (в), то из теоремы 1 вытекает справедливость условия (б).

Пусть выполнено условие (б) и пусть $a \in I$, $x \in X$. Тогда $x = (xa^{n-1}) \cdot (a^{-1})^{n-1}$ и $x^{-1} = a^{n-1} \cdot (x \cdot a^{n-1})^{-1}$. Так как $x \cdot a^{n-1} = \left[x \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-1} \right] \in I$,

то отсюда вытекает, что открытый идеал I является системой образующих для G . Заметим, что сужение топологии τ на I является локально компактной топологией, $\langle I; [] \rangle$ является топологической n -арной полугруппой. Из теоремы и следствия 2 к ней работы [6] вытекает, что на G существует локально компактная топология τ_G , такая, что (G, τ_G) является топологической полугруппой, $I \in \tau_G$ и сужение топологии τ_G на I совпадает с сужением τ на I . Пусть $a \in I$. Так как для каждого компактного множества $K \subset X$ имеем $K \subset a^{n-1}K \subset I$ и $a_1^{n-1}K$ является компактным подмножеством в топологии τ , то $a^{n-1}K$ является компактным подмножеством топологического пространства (G, τ_G) . Отсюда следует, что K также, является компактным подмножеством (G, τ_G) . Из этого вытекает, что каждое борелевское подмножество (X, τ) является борелевским подмножеством (G, τ_G) . Пусть λ – левая мера Хаара группы (G, τ_G) . Отметим, что если K – компактное подмножество G положительной меры, $x \in G$, то $\lambda(Kx) > 0$. Сужение μ меры λ на борелевские подмножества (X, τ) будет удовлетворять всем требованиям условия (а). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухин В.В., Сергеева Д.В. Теорема двойственности для локально компактных абелевых n -групп // Сибирский математический журнал. 2008. № 6. С. 1361–1368.
2. Мухин В.В. Инвариантные меры на топологических n -полугруппах // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз. мат. навук. 2000. № 4. С. 16–21.
3. Сергеева Д.В. О существовании инвариантных мер на топологических абелевых n -арных полугруппах с сокращениями // Вестник ИжГТУ. Математика. 2013. № 2. С. 140–141.
4. Mukhin V.V. Invariant measures on topologicals semigroups which have on ideal with open translation mappings // Semigroup Forum. 2001. V. 62. P. 159–172.
5. Русаков С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. 264 с.
6. Мухин В.В., Филипова Е.Е. О продолжении топологии с системы образующих группы до топологии на группе // Известия вузов. Математика. 2009. № 6. С. 37–41.

Статья поступила 31.03.2015 г.

Sergeeva D.V. LEFT-INVARIANT MEASURES ON TOPOLOGICAL N -ARY SUBSEMI-GROUP OF BINARY GROUPS

DOI 10.17223/19988621/38/6

Convolutions of measures and functions, as well as the Fourier transform of measures on locally compact Abelian n -ary groups were introduced in [1]. Development of harmonic analysis on n -ary algebraic objects endowed with a topology is closely related to the existence of a non-zero invariant measure on such objects. Invariant measures on topological n -ary semigroups were considered in [2] and [3].

In Theorem 2 of this paper, we establish necessary and sufficient conditions for the existence of a left-invariant measure on topological n -ary subsemigroups of binary groups. It can be treated as an extension of the results of [4] to the case of n -ary topological semigroups. The result established in Theorem 1 establishes is interesting for topological algebra.

Keywords: left-invariant measure, topological n -ary semigroup, ideal of an n -ary semigroup.

SERGEeva Dina Vladimirovna (Vologda Institute of Law and Economics, Vologda, Russian Federation)

E-mail: dina_sergeeva@mail.ru

REFERENCES

1. Mukhin V.V., Sergeeva D.V. Teorema dvoystvennosti dlya lokal'no kompaktnykh abelevykh n -grupp. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 2008, no. 6, pp. 1361–1368. (in Russian)
2. Mukhin V.V. Invariantnye mery na topologicheskikh n -polugruppakh. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz. mat. nauk*, 2000, no. 4, pp. 16–21. (in Russian)
3. Sergeeva D.V. O sushchestvovanii invariantnykh mer na topologicheskikh abelevykh n -arnykh polugruppakh s sokrashcheniyami. *Vestnik IzhGTU. Matematika*, 2013, no. 2, pp. 140–141. (in Russian)
4. Mukhin V.V. Invariant measures on topological semigroups which have an ideal with open translation mappings. *Semigroup Forum*, 2001, vol. 62, pp. 159–172.
5. Rusakov S.A. *Algebraicheskie n -arnye sistemy: Silovskaya teoriya n -arnykh grupp*. Minsk, Navuka i tekhnika Publ., 1992. 264 p. (in Russian)
6. Mukhin V.V., Filipova E.E. O prodolzhenii topologii s sistemy obrazuyushchikh grupy do topologii na gruppe. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2009, no. 6, pp. 37–41. (in Russian)

А.Ш. Шукюров

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ ХМЫЛЕВОЙ И БУХТИНОЙ

Хорошо известно, что в каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис Шаудера, т.е. базис Шаудера $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\|x_n\|=1$ и $(x_n, x_m)=0$ для любых $n, m \in N$, $n \neq m$. Рассматривается последовательность элементов гильбертова пространства, для которой углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю. Изучается базисность и некоторые другие свойства таких систем. В частности, дается краткое доказательство одного результата Хмылёвой и Бухтиной и приводится обобщение этого результата.

Ключевые слова: базис Шаудера, система представления, гильбертово пространство, ортонормированная система.

Приведем следующие определения.

Определение 1. Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называется базисом Шаудера, если для любого элемента $x \in X$ существует единственная числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ сходится к элементу x по норме пространства X .

Определение 2. Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства X называется системой представления, если для любого элемента $x \in X$ существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ сходится к элементу x по норме пространства X .

Очевидно, что любой базис Шаудера является в то же время и системой представления; но обратное утверждение неверно, т.е. существуют системы представления, которые не являются базисами Шаудера.

Хорошо известно, что в каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис Шаудера, т.е. базис Шаудера $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\|x_n\|=1$ и $(x_n, x_m)=0$ для любых $n, m \in N$, $n \neq m$. Тот факт, что существует базис, где 1 заменена на любое другое положительное число, тривиален. Поэтому, естественно, возникает вопрос о существовании базиса, где углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю, т.е. 0 заменен на другое число. Первый, известный нам, ответ на этот вопрос дается в следующей привлекательной теореме Хмылёва и Бухтиной [1]:

Теорема [1]. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H , удовлетворяющая условиям:

- а) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,
 б) $(x_n, x_m) = a$, $0 < |a| < 1$, $n, m \in N, n \neq m$.

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H .

Отметим, что система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется базисной, если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера в замыкании своей линейной оболочки.

В этой заметке предлагаются некоторые уточнения к формулировке этой теоремы и дается более короткое и простое доказательство этого результата. Кроме этого, применяемое доказательство дает возможность получать обобщение этого результата.

Сначала сформулируем некоторые факты, которые имеют и некоторый самостоятельный интерес.

Утверждение 1. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H , удовлетворяющая условиям

- а) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,
 б) $(x_n, x_m) = a$, $n, m \in N, n \neq m$, где a некоторое число, такое, что $a \neq 1$.

Тогда система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – линейно независима.

Доказательство. Пусть $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + \dots = \theta$. Скалярное умножение обеих частей на x_n дает нам

$$a \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) + a_n(1 - a) = 0.$$

Отсюда вытекает $a_n = \text{const}$ для любого $n \in N$. Поэтому, так как ряд

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + \dots$$

сходится, то $a_n = 0$, $\forall n \in N$. **Утверждение доказано.**

Очень интересно, что при $a = 1$ это утверждение уже неверно (это легко следует из теоремы Коши – Буняковского – Шварца).

Утверждение 2. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H , удовлетворяющая условиям:

- а) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,
 б) $(x_n, x_m) = a$, $n, m \in N, n \neq m$, где a – некоторое число.

Тогда $a \geq 0$.

Доказательство. Известно (см. например, [3, задача 549]), что при этих условиях последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому элементу x_0 . Поэтому в равенствах $(x_m, x_n) = a$, переходя к пределу сначала при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$(x_0, x_n) = a, \text{ при } \forall n \in N. \quad (1)$$

А потом предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ получаем окончательно, что

$$a = (x_0, x_0) = \|x_0\|^2, \quad (2)$$

и поэтому $a \geq 0$. **Утверждение доказано.**

Из этого утверждения следует, что нет надобности использовать символ модуля для числа a в формулировке вышеприведенной теоремы. Более того, как показывает следующий уточненный вариант этой теоремы, вообще нет никакой нужды налагать на число a какие-то условия, кроме условия $a \neq 0$.

Теорема. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H , удовлетворяющая условиям:

- а) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,
- б) $(x_n, x_m) = a$, $a \neq 0$, $n, m \in N$, $n \neq m$.

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H .

Доказательство. Как уже отмечено, известно (см., например, [3, задача 549]), что при этих условиях последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходиться к некоторому элементу x_0 . Так как x_0 принадлежит замкнутому линейному многообразию, порождаемому множеством $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, лемму 27 из [4, с. 81]), то для доказательства достаточно показать, что элемент x_0 не имеет разложения:

$$x_0 = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + \dots$$

Пусть это разложение имеет место. Тогда, используя (1) и (2), имеем

$$a = (x_0, x_0) = a \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots),$$

$$a = (x_0, x_n) = a_n \cdot (1 - a) + a \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots).$$

Отсюда получается $a = a_n(1 - a) + a$, и поэтому $a_n = 0$, $\forall n \in N$. Это означает, что $x_0 = \theta$. А это противоречит (2). **Теорема доказана.**

Замечание. При доказательстве теоремы считается, что $a \neq 1$, так как при $a = 1$ система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно зависима (случай равенства в неравенстве Коши – Буняковского – Шварца возможен только в этом случае).

Приведенное доказательство этой теоремы показывает справедливость следующего более общего результата:

Теорема. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H , удовлетворяющая условиям:

- а) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,
- б) $(x_n, x_m) = a$, $a \neq 0$, $n, m \in N$, $n \neq m$.

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является системой представления в подпространстве H , порожденного этими элементами (и поэтому и в пространстве H).

Автор выражает благодарность А.А. Гусейнли за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хмылева Т.Е., Бухтина И.П. О некоторой последовательности элементов в гильбертовом пространстве, не являющейся базисом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1(1). С. 58–62.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы: общая теория. М.: ИЛ, 1962.

Статья поступила 14.03.2015 г.

Shukurov A. Sh. ON A PAPER BY KHMYLEVA AND BUKHTINA

DOI 10.17223/19988621/38/7

It is well known that every separable Hilbert space possesses an orthonormal Schauder bases, i.e. a Schauder bases $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ for which $\|x_n\|=1$ и $(x_n, x_m)=0$ for any $n, m \in N$, $n \neq m$. In this note, we consider a sequence of elements in a Hilbert space for which angles between any two terms are equal and different from zero. Basicity and some other properties of such systems are investigated. In particular, a short proof of a result by Khmyleva and Bukhtina is provided and a more general form of this result is stated.

Keywords: Schauder bases, system of representation, Hilbert space, orthonormal system.

SHUKUROV Aydin Shukur (PhD, Research Fellow, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

E-mail: ashshukurov@gmail.com

REFERENCES

1. Khmyleva T.E., Bukhtina I.P. O nekotorykh posledovatel'nosti elementov v gil'bertovom prostranstve, ne yavlyayushchiesya bazisom. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2007, no. 1(1), pp. 58–62. (in Russian)
2. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Kratkiy kurs funktsional'nogo analiza*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982. (in Russian)

МЕХАНИКА

УДК 532.525:541.12.012
DOI 10.17223/19988621/38/8

И.М. Васенин, Н.Н. Дьяченко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ
ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Работа посвящена моделированию течения двухфазной среды в энергосистемах, рабочим телом которых являются продукты сгорания металлизированных топлив. Описание взаимодействия частиц дискретной фазы базируется на непрерывном подходе. В рамках предлагаемой модели представлен численный расчёт течения двухфазной среды в сопле РДТТ.

Ключевые слова: *двухфазное течение, полидисперсный ансамбль частиц, коагуляция, дробление, энергия флуктуаций.*

Продукты сгорания металлизированного топлива представляют смесь газа и полидисперсного ансамбля жидких частиц оксида металла, используемого в качестве добавки в топливе. Подавляющее большинство исследователей для описания дискретной фазы используют одномерную функцию распределения частиц по размерам, подробный библиографический список этих работ представлен в обзорах [1, 2] и монографии [3]. В процессе движения частицы разных размеров сталкиваются, это сопровождается их слиянием и дроблением, кроме этого, крупные частицы дробятся за счёт взаимодействия с газом. Следовательно, частицы, имеющие равные размеры, но разную предысторию («рождённые» за счёт слияния, дробления и не участвующие во взаимодействии) отличаются друг от друга импульсом и энергией. Решение задачи двухфазного течения в данном случае требует введения функции распределения частиц не только по размерам, но и по скоростям и температурам внутри каждой фракции.

По данному пути пошли авторы работы [4]. Перераспределение энергии сталкивающихся частиц внутри фракции учитывается через энергию хаотического движения частиц. Последующее развитие этой модели представлено в [5]. Работа [4] базируется на дискретной модели взаимодействия частиц. Попытка построения статистической модели с использованием непрерывного подхода описания взаимодействия частиц предпринята авторами работы [6]. Однако надо отметить, что операция осреднения ансамбля частиц по параметрам в этой работе проводится формально и, зачастую, не согласуется с физическим смыслом.

Целью данной работы является рассмотреть течение газо-капельной среды в рамках статистической модели с использованием непрерывного подхода описания взаимодействия частиц жидкой фазы.

1. Кинетический подход моделирования дисперсной среды

Для описания полидисперсного ансамбля жидких частиц в многомерном фазовом пространстве введем функцию распределения $f = f(m, \mathbf{U}, T, \mathbf{r}, t)$, где $m, \mathbf{U}, T$ – масса, скорость, температура частиц; $\mathbf{r}, t$ – пространственная и временная координаты. Кинетическое уравнение для функции распределения запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla_r f + \nabla_U \frac{\mathbf{F}}{m} f + \frac{\partial}{\partial T} \frac{q}{cm} f = I. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{F}$ – сила, действующая на частицу со стороны несущей среды; q – тепловой поток между частицей и несущей средой; c – теплоемкость материала частицы; ∇_r, ∇_U – операторы градиента в физическом и скоростном пространствах; $f = f(m, \mathbf{U}, T, \mathbf{r}, t)$ – введена для краткости записи; I – интеграл столкновения.

Рассмотрим уравнение (1.1) при фиксированном значении массы m , которая входит в него как параметр. Индивидуальную скорость частицы можно представить в виде суммы средней $\mathbf{U}_0$ и пульсационной составляющей $\mathbf{U}'$ скорости частиц массой m : $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}'$.

Также можно ввести среднюю T_0 и пульсационную составляющую T' температуры для частиц массой m : $T = T_0 + T'$.

Уравнение (1.1) в новых переменных $\mathbf{U}', T'$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}' \nabla_r f - \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} \nabla_{U'} f - \mathbf{U}' \nabla_U f : \nabla_r \mathbf{U}_0 + \nabla_{U'} \left(\frac{\mathbf{F}}{m} f \right) - \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial f}{\partial T'} - \\ - \frac{\partial f}{\partial T'} \mathbf{U}' \nabla_r T_0 + \frac{\partial}{\partial T'} \left(\frac{q}{cm} f \right) = I, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\nabla_{U'}$ – оператор градиента в пространстве пульсационных скоростей; $(:)$ – двойное тензорное умножение; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \nabla_r$.

Для получения системы уравнений, описывающей течение полидисперсной среды, вводится понятие признака частиц. Признаком может быть любая величина, характеризующая частицу и переносимая вместе с ней $\Psi = \Psi(m, \mathbf{U}, T, \mathbf{r}, t)$. Среднее значение признака частиц $\langle \Psi \rangle$ по ансамблю частиц с массами $(m, m + dm)$ определим равенством

$$\langle \Psi(m) \rangle = \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty \Psi f d\mathbf{U} / \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty f d\mathbf{U}.$$

Умножая кинетическое уравнение (1.2) на признак Ψ и интегрируя по всему пространству скоростей и температур, получим уравнение переноса признака частиц

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f(m) \langle \Psi(m) \rangle) + f(m) \langle \Psi(m) \rangle \nabla_r \mathbf{U}_0 + \nabla_r (f(m) \langle \Psi(m) \mathbf{U}' \rangle) - \\ - f(m) \left[\left\langle \frac{d\Psi(m)}{dt} \right\rangle + \langle \mathbf{U}' \nabla_r \Psi(m) \rangle + \left(\frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m} - \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} \right) \langle \nabla_{U'} \Psi(m) \rangle - \langle \nabla_{U'} \Psi(m) \mathbf{U}' \rangle : \nabla_r \mathbf{U}_0 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{cm} \left\langle q \frac{\partial \Psi(m)}{\partial T'} \right\rangle - \frac{dT_0}{dt} \left\langle \frac{\partial \Psi(m)}{\partial T'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Psi(m)}{\partial T'} \mathbf{U}' \right\rangle \nabla_r T_0 = \Delta \langle \Psi(m) \rangle, \quad (1.3)$$

где $\Delta \langle \Psi(m) \rangle = \int \int \Psi I dT' d\mathbf{U}'$ представляет собой выражение для скорости изменения признака Ψ -частиц массой m за счёт столкновений.

Подставив в уравнение (1.3) в качестве признака частиц моменты скорости $(\mathbf{U}', \mathbf{U}'\mathbf{U}', \dots)$, температуры $(T', T'T', \dots)$, смешанные моменты $(T'\mathbf{U}', T'T'\mathbf{U}', \dots)$, получим систему моментных уравнений. В работе [4] показано, что при исследовании течения продуктов сгорания металлизированных топлив в камере сгорания и сопловом блоке РДТТ можно ограничиться рассмотрением системы уравнений, включающей моменты второго порядка. Многократные интегралы в правой части уравнения (1.3), описывающие скорость изменения признака Ψ вследствие столкновений, в общем случае слишком сложны для практических приложений. Однако, если предположить, что изменение признака Ψ при столкновении определяется только средними параметрами сталкивающихся фракций, их можно записать в упрощенном виде. Итак, пусть функция распределения сталкивающихся частиц зависит только от массы этих частиц. В этом случае число и параметры образующихся при столкновении осколков будут зависеть только от масс взаимодействующих частиц. Плотность распределения осколков, образующихся при столкновении частиц с массами m_1 и m_2 по массам m , обозначим $\Phi(m, m_1, m_2)$.

С целью упрощения дальнейших рассуждений умножим левую и правую части уравнения (1.3) на dm . Полученное дифференциальное равенство представляет собой выражение для скорости изменения признака частиц из диапазона $[m, m + dm]$. Найдем вклад, который вносят в это выражение осколки сталкивающихся частиц. Для этого вычислим число столкновений между частицами с массами из диапазонов $[m_1, m_1 + dm_1]$ и $[m_2, m_2 + dm_2]$. Каждая частица массы m_2 обтекается «жидкостью» из частиц массы m_1 . Объем «жидкости», обтекающей частицу за единицу времени, равен $\mathcal{E}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)|$, где $\mathcal{E}(m_1, m_2)$ – коэффициент, учитывающий изменение траектории малых частиц.

В единице объема содержится $f(m_1)dm_1$ частиц из диапазона $[m_1, m_1 + dm_1]$ и $f(m_2)dm_2$ частиц из диапазона $[m_2, m_2 + dm_2]$. Поэтому на одну частицу массы m_2 в единицу времени приходится $\mathcal{E}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)| f(m_1)dm_1$ столкновений с частицами из диапазона $[m_1, m_1 + dm_1]$. Суммарное число столкновений в единицу времени в единице объема между частицами из рассмотренных диапазонов будет

$$\mathcal{E}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)| f(m_1)dm_1 f(m_2)dm_2. \quad (1.4)$$

Число осколков массы m , попадающих в диапазон $[m, m + dm]$ при каждом столкновении, согласно сказанному выше, $\Phi(m, m_1, m_2)dm$.

Эти осколки приносят во фракцию частиц из диапазона $[m, m + dm]$ количество признака Ψ , равное

$$\langle \Psi \rangle \Phi(m, m_1, m_2)dm. \quad (1.5)$$

Перемножая (1.4), (1.5) и интегрируя по всем массам сталкивающихся частиц, найдем вклад в изменение признака $\langle \Psi \rangle$ осколков столкновений

$$dm \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \langle \Psi \rangle \Phi(m, m_1, m_2) f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2. \quad (1.6)$$

Здесь $k(m_1, m_2) = \mathfrak{D}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)|$.

Столкновение частиц массы m с другими частицами приводит к их уничтожению, следовательно, скорость уноса признака $\langle \Psi \rangle$ определяется интегралом

$$-dm \int_0^\infty k(m, m_1) R \langle \Psi \rangle f(m) f(m_1) dm_1, \quad (1.7)$$

где оператор R записывается в соответствии с выбранной моделью взаимодействия. Объединяя (1.6), (1.7) и сокращая на величину dm , получим для скорости изменения признака $\langle \Psi \rangle$ в результате столкновений формулу

$$\Delta \langle \Psi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \langle \Psi \rangle \Phi(m, m_1, m_2) f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2 - \int_0^\infty k(m, m_1) R \langle \Psi \rangle f(m) f(m_1) dm_1. \quad (1.8)$$

2. Уравнение среды в случае непрерывной модели столкновения частиц

Согласно данной модели, при столкновении меньшей частицы – снаряда m_2 с большей частицей-мишенью m_1 – происходит изменение частицы мишени на величину $\Phi_{12} m_2$, где Φ_{12} или $\Phi(m_1, m_2)$ – коэффициент эффективности столкновений [3]. При этом указанное изменение массы вследствие статистического осреднения по большому числу подобных столкновений равномерно распределяется по всем n частицам фракции m_1 . Таким образом, изменение массы каждой частицы m_1 в среднем за одно столкновение будет равно Φ_{12}/n . Если, кроме того, предположить, что среднестатистическая масса образующихся мелких осколков равна массе частиц снарядов, то функция распределения вторичных частиц по массам можно представить в виде

$$\Phi(m, m_1, m_2) = n \delta \left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12} m_2}{n} \right) + ((1 - \Phi_{12}) \delta(m - m_2)). \quad (2.1)$$

Чтобы быть последовательными, необходимо одновременно предположить, что при каждом столкновении с меньшими частицами уничтожаются все n частиц фракции m , в то время как при столкновении с частицами больших размеров уничтожается только одна такая частица. Подставим функцию $\Phi(m, m_1, m_2)$ в

правую часть соотношения (1.8). Заменим оператор $\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty () dm_1 dm_2$ на эквива-

лентные интегралы, либо $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty () dm_1 \right] dm_2$, либо $\int_0^\infty \left[\int_0^{m_1} () dm_2 \right] dm_1$.

Оператор R запишем в виде

$$R = n[h(m_1) - h(m_1 - m)] + h(m_1 - m),$$

где h – единичная функция Хевисайда.

В результате из уравнения (1.3) для функции $f(m)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m)U_0(m)] = \\ & = \int_0^\infty dm_2 \int_{m_2}^\infty k(m_1, m_2) n \delta\left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12}m_2}{n}\right) f(m_1) f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_0^\infty dm_1 \int_0^{m_1} k(m_1, m_2) \delta(m - m_2) (1 - \Phi_{12}) f(m_1) f(m_2) dm_2 - \\ & - n \int_0^m f(m) f(m_1) k(m, m_1) dm_1 - \int_m^\infty f(m) f(m_1) k(m, m_1) dm_1. \end{aligned}$$

При упрощении интегралов, содержащих $\delta\left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12}m_2}{n}\right)$, сделаем замену

$\xi = m_1 + \frac{\Phi_{12}m_2}{n}$ и при больших n для вычисления m_1 из этого выражения вос-

пользуемся разложением $m_1 = \xi - \Phi(\xi, m_2) \frac{m_2}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Полагая дополнительно, что частицы, которые сталкиваются с нулевой разностью скоростей, обязательно сливаются ($\Phi(m_1, m_2) = 1$), найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m)U_0(m)] = \\ & = \int_0^{\frac{mn}{1+n}} nk \left[\frac{m - \Phi(m_1, m_2) \frac{m_2}{n}, m_2}{1 + \frac{\partial \Phi(m_1, m_2)}{\partial m} \frac{m_2}{n}} \right] f\left(m - \frac{\Phi(m_1, m_2)}{n} m_2\right) f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_m^\infty k(m_1, m) [1 - \Phi(m_1, m)] f(m) f(m_1) dm_1 - \\ & - n \int_0^m k(m, m_2) f(m) f(m_2) dm_2 - \int_m^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1. \end{aligned}$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд по малому параметру $1/n$ и учитывая, что $k(m, m) = 0$ с точностью до величины $\sim 1/n^2$, получим уравнение для функции $f(m)$ в случае непрерывной модели столкновений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m)}{\partial t} + \nabla_r [U_0(m) f(m)] + \frac{\partial}{\partial m} [f(m) m_t] = \\ & = -f(m) \int_m^\infty k(m, m_1) \Phi(m, m_1) f(m_1) dm_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $m_t = \int_0^m k(m, m_2) \Phi(m, m_2) m_2 dm_2$ – скорость возрастания среднестатистической массы частиц фракции m .

В работе [5] уравнения движения и теплообмена непрерывной модели выводятся в допущении равновесной модели столкновений. При этом предполагается, что количество движения и температура частиц фракции m_1 при столкновении с меньшими частицами m_2 изменяется так, как будто происходит столкновение частиц из диапазона $[m_1, m_1 + dm_1]$ с очень маленькими частицами с массой m_2/n . Полученные уравнения совпадают с известными уравнениями непрерывной модели [3]. Однако данный подход противоречит физическому смыслу. Более логичным является такой способ вывода этих уравнений, при котором сначала вычисляется изменение признака при индивидуальном столкновении частиц с массами m_1 и m_2 , а затем с учетом большого числа подобных столкновений проводится статистическое осреднение этой величины по всем частицам фракции m . Для иллюстрации данного способа рассмотрим подробнее вывод уравнения движения.

В результате равновесного обмена количеством движения скорости изменения признака U частиц после столкновения будут равны

$$V(m, m_1, m_2) = \frac{m_1 U_0(m_1) + m_2 U_0(m_2)}{m_1 + m_2},$$

$$\begin{aligned} V(m, m_1, m_2) - U_0(m) &= \frac{m_1 U_0(m_1) + m_2 U_0(m_2)}{m_1 + m_2} - U_0(m_1) + [U_0(m_1) - U_0(m)] = \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} [U_0(m_2) - U_0(m_1)] + [U_0(m_1) - U_0(m)]. \end{aligned}$$

Предполагая, что изменение массы $\Delta m = \Phi(m_1, m_2) m_2$ при столкновении мало, приближенно запишем

$$U_0(m_1) - U_0(m) \approx -\frac{\partial U_0(m)}{\partial m} \Phi(m_1, m_2) m_2.$$

Тогда получим

$$V(m, m_1, m_2) - U_0(m) \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2} [U_0(m_2) - U_0(m_1)] - \frac{\partial U_0(m)}{\partial m} \Phi(m_1, m_2) m_2.$$

При статистическом усреднении этого приращения по всем частицам фракции m найдем, что каждая частица фракции получит приращение признака за счет одного столкновения, равное

$$\frac{V - U_0(m)}{n} \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{[U_0(m_2) - U_0(m_1)]}{n} - \frac{\partial U_0(m)}{\partial m} \Phi(m_1, m_2) \frac{m_2}{n}. \quad (2.3)$$

При столкновении частиц фракции m с более крупными частицами меняется только их число, но не масса. Поэтому для таких столкновений

$$V - U_0(m) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} [U_0(m_2) - U_0(m_1)]. \quad (2.4)$$

Используя (2.1), (2.3) и (2.4), уравнение движения запишем как

$$\begin{aligned}
 f(m) \frac{dU_{0i}(m)}{dt} + \nabla_r [f(m) \langle U_i U \rangle] - f(m) \frac{F_i}{m} = \\
 = \int_0^\infty dm_2 \int_{m_2}^\infty k(m_1, m_2) n \delta \left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12} m_2}{n} \right) \times \\
 \times \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(U_{0i}(m_2) - U_{0i}(m_1))}{n} - \frac{\partial U_{0i}(m)}{\partial m} \frac{\Phi(m_1, m_2)}{n} \frac{m_2}{n} \right] \times \\
 \times f(m_1) f(m_2) dm_1 + \int_0^\infty dm_1 \int_0^{m_1} k(m_1, m_2) \delta(m - m_2) (1 - \Phi(m_1, m_2)) \times \\
 \times \frac{m_2}{m_1 + m_2} (U_{0i}(m_2) - U_{0i}(m_1)) f(m_1) f(m_2) dm_2.
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя свойства δ -функции и переходя затем к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим уравнение движения в рамках непрерывной модели

$$\begin{aligned}
 f(m) \frac{dU_{0i}(m)}{dt} + \nabla_r [f(m) \langle U_i U \rangle] + m_i f(m) \frac{\partial U_{0i}(m)}{\partial m} = \\
 = f(m) \frac{F_i}{m} + \int_0^m k(m, m_1) \frac{m_2}{m + m_2} (U_{0i}(m_2) - U_{0i}(m)) f(m) f(m_2) dm_2 + \\
 + \int_m^\infty k(m_1, m) (1 - \Phi(m_1, m)) \frac{m}{m_1 + m} (U_{0i}(m_1) - U_{0i}(m)) f(m) f(m_1) dm_1.
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогичный подход приводит к уравнению для температуры частиц:

$$\begin{aligned}
 f(m) c \frac{dT_0(m)}{dt} + c \nabla_r [\langle T(m) U_i f(m) \rangle] + c m_i f(m) \frac{\partial T_0(m)}{\partial m} = \\
 = f(m) \frac{\langle q \rangle}{m} + \int_0^m k(m, m_2) (E(m_2) - E(m)) f(m) f(m_2) dm_2 + \\
 + \int_m^\infty k(m_1, m) (1 - \Phi(m_1, m)) (E(m_1) - E(m)) f(m) f(m_1) dm_1,
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $E(m_2) - E(m) = c \frac{m_2}{m_1 + m_2} (T_0(m_2) - T_0(m)) + \frac{m m_2}{(m + m_2)^2} \frac{(U(m_2) - U(m))^2}{2}$,

$$E(m_1) - E(m) = c \frac{m_1}{m + m_1} (T_0(m_1) - T_0(m)) + \frac{m m_1}{(m + m_1)^2} \frac{(U(m_1) - U(m))^2}{2}.$$

В уравнении движения частиц входят элементы тензора напряжений, энергия хаотического движения выражается через линейный инвариант этого тензора

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i' U_i' \rangle.$$

Для вывода уравнения энергии хаотического движения воспользуемся уравнением переноса и для признака $\Psi = U_i' U_j'$ запишем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m) \langle U_i' U_j' \rangle}{\partial t} + \nabla_r [f(m) U_0(m) \langle U_i' U_j' \rangle] + \nabla_r [f(m) \langle U_i U_j U \rangle] - \\ & - \frac{f(m)}{m} (\langle F_i U_j \rangle + \langle F_j U_i \rangle) + f(m) [\langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0j}(m) + \langle U U_j \rangle \nabla_r U_{0i}(m)] = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \Phi(m, m_1, m_2) [V_i(m, m_1, m_2) - U_{0i}(m)] [V_j(m, m_1, m_2) - U_{0j}(m)] \times \\ & \times f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2 - \langle U_i' U_j' \rangle \int_0^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1, \end{aligned}$$

просуммируем это уравнение при $i = j$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m) \epsilon}{\partial t} + \nabla_r [f(m) U_0(m) \epsilon] + \nabla_r \left[f(m) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i U_i U \rangle \right] + 2 \frac{\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} \rangle}{m} f(m) + \\ & + f(m) \sum_{i=1}^3 \langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0i}(m) = -\epsilon(m) \int_0^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \Phi(m, m_1, m_2) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [V_i - U_{0i}(m)]^2 f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2. \end{aligned}$$

В силу предположений равновесной модели вновь образовавшаяся частица массы m приобретает скорость и энергию пульсаций

$$U'(m) = \frac{m_1 U(m_1) + m_2 U(m_2)}{m_1 + m_2} - U_0(m); \quad \frac{|U'(m)|^2}{2}.$$

Распределив эту энергию путем усреднения по всем n частицам массы m_1 , найдем, что в результате такого столкновения эти частицы будут обладать энергией $\frac{|U'(m)|^2}{2n} + \epsilon(m_1)$, где $\epsilon(m_1)$ – энергия частицы m_1 до столкновения и образования осколков массы $m = m_1 + \frac{\Phi_{12}}{m} m_2$.

Одновременно в этой модели уничтожаются все n частицы массы m , поэтому уравнение для энергии хаотического движения примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m) \epsilon U_0(m)] + \nabla_r \left[f(m) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i U_i U \rangle \right] + 2 \frac{\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} \rangle}{m} f(m) + \\ & + f(m) \sum_{i=1}^3 \langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0i}(m) = \\ & = \int_0^\infty dm_2 \int_{m_2}^\infty k(m_1, m_2) n \delta \left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12} m_2}{n} \right) \left[\frac{(V - U_0(m))^2}{2n} + \epsilon(m_1) \right] f(m_1) f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_0^\infty dm_1 \int_0^{m_1} k(m_1, m_2) \delta(m - m_2) (1 - \Phi_{12}) \frac{|V - U_0(m)|^2}{2} f(m_1) f(m_2) dm_2 - \\ & - n \int_0^m \epsilon(m) k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1 - \epsilon(m) \int_m^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1. \end{aligned}$$

Используя свойства δ -функции, разлагая затем подынтегральное выражение в ряд по малому параметру $1/n$, получим уравнение для энергии хаотического движения в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m) \epsilon U_0(m)] + \nabla_r \left[f(m) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i U_i U \rangle \right] + 2 \frac{\langle FU \rangle}{m} + \\ & + f(m) \sum_{i=1}^3 \langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0i}(m) + \frac{\partial}{\partial m} (\epsilon f(m) m_t) = \\ & = f(m) \int_0^m k(m, m_2) \left[\frac{m U_0(m) + m_2 U_0(m_2)}{m + m_2} - U_0(m) \right]^2 \frac{1}{2} f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_m^\infty k(m_1, m) (1 - \Phi(m_1, m)) \left[\frac{m U_0(m) + m_1 U_0(m)}{m + m_1} \right]^2 \frac{1}{2} f(m) f(m_1) dm_1 - \\ & - \epsilon(m) \int_m^\infty f(m) f(m_1) k(m_1, m) dm_1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

К уравнениям (2.2), (2.6) – (2.8) добавим уравнение изменения массы

$$\frac{dm}{dt} = \int_0^m k(m_1, m_2) \Phi(m_1, m_2) m_2 f(m_2) dm_2. \quad (2.9)$$

В общем случае для расчёта энергии ϵ необходимо знать все компоненты тензора напряжений, исключением является квазиодномерный случай. Записывая систему уравнений (2.2), (2.6) – (2.9) для квазиодномерного течения и пренебрегая моментами третьего порядка, получим систему, которая является замкнутой и описывает поведение жидких частиц полидисперсного ансамбля.

3. Результаты численного расчета

В качестве примера использования предлагаемой модели проведен расчёт установившегося движения продуктов сгорания металлизированного топлива в сопле ракетного двигателя в квазиодномерной постановке. Математическая постановка задачи подробно представлена в работах [5, 6]. Уравнения для газовой фазы заимствованы из работы [3]. Коэффициенты и безразмерные критерии, определяющие взаимодействие частиц между собой и газом заимствованы из работ [3, 5]. Система уравнений решалась на основе обратной задачи. Для численного интегрирования системы уравнений газа использовался стационарный аналог нецентральной конечно-разностной схемы Мак-Кормака [7] второго порядка точности. Интегрирование системы уравнений фракции частиц осуществлялось с помощью неявной разностной схемы [8], имеющей также второй порядок точности. На входном сечении использовалось условие скоростного и температурного равновесия между газовой фазой и частицами. Течение рассчитывалось в квазиодномерной постановке для модельного радиусно-профилированного сопла [9]. Радиус скругления в горловине сопла $r = r_*$ (r_* – радиус минимального сечения сопла), углы поджатия: в дозвуковой области $\alpha_1 = 45^\circ$; в сверхзвуковой $\alpha_2 = 24^\circ$ и $\alpha_3 = 7^\circ$; в качестве металлической добавки топлива используется порошок алюминия.

Значение исходных параметров:

$$T_k = 3200 \text{ К}; P_k = 5.89 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\mu = 0.89 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; R = 300 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Непрерывная функция распределения частиц оксида алюминия по размерам на входе в сопло задавалась в виде нормально-логарифмического закона с параметрами: $r_0 = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (средний радиус частиц); $\sigma = 1.5$ (дисперсия). Дробление частиц определяется двумя механизмами – взаимодействием с газом и взаимодействием между собой [5].

На рис. 1 представлен результат расчета изменения среднемассового размера частиц конденсата вдоль оси сопла x (здесь $x = L/r_*$, L – размерная длина сопла). В дозвуковой области сопла процесс коагуляции превосходит процесс дробления и достигает своего максимального значения в области критического сечения сопла. В транзвуковой области процесс дробления значительно превосходит процесс коагуляции, что влечет уменьшение среднемассового размера частиц. В сверхзвуковой области за счет уменьшения разности скорости частиц разных размеров и расширения сопла число столкновений между частицами мало, и, как следствие, среднемассовый размер частиц практически не изменяется. Изменение D_{43} вдоль сопла с учетом флуктуации энергии частиц представлен штрихованной кривой.

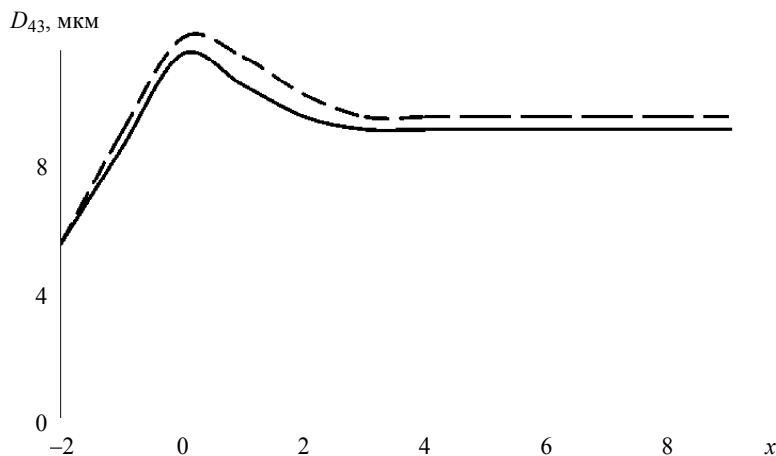


Рис. 1. Изменение среднемассового размера частиц (D_{43}) вдоль сопла ($r_* = 0.2 \text{ м}$; $z = 0.4$)

Рис. 2 иллюстрирует зависимость двухфазных потерь от критического радиуса сопла. Сплошная линия соответствует расчету без учета флуктуаций энергии частиц, штрихованная с учетом флуктуаций.

На рис. 3 представлен результат расчета зависимости двухфазных потерь от весовой доли конденсата. Как и в вышеприведенных графиках, сплошная линия соответствует расчету без учета флуктуаций энергии частиц, штрихованная – с учетом.

Двухфазные потери в данных расчетах обусловлены скоростной и температурной неравновесностью потока.

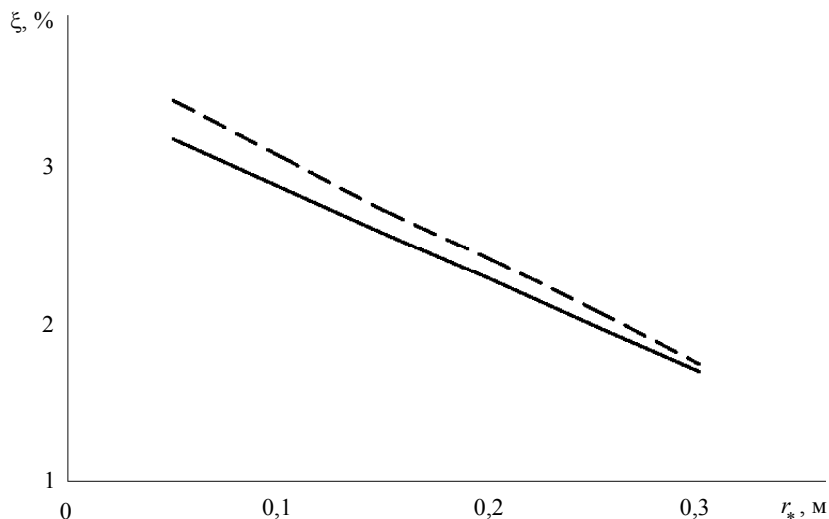


Рис. 2. Зависимость двухфазных потерь от критического радиуса сопла ($z = 0.4$)

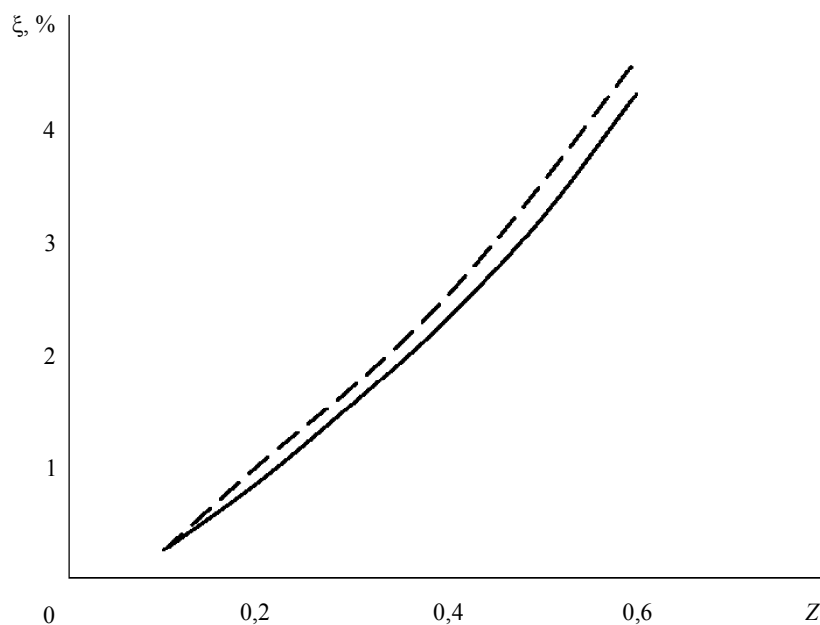


Рис. 3. Зависимость двухфазных потерь от весовой доли конденсата ($r_* = 0.2 \text{ м}$)

Заключение

Разработана статистическая модель течения двухфазной смеси, в которой взаимодействие частиц дискретной фазы базируется на непрерывном подходе. Модель имеет более строгое физическое обоснование и более удобное в численной реализации по сравнению с ранее предлагаемыми моделями данного класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А.Н., Нигматуллин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 6. М.: Изд-во ВИНТИ, 1972. С. 93–174.
2. Шрайбер А.А. Многофазные и полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. Т. 3. М.: Изд-во ВИНТИ, 1988. С. 33–39.
3. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
4. Бутов В.Г., Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующих частиц // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 3. С. 33–39.
5. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г. и др. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
6. Дьяченко Н.Н., Дьяченко Л.И. Математическое моделирование течения двухфазных сред с учетом распределения коагулирующих частиц по импульсам // Теплофизика и аэродинамика. 1995. Т. 2. № 1. С. 67–74.
7. Пирумов У.Г. Расчет течения газа в сопле Лавалья // Механика жидкости и газа. 1967. № 5. С. 10–22.
8. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука. 1988. 222 с.
9. Пирумов У.Г., Расляков Г.С. Газовая динамика сопел. М.: Наука. 1990. 336 с.

Статья поступила 05.08.2015 г.

Vasenin I.M., Dyachenko N.N. MATHEMATICAL MODELING OF THE TWO-PHASE FLOW
DOI 10.17223/19988621/38/8

The work is devoted to modeling of the two-phase flow in power systems for which combustion products of metalized fuels serve as a working body. The redistribution of power within fractions of interacting particles is determined by the energy of their chaotic motion. The description of the interaction between particles of the discontinuous phase is based on the continuous approach. Results of numerical calculation of the quasi-one-dimensional steady flow of combustion products in the SRM nozzle are presented.

Keywords: two-phase flow; polydisperse ensemble of particles; coagulation; crushing; fluctuation energy.

VASENIN Igor Michailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

DYACHENKO Nikolay Nikolaevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

REFERENCES

1. Krayko A.N., Nigmatullin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. Mekhanika mnogofaznykh sred. *Itoги nauki i tekhniki. Gidromekhanika*, vol. 6. Moscow, VINITI Publ., 1972, pp. 93–174. (in Russian)
2. Shrayber A.A. Mnogofaznye i polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnykh sostavom diskretnykh vklucheniya. *Itoги nauki i tekhniki. Kompleksnye i spetsial'nye razdely mekhaniki*, vol. 3. Moscow, VINITI Publ., 1988, pp. 33–39. (in Russian)
3. Sternin L.E., Shrayber A.A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994. 320 p. (in Russian)

4. Butov V.G., Vasenin I.M., D'yachenko N.N. Model' dvizheniya polidispersnogo kondensata s uchetom sluchaynykh pul'satsiy skorosti i temperatury koaguliruyushchikh chastits. *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1981, no. 3, pp. 33–39. (in Russian)
5. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G. i dr. *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ, 1986. 262 p. (in Russian)
6. D'yachenko N.N., D'yachenko L.I. Matematicheskoe modelirovanie techeniya dvukhfaznykh sred s uchetom raspredeleniya koaguliruyushchikh chastits po impul'sam. *Teplofizika i aerodinamika*, 1995, vol. 2, no. 1, pp. 67–74. (in Russian)
7. Pirumov U.G. Raschet techeniya gaza v sope Lavalya. *Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1967, no. 5, pp. 10–22. (in Russian)
8. Rychkov A.D. *Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1988. 222 p. (in Russian)
9. Pirumov U.G., Raslyakov G.S. *Gazovaya dinamika sopel*. Moskow, Nauka Publ., 1990. 336 p. (in Russian)

УДК 681.518.5:004.5

DOI 10.17223/19988621/38/9

А.А. Кулешов, В.А. Солоненко, А.А. Ящук

МОНИТОРИНГ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИЧАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Описана методика визуализации текущего напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции. Для решения поставленной задачи рассмотрена методика использования базы данных отклика конечно-элементной (КЭ) модели конструкции пирса, построенной при помощи программного комплекса ANSYS. Используя средства объектно-ориентированного программирования в среде C++, КЭ-модель актуализируется поступающей информацией с датчиков измерительной системы в режиме реального времени с визуализацией текущей картины НДС.

Ключевые слова: причал, конечно-элементная модель, ANSYS, система мониторинга, датчики, визуализация НДС.

Оценка технического состояния промышленных объектов ведется в значительной степени визуально при помощи контрольно-измерительной техники мониторинга. Так называемый периодический мониторинг не всегда позволяет оперативно отслеживать критические нагрузки, смену их характера и причину возникновения, что может привести к необратимым скрытым деформационным процессам. Использование автоматических информационно-измерительных систем (ИИС) ввиду их большой стоимости дает ограниченную информацию только по выбранным контрольным точкам и не позволяет оценивать полную картину НДС [1–3].

В настоящей работе поставлена цель создать такую методику, которая позволила бы организовать переход от фиксирования параметров пространственного деформирования в строго определенных местах к визуализации распределения внутренних усилий, возникающих по всей конструкции в режиме реального времени для принятия превентивных мер безопасности.

В инженерной практике применение численных расчетов НДС всех конструкций сооружений под действием эксплуатационных нагрузок в непрерывном режиме организовать не представляется возможным. Решение подобного класса задач является ресурсоемкой как с точки зрения вычислительных, так и временных затрат. Например, при решении методом конечных элементов, реализованном в программном комплексе ANSYS, конечно-элементная модель причальной конструкции [4, 5], длина которой составляет 300 метров, а высота 35 метров, может быть представлена количеством элементов, превышающим 500 тысяч. При таких параметрах КЭ-модели время расчета при использовании компьютера со средними вычислительными ресурсами может составлять несколько часов.

Причалная конструкция, рассматриваемая в настоящей работе, была оборудована ИИС, состоящей из шестнадцати деформационных и четырех GPS-датчиков позиционирования. Подобная система выполняет контроль смещения носовой и подходной эстакады пирса по четырем датчикам позиционирования (по два на каждую часть пирса) в трех пространственных координатах и относительную де-

формацию свай по 16 деформационным датчикам (по два датчика на каждую сваю, то есть контроль ведется только по 8 сваям из 122).

Постановка задачи численного расчета НДС причала рассматривается как общая задача механики сплошной среды и может быть сформулирована следующим образом: известны (заданы) внешние воздействия на объект, определенным образом закрепленный в пространстве. Необходимо найти некоторые функции координат, описывающие состояние рассматриваемого объекта [6, 7].

В систему исходных функций входят компоненты вектора перемещений

$$\{\mathbf{u}\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\},$$

а также вектор напряжений

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{xz}(x, y, z)\}$$

и деформаций

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{xz}(x, y, z)\}.$$

Процедура определения указанных функций применительно к инженерным задачам называется расчетом конструкции. С математической точки зрения он сводится к решению краевых задач для системы уравнений, включающих:

уравнения равновесия

$$[\Phi]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\Gamma_v\}; \quad (1)$$

геометрическое уравнение (Коши)

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\Phi] \{\mathbf{u}\}; \quad (2)$$

определяющие физические уравнения

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [D] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (3)$$

где $[\Phi]$ – матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix};$$

$\{\Gamma_v\} = \{X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)\}$ – вектор-функция объемных сил;

$[D]$ – матрица механических характеристик материала

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix};$$

E – модуль упругости материала; ν – коэффициент Пуассона.

Решая совместно (1)–(3) относительно неизвестных перемещений, можно получить разрешающее уравнение

$$[\Phi]^T [D][\Phi]\{u\} = \{\Gamma_v\}. \quad (4)$$

Уравнение (4) дополняется кинематическими и статическими граничными условиями.

В методе конечных элементов, суть которого хорошо описана в [8], задача статического нагружения сводится к решению системы сходных уравнений, в которых искомыми являются лишь дискретные (узловые) значения функций:

$$[K]\{u\} = \{\Gamma\}, \quad (5)$$

где $\{u\}$ – вектор искомых значений в узловых точках; $[K]$ – матрица, называемая матрицей жесткости, которая описывает связь между прикладываемыми усилиями и соответствующими им перемещениями; $\{\Gamma\}$ – вектор известных правых частей.

Искомые перемещения узлов могут быть получены после обращения матрицы $[K]$ в виде

$$\{u\} = [K]^{-1} \{\Gamma\}. \quad (6)$$

После создания КЭ-модели конструкции причала определяется набор наиболее вероятных сценариев внешних эксплуатационных воздействий. К рассматриваемым внешним воздействиям можно отнести набор следующих типовых нагрузок: навал судна вблизи носовой, средней части причала и вблизи подходной эстакады; температурные деформации; волновые, ветровые нагрузки. Решая, например, задачу швартовки судна, фактически определяется отклик конструкции пирса на воздействие поперечной силы, действующей на определенное количество отбойных устройств. В случае температурных сезонных деформаций надводная часть причала охлаждается в соответствии с текущей температурой окружающего воздуха.

Для контроля отклика КЭ-модели конструкции пирса выбраны такие конечные элементы (в дальнейшем будем называть их «модельными датчиками»), размер и расположение которых соответствует месту установленных датчиков деформации. Набор значений модельных датчиков обозначим числовым вектором $\{b\}$. В процессе верификации КЭ-модели причала показания модельных датчиков приводятся в соответствие текущим значениям деформационных датчиков, которые обозначим вектором $\{B\}$, при известных заданных воздействиях $\{\Gamma\}$.

Считается, что деформации конструкции $\{\epsilon\}$ в штатном режиме эксплуатации могут быть вызваны линейной комбинацией m известных независимых механических типовых нагрузок $\{\Gamma_k\}$ с некими коэффициентами x_k :

$$\{\Gamma\} = \sum_k^m x_k \{\Gamma_k\}. \quad (7)$$

Учитывая, что объект находится под действием набора независимых механических нагрузок и ведет себя линейным образом, его результирующее состояние может быть получено простой линейной комбинацией вклада каждой из нагрузок:

$$\{\mathbf{u}\} = \sum_k^m x_k \{\mathbf{u}_k\} = \sum_k^m x_k [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{\Gamma}_k\}. \quad (8)$$

Ключевым моментом организации системы мониторинга является создание базы данных (БД), содержащей информацию об отклике конструкции на типовые воздействия. Для каждой типовой нагрузки $\{\mathbf{\Gamma}_k\}$ из решения (6) определяются и записываются в БД значения величин $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{\epsilon}\}$ и $\{\mathbf{\sigma}\}$ для всей конструкции пирса. Из вектора деформаций $\{\mathbf{\epsilon}\}$ выделяется вектор $\{\mathbf{b}\}$, включающий только значения деформации модельных датчиков. Данные векторы формируют матрицу $[\mathbf{A}]$ следующим образом:

$$[\mathbf{A}] = [\{\mathbf{b}_1\} \quad \{\mathbf{b}_2\} \quad \dots \quad \{\mathbf{b}_m\}] \quad (9)$$

или

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{21} \\ \dots \\ \epsilon_{n1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} \\ \dots \\ \epsilon_{n2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \epsilon_{1m} \\ \epsilon_{2m} \\ \dots \\ \epsilon_{nm} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Таким образом, матрица состоит из m столбцов, каждый из которых соответствует одной типовой нагрузке, и n строк, каждая из которых содержит значения деформации модельного датчика.

Основным предположением в работе считается то, что вектор искомых коэффициентов комбинирования типовых нагрузок $\{\mathbf{x}\}$, состоящий из компонент x_k уравнения (7), может быть использован для определения НДС конструкции пирса путем решения обратной задачи – системы уравнений, записанной в виде

$$[\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{B}\}, \quad (11)$$

где $\{\mathbf{B}\}$ – вектор показаний реальных датчиков деформации в условиях комбинированной нагрузки на сооружение.

Другими словами, получив информацию от ИИС о текущих значениях деформационных датчиков, решая систему уравнений (11), подбирается такая комбинация известных типовых нагрузок $\{\mathbf{\Gamma}\}$ с весовыми коэффициентами $\{\mathbf{x}\}$, при которой расчетное результирующее состояние НДС совпадает с текущим.

Фактически, в рамках решения обратной задачи вместо исходной системы уравнений (5) решается родственная система уравнений (11). Решение обратной задачи деформирования такой сложной конструкции, как причал, с большим числом конечных элементов занимает доли секунды, поскольку в поиске решения участвуют не все точки расчетных вариантов НДС, а только точки, соответствующие местам установки датчиков измерительной системы.

Описываемый в работе алгоритм методики системы мониторинга (7) – (11) может быть представлен схемой, изображенной на рис. 1.

Текущие данные с датчиков системы мониторинга поступают по электронным каналам связи на персональный компьютер оператора. При этом в окне интерфейса программы происходит обновление табличных данных и графиков (рис. 2).

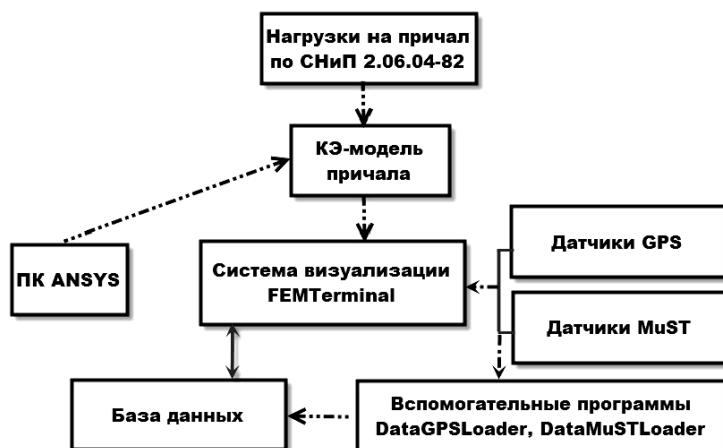


Рис. 1. Схема работы системы мониторинга

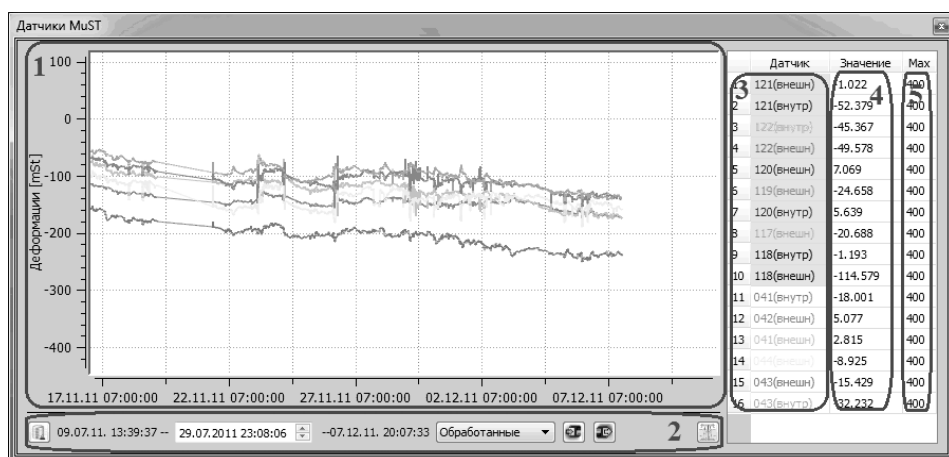


Рис. 2. Окно интерфейса программного комплекса с поступающими показаниями деформационных датчиков системы мониторинга

В процессе поступления информации о значениях деформационных сенсоров согласно уравнению (11) происходит поиск коэффициентов $\{x\}$. После чего полученные коэффициенты подставляются в уравнение (7). Чтение исходных данных из БД (типовые нагрузки $\{\Gamma_k\}$) и решение данного алгебраического уравнения осуществляется за считанные доли секунды с последующим обновлением контурной карты пространственной визуализации результирующей картины НДС (рис. 3).

Заложенный функционал позволяет осуществлять непрерывную обработку поступающей информации с датчиков, выполнять анализ архивной информации и визуализацию состояния причала за выбранный промежуток времени.

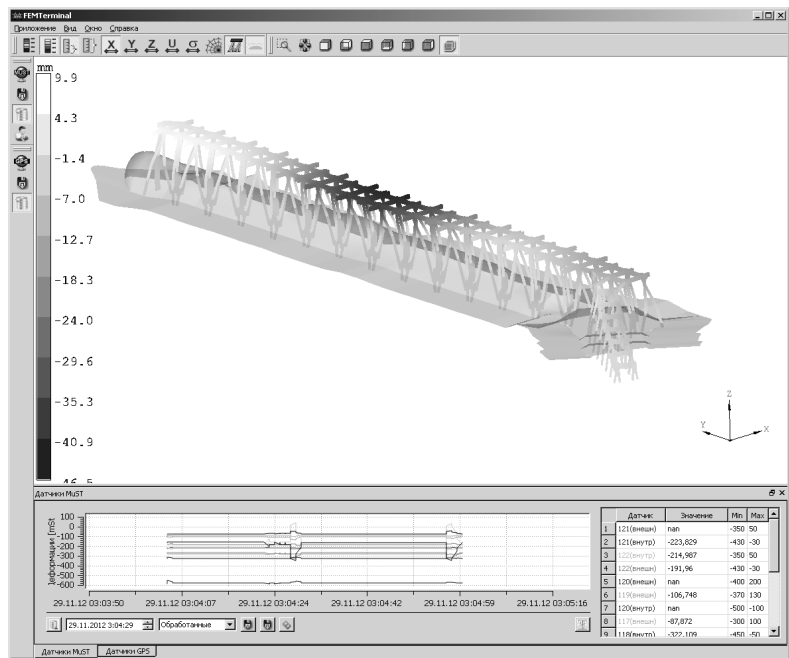


Рис. 3. Общий интерфейс программного комплекса мониторинга конструкции причала.
Навал судна на отбойные устройства центральной части пирса

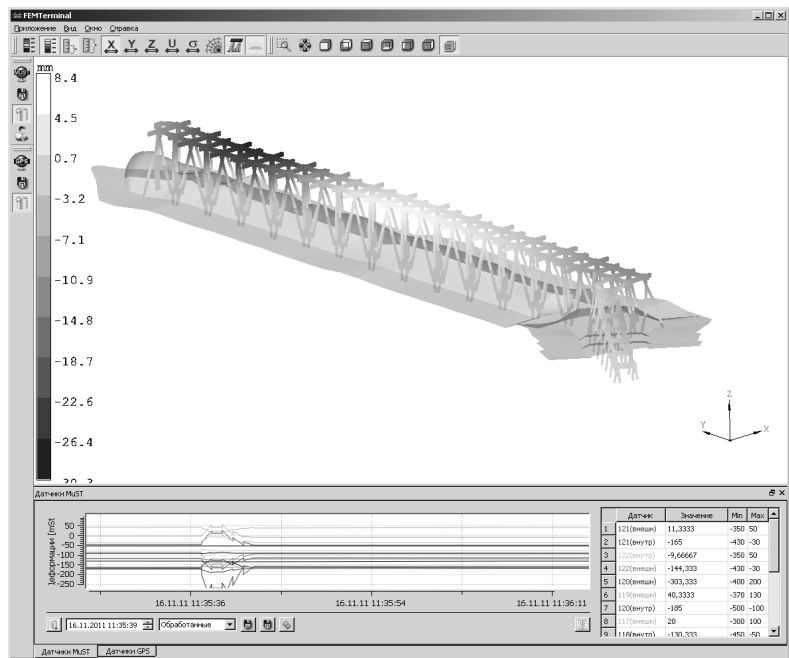


Рис. 4. Общий интерфейс программного комплекса мониторинга конструкции причала.
Навал судна на отбойные устройства носовой части пирса

ЛИТЕРАТУРА

1. Улыбин А. В., Ватин Н. И. Качество визуального обследования зданий и сооружений и методика его выполнения. // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. № 10(25). С. 134–146.
2. Методические рекомендации по контролю технического состояния и оценке безопасности судоходных гидротехнических сооружений / Утв. зам. рук. Фед. агент.мор. и реч. транс. В.Н. Вовк 15.04.2011 г. М.: РОСМОРРЕЧФЛОТ, 2011. 136 с.
3. Костюков В.Д. Надежность морских причалов и их реконструкция. М.: Транспорт, 1987. С. 223.
4. Яцук А.А., Солоненко В.А., Бовсуновский А.Б., Бутов В.Г., Кулешов А.А. Система мониторинга причальной конструкции // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 7/3. С. 137–139.
5. Бутов В.Г., Солоненко В.А., Яцук А.А., Бовсуновский А.Б., Кулешов А.А. Разработка системы мониторинга состояния причального сооружения // Вестник ТГАСУ. 2015. № 2. С. 166–175.
6. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций. Одесса: Изд-во ОМНУ, 2009. 91 с.
7. Сабоннадьер Ж.К., Кулон Ж.Л. Метод конечных элементов и САПР. М.: Мир, 1989. 190 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.

Статья поступила 15.06.2015 г.

Kuleshov A.A., Solonenko V.A., Yashchuk A.A. MONITORING SYSTEM AND VISUALIZATION OF THE STRESS-STRAIN STATE FOR THE BERTH CONSTRUCTION IN REAL TIME

DOI 10.17223/19988621/38/9

In this work, the stress and strain of the berth construction is estimated by use of the finite element method implemented in the ANSYS software. The method claimed allows calculating and visualizing the stress-strain shape of the berth construction in real time by using the tracking sensors value of strain at certain limited number points. Considering the set of equations in the static formulation with reference on nodal displacement in the finite element method and taking into account that the current external influence can be represented by a linear combination of known loads taken with some coefficients, the resulting stress-strain state can be expressed as a linear combination of responses to these loads with the same coefficients. The use of a recalculated database of the structural response to known external loads and current information from sensors allows one to estimate and visualize the stress-strain state of the whole construction.

Keywords: finite element method, berth, ANSYS, monitoring system, sensors, stress-strain visualization.

KULESHOV Artem Alexandrovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

SOLOZENKO Victor Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

YASHCHUK Alexey Alexandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Ulybin A. V., Vatin N. I. Kachestvo vizual'nogo obsledovaniya zdaniy i sooruzheniy i metoda ego vypolneniya.. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*, 2014, no. 10(25), pp. 134–146. (in Russian)
2. *Metodicheskie rekomendatsii po kontrolyu tekhnicheskogo sostoyaniya i otsenke bezopasnosti sudokhodnykh gidrotekhnicheskikh sooruzheniy* / Utv. zam. ruk. Fed. agent.mor. i rech. trans. V.N. Vovk 15.04.2011 g. Moskow, ROSMORREChFLOT Publ., 2011. 136 p. (in Russian)
3. Kostyukov V.D. *Nadezhnost' morskikh prichalov i ikh rekonstruktsiya*. Moskow, Transport Publ., 1987, pp. 223. (in Russian)
4. Yashchuk A.A., Solonenko V.A., Bovsunovskiy A.B., Butov V.G., Kuleshov A.A. Sistema monitoringa prichal'noy konstruksii. *Izv. vuzov. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 7/3, pp. 137–139. (in Russian)
5. Butov V.G., Solonenko V.A., Yashchuk A.A., Bovsunovskiy A.B., Kuleshov A.A. Razrabotka sistemy monitoringa sostoyaniya prichal'nogo sooruzheniya. *Vestnik TGASU*, 2015, no. 2, pp. 166–175. (in Russian)
6. Klovanich S.F., Bezushko D.I. *Metod konechnykh elementov v nelineynykh raschetakh prostanstvennykh zhelezobetonnykh konstruksiy*. Odessa, Izd-vo OMNU, 2009. 91 p. (in Russian)
7. Sabonnad'er Zh.K., Kulon Zh.L. *Metod konechnykh elementov i SAPR*. Moskow, Mir Publ., 1989. 190 p. (in Russian)
8. Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science*. London, McGraw-hill, 1977. 542 p.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/38/10

Ю.Н. Орлова, М.Ю. Орлов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗРЫВНОГО НАГРУЖЕНИЯ ЛЬДА¹

Представлены результаты комплексных теоретико-экспериментальных исследований по взрывному нагружению льда. Описана физико-математическая модель деформирования и разрушения льда при взрывных нагрузках. Приведены результаты натурных испытаний по взрывному нагружению речного льда эмульсионным зарядом взрывчатого вещества (ВВ). Проведены параметрические исследования разрушения льда в зависимости от глубины закладки ВВ. Получены рекомендации по более эффективному разрушению льда с учетом влияния слоя воды.

Ключевые слова: лед, модель, метод, расчет, эксперимент, взрыв, взрывчатое вещество, деформация, разрушение.

Актуальность исследований поведения льда при взрывных нагрузках в настоящее время не вызывает сомнений. Российская Федерация входит в пятерку «ледовых» стран, поэтому существует необходимость в развитии транспортных связей и проектировании портов в замерзающих морях Крайнего Севера, а также увеличении добычи природных ископаемых в районах вечной мерзлоты. Острой проблемой все еще стоит образование весенних заторов на сибирских реках, длина которых достигает более 150 километров. Основная сложность исследований определена в прошлом веке в работах Мальгрема, Канна, Маэно, Богородского и заключается в том, что такой древнейший природный материал, как лед (сегодня известно более 15 его разновидностей), мало изучен в условиях динамического нагружения [1]. Это объясняется сложной внутренней структурой, особенностями кристаллической решетки, аномальными пластическими свойствами, многократными фазовыми переходами в процессе деформирования и т.д. С точки зрения разрушения, лед вообще может не иметь аналогов.

В России нет такой государственной поддержки «ледовых» исследований, как, в США, где совместно с военно-морскими силами возобновлена программа «SCISEX», в рамках которой идет сбор научных данных с помощью новейших надводных и подводных средств. В Англии протестирован Зонд «Penetrator», способный внедряться в толстые массивы льда без повреждения высокоточного оборудования, установленного внутри. Разработка опытного образца была бы невозможна без знания прочностных свойств льда [2].

В НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета постоянно ведутся поисковые научные исследования процесса динамического нагружения льда: разработана физико-математическая модель деформирования и разрушения льда при ударных и взрывных нагрузках, численный метод расчета его напряженно-деформированного и термодинамического состояния с учетом разрушения на фрагменты, обобщены теоретические и экспериментальные результаты. По инициативе сотрудников лаборатории прочности неоднократно

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-08-00509а).

были организованы экспедиции с целью проведения натурных испытаний по взрывному нагружению льда и других природных материалов. На территории Западно-Сибирского федерального округа проведено более 10 экспедиций и подорвано более 10 000 кг взрывчатки в тротиловом эквиваленте. Целью данной работы явилось теоретико-экспериментальное исследование поведения льда при взрывных нагрузках с целью получения новых знаний о его поведении при данных условиях.

Экспериментальное исследование взрывного разрушения льда эмульсионным ВВ

В апреле 2015 г. проведены натурные испытания по подрыву пресноводного льда штатным эмульсионным ВВ Эмуласт АС-30 ФП. Начальная плотность $1,34 \text{ г/см}^3$, скорость детонации 4700 м/с. Масса заряда ВВ – 4 кг. Эксперимент проведен совместно с ОАО «КузбассСпецВзрыв» и МЧС РФ по ТО в рамках ежегодных противопоаводковых мероприятий. Объект исследования – заснеженный ледяной покров. Первичный осмотр экспериментальной площадки показал, что лед имел сэндвич-структуру: снег (55 см) + шуга (20 см) + монолитный лед (50 см). Экспериментальная площадка выбрана почти в середине реки. Визуально установлено, что ледяной покров был ровным. Течение воды незначительное. В радиусе 500 м обнаружен торос, а полыньи и разводьев не было. Температура воздуха -1°C . Накануне эксперимента шел мокрый снег. Согласно метеоданым, зима была относительно теплая, аномально низкой температуры (-45°C) отмечено не было.

Ниже представлены результаты последней экспедиции, в результате которой подорвано более 1500 кг в тротиловом эквиваленте. Первые фотографии получены через 5 минут после подрыва ВВ со спасательного катера. Исследовано 6 лунок до и после взрыва. В первые две лунки помещали по два заряда ВВ в полиэтиленовой оболочке, а в остальные – по одному. На рис. 1, а зафиксировано состояние ледяного покрова до подрыва и некоторые компоненты ВВ. На рис. 1, б, в показана лунка в заснеженном ледяном покрове с погруженным в воду зарядом ВВ. Рис. 1, г иллюстрирует состояние ледяного покрова после подрыва первой лунки. Видно, что во льду сформировалась майна, по форме близкая к окружности. Диаметр составил около 3,5 м. При последующем детальном осмотре кромка льда оказалась довольно развитой.

Физико-математическая модель поведения льда при взрывном нагружении

Описание поведения льда при динамических нагрузках проводится с позиции феноменологической макроскопической теории механики сплошных сред на основе фундаментальных законов сохранения. Лед моделировался упругопластической пористой сжимаемой средой с учетом свойств прочности, ударно-волновых явлений, а также совместного образования разрушений по типу отрыва и сдвига. Упругопластическое течение описывается уравнениями Прандтля – Рейса при условии текучести Мизеса. Уравнение состояния выбрано в форме Уолша.

Уравнение состояния льда принято в виде

$$P(\rho) = B(\rho/\rho_0 - 1)(\rho/\rho_0)^2,$$

где $B = 8.4 \text{ ГПа}$, $\rho_0 = 0.92 \text{ г/см}^3$.

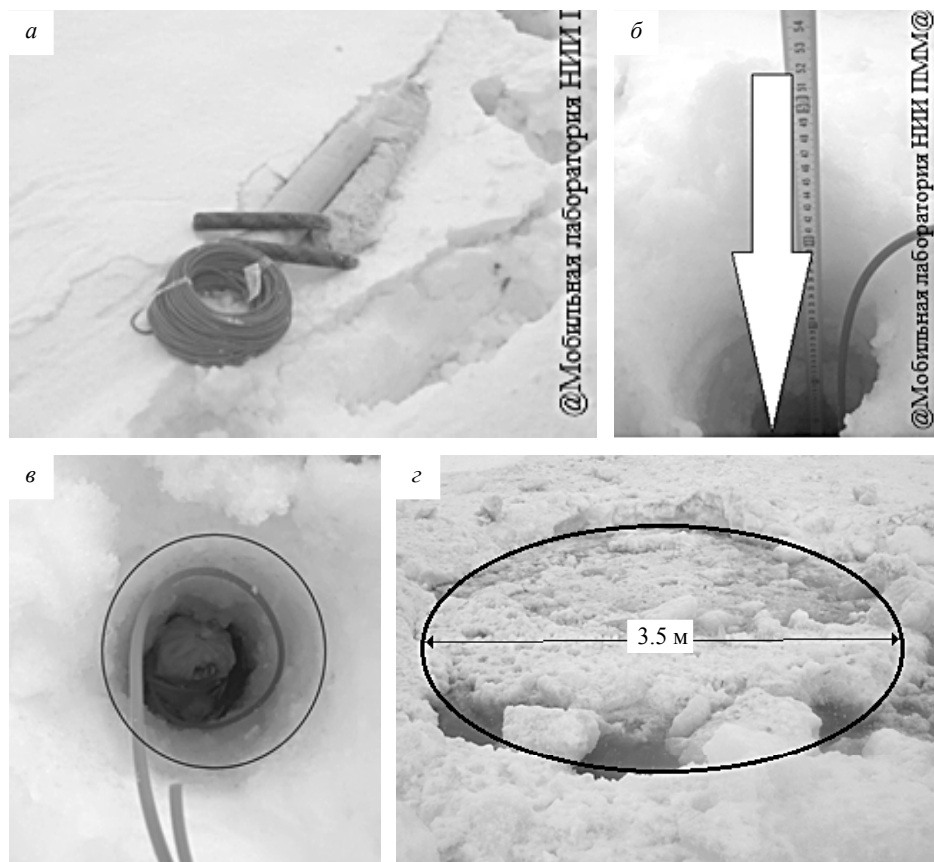


Рис. 1. Натурные испытания по подрыву заснеженного ледяного покрова: *а* – подготовка к эксперименту, ВВ и шнур ДШЭ; *б* – лунка для закладки ВВ диаметром 14 см; *в* – заряд взрывчатки Эмуласт АС-30 ФП при погружении в воду; *г* – взрывная майна после подрыва двух зарядов ВВ массой 8 кг

Уравнение состояние воды принято в виде полинома:

$$P(\rho) = 0.0225(\rho/\rho_0 - 1) + 0.085(\rho/\rho_0 - 1)^2.$$

Действие взрывного нагружения задается в приближении модели мгновенной детонации заряда ВВ. Уравнение состояния продуктов детонации (ПД) выбрано в виде политропы Ландау–Станюковича [3]:

$$P = A\rho^3.$$

Известно, что разрушение материалов при действии динамического нагружения может происходить по отрывному или сдвиговому механизму. Это наблюдается в конструкционных, композиционных и геологических материалах. Экспериментальные данные показали, что лед не является исключением [4]. Детерминированная модель разрушения предусматривает реализацию обоих механизмов разрушения. Считается, что при достижении главным растягивающим напряжением значения откольной прочности лед разрушается по типу отрыва. Разрушения по типу сдвига происходят при достижении удельной работой сдвиговых пластических деформаций некоторого предельного значения [5].

Численный метод расчета динамического нагружения льда

В качестве основного инструмента исследований использован модифицированный лагранжев метод, расчетная часть которого дополнена механизмами расщепления расчетных узлов и разрушения расчетных элементов. Оригинальность метода заключается в новом способе выделения поверхностей разрыва сплошности материалов, который не накладывает серьезных ограничений на решение современных динамических многоконтактных задач МДТТ. Последние нововведения заключаются в алгоритме расчета свободных и контактных поверхностей, позволяющем описывать более гладкую поверхность между продуктами детонации и льдом при взрывном нагружении [5].

Для двумерного плоского и осесимметричного случая разработан пользовательский многофункциональный программный комплекс решения динамических многоконтактных задач МДТТ, позволяющий в интерактивном режиме подготавливать начальные данные, включая автоматическое разбиение расчетной области, осуществлять расчет в консольном режиме, а также проводить графическую и табличную обработку полученных результатов. Программная реализация метода взрывного нагружения льда осуществлена при помощи специально разработанного нового решателя [6].

Достоверность результатов численного моделирования установлена путем решения ряда тестовых задач, сравнением с известным аналитическим решением и экспериментальными результатами. Отдельные эксперименты специально проведены в ЦНИИ им. А.Н. Крылова. Некоторые эксперименты проведены на уникальном баллистическом стенде с высокоточными приборами регистрации в НИИ прикладной математики и механики. Расхождение между расчетными и экспериментальными данными не более 10 % [7].

Исследование процесса взрывного нагружения льда на воде

Ниже представлены результаты численных исследований взрывного нагружения льда на воде. Практическая значимость состоит в необходимости более эффективного разрушения толстого (2 м и более) слоя льда при взрыве. Лед такой толщины нередко образуется на сибирских реках зимой в результате экстремально низких температур (-40°C и ниже). Цель исследований заключается в выявлении влияния глубины закладки заряда ВВ на процесс разрушения льда на водной подложке.

Объект исследования – это массивный ледяной цилиндр размерами в сечении 500×250 см. Глубина закладки ВВ варьировалась в диапазоне от 22 до 221 см. В качестве ВВ использован безоболочечный заряд тринитротолуола (ТНТ): начальная плотность $\rho_0 = 1.6$ г/см³, скорость детонации 6900 м/с. Масса заряда была 4.8 кг, размеры в сечении 21×23 см. На контактной границе «Лед – ВВ», «Лед – Вода», а также кромках льда задано условие скольжения. Расчетная область автоматически разбивалась «конвертом» на 10 000 триангуляционных элементов. Серия вычислительных экспериментов состояла из 8 вариантов (таблица) и проведена в двумерной постановке с учетом осевой симметрии. Расчеты проведены с использованием предложенного алгоритма расчета свободных и контактных поверхностей. Физико-механические характеристики льда следующие: начальная плотность 0.92 г/см³, объемная скорость звука $C_0 = 3020$ м/с, модуль сдвига $G = 0.32$ ГПа, предел текучести $\sigma_T = 2.2 \cdot 10^{-3}$ ГПа, откольная прочность

$\sigma_k = 3 \cdot 10^{-3}$ ГПа, удельная работа сдвиговых пластических деформаций $A_p^* = 5$ кДж/кг и эквивалентная пластическая деформация $\varepsilon_{eqp} = 1$.

Для детального изучения процесса разрушения льда на воде продуктами детонации в 8 вариантах было сделано следующее. На всех стадиях процесса разрушения вплоть до 4 мс проанализированы картины разрушения льда, а именно зафиксированы время и место зарождения первых очагов разрушения, направление их дальнейшего распространения относительно эпицентра взрыва. Отдельно рассмотрен процесс образования магистральных трещин. Построены графики временных зависимостей скорости свободной поверхности льда, поврежденности и скорости изменения поврежденности льда, а также гидростатического давления и девиаторных напряжений в контрольных точках.

На рис. 2 показаны рассчитанные конфигурации системы «Лед – ВВ – Вода» для вариантов 2 и 5 соответственно. Рис. 2, а, б дают детальную информацию о картинах разрушения льда на 4 мс после подрыва ВВ.

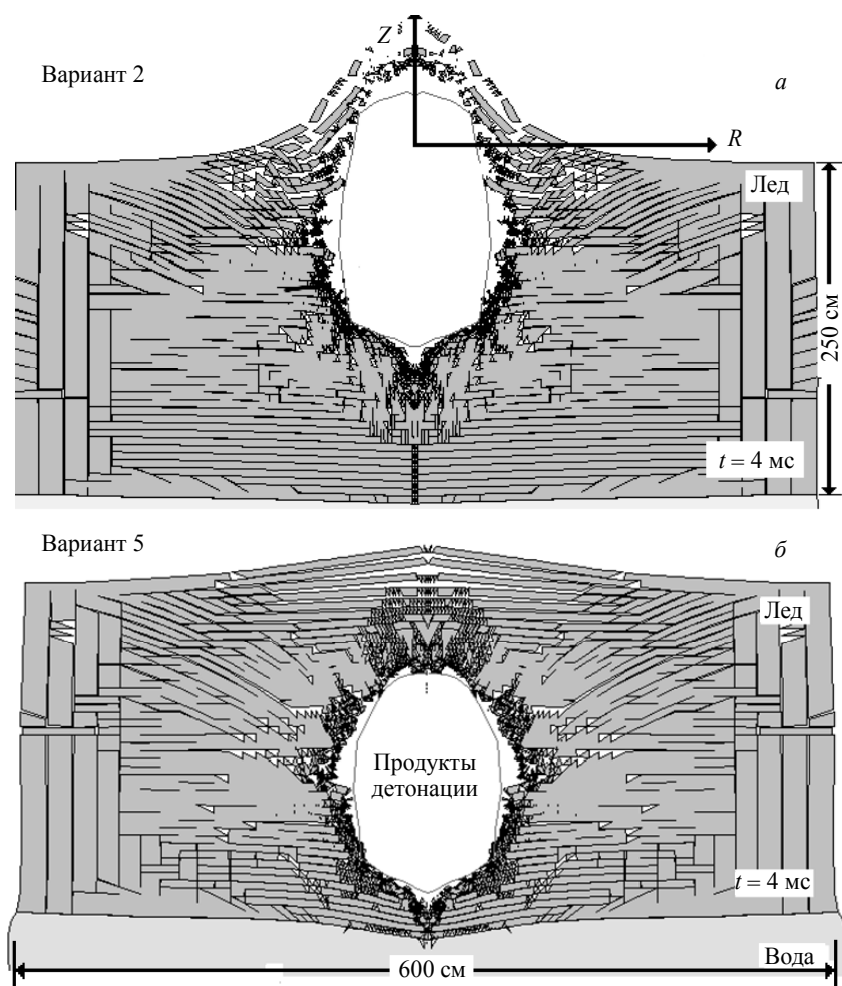


Рис. 2. Рассчитанные конфигурации системы «Лед – Вода – ВВ»

Расчетным путем установлено, что независимо от глубины закладки ВВ, очаги разрушения формируются во льду на первых микросекундах процесса в области контакта «Лед – ВВ». Под действием продуктов детонации зона разрушений распространяется в радиальном и осевом направлениях от эпицентра взрыва к кромке льда. На стадии предразрушения было отмечено незначительное пластическое деформирование льда. Формируются многочисленные магистральные трещины, ориентированные под различным углом к оси симметрии. Разрушение льда на фракции сопровождалось выплеском отдельных кусков наружу через взрывную майну. Установлено, что после 2 мс картины разрушения льда практически не менялись. Анализ эволюции разрушения льда показал, что в четвертом варианте магистральная трещина разделяла лед на две одинаковые части.

На рис. 3 приведены графические зависимости поврежденности льда от времени. Параметр поврежденности впервые был предложен в работе [8]. Видно, что основной объем повреждений во льду сформировался в течение первой миллисекунды. Кривые поврежденности от 0 до 300 мкс близки друг к другу. В некоторых вариантах кривые также практически совпадали на отдельных участках (например, в варианте 1 и 7 после 2 мс). В варианте 8 на кривых проявились «ступеньки», которые объясняются зарождением зон разрушения в области контакта «Лед – ПД» и вблизи свободной границы «Лед – Вода». Минимальный объем повреждений, равный 26.96 %, зафиксирован в варианте 8, а максимальный, равный 38.3 %, в варианте 4. Получено, что только в последнем варианте объем разрушений был меньше 30 %.

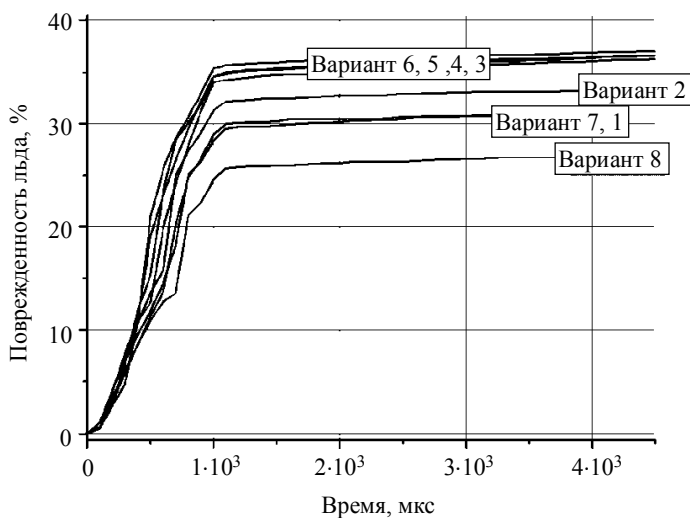


Рис. 3. Графическая зависимость поврежденности льда от времени

Во льду также было вычислено гидростатическое давление и девиаторные напряжения для восьми вариантов расчетов. Контрольная точка расположена практически в середине льда на расстоянии 88 см от боковой поверхности. Пиковые давления отмечены в моменты времени 700 мкс. С 700-й по 900-ю мкс идет убывание, а после 1000 мкс давления становятся нулевыми. Максимальное давление,

равное 0.042 ГПа, зафиксировано в варианте 6. Минимальное давление отмечено в варианте 8 и составило 0.0215 ГПа (рис. 4).

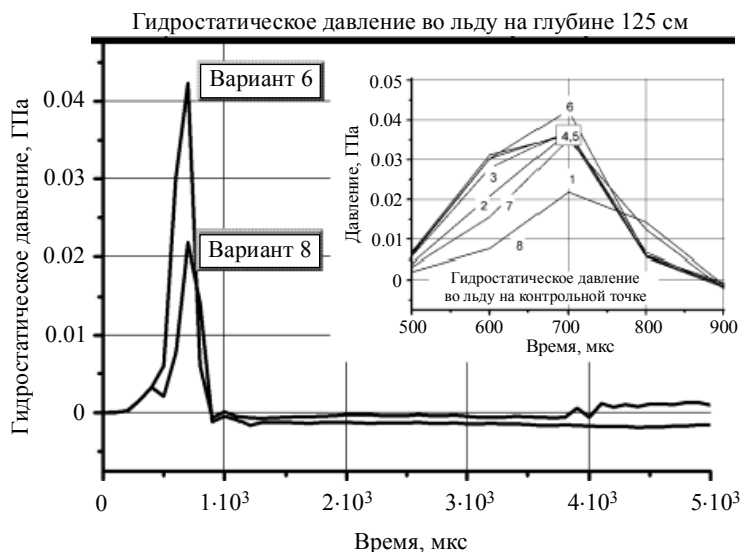


Рис. 4. Результаты расчетов процесса взрывного нагружения льда

Для выявления влияния массы заряда ВВ на процесс разрушения льда проводились дополнительные расчеты. В дополнительном варианте расчетов масса ВВ была увеличена на 50 % и составила 7.2 кг, при этом глубина закладки была такая же, как в варианте 5. Результаты расчетов суммированы даны в таблице.

Результаты расчетов процесса взрывного нагружения льда на воде

Вариант №	Глубина закладки ВВ, см	Поврежденность льда, %	Диаметр майны во льду, см	Скорость свободной поверхности, м/с
1	22	30.76	110	614
2	45	33.22	130	282
3	73	36.82	135	163
4	102	38.30	137	105
5	130	36.86/41.70	140/156	77/89
6	153	37.25	135	53
7	193	30.94	128	41
8	221	26.96	150	32

Примечания: 1. Данные получены в момент времени 4 мс. 2. В знаменателе приведены значения для варианта расчетов с массой ВВ $m = 7.2$ кг.

Из таблицы видно, что объем разрушений льда не превышал 40 %. При этом наличие большого количества очагов и зон разрушения во льду позволяет утверждать, что исследуемый образец значительно поврежден. С увеличением глубины закладки ВВ до 153 см (вариант 6) отмечен рост объема поврежденности льда, а в

вариантах 7, 8 отмечено снижение объема поврежденности льда. Установлено, что максимальный диаметр майны во льду зафиксирован в варианте 8 (в данном варианте ВВ в нижней части соприкасалось с водой). Постоянное увеличение диаметра майны зафиксировано до глубины 130 см (вариант 5). В вариантах 6, 7 отмечено уменьшение диаметра, а в варианте 8 – его максимальное значение. Скорость свободной поверхности уменьшалась с ростом глубины закладки ВВ. Увеличение массы ВВ приводило к увеличению диаметра майны, объема поврежденного льда и скорости свободной поверхности.

Проведенные исследования позволяют рекомендовать для более эффективного разрушения льда в данных условиях закладывать ВВ в середине слоя преграды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 383 с.
2. Инженеры испытали зонд пенетратор для Европы [Электронный ресурс] // Наука и техника. Электронные данные, 2013. URL: <http://lenta.ru/news/2013/07/15/penetratortest> (дата обращения 15.07.2014)
3. Физика взрыва: монография: в 2 т. / науч. ред. Л.П. Орленко. 3-е изд., перераб. М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 832 с.
4. Carney K.S., Benson D. J., DuBois P., Lee R. A phenomenological high strain rate model with failure for ice // International Journal of Solids and Structures. 2006. V. 43. P. 7820–7839.
5. Орлова Ю.Н. Комплексное теоретико-экспериментальное исследование поведения льда при ударных и взрывных нагрузках: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2014. С. 26.
6. Глазырин В.П., Орлов Ю.Н., Орлов М.Ю., Орлова Ю.Н. Взрывное нагружение конструкций. Осесимметричная задача. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615392 от 20.08.2010 г.
7. Горельский В.А., Коняев А.А., Толкачев В.Ф. Моделирование глубины проникания ударников в пресный лед при температуре до -25°C // Сборник материалов Всероссийской конференции «Полярная механика». 2012. С. 21–22.
8. Глазырин В.П., Орлов Ю.Н., Орлов М.Ю. Разрушение льда при ударном и взрывном нагружении // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 1. Спец. выпуск. С. 425–432.

Статья поступила 15.07.2015 г.

Orlova Yu.N., Orlov M.Yu. THE STUDY OF THE PROCESS OF EXPLOSIVE LOADING OF ICE

DOI 10.17223/19988621/38/10

Nowadays, researches of the behavior of certain natural materials are relevant. This is due to the development of northern territories, extraction of natural resources in the Far North, etc. Ice is an understudied natural material. The modern concept of ice failure is just beginning to develop.

The work presents results of parametric studies on dynamic loading of ice, as well as results of field experiments on explosive loading of ice consisting of snow, slush, and ice. It was found that a ice blast lane with a cross section size of 350 cm is formed after the explosion of the explosive substance in water under ice.

The behavior of ice under explosive loading is described from the standpoint of the phenomenological macroscopic theory of continuum mechanics based on fundamental laws of conservation. The ice is modeled by a single-phase, elastic-plastic, and compressible medium, with allowance for strength properties, shock-wave phenomena, and joint formation of separated and shear damages.

The behavior of a massive ice cylinder upon undermining a bulk explosive at different depths is investigated. The diameter of explosive lanes, the speed of the free surface, ice damages, as

well as hydrostatic pressure and deviatoric stresses at the control points have calculated. For a more effective destruction, it is recommended to lay explosives in the middle of the ice cylinder.

Keywords: ice, model, method, calculation, experiment, explosion, explosive, deformation, destruction.

ORLOVA Yulia Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: orlovaun@mail.ru

ORLOV Maxim Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: orloff_m@mail.ru

REFERENCES

1. Bogorodskiy V.V., Gavrilov V.P. *Led. Fizicheskie svoystva. Sovremennyye metody glyatsiologii*. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1980. 383 p. (in Russian)
2. Inzheneriy ispytali zond penetrator dlya Evropy [Elektronnyy resurs]. *Nauka i tekhnika*. Elektronnyye dannye, 2013. URL: <http://lenta.ru/news/2013/07/15/penetratortest> (data obrashcheniya 15.07.2014) (in Russian)
3. *Fizika vzryva* / nauch. red. L.P. Orlenko. Moskow, Fizmatlit Publ., 2002, vol. 1. 832 p. (in Russian)
4. Carney K.S., Benson D. J., DuBois P., Lee R. A phenomenological high strain rate model with failure for ice. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 7820–7839.
5. Orlova Yu.N. *Kompleksnoe teoretiko-eksperimental'noe issledovanie povedeniya l'da pri udarnykh i vzryvnykh nagruzhkakh*: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Tomsk, 2014, pp. 26. (in Russian)
6. Glazyrin V.P., Orlov Yu.N., Orlov M.Yu., Orlova Yu.N. *Vzryvnoe nagruzhenie konstruktsiy. Osesimmetrichnaya zadacha*. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2010615392 ot 20.08.2010 g. (in Russian)
7. Gorel'skiy V.A., Konyaev A.A., Tolkachev V.F. Modelirovanie glubiny pronikaniya udarnikov v presnyy led pri temperature do -25°C . *Sbornik materialov Vserossiyskoy konferentsii «Polyarnaya mekhanika»*, 2012, pp. 21–22. (in Russian)
8. Glazyrin V.P., Orlov Yu.N., Orlov M.Yu. Razrushenie l'da pri udarnom i vzryvnom nagruzhении. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2008, vol. 13, no. 1. Spets. vypusk, pp. 425–432. (in Russian)

УДК 532.516.5

DOI 10.17223/19988621/38/11

М.А. Пономарева, М.П. Филина, В.А. Якутенок

ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ КАВЕРНЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА¹

Рассмотрен вопрос о распределении кинематических и динамических характеристик течения неньютоновской жидкости в квадратной каверне. В качестве реологической модели использовался степенной закон. Численное решение получено в приближении ползущего течения непрямым методом граничных элементов. Исследования проведены в диапазоне изменения показателя нелинейности n от 0.2 до 1.2. Приведены профили компонент вектора скорости в характерных сечениях каверны. Результаты для ньютоновского случая совпадают с данными других авторов. Показано, что уменьшение величины n приводит к смещению центра, вокруг которого вращается жидкость, к верхней крышке каверны. Представлены поля распределения эффективной вязкости и интенсивности скоростей деформаций по области течения.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, течение в каверне, не прямой метод граничных элементов.

Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с верхней стенкой, движущейся с постоянной скоростью в горизонтальном направлении, является известным и широко используемым тестом для верификации и оценки эффективности численных методов, применяемых для решения уравнений Стокса. В связи с широким использованием такого варианта тестирования, имеется большое количество накопленных данных, позволяющих определить правильность новых результатов, тем самым гарантируя их достоверность. Основное количество результатов имеется для течений при больших числах Рейнольдса [1–6]. В работах [7, 8] рассмотрены случаи малых чисел Рейнольдса $Re = 1$ и 0 . Рассмотрение в этих работах проведено для ньютоновской жидкости. В то же время актуальным представляется проведение исследований данного течения при малых числах Рейнольдса, но с учетом неньютоновского поведения жидкости.

Основные уравнения

Основными уравнениями для описания двумерного течения неньютоновской жидкости при малых числах Рейнольдса являются уравнения Стокса. Математическая постановка задачи записывается в безразмерных переменных. В качестве характерного размера выбрана длина стенки каверны, в качестве характерной скорости – скорость движения верхней крышки каверны. В приближении ползущего течения и при отсутствии массовых сил уравнения движения имеют вид

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_a.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ – компоненты полного тензора напряжений, p – давление, δ_{ij} – символ Кронекера, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, x_j – декартовы координаты.

В качестве реологической модели, описывающей неньютоновское поведение жидкости, выбран степенной закон, также известный как модель Оствальда де-Вилля, характеризующий зависимость вязкости от скорости сдвига:

$$\tau_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij}, \quad (2)$$

где $\eta = \dot{\gamma}^{n-1}$ – коэффициент эффективной вязкости, n – показатель нелинейности, $\dot{\gamma} = (2\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ji})^{1/2}$ – интенсивность скоростей деформаций, $\dot{e}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ – компоненты тензора скоростей деформаций, u_i – компоненты вектора скорости. Жидкости, поведение которых описывается данной моделью, можно подразделить на три типа: псевдопластичные ($n < 1$), ньютоновские ($n = 1$) и дилатантные ($n > 1$).

На рис. 1 представлена область решения. Верхняя стенка каверны движется в горизонтальном направлении с постоянной скоростью.

Систему (1) необходимо дополнить уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

и граничными условиями, которые состоят в задании компонент скорости на стенках каверны: на верхней подвижной стенке

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0 \quad (4)$$

и на остальных стенках

$$u_i = 0. \quad (5)$$

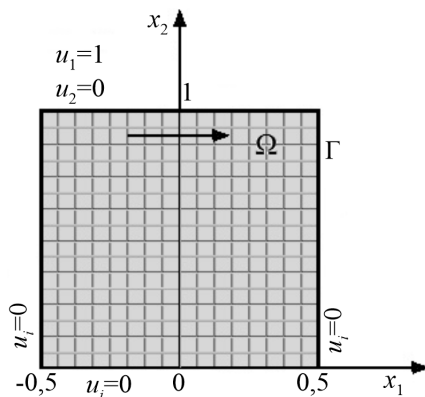


Рис. 1. Область решения

Гранично-интегральная формулировка задачи и метод решения

Представим уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^N}{\partial x_j} = \Psi_i, \quad (6)$$

где $\sigma_{ij}^N = -p\delta_{ij} + 2\dot{e}_{ij}$ – линейная часть полного тензора напряжений;

$\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1-\eta)\dot{e}_{ij}] = \frac{\partial \tau_{ij}^{NN}}{\partial x_j}$ – нелинейная векторная функция, которую будем рассматривать как плотность источников, распределенных по области течения Ω .

Тогда, в соответствии с положениями непрямого метода граничных элементов [9], можно записать

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} G_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) d\Gamma(\xi) + \int_{\Omega} G_{ij}(x, z) \Psi_j(z) d\Omega(z), \quad (7)$$

где $\phi_j(\xi)$ – плотность фиктивных источников, распределенных по границе области течения Γ . Функции G_{ij} являются фундаментальными решениями уравнений Стокса и определяются формулой [10]

$$G_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \left(\delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + \frac{y_i y_j}{r^2} \right), \quad (8)$$

где $y_i = x_i - \xi_i$, $r = (y_i y_i)^{\frac{1}{2}}$. Если на границе области течения Γ заданы значения скорости, то уравнения (7) позволяют получить значения неизвестных граничных сил $\phi_j(\xi)$ ($\xi \in \Gamma$). Это возможно сделать при известной функции $\Psi_j(z)$ ($z \in \Omega$). Так как эта функция заранее неизвестна, возникает необходимость организации итерационного процесса.

Для численного решения уравнений (7) используются постоянные элементы и постоянные ячейки. Граница области течения Γ разбивается на N элементов. Функции $\phi_j(\xi)$ считаются постоянными на каждом элементе. Область течения разбивается на N^2 квадратных ячеек. Функции $\Psi_j(z)$ считаются постоянными внутри ячейки. Тогда уравнения (7) в дискретной форме приобретают вид

$$u_i(x^p) = \sum_{q=1}^N \phi_j^q \Delta G_{ij}^{pq} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \Psi_j^{km} \Delta G_{ij}^{pkm}, \quad (9)$$

где $\Delta G_{ij}^{pq} = \int_{\Delta \Gamma^q} G_{ij}(x^p, \xi) d\Gamma(\xi)$, $\Delta G_{ij}^{pkm} = \int_{\Delta \Omega^{km}} G_{ij}(x^p, z) d\Omega(z)$, x^p – середина элемента p (узел).

Для вычисления $2N$ неизвестных ϕ_j^q используются $2N$ уравнений (9), соответствующие N элементам, на которых заданы $u_i(x^p)$. Коэффициенты получаемой системы линейных алгебраических уравнений ΔG_{ij}^{pq} в случае постоянных элементов можно вычислить аналитически. Технология вычисления изложена в [11].

Для вычисления интегралов по области ΔG_{ij}^{pqm} используются стандартные квадратурные формулы Гаусса без выделения особенностей. Особенности в этих интегралах имеют вид $\ln(1/r)$. Следовательно, при интегрировании по области эти интегралы существуют в обычном смысле. Такой подход значительно упрощает алгоритм решения. При проведении расчетов использовалась квадратурная формула с 64 узлами. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (9) относительно ϕ_j^q применялся метод простой итерации. На первой итерации использовались значения Ψ_i^{km} определенные по ньютоновскому полю тече-

ния. Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений использовался метод Гаусса. Далее использовались значения Ψ_i^{km} , рассчитанные в соответствии с полем течения, полученным на предыдущей итерации. Функции Ψ_i^{km} в центре ячейки (k, m) вычислялись конечно-разностным способом с использованием рассчитанных $(\tau_{ij}^{NN})^{km}$ в вершинах ячеек (узлах сетки).

Значения $(\tau_{ij}^{NN})^{km}$ полностью определяются производными $(\partial u_i / x_j)^{km}$, значения которых находились с использованием центральных разностей во внутренних узлах и односторонних разностей в приграничных узлах в соответствии со значениями u_i^{km} , вычисленными в узлах сетки. Для улучшения сходимости итерационного процесса в случае сильной нелинейности использовался метод релаксации с динамическим подбором коэффициента релаксации. Кроме того, процесс вычисления оптимизировался путем распараллеливания алгоритма.

Анализ полученных результатов

Вышеописанный метод расчета позволил провести вычисления в диапазоне изменения параметра нелинейности n от 0.2 до 1.2. Результаты расчетов представлены на рис. 2 – 8.

Исследование аппроксимационной сходимости (рис. 2) показало, что приемлемая точность расчетов обеспечивается при разбиении границы Γ на 160 и более элементов. Представленные в работе расчеты были проведены при $N = 256$.

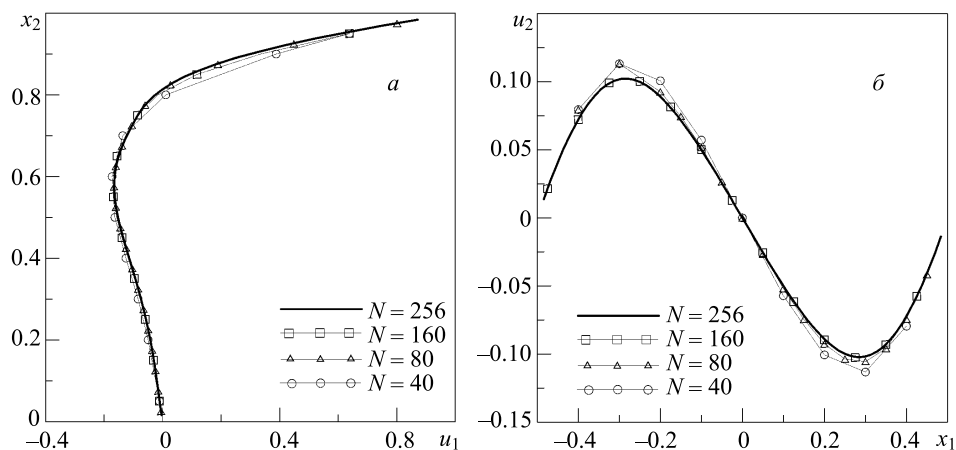


Рис. 2. Аппроксимационная сходимость решения для $n = 0.5$: a – профили составляющей скорости $u_1(x_1 = 0)$, b – профили составляющей скорости $u_2(x_2 = 0.5)$

Изменение параметра n приводит к смещению центра основной вихревой зоны. Причем уменьшение n по сравнению с ньютоновским случаем ($n = 1.0$) сопровождается смещением центра к верхней крышке, а увеличение – к нижнему основанию. Соответствующие качественные и количественные результаты показаны на рис. 3 и 4.

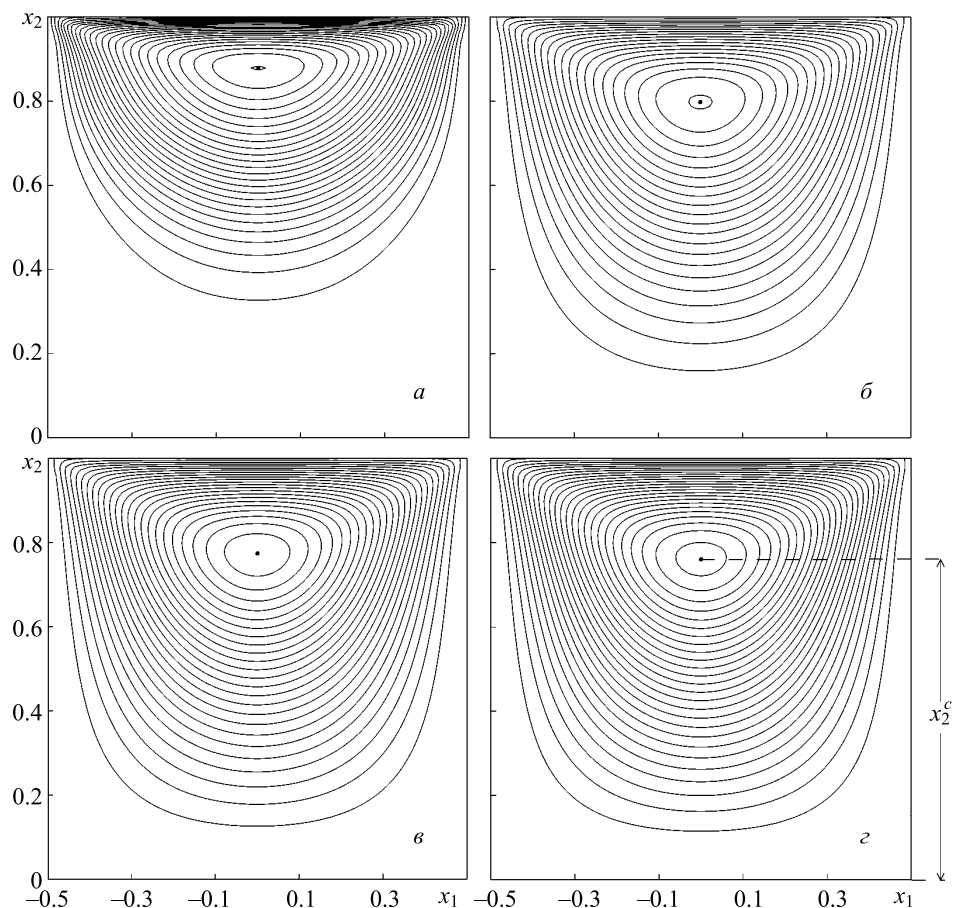


Рис. 3. Изолинии функции тока Φ ($u_1 = \partial\Phi/\partial x_2$; $u_2 = -\partial\Phi/\partial x_1$) с шагом $\Delta\Phi = 0.2$ для различных значений показателя нелинейности: $n = 0.5$ (а), $n = 0.7$ (б), $n = 1.0$ (в), $n = 1.2$ (г)

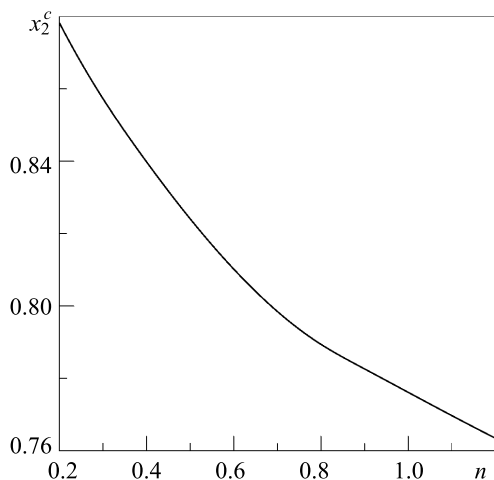


Рис. 4. Зависимость координаты x_2^c центральной точки основного вихря от величины n

В работах, касающихся исследования данного течения, стандартно приводятся профили компонент скорости u_1 и u_2 при $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$ соответственно. Для рассматриваемого в настоящей работе нелинейного случая и малых чисел Рейнольдса указанные данные содержатся на рис. 5 и 6.

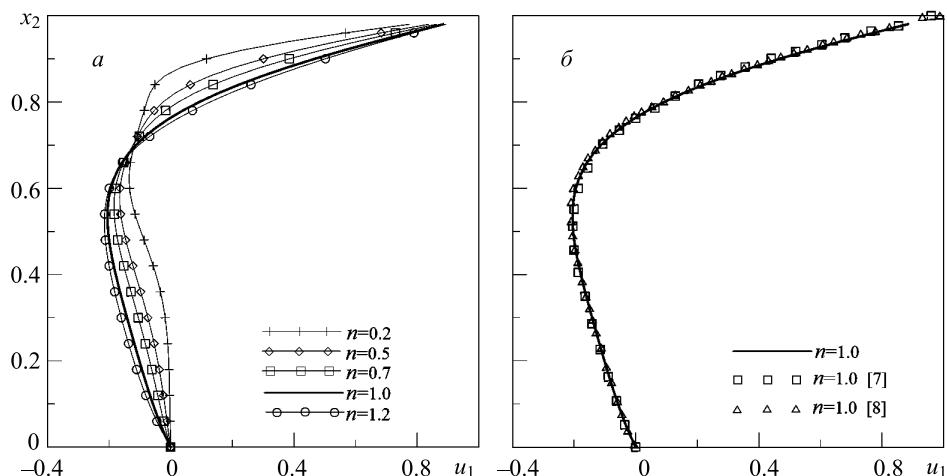


Рис. 5. Профили составляющей скорости u_1 вдоль линии $x_1 = 0$ для $0.2 \leq n \leq 1.2$ (a) и сравнение с известными данными для ньютоновской жидкости (б)

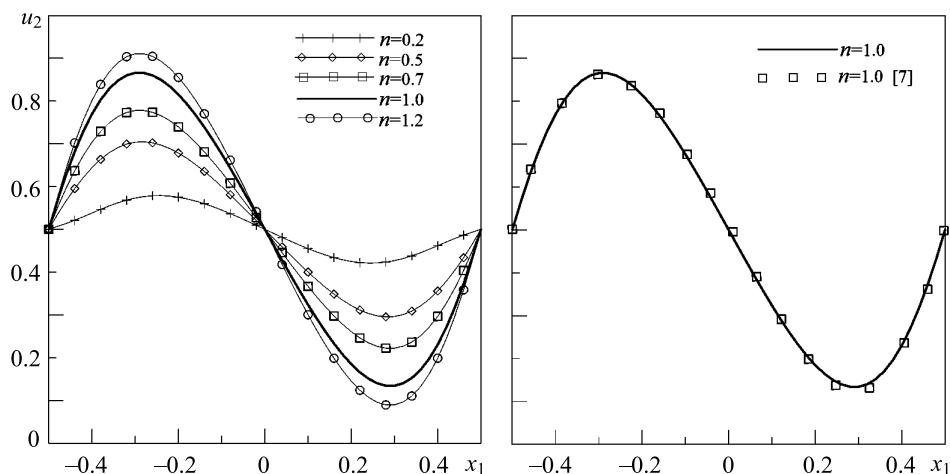


Рис. 6. Профили составляющей скорости u_2 вдоль линии $x_2 = 0.5$ для $0.2 \leq n \leq 1.2$ (a) и сравнение с известными данными для ньютоновской жидкости (б)

Распределение величины эффективной вязкости η по области течения соответствует распределению интенсивности скоростей деформаций $\dot{\gamma}$ и параметру нелинейности n (псевдопластичному и дилатантному реологическому поведению). Это соответствие показано на рис. 7, 8. Зоны высоких значений эффективной вязкости наблюдаются в областях низких скоростей сдвига для псевдопластичных жидкостей (центр и нижние углы камеры) и в областях высоких скоростей сдвига для дилатантных жидкостей (верхние углы камеры). Размеры таких зон увеличиваются при уменьшении n ($n < 1$).

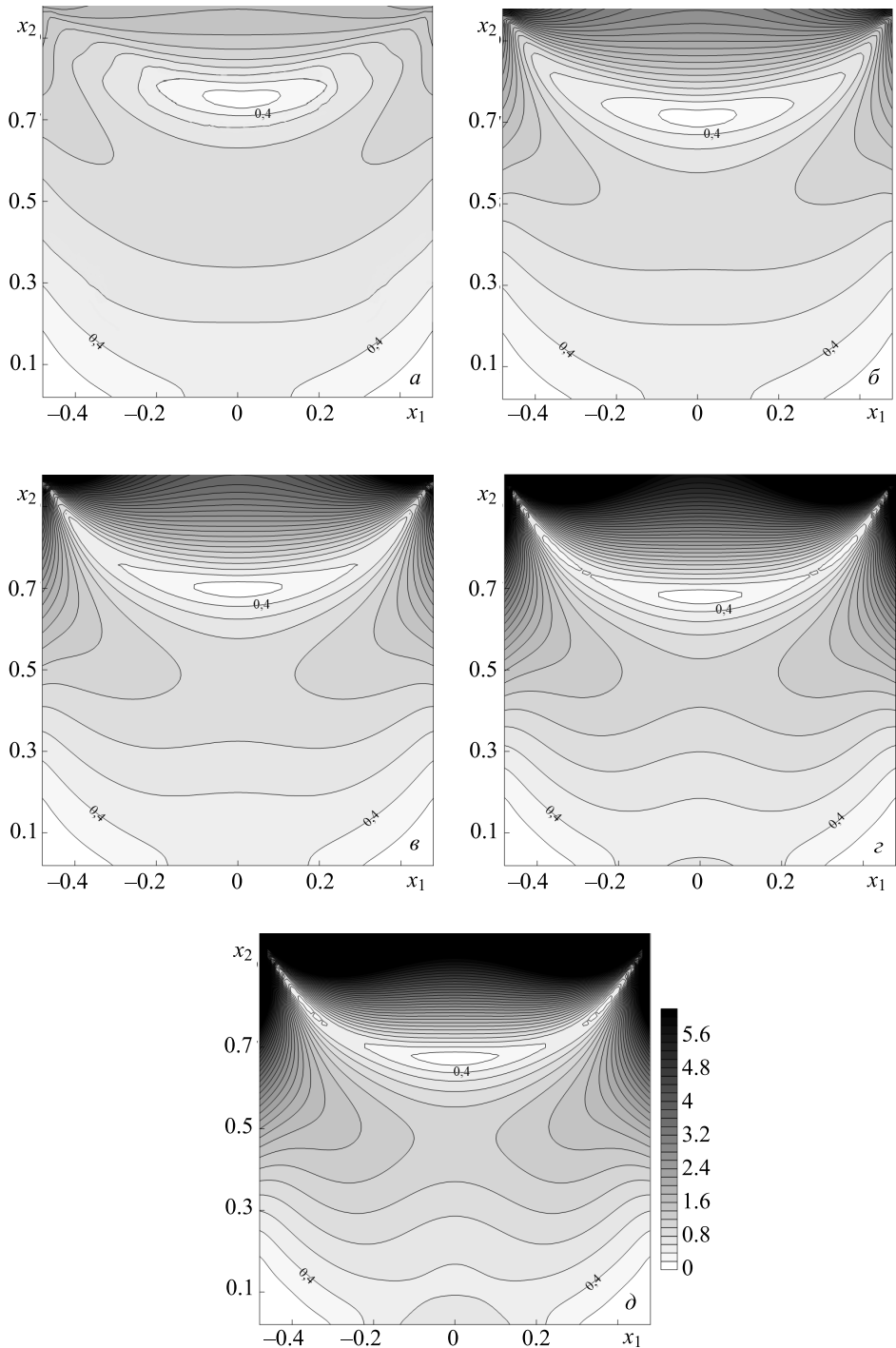


Рис. 7. Поле интенсивности скоростей деформаций $\dot{\gamma}$ для различных значений величины n : $n = 0.2$ (*a*), $n = 0.5$ (*б*), $n = 0.7$ (*в*), $n = 1.0$ (*г*), $n = 1.2$ (*д*)

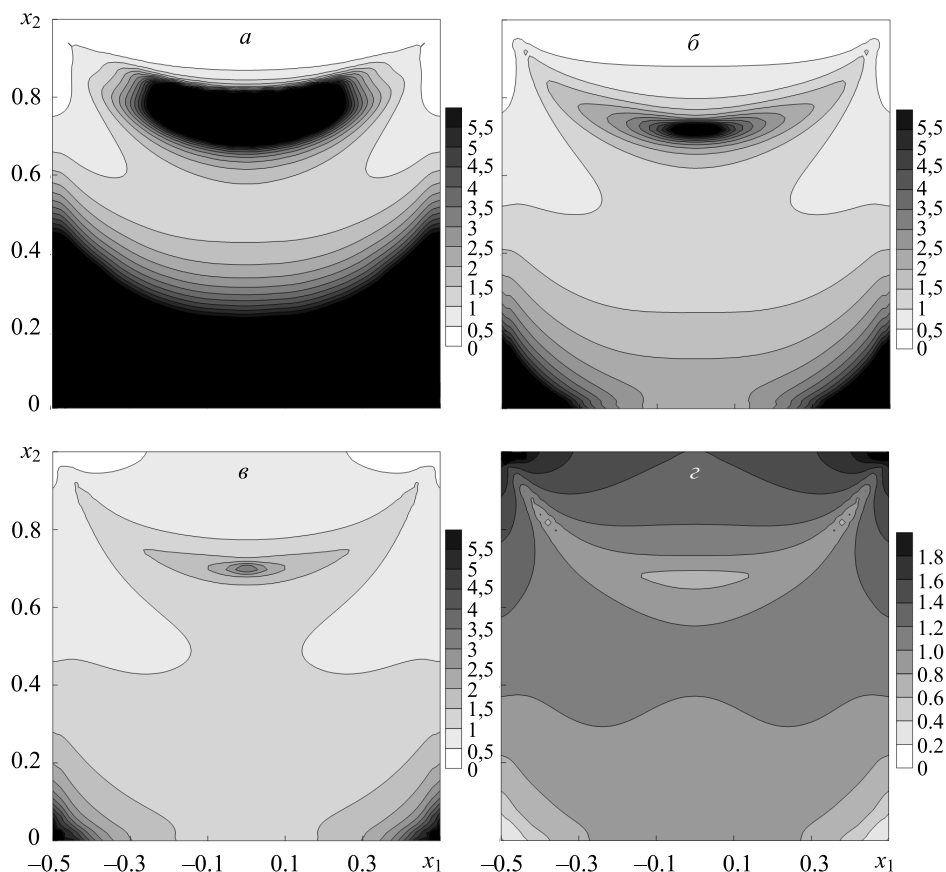


Рис. 8. Поле эффективной вязкости η внутри области течения для различных значений показателя нелинейности: $n = 0.2$ (а), $n = 0.5$ (б), $n = 0.7$ (в), $n = 1.2$ (г) (область течения, закрашенная черным цветом, соответствует значениям $\eta > 5.5$ для псевдопластичной жидкости и $\eta > 1.8$ для дилатантной)

Заключение

Непрямым методом граничных элементов проведено исследование течения неньютоновской жидкости в квадратной каверне при малых числах Рейнольдса. Значение показателя нелинейности n варьировалось в диапазоне от 0.2 до 1.2. Получены профили компонент вектора скорости в характерных сечениях каверны. Для ньютоновской жидкости проведено сравнение полученных данных с результатами других исследователей. Показано, что уменьшение величины n приводит к смещению центра, вокруг которого вращается жидкость, к верхней крышке каверны. Представлены поля распределения эффективной вязкости и интенсивности скоростей деформаций по области течения. Полученные результаты могут быть использованы для тестирования численных методов решения уравнений Стокса при степенной зависимости вязкости от скорости сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизарова Т.Г., Милукова О.М. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 3. С. 453–466.
2. Haque S., Lashgari I., Giannetti F. Stability of fluids with shear-dependent viscosity in the lid-driven cavity // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2012. No. 173. P. 49–61.
3. Anderson P.D., Galaktinov O.S., Peters G.W. Mixing of non-Newtonian fluids in time-periodic cavity flows // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2000. No. 93. P. 265–286.
4. Lashkarbolok M., Jabbari E. Collocated Discrete Least Squares (CDLS) meshless method for the simulation of power-law fluid flows // Scientia Iranica. 2013. No. 20(2). P. 322–328.
5. Nejat A., Sharbatdar M., Jalali A. A Newton-Krylov finite volume algorithm for power-law non-Newtonian fluid flows using pseudo-compressibility method // 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference AIAA. 2011. C. 1–19.
6. Li Q., Hong N., Shi B. Simulation of power-law fluid flows in two-dimensional square cavity using multi-relaxation-time lattice boltzmann method // Commun. Comput. Phys. 2014. V. 15. No. 1. P. 256–284.
7. Liu M.B., Xie W.P., Liu G.R. Modeling incompressible flows using a finite particle method // Applied Mathematical Modeling. 2005. V. 29. P. 1252–1270.
8. Shamekhi A., Aliabadi A. Non-Newtonian lid-driven cavity flow simulation by mesh free method // ICCES. 2009. V. 11. No. 3. C. 67–72.
9. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
11. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 57. P. 289–304. DOI: 10.2495/BE370241.

Статья поступила 15.11.2015 г.

Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. NON-NEWTONIAN FLUID FLOW IN A LID-DRIVEN CAVITY AT LOW REYNOLDS NUMBERS

DOI 10.17223/19988621/38/11

In this paper, the question about the distribution of kinematic and dynamic properties of a non-Newtonian fluid flow in a lid-driven square cavity is considered. The power-law model is used as the rheological model. The numerical solution is received using the indirect boundary element method in the creeping flow approximation. The study is performed in the range of the power-law index from 0.2 to 1.2. The velocity component profiles at the mid-span of the cavity are obtained. For the case of the Newtonian fluid, a comparison with known results showed a good agreement. It is shown that the position of the main vortex shifts towards the upper moving lid as the power-law index decreases. The fields of effective viscosity and deformation rate intensity inside the flow domain are presented.

Keywords: non-Newtonian fluid, flow in lid-driven cavity, Indirect Boundary Element Method.

PONOMAREVA Maria Andreevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: pma@ftf.tsu.ru

FILINA Maria Petrovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: filina.mari@mail.ru

YAKUTENOK Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: yva@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Elizarova T.G., Milyukova O.M. Chislennoe modelirovanie techeniya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti v kubicheskoy kaverne. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2003, vol. 43, no. 3, pp. 453–466. (in Russian)
2. Haque S., Lashgari I., Giannetti F. Stability of fluids with shear-dependent viscosity in the lid-driven cavity. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2012, no. 173, pp. 49–61.
3. Anderson P.D., Galaktinov O.S., Peters G.W. Mixing of non-Newtonian fluids in time-periodic cavity flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2000, no. 93, pp. 265–286.
4. Lashckarbolok M., Jabbari E. Collocated Discrete Least Squares (CDLS) meshless method for the simulation of power-law fluid flows. *Scientia Iranica*, 2013, no. 20(2), pp. 322–328.
5. Nejat A., Sharbatdar M., Jalali A. A Newton-Krylov finite volume algorithm for power-law non-Newtonian fluid flows using pseudo-compressibility method. *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference AIAA*, 2011, pp. 1–19.
6. Li Q., Hong N., Shi B. Simulation of power-law fluid flows in two-dimensional square cavity using multi-relaxation-time lattice boltzmann method. *Commun. Comput. Phys.*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 256–284.
7. Liu M.B., Xie W.P., Liu G.R. Modeling incompressible flows using a finite particle method. *Applied Mathematical Modeling*, 2005, vol. 29, pp. 1252–1270.
8. Shamekhi A., Aliabadi A. Non-Newtonian lid-driven cavity flow simulation by mesh free method. *ICCES*, 2009, vol. 11, no. 3, pp. 67–72.
9. Brebbiya K., Telles Zh., Vroubel L. *Metody granichnykh elementov*. Moskow, Mir Publ., 1987. (in Russian)
10. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti*. Moskow, Nauka Publ., 1970. (in Russian)
11. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2014, vol. 57, pp. 289–304. DOI: 10.2495/BE370241.

УДК 519.6

DOI 10.17223/19988621/38/12

В.В. Чуруксаева, А.В. Старченко**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД
ДЛЯ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В РУСЛЕ РЕКИ¹**

Представлена математическая модель и численный метод для исследования турбулентных течений в речных потоках на основе приближения мелкой воды. Модель строится с учетом наиболее важных явлений, влияющих на течение в природных водоемах. В модель также включена осредненная по глубине версия двухпараметрической модели турбулентности с дополнительными слагаемыми генерации турбулентности за счет трения речного потока о дно русла. Результаты расчетов турбулентного течения в открытых каналах и стационарного турбулентного течения в неглубокой реке анализируются и сравниваются с результатами измерений, а также расчетами других авторов.

Ключевые слова: математическое моделирование речного потока, приближение мелкой воды, турбулентное течение, распространение примеси, метод конечного объема.

Численное моделирование русловых течений берет начало еще в первой половине 20 века в связи с активным развитием гидромеханики и необходимостью исследования поведения водного объекта при строительстве гидротехнических сооружений.

Для корректного описания горизонтального перемешивания и учета влияния придонного течения необходим учет турбулентности потока, оказывающей значительное влияние на обмен массой и импульсом. Впервые исследования турбулентности в русловых потоках были проведены в связи с необходимостью оценки точности измерения средней скорости течения приборами. Одним из первых теоретических результатов советских гидравликов по турбулентности является «диффузионная теория турбулентности», которая развивалась в 30–60 гг. прошлого века. В основе теории лежат постулаты, выдвинутые Буссинеском в 1877 г. и Тейлором и Шмидтом в 1915–1925 гг. [1]. С тех пор разработке методов расчета различных течений в каналах и руслах рек уделяется значительное внимание как в отечественной науке, так и за рубежом [2–6]. По мере развития вычислительной математики и компьютерной техники разрабатывались все более сложные и точные методы и модели, в том числе и для нестационарных течений и течений в деформируемом русле.

Наиболее общим подходом к расчету русловых течений является решение полных нестационарных трехмерных уравнений гидродинамики с соответствующими граничными условиями на дне и свободной поверхности. Обзор литературы показывает, что полные уравнения или решаются в рамках вихреразрешающего LES-подхода [7, 8], или используются для расчета в небольшой области (например, течения в лабораторной установке, как в [8, 9]), коротком участке реки, при-

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ № 5.628.2014/К.

мыкающем к гидротехническому сооружению, где требуется детальное описание течения для определенного сценария [5, 10].

В исследованиях, связанных с изучением окружающей среды, решение трехмерных уравнений не всегда является оправданным из-за существенного различия в масштабах происходящих процессов, а также значительных размеров расчетной области и сложности ее границы. Вычислительная стоимость таких расчетов слишком высока даже при использовании современных суперкомпьютеров. Данный вопрос подробно обсуждается в [11, 12]. Альтернативой является построение на основе классических уравнений Рейнольдса, осредненных по глубине, модели руслового турбулентного течения, включающей уравнения мелкой воды [13].

При рассмотрении течений в равнинных медленно текущих реках (средняя скорость $u \approx 0.01$ м/с) генерация турбулентности в основном происходит за счет трения о дно, а также при резком изменении направления потока, обтекании препятствий (островов, опор моста) и в области разветвления и слияния рек. В этом случае поведение свободной поверхности, в основном, определяется горизонтальной скоростью течения и потому осредненные по глубине модели позволяют получить решение, отражающее нелинейные эффекты течения, и при этом достаточно устойчивое, так как двумерные силы подавляют генерацию трехмерных структур.

Существует множество исследований течений в реках, их эстуариях, прибрежных областях морей с применением осредненных по глубине уравнений. Все они основываются на осредненных уравнениях Рейнольдса, но существенно отличаются учитываемыми явлениями: влиянием турбулентности потока, силы Кориолиса, ветрового трения [4, 6, 14].

Численный расчет течения в реке или эстуарии даже с применением осредненных уравнений и простейших моделей турбулентности представляет значительную вычислительную сложность, поэтому для моделирования распространения загрязнений в большом пространственном масштабе остаются актуальными одномерные модели и сочетания одномерных и двумерных моделей, когда расчет по одномерной модели служит для задания граничных условий для расчета по двумерной или трехмерной модели, как в [15, 16].

Для исследования течения на протяженном участке реки в основном используются модели со значительным упрощением: одномерные [15, 16], осредненные по глубине без учета турбулентности [6] или с использованием простых моделей турбулентности [17]. Однако в последние полтора десятилетия качество моделей и точность получаемых с их помощью результатов значительно улучшились [18].

Для замыкания осредненных уравнений мелкой воды предложены модель с параболической турбулентной вязкостью, модификация модели пути смешения Прандтля, модели с постоянным коэффициентом диффузии или простыми алгебраическими соотношениями для его получения [4, 17], а также ряд модификаций классических двухпараметрических моделей, таких как $k-\varepsilon$ [13], $k-\omega$ [18]. Но в целом, нужно отметить, что турбулентные модели для осредненных течений разработаны значительно меньше, чем модели для классических уравнений Рейнольдса. Одной из первых осредненных моделей была модификация $k-\varepsilon$ -модели, предложенная Растоги и Роди [13]. Она успешно применялась для моделирования течений в упрощенных геометриях. Отметим также ее модификацию, предложенную Барбарутси и Чу [19], в которой учитываются эффекты трехмерной турбулентности, генерируемой шероховатой донной поверхностью. В работах [20, 21]

проведено сравнение этих моделей, которое показывает, что существенные различия в результатах возникают лишь при моделировании течений с доминирующим донным трением, где модель Барбарутси и Чу показывает несколько лучшее согласование с экспериментом.

Таким образом, выбор уровня сложности модели при расчете руслового течения определяется характером рассматриваемой задачи.

Целью данной работы является построение двумерной математической модели и численного метода расчета руслового течения на протяженном участке реки, которые позволят получить достаточно точные сведения о структуре турбулентного течения, необходимые для прогноза распространения примеси.

Математическая модель

В рамках данной работы рассматривается стационарное изотермическое турбулентное течение несжимаемой жидкости (воды) в относительно небольшой неглубокой реке, русло которой резко меняет свое направление.

Математическая модель строится на основе осредненных по глубине уравнений Рейнольдса для вязкой жидкости. При этом предполагается, что распределение давления является гидростатическим и характеристики потока слабо меняются по глубине, и глубина реки значительно меньше горизонтальных размеров области исследования, что, соответственно, ограничивает формирование трехмерных вихрей, определяя доминирующий двумерный характер течения.

Математическая модель включает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0,$$

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{xy})}{\partial y} + \frac{(\tau_{xz})_s - (\tau_{xz})_b}{\rho} - h\bar{F}_x, \\ \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{yx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{yy})}{\partial y} + \frac{(\tau_{yz})_s - (\tau_{yz})_b}{\rho} - h\bar{F}_y \end{aligned}$$

и уравнение переноса концентрации примеси

$$\frac{\partial(h\bar{u}\bar{c})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{c})}{\partial y} = \frac{\partial(h\bar{q}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{q}_y)}{\partial y} + ((q_z)_s - (q_z)_b) + S$$

для расчета распространения загрязняющих веществ, скорость движения которых совпадает со скоростью речного потока и концентрация которых в воде относительно невелика.

Здесь $h(x, y)$ – глубина, $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ – осредненные по глубине значения компонент вектора скорости $\bar{w} = (u, v)$; $z_b(x, y)$ – рельеф дна; ρ – плотность воды, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; $\bar{\tau}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{yx}$, $\bar{\tau}_{yy}$ – осредненные по глубине компоненты тензора вязких напряжений и напряжений Рейнольдса; $(\tau_{xz})_s$, $(\tau_{xz})_b$, $(\tau_{yz})_s$, $(\tau_{yz})_b$ – трение на поверхности реки и ее дне, соответственно; $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ – осредненные по глубине компоненты силы Кориолиса; $\bar{c}$ – осредненная по глубине концентрация примеси; $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ – диффузионные и турбулентные пото-

ки массы; S – источник примеси; $(q_z)_s, (q_z)_b$ – потоки примеси на поверхности и дне соответственно.

В силу того, что в данной работе моделируется распространение примеси относительно небольшой массы (в сравнении с массой текущей воды), поступающей в реку с низкой скоростью, предполагается, что вблизи выброса не возникает трехмерных турбулентных эффектов.

Для получения неизвестных значений компонент тензора напряжений $\bar{\tau}_{ij}$ в уравнениях Рейнольдса используются соотношения Буссинеска

$$\frac{1}{\rho} \bar{\tau}_{ij} = (\nu + \bar{\nu}_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij},$$

где ν – молекулярная кинематическая вязкость воды.

Подобного вида замыкающие соотношения применяются для потоков массы примеси

$$\bar{q}_i = \left(\frac{\nu}{Sc} + \frac{\bar{\nu}_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i}.$$

Здесь Sc, Sc_t – молекулярное и турбулентное числа Шмидта.

Турбулентная вязкость $\bar{\nu}_t$ и кинетическая энергия турбулентности $\bar{k}$ находятся с использованием осредненной по глубине версии $k-\varepsilon$ -модели Растоги и Роди [13]:

$$\bar{\nu}_t = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u}\bar{k})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{k})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(h \left(\nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \left(\nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) + (P_h + P_{kv} - \bar{\varepsilon})h, \\ \frac{\partial(h\bar{u}\bar{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{\varepsilon})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(h \left(\nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \left(\nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) + \left(c_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} P_h + P_{\varepsilon v} - c_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \right) h, \end{aligned}$$

$$P_h = \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3; \sigma_k = 1.0; c_1 = 1.44; c_2 = 1.92; c_\mu = 0.09;$$

$$P_{kv} = c_k \frac{v_*^3}{h}; P_{\varepsilon v} = c_\varepsilon \frac{v_*^4}{h^2}; c_k = \frac{1}{\sqrt{c_f}}; c_\varepsilon = 3.6 \frac{c_2}{c_f^{3/4}} \sqrt{c_\mu}; c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}; v_*^2 = c_f |\vec{w}|^2.$$

Здесь $\bar{k}(x, y)$ – осредненная по глубине кинетическая энергия турбулентности; $\bar{\varepsilon}(x, y)$ – осредненная по глубине диссипация кинетической энергии; n – коэффициент Маннинга [22], характеризующий шероховатость русла; v_* – динамическая скорость; c_f – коэффициент трения.

Граничные условия

На входе в область исследования руслового потока задавались однородные распределения искомых величин, на выходе простые градиентные условия. На боковых стенках русла применялись условия непротекания и прилипания для компонент скорости. В случае, когда $v_t \gg v$ вблизи боковых стенок, в пристеночной области трение и турбулентные характеристики определяются с помощью метода пристеночных функций Лаундера – Сполдинга [23]. Для концентрации примеси на боковых границах руслового потока ставились простые градиентные условия.

Численный метод решения уравнений модели

В данной работе для решения задачи применяются метод конечного объема [23] и метод фиктивных областей. Расчетная область вписывается в прямоугольник, покрытый структурированной сеткой, где глубина руслового течения h определяется в центрах ячеек (конечных объемов), а компоненты скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$ – на их границах (рис. 1).

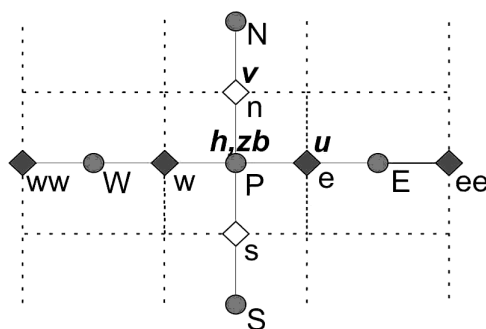


Рис. 1. Сеточный шаблон разностной схемы

Большими буквами отмечено положение центров конечных объемов, маленькими – середин их граней [24]

Широко используемые в гидрологических расчетах схемы первого порядка для аппроксимации конвективных членов зачастую обладают слишком большой схемной вязкостью и не обнаруживают области рециркуляционного течения, дают существенно сглаженные профили скорости и потому малоприменимы для отрывных течений. В данной работе конвективные слагаемые аппроксимируются MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) схемой 3-го порядка точности, а также схемой MLU (Monotonic Linear Upwind) [25]. Для диффузионных членов уравнений используется аппроксимация второго порядка.

Построим SIMPLE-подобный алгоритм для решения уравнений мелкой воды с неизвестными $h(x, y)$, $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$. Получим сначала формулы алгоритма. Предположим, что начальное приближение для компонент вектора скорости $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ и глубины потока $h(x, y)$ известно из физических соображений. Уточнение значений этих характеристик, удовлетворяющих соответствующим уравнениям мелкой воды, будем проводить с помощью итерационной процедуры.

Используя полученные на предыдущей итерации значения глубины потока, считаем компоненты скорости из следующих сеточных уравнений [24]:

$$a_e^u \bar{u}_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u \bar{u}_{nb}^* + d_e^u (h_E^i - h_P^i) + b_e^u; \quad (1)$$

$$a_n^v \bar{v}_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^v \bar{v}_{nb}^* + d_n^v (h_N^i - h_P^i) + b_n^v. \quad (2)$$

Здесь $\bar{u}_e^*$, $\bar{v}_n^*$ – промежуточные значения компонент вектора скорости, не удовлетворяющие в общем случае разностному уравнению неразрывности. Потребуем, чтобы на следующей итерации $(i+1)$ все уравнения выполнялись точно, т.е.

$$\begin{aligned} a_e^u \bar{u}_e^{i+1} &= \sum_{nb} a_{nb}^u \bar{u}_{nb}^{i+1} + d_e^u (h_E^{i+1} - h_P^{i+1}) + b_e^u; \\ a_n^v \bar{v}_n^{i+1} &= \sum_{nb} a_{nb}^v \bar{v}_{nb}^{i+1} + d_n^v (h_N^{i+1} - h_P^{i+1}) + b_n^v. \end{aligned}$$

Вычтем из этих уравнений соответствующие уравнения (1) и (2) и, пренебрегая, как в [24], слагаемыми $\sum_{nb} a_{nb}^u (\bar{u}_{nb}^{i+1} - \bar{u}_{nb}^*)$, $\sum_{nb} a_{nb}^v (\bar{v}_{nb}^{i+1} - \bar{v}_{nb}^*)$, получим

$$\bar{u}_e^{i+1} = \bar{u}_e^* + d_e^u / a_e^u (h_E' - h_P'); \quad (3)$$

$$\bar{v}_n^{i+1} = \bar{v}_n^* + d_n^v / a_n^v (h_N' - h_P'), \quad (4)$$

где $h_P' = h_P^{i+1} - h_P^i$.

Разностные уравнения для нахождения $\{h_P'\}$, полученные из уравнения неразрывности $\frac{\bar{u}_e^{i+1} h_e^i - \bar{u}_w^{i+1} h_w^i}{\delta x} + \frac{\bar{v}_n^{i+1} h_n^i - \bar{v}_s^{i+1} h_s^i}{\delta y} = 0$, будут иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{h_e^i}{\delta x} \left(\bar{u}_e^* + \frac{d_e^u}{a_e^u} (h_E' - h_P') \right) - \frac{h_w^i}{\delta x} \left(\bar{u}_w^* + \frac{d_w^u}{a_w^u} (h_P' - h_W') \right) + \\ & + \frac{h_n^i}{\delta y} \left(\bar{v}_n^* + \frac{d_n^v}{a_n^v} (h_N' - h_P') \right) + \frac{h_s^i}{\delta y} \left(\bar{v}_s^* + \frac{d_s^v}{a_s^v} (h_P' - h_S') \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм итерационного уточнения неизвестных сеточных значений компонент скорости и глубины руслового потока можно представить следующим образом:

1. Задаем $\bar{u}^i = \bar{u}^0$, $\bar{v}^i = \bar{v}^0$, $h^i = h^0$.
2. Решаем (1) и (2) методом нижней релаксации и находим $\{\bar{u}^*\}$, $\{\bar{v}^*\}$.
3. Решаем (5) методом верхней релаксации или методом Н.И. Булеева и находим $\{h_P'\}$.
4. Корректируем $\{\bar{u}^{i+1}\}$, $\{\bar{v}^{i+1}\}$ по (3), (4) и $\{h^{i+1}\}$ по $h_P^{i+1} = h_P^i + \beta h_P'$, $\beta = 0.2$.
5. Решаем уравнения $k-\varepsilon$ -модели турбулентности.

6. Если $\|\bar{h}'\|$ велика, то $i = i + 1$ и переходим к п. 2 (продолжаем итерационный процесс пока $\|\bar{h}'\| > \varepsilon$).

7. Решаем уравнение для концентрации примеси.

Предложенный метод отличается от широко используемого SIMPLE-алгоритма тем, что в уравнении неразрывности учитывается изменчивость h , в то время как в [4, 18, 26] учет изменения h осуществляется только в первых членах уравнений движения.

С помощью разработанной модели и численного метода были проведены расчеты некоторых тестовых сценариев, иллюстрирующих различные режимы русловых течений, влияние на них трения и рельефа дна. Для оценки полученных результатов приведено сравнение расчетов с экспериментальными данными, а также расчетами, приведенными в [2, 26]. Сравнение позволяет судить о том, насколько приближение мелкой воды применимо для моделирования подобных случаев.

Расчет руслового течения в лабораторных установках

Одним из самых распространенных приложений двумерной модели мелкой воды является расчет течения в открытых каналах. Резкое изменение направления течения может вызывать проявление трехмерного характера турбулентности, что может ухудшить достоверность численного прогноза с использованием осредненных по глубине уравнений.

Канал с поворотом

В качестве расчетной области использовался открытый канал с поворотом под прямым углом. Входной участок имеет длину 5.555 м, ширину 0.86 м и ровное дно. Сразу перед поворотом уровень дна понижается на 0.013 м. Выходной участок имеет длину 4.43 м, ширину 0.72 м и ровное дно. Средняя глубина воды $h \approx 0.175$ м, величина продольной компоненты скорости ≈ 0.2 м/с.

На рис. 2 приведено сравнение полученных результатов с расчетом из [26], где авторы исследуют течение в канале с применением подобной математической модели, но другим методом расчета.

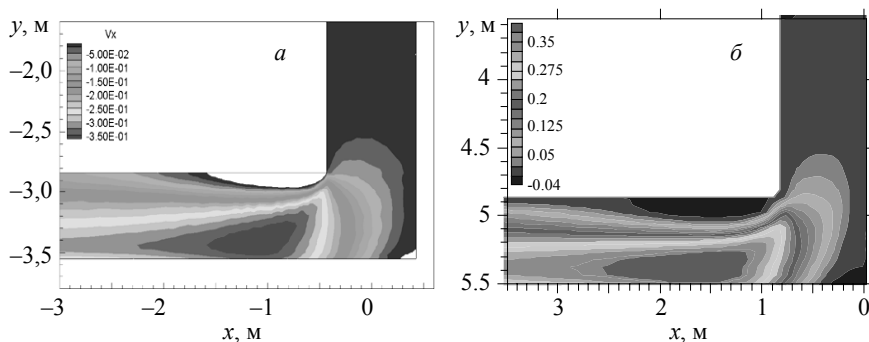


Рис. 2. Течение в канале с поворотом, карты продольной компоненты скорости $\bar{u}$, a – расчет из [26], b – расчет по рассматриваемой модели

Из рисунка видно, что выбранная модель успешно обнаруживает обширную циркуляционную зону за поворотом и небольшую во внешнем углу канала.

Для более детального сравнения полученных численных расчетов и исследования влияния способа аппроксимации конвективных членов в уравнении движения на решение, рассмотрим изменение продольной скорости $\bar{u}$ и кинетической энергии турбулентности $\bar{k}$ поперек канала в сечении за поворотом в середине зоны рециркуляции потока.

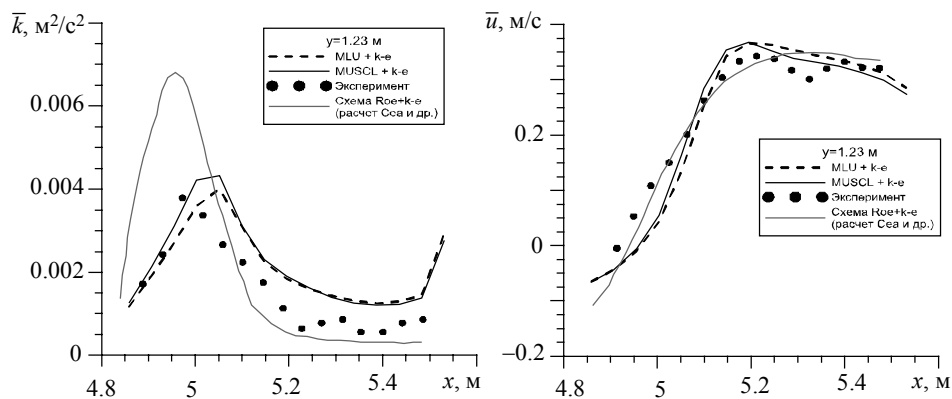


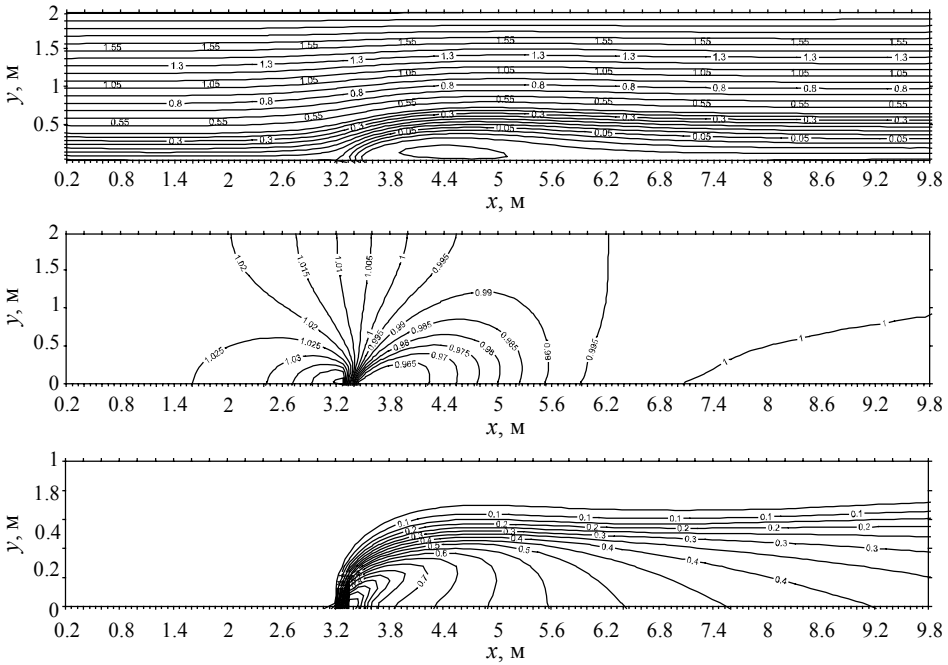
Рис. 3. Кинетическая энергия турбулентности $\bar{k}$ и продольная компонента скорости $\bar{u}$ в сечении $x = 1.23$ м (рис. 2, б)

Из рис. 3 видно, что рассматриваемые в работе модель и численный метод позволяют хорошо предсказать распределение компоненты скорости и кинетической энергии поперек канала. Причем использование разностных аппроксимаций MUSCL и MLU [25] для конвективных членов дает близкие по значениям численные решения. Из рисунка видно, что расчеты фиксируют отрицательные значения осредненной по глубине продольной компоненты скорости в средней части области рециркуляции потока, максимальные значения скорости $\bar{u}$ в рассматриваемом сечении, как в расчетах, так и в эксперименте [26], наблюдаются в центре канала. Осредненная по глубине кинетическая энергия турбулентности имеет наименьшие значения в области, где наблюдается максимум скорости, а наибольшие – на границе зоны рециркуляции потока, что отвечает современным представлениям о структуре турбулентных отрывных течений в каналах [13, 23].

Заметим, что представленные на рис. 3 экспериментальные данные [26] соответствуют измерениям локальной продольной компоненты скорости и кинетической энергии, проведенным на середине глубины течения в канале в указанном сечении.

Прямой канал с притоком

Решается задача о распространении примеси, поступающей в канал вместе с боковым притоком. Расчет проводится для турбулентного течения в канале шириной 10 и глубиной 2 м при скорости входного потока 1 м/с и средней глубине руслового течения 1 м. Скорость притока составляет 1 м/с, а ширина входной области притока равна 0.17 м (рис. 4).



На рис. 4 представлены линии тока, изолинии глубины и концентрации примеси, полученные численно на основе предлагаемой математической модели и численного метода. Из рисунка видно, что приток проникает на расстояние до 0.6 м, за ним образуется протяженная зона рециркуляционного течения. Перед притоком глубина руслового течения увеличивается, сразу за притоком снижается с последующим выходом на значение 1 м вдоль течения в канале. Эти результаты качественно согласуются с расчетами, приведенными в [2, 13].

На рис. 5 показаны рассчитанные изменения концентрации примеси вдоль правой (y = 0) боковой стенки канала, полученные с использованием различных схем

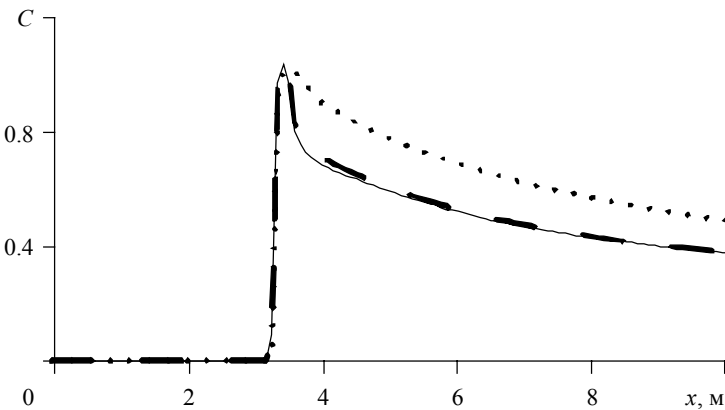


Рис. 5. Изменение концентрации примеси вдоль правой стенки канала (сплошная линия – расчет по схеме MUSCL, пунктирная – по схеме MLU, точечная – по противопотоковой схеме первого порядка [24])

аппроксимации конвективных членов в уравнениях движения. Сравнение графиков показывает, что хотя все схемы хорошо предсказывают положение максимального значения концентрации, однако схемы более высоких порядков аппроксимации (MLU, MUSCL) фиксируют более резкое уменьшение концентрации примеси вдоль рассматриваемой границы области. При этом рассчитанные значения с использованием схем MLU и MUSCL для моделируемого случая почти совпадают. Обычная противопотоковая схема первого порядка максимальные значения схемной вязкости проявляет в областях течения, где вектор скорости направлен по углом 45° к линиям сетки [24] и поэтому приводит к существенному сглаживанию поперечных профилей концентрации в области рециркуляционного течения.

Расчет турбулентного течения в русле реки

Разработанные математическая модель и численный метод были применены для исследования стационарного турбулентного течения в небольшой неглубокой реке, русло которой резко меняет своё направление. Для исследования выбран участок реки Доммель длиной около 250 м, расположенный вблизи границы Бельгии и Нидерландов. Выбор объекта исследования обусловлен наличием данных измерений (глубины, скорости, рельефа дна) хорошего качества [28], позволяющих провести проверку расчетов, а также характером русла, способствующим образованию крупных турбулентных структур (рис. 6).

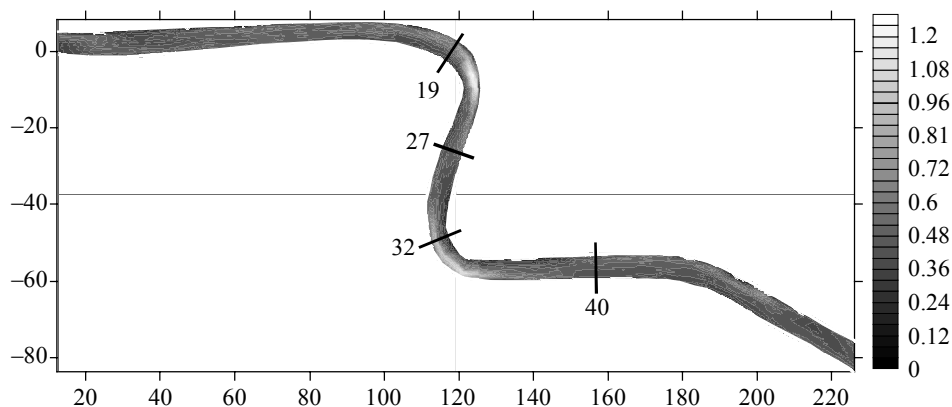


Рис. 6. Геометрия исследуемой области
(batimетрия реки и расположение сечений, где проводились измерения)

Ширина речного русла составляет в среднем около 6 м, скорость речного потока на входе в рассматриваемой области 0.85 м/с, глубина течения на выходе 0.3 м. Для коэффициента Маннинга было выбрано значение 0.02. В расчетах использовалась равномерная структурированная сетка 887×401 узлов. Сходимость итерационного вычислительного процесса контролировалась по величине расхода на выходе из рассматриваемой области.

На рис. 7 представлены измеренные и рассчитанные распределения поперек потока осредненной по глубине скорости в указанных на рис. 6 сечениях на S-образном участке реки, резко меняющей направление течения.

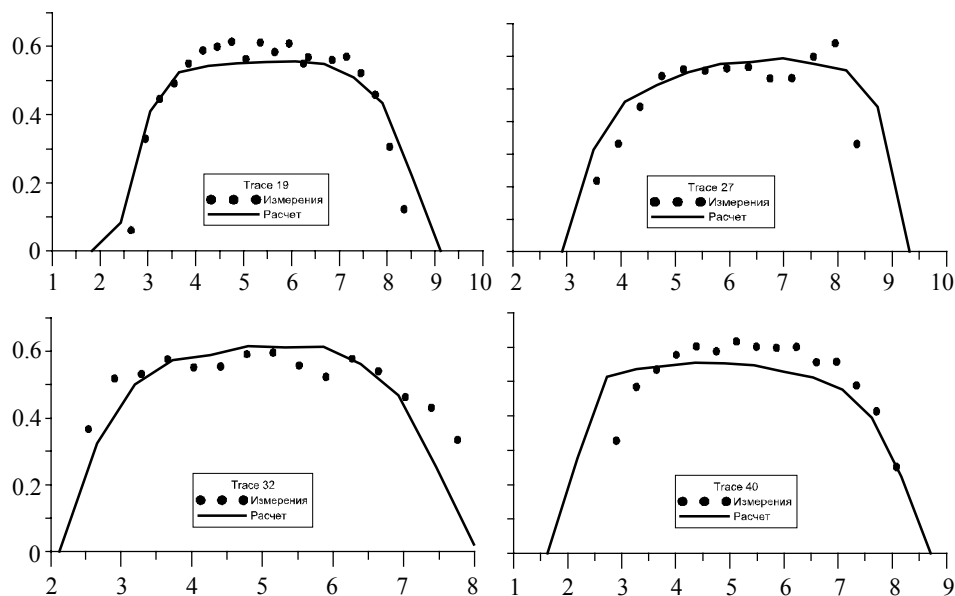


Рис. 7. Распределение осредненной по глубине скорости потока в сечениях, обозначенных на рис. 6 (сплошная линия – расчет, точки – измерения из [28])

Из рисунка видно, что рассчитанные и измеренные значения осредненной по глубине скорости в условиях некоторой неопределенности входных данных хорошо согласуются между собой. Кроме того, из анализа полученных полей вектора скорости, энергии турбулентности и глубины потока было установлено, что турбулентное течение в поворотных участках русла реки имеет схожие характеристики с течением в поворотном канале с открытой границей (рис. 2). Также за первым поворотом реки образуется обширная область рециркуляционного течения, поток стремится приблизиться к противоположной границе. Скорость речного потока снижается над небольшими углублениями русла реки и увеличивается над его возвышениями.

Выводы

Представлена математическая модель и численный метод для исследования турбулентных течений в речных потоках на основе приближения мелкой воды. В модели учтено влияние трения о дно русла, ветрового трения, силы Кориолиса, сложной геометрии речного русла с притоками и изменением его глубины. Для описания турбулентной структуры речного течения в модель включена осредненная по глубине версия двухпараметрической модели турбулентности с дополнительными слагаемыми генерации турбулентности за счет трения речного потока о дно русла. Численный метод представляет собой модификацию известного метода SIMPLE Патанкара, в которой дополнительно рассматривается изменение глубины потока в уравнениях модели.

Математическая модель и численный метод были применены для исследования турбулентного течения в открытом канале прямоугольного поперечного сечения с поворотом на 90° , в прямом открытом канале с боковым притоком примеси и для моделирования течения в неглубоком речном потоке. Результаты расчетов

по разработанной численной модели для течения в лабораторной установке хорошо согласуются как по значениям скорости, так и по значениям энергии турбулентности с экспериментальными данными и расчетами других авторов. На основании проведенного сопоставления расчетов показано, что более высокого качества воспроизведения наблюдений в рециркуляционных течениях можно достичь, применяя численную схему более высокого порядка аппроксимации для конвективных членов транспортных уравнений. Результаты расчетов в S-образном речном потоке также хорошо согласуются с данными наблюдений и, в целом, соответствуют представлениям о таких течениях и закономерностям, наблюдаемым при их изучении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика в СССР за 50 лет. М.: Рипол Классик, 2013. 886 с.
2. McGuirk J.J., Rodi W. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 88. P. 761–781.
3. Chu V.H., Babarutsi S. Confinement and bed-friction effects in shallow turbulent mixing layers // *Journal of Hydraulic Engineering*. 1988. V. 10. No. 114. P. 1257–1274.
4. Yu L., Zhu S.P. Numerical Simulation of Discharged Waste Heat and Contaminants into the South Estuary of the Yangtze River // *Mathematical and Computer Modelling*. 1993. V. 18. No. 12. P. 107–123.
5. Olsen N.R.B., Stokseth S. Three-dimensional numerical modelling of water flow in a river with large bed roughness // *Journal of Hydraulic Research*. 1995. V. 33. P. 571–581.
6. Hou J., Simons F., Mahgoub M., and Hinkelmann R. A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2013. No. 257. P. 126–149.
7. Chaouat B., Schiestel R. Reynolds stress transport modelling for steady and unsteady channel flows with wall injection // *Journal of Turbulence*. 2002. V. 3. P. 1–16.
8. Kang S., Lightbody A., Hill C., and Sotiropoulos F. High-resolution numerical simulation of turbulence in natural waterways // *Advances in Water Resources*. 2011. V. 34. P. 98–113.
9. Kang S., Sotiropoulos F. Numerical modeling of 3D turbulent free surface flow in natural waterways // *Advances in Water Resources*. 2012. No. 40. P. 23–36.
10. Sandiv S.K., Sotiropoulos F., and Odgaard A.J. Three-Dimensional Numerical Model for Flow through Natural Rivers // *Journal of Hydraulic Engineering*. January 1998. V. 124. No. 1. P. 13–24.
11. Duc B., Wenka T., and Rodi W. Numerical Modeling of Bed Deformation in Laboratory Channels // *Journal of Hydraulic Engineering*. September 2004. V. 9. P. 894–904.
12. Uijttewaal W.S.J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers // *Journal of Hydraulic Research*. 2014. V. 52. No. 2. P. 157–172.
13. Роду В. Модели турбулентности окружающей среды // *Методы расчета турбулентных течений*. М.: Мир, 1984. С. 276–278.
14. Sauvaget P., David E., and Soares C. Modelling tidal currents on the coast of Portugal // *Coastal Engineering*. 2000. No. 40. P. 393–409.
15. Finaud-Guyot P., Delenne C., Guinot V., and Llovel C. 1D–2D coupling for river flow modeling // *Comptes Rendus Mecanique*. 2011. No. 339. P. 226–234.
16. Любимова Т.П., Летухин А.П., Паршакова Я.Н., Тиунов А.И. Численное моделирование разбавления и переноса высокоминерализованных рассолов в турбулентных потоках // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010. Т. 3. № 4. С. 68–79.
17. River2D Hydrodynamic Model for Fish Habitat [Электронный ресурс] // River2D: [сайт]. [2002]. URL: <http://www.river2d.ualberta.ca/> (дата обращения: 10.06.2015).
18. Yu L., Righetto A.M. Depth-averaged k-omega turbulence model and application // *Advances in Engineering Software*. 2001. No. 32. P. 375–394.
19. Barbarutsi S., Chu V.H. A two-length-scale model for quasi two-dimensional turbulent shear flows // *Proc. 24th Congr. of IAHR*. 1991. V. C. P. 51–60.

20. Babarutsi S., Chu V.H. Modelling transverse mixing layer in shallow open-channel flows // Journal of Hydraulic Engineering. 1998. V. 7. No. 124. P. 718–727.
21. Babarutsi S., Nassiri M., and Chu V.H. Computation of shallow recirculating flow dominated by friction // Journal of Hydraulic Engineering. 1996. V. 122. No. 7. P. 367–372.
22. Чой В.Т. Гидравлика открытых каналов. М.: Госстройиздат, 1969. 462 с.
23. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 2. No. 3. P. 269–289.
24. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
25. van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // Journal of Computational Physics. 1979. No. 32. P. 101–136.
26. Cea L., Puertas J., and Vazquez-Cendon M.E. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts // Archives of Computational Methods in Engineering. September 2007. V. 14. No. 3. P. 303–341.
27. Cea L., Vazquez-Cendon M.E. Unstructured finite volume discretisation of bed friction and convective flux in solute transport models linked to the shallow water equations // Journal of Computational Physics. 2012. No. 231. P. 3317–3339.
28. de Vriend H.J. and Geldof H.J. Main flow velocity in short and sharply curved river bends // Department of Civil Engineering Delft University of Technology, Delft, 83, 1983.

Статья поступила 15.11.2015 г.

Churuksaeva V.V., Starchenko A.V. A MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL METHOD FOR COMPUTATION OF A TURBULENT RIVER STREAM

DOI 10.17223/19988621/38/12

A mathematical model and a computational method for numerical investigation of turbulent river streams are proposed. The mathematical model is based on the shallow water approach. The model takes into account the influence of bottom friction, wind friction, Coriolis force, and complex geometry of the river bed with inflows and irregular bathymetry. A depth-averaged version of the k-epsilon turbulence model with a specific term for the generation of turbulence by the river bottom friction is used to describe the turbulent structure of the flow.

The numerical method for solving discretized equations is a modification of the SIMPLE algorithm proposed by Patankar. A novel feature of the algorithm is considering the water depth variation in the equations of the model.

The model and the method proposed were applied to computations of a turbulent flow in laboratory open channels and of steady flow in a shallow river with a sharply curved bed.

Computations of the flow in the laboratory channel show a good agreement with the experimental observations and results from references. The results of the calculations of the flow in an S-shaped river flow represent flow patterns observed in studying river flows and show agreement with general concepts.

Keywords: mathematical modeling of a river stream, shallow water approach, turbulent flow, pollutant transport, finite volume method.

CHURUKSAEVA Vladislava Vasilievna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation),
E-mail: chu.vv@mail.ru

STARCHENKO Alexander Vasilievich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: starch@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Sedov L.I. *Mekhanika v SSSR za 50 let*. Moscow, Ripol Klassik Publ., 2013. 886 p. (in Russian)
2. McGuirk J.J., Rodi W. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, vol. 88, pp. 761–781.
3. Chu V.H., Babarutsi S. Confinement and bed-friction effects in shallow turbulent mixing layers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988, vol. 10, no. 114, pp. 1257–1274.
4. Yu L., Zhu S.P. Numerical Simulation of Discharged Waste Heat and Contaminants into the South Estuary of the Yangtze River. *Mathematical and Computer Modelling*, 1993, vol. 18, no. 12, pp. 107–123.
5. Olsen N.R.B., Stokseth S. Three-dimensional numerical modelling of water flow in a river with large bed roughness. *Journal of Hydraulic Research*, 1995, vol. 33, pp. 571–581.
6. Hou J., Simons F., Mahgoub M., and Hinkelmann R. A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, no. 257, pp. 126–149.
7. Chaouat B., Schiestel R. Reynolds stress transport modelling for steady and unsteady channel flows with wall injection. *Journal of Turbulence*, 2002, vol. 3, pp. 1–16.
8. Kang S., Lightbody A., Hill C., and Sotiropoulos F. High-resolution numerical simulation of turbulence in natural waterways. *Advances in Water Resources*, 2011, vol. 34, pp. 98–113.
9. Kang S., Sotiropoulos F. Numerical modeling of 3D turbulent free surface flow in natural waterways. *Advances in Water Resources*, 2012, no. 40, pp. 23–36.
10. Sandiv S.K., Sotiropoulos F., and Odgaard A.J. Three-Dimensional Numerical Model for Flow through Natural Rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, January 1998, vol. 124, no. 1, pp. 13–24.
11. Duc B., Wenka T., and Rodi W. Numerical Modeling of Bed Deformation in Laboratory Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, September 2004, vol. 9, pp. 894–904.
12. Uijttewaal W.S.J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers. *Journal of Hydraulic Research*, 2014, vol. 52, no. 2, pp. 157–172.
13. Rodi V. Modeli turbulentnosti okruzhayushchey sredy. *Metody rascheta turbulentnykh techeniy*. Moscow, Mir Publ., 1984, pp. 276–278.
14. Sauvaget P., David E., and Soares C. Modelling tidal currents on the coast of Portugal. *Coastal Engineering*, 2000, no. 40, pp. 393–409.
15. Finaud-Guyot P., Delenne C., Guinot V., and Llovel C. 1D–2D coupling for river flow modeling. *Comptes Rendus Mecanique*, 2011, no. 339, pp. 226–234.
16. Lyubimova T.P., Lepikhin A.P., Parshakova Ya.N., Tiunov A.I. Chislennoe modelirovanie razbavleniya i perenosa vysokomineralizovannykh rassolov v turbulentnykh potokakh. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 68–79. (in Russian)
17. *River2D Hydrodynamic Model for Fish Habitat*. URL: <http://www.river2d.ualberta.ca/> (10.06.2015).
18. Yu L., Righetto A.M. Depth-averaged k- ω turbulence model and application. *Advances in Engineering Software*, 2001, no. 32, pp. 375–394.
19. Babarutsi S., Chu V.H. A two-length-scale model for quasi two-dimensional turbulent shear flows. *Proc. 24th Congr. of IAHR*, 1991, vol. C, pp. 51–60.
20. Babarutsi S., Chu V.H. Modelling transverse mixing layer in shallow open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1998, vol. 7, no. 124, pp. 718–727.
21. Babarutsi S., Nassiri M., and Chu V.H. Computation of shallow recirculating flow dominated by friction. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1996, vol. 122, no. 7, pp. 367–372.
22. Chou V.T. *Gidravlika otkrytykh kanalov*. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1969. 462 p. (in Russian)
23. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, vol. 2, no. 3, pp. 269–289.
24. Patankar S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

25. van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. *Journal of Computational Physics*, 1979, no. 32, pp. 101–136.
26. Cea L., Puertas J., and Vazquez-Cendon M.E. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Archives of Computational Methods in Engineering*, September 2007, vol. 14, no. 3, pp. 303–341.
27. Cea L., Vazquez-Cendon M.E. Unstructured finite volume discretisation of bed friction and convective flux in solute transport models linked to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 2012, no. 231, pp. 3317–3339.
28. de Vriend H.J. and Geldof H.J. Main flow velocity in short and sharply curved river bends. *Department of Civil Engineering Delft University of Technology*, Delft, 83, 1983.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ВАСЕНИН Игорь Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета.

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

ГУСЕЛЬНИКОВА Ульяна Александровна – студентка физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: guselnikova.ulyana@yandex.ru

ДЬЯЧЕНКО Николай Николаевич – доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

ЗАБАРИНА Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: aizabarina@gmail.com

ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Московской государственной академии водного транспорта. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

КУЛЕШОВ Артем Александрович – аспирант кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

ОРЛОВ Максим Юрьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: orloff_m@mail.ru

ОРЛОВА Юлия Николаевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры геологии и разработки нефтяных месторождений Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: orlovaun@mail.ru

ПОНОМАРЕВА Мария Андреевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pma@ftf.tsu.ru

ПРИХОДОВСКИЙ Михаил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики факультета систем управления Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: prihod1@yandex.ru

СЕРГЕЕВА Дина Владимировна – преподаватель кафедры информатики и математики инженерно-экономического факультета Вологодского института права и экономики ФСИН России. E-mail: dina_sergeeva@mail.ru

СОЛОНЕНКО Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, зав. лабораторией, научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, декан механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

ФИЛИНА Мария Петровна – магистрант физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: filina.mari@mail.ru

ФОМИНА Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: ef254@mail.ru

ФУКСОН Софья Леонидовна – аспирантка кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: fouk.son.ya@gmail.com

ЧУРУКСАЕВА Владислава Васильевна – аспирантка кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: chu.vv@mail.ru

ШУКЮРОВ Аудин Шукюр – научный сотрудник кафедры негармонического анализа Института математики и механики Национальной Академии Наук Азербайджана. E-mail: ashshukurov@gmail.com

ЯКУТЕНОК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: yva@ftf.tsu.ru

ЯЩУК Алексей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru