

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.1

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ
ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

А. Ю. Зубов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Изучаются ориентированные графы, обладающие свойством транзитивности и имеющие ограниченные степени вершин. Указываются классы экстремальных графов.

Ключевые слова: теорема Турана, экстремальный ориентированный граф.

DOI 10.17223/20710410/30/8

ABOUT SOME CLASSES OF EXTREMAL ORIENTED GRAPHS

A. Yu. Zubov

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia***E-mail:** Zubovanatoly@yandex.ru

Some classes of extremal directed graphs with the transitivity property and limited vertices degrees are studied.

Keywords: Turan's theorem, extremal directed graph.

1. Задачи экстремальной теории графов

Одно из направлений теории графов составляет класс задач, связанных с оценкой максимального числа рёбер графа, не содержащего подграфов определённого вида. Это направление, получившее название «*экстремальная теория графов*», возникло в начале XX века после доказательства теоремы Мантеля (1907 г.), в которой утверждается, что связный граф порядка $n \geq 3$ и размера $m > \lfloor n^2/4 \rfloor$ содержит треугольник [1]. *Порядком* и *размером* графа называется соответственно число его вершин и рёбер. Теорема Мантеля обобщается теоремой Турана (1941 г.), в которой доказано, что максимальный размер графа порядка $n \geq 3$, не содержащего полного подграфа K_k порядка k , равен $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2} \right\rfloor$, где r — остаток от деления n на $k-1$. Теорема Турана даёт также полное описание экстремальных графов $T_{n,k}$ такого размера [2]. Турановский граф $T_{n,k}$ — это k -дольный полный граф, такой, что его доли $V_1, \dots, V_k$ имеют возможно близкие к друг другу мощности (r долей мощности $\lfloor n/k \rfloor$ и $k-r$ долей мощности $\lfloor n/k \rfloor$).

Известно большое число других подобных результатов [2–4]. Например, если порядок $n \geq 4$ и размер m графа связаны соотношением $m \geq (n + n\sqrt{4n-3})/4 + 1$, то граф содержит цикл C_4 длины 4. В теореме Поша (1952 г.) утверждается, что

граф порядка n , не содержащий путей длины k , имеет размер m , не меньший чем $n(k-1)/2$. Эта оценка достижима в том и только в том случае, когда все компоненты связности графа есть полные подграфы K_k . П. Туран поставил общую задачу (the problem of forbidden subgraphs — проблема запрещённых подграфов): найти максимальный размер графа порядка n , который не содержит заданного подграфа F . Пусть $ex(n, F)$ — такой максимальный размер и $EX(n, F)$ — множество соответствующих экстремальных графов. В этих терминах теорему Турана формулируют в виде равенства $EX(n, F) = T_{n,k}$. Один из фундаментальных результатов экстремальной теории графов сформулирован в теореме Эрдёша — Стоуна (1946 г.): для графа F , содержащего не менее одного ребра, выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n, F)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1},$$

где $\chi(F)$ — хроматическое число графа F . Аналогичные задачи возникают и для ориентированных графов без петель, обладающих свойством транзитивности: если граф содержит ориентированные рёбра (a, b) и (b, c) , то он содержит и ребро (a, c) . Такие графы ассоциируются с частично упорядоченными множествами. Так, в [5] для решения некоторых уравнений в группе подстановок G на множестве $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ вводится отношение порядка $\prec_\sigma$, определяемое произвольной подстановкой $\sigma = \begin{pmatrix} c \\ \sigma c \end{pmatrix}_{c \in \Omega_n}$:

$$a \prec_\sigma b \Leftrightarrow [\sigma a, a] \subset [\sigma b, b],$$

где

$$[\sigma c, c] = \begin{cases} \{c\}, & \text{если } \sigma c = c, \\ \{\sigma^{-1}c, \sigma^{-1}c + 1, \dots, c + 1, c\}, & \text{если } \sigma c \neq c, \end{cases}$$

и решается экстремальная задача относительно величин

$$\Delta_\sigma = |\{(a, b) : a, b \in \Omega_n, a \prec_\sigma b\}|, \quad \sigma \in G.$$

Такая задача оказывается эквивалентной задаче нахождения максимального размера ориентированного графа без петель с n вершинами, обладающего свойствами транзитивности и ограниченности для каждой вершины чисел предшествующих (полустепень захода) и последующих (полустепень исхода) вершин. Этому вопросу посвящён п. 3 данной работы.

Отметим, что теорема Турана верна и для ориентированных графов без петель со свойством транзитивности. При этом условие отсутствия полных подграфов порядка k заменяется условием отсутствия в графе ориентированных путей длины k . В данной работе изучаются ориентированные графы порядка n со свойством транзитивности, для которых степень каждой вершины не превосходит $k < n$. В зависимости от чётности чисел k, n приводятся примеры экстремальных графов, размер которых достигает величины $\lfloor n(k-1)/2 \rfloor$.

2. Ориентированные графы с ограниченными степенями вершин

Введём следующие обозначения. Пусть Γ_n — ориентированный граф без петель с множеством вершин Ω_n , обладающий свойством транзитивности, и $\bar{\Gamma}_n$ — соответствующий неориентированный граф; v_c — степень вершины $c \in \Omega_n$; $\Gamma_{n,k}$ — граф Γ_n , степень каждой вершины которого меньше k ; $|\Gamma_{n,k}|$ — число рёбер графа $\Gamma_{n,k}$; $\Gamma_{n,k}^{\max}$ — граф $\Gamma_{n,k}$ максимального размера.

Подсчитывая число рёбер графа, степень каждой вершины которого равна $k - 1$, получаем следующее неравенство.

Утверждение 1. Для любого графа $\Gamma_{n,k}$

$$|\Gamma_{n,k}| \leq \left\lfloor \frac{n(k-1)}{2} \right\rfloor. \quad (1)$$

Замечание 1. Граф $\Gamma_{n,k}$ не содержит (ориентированных) путей длины k . Вместе с тем неравенство (1) не следует из приведённой выше теоремы Поша, поскольку в графе $\bar{\Gamma}_{n,k}$ могут содержаться пути длины, большей чем $k - 1$.

Покажем, что оценка (1) достижима.

Утверждение 2. При $k \in \{1, 2\}$, $k \leq n$, и при $k = 3$, $3 \leq n$, $n \neq 5$, имеет место равенство

$$|\Gamma_{n,k}^{\max}| = \left\lfloor \frac{n(k-1)}{2} \right\rfloor. \quad (2)$$

Доказательство. При $k = 1$ имеем $|\Gamma_{n,1}| = 0$. Граф $\Gamma_{n,2}$ не содержит путей длины 2. При чётном n экстремальным является граф, рёбра которого исчерпываются элементами множества

$$\{(i, n/2 + i) : i = 1, 2, \dots, n/2\},$$

а при нечётном n — элементами множества

$$\{(i, [n/2] + i) : i = 1, 2, \dots, [n/2]\}.$$

Поэтому $|\Gamma_{n,k}^{\max}| = [n/2]$.

Граф $\Gamma_{n,3}$ не содержит путей длины 3. Легко видеть, что при чётном n экстремальным является граф C_n , представляющий собой цикл, составленный рёбрами

$$(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 4), \dots, (n-1, n), (1, n)$$

с чередующимися направлениями, а при нечётном n — граф из двух компонент C_{n-3} и C_3 , составленных рёбрами $(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 4), \dots, (n-4, n-3), (1, n-3)$ и $(n-2, n-1), (n-1, n), (n-2, n)$. Отсюда следует, что $|\Gamma_{n,3}^{\max}| = n$. Исключение составляет случай, когда $n = 5$, $k = 3$. Легко проверить, что $|\Gamma_{5,3}^{\max}| = 4$. ■

Утверждение 3. При любом чётном n и любом k , $3 \leq k \leq n/2 + 1$, выполняется равенство (2).

Доказательство. Рассмотрим граф C_n из доказательства утверждения 2. Его вершины, представленные нечётными числами, являются истоками графа (их полустепени захода равны 0), а вершины, представленные чётными числами, являются стоками графа (их полустепени исхода равны 0). Можно рассматривать такой граф как двудольный, степень каждой вершины которого равна 2. Одной долей графа служит $\{1, 3, \dots, n-1\}$, второй — $\{2, 4, \dots, n\}$. Все рёбра графа начинаются в первой доле и заканчиваются во второй.

Аналогично можно построить и двудольный граф $\Gamma_{n,k}$ с теми же долями, степень каждой вершины которого равна k , где $3 \leq k \leq n/2 + 1$. Таким, например, является граф с множеством рёбер

$$\{(2i+1, 2i+2j+2 \bmod n), i = 1, 2, \dots, n/2-1, j = 0, 1, \dots, k-2\}.$$

Для построенного графа выполняется равенство (2). ■

Заметим, что для любых нечётного n и чётного k не существует графа Γ_n , степень каждой вершины которого равна $k - 1$. В таком случае экстремальным является граф $\Gamma_{n,k}$, степени $n - 1$ вершин которого равны $k - 1$, а степень одной вершины равна $k - 2$. Однако попытки построить такой ориентированный граф $\Gamma_{n,k}$, например при $n = 7$, $k = 4$, не приводят к успеху. Непосредственно проверяется, что для $\Gamma_{7,4}^{\max}$ равенство (2) не выполняется. Вместе с тем справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. При любом нечётном $n \geq 5$, $n \neq 7$, выполняется равенство

$$|\Gamma_{n,4}^{\max}| = \lfloor 3n/2 \rfloor.$$

Доказательство. Поскольку $n - 5$ чётно, при $n \geq 11$ выполняются условия утверждения 3 и, следовательно, существует граф $\Gamma' = \Gamma_{n-5,4}$, для которого выполняется равенство (2). Заметим, что экстремален и граф $\Gamma'' = \Gamma_{5,4}$ с множеством рёбер

$$\{(1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}.$$

Построим граф $\Gamma_{n,4}$, состоящий из компонент связности Γ' и Γ'' . Непосредственно проверяется, что построенный граф экстремален. Аналогично граф $\Gamma_{9,4}$, компонентами которого служат Γ' и полный граф $\Gamma_{4,4}$, экстремален. ■

Утверждение 5. При любых нечётных k и $n \geq 3k - 2$ выполняется равенство (2).

Доказательство. С учётом утверждения 3, достаточно заметить, что граф $\Gamma_{n,k}$, состоящий из компонент $\Gamma_{k,k}$ и $\Gamma_{n-k,k}^{\max}$, является экстремальным. ■

Известны примеры графов $\Gamma_{n,k}$, для которых выполняется равенство (2) и при других соотношениях между k и n , чем указанные в условиях утверждений 2–5. Таковым является, например, граф $\Gamma_{8,6}$ с множеством рёбер

$$(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (3, 2), (2, 4), (5, 2), (7, 2), (3, 4), \\ (3, 6), (3, 7), (3, 8), (5, 4), (7, 4), (5, 6), (5, 8), (7, 6), (8, 6), (7, 8).$$

3. Ориентированные графы с ограниченными полустепенями вершин

Пусть $G_{n,k}$ — ориентированный граф без петель со свойством транзитивности, с n вершинами, полустепени исхода и захода которых меньше k .

Утверждение 6. Справедлива оценка

$$|G_{n,k}^{\max}| < |T_{n,k+1}|. \quad (3)$$

Доказательство. Граф $G_{n,k}$ содержит истоки и стоки. Любой сток достижим из некоторого истока. По условию длина пути между истоком и стоком не превосходит $k - 1$. Отсюда следует, что в $G_{n,k}$ нет путей длины k и полных подграфов на $k + 1$ вершинах.

Заметим, что и неориентированный граф $\bar{G}_{n,k}$ не содержит полных подграфов K_{k+1} . В самом деле, если $\bar{G}_{n,k}$ содержит K_{k+1} , то граф $G_{n,k}$ обязан содержать путь длины k . Это легко доказать индукцией по k , учитывая, что имеет место цепочка включений $K_{k+1} \supset K_k \supset K_{k-1} \supset \dots$. По теореме Турана отсюда следует, что

$$|G_{n,k}^{\max}| = |\bar{G}_{n,k}^{\max}| \leq |T_{n,k+1}|.$$

Если

$$|\bar{G}_{n,k}^{\max}| = |T_{n,k+1}|, \quad (4)$$

то $\bar{G}_{n,k}^{\max} = T_{n,k+1}$ в силу того, что $T_{n,k+1}$ — единственный экстремальный граф. Используя описание графа $T_{n,k+1}$, убеждаемся в том, что степени его вершин равны k или $k+1$. В частности, степень любого истока a графа $G_{n,k}^{\max}$ тогда не меньше k , что невозможно, поскольку по условию полустепень исхода вершины a не превосходит $k-1$. Следовательно, равенство (4) невозможно, откуда следует (3). ■

Заметим, что конструкции экстремальных графов типа $\Gamma_{n,k}$, рассмотренные в п. 2, являются и графами типа $G_{n,k}$. Это позволяет получить нижнюю оценку величины $|G_{n,k}^{\max}|$ для таких графов.

Утверждение 7. Для значений n, k , удовлетворяющих любому из условий утверждений 2–5, справедливо неравенство

$$\left\lfloor \frac{n(k-1)}{2} \right\rfloor \leq |G_{n,k}^{\max}|. \quad (5)$$

Оценки (3) и (5) для некоторых значений n, k дают близкие значения. Например, при $n = 2k$ получаем следующий результат.

Утверждение 8. Если $n = 2k$, то

$$\frac{n(n-2)}{4} \leq |G_{n,k}^{\max}| \leq \frac{n(n-2)}{2}. \quad (6)$$

В [5] доказано, что на самом деле в утверждении 8 нижняя оценка достигается. Вычислим точно величину $|G_{n,k}^{\max}|$ при $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

Утверждение 9. Имеет место равенство

$$|G_{n, \lfloor (n+1)/2 \rfloor}^{\max}| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (7)$$

Доказательство. Граф $G = G_{n,k}$ определяет на своём множестве вершин $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ отношение порядка $\prec_G$, где $a \prec_G b$ для $a, b \in \Omega$, если и только если G содержит ребро (a, b) . Это отношение обладает свойством транзитивности (но, в отличие от отношения частичного порядка, не обладает свойствами рефлексивности и антисимметричности). Пусть $U_{(\Omega, \prec_G)}(a)$ — множество элементов из Ω , предшествующих a согласно $\prec_G$, и $W_{(\Omega, \prec_G)}(a)$ — множество элементов из Ω , следующих за a согласно $\prec_G$. Из определения графа G следует, что для каждого $a \in \Omega$ выполняются неравенства

$$|U_{(\Omega, \prec_G)}(a)| \leq k-1, \quad |W_{(\Omega, \prec_G)}(a)| \leq k-1. \quad (8)$$

Пусть

$$\Phi(\Omega, \prec_G) = \{(a, b) : a, b \in \Omega, a \prec_G b\}.$$

Тогда (7) равносильно равенству

$$\max_{G=G_{n, \lfloor (n+1)/2 \rfloor}} |\Phi(\Omega, \prec_G)| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (9)$$

Докажем (9) индукцией по n .

При $n = 1$ и 2 утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для $n \leq r - 1$, и рассмотрим случай, когда $n = r$. Пусть сначала n чётно. По условию выполняются неравенства (8) при $k = n/2$. Так как $(\Omega, \prec_G)$ не содержит циклов, найдётся $b \in \Omega$, для которого $|U_{(\Omega, \prec_G)}(b)| = 0$. Удалив из Ω точку b , получим множество $\Omega' = \Omega \setminus \{b\}$ с тем же отношением порядка $\prec_G$, для которого выполняются неравенства

$$|U_{(\Omega', \prec_G)}(c)| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \quad (10)$$

$$|W_{(\Omega', \prec_G)}(c)| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \quad (11)$$

при любом $c \in \Omega'$. Поэтому для Ω' выполняются условия (8) и по предположению индукции

$$|\Phi(\Omega', \prec_G)| \leq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{2} \right\rfloor.$$

Поскольку $|W_{(\Omega, \prec_G)}(c)| \leq n/2 - 1$, справедлива оценка

$$|\Phi(\Omega, \prec_G)| = |\Phi(\Omega', \prec_G)| + |W_{(\Omega, \prec_G)}(b)| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

что и требуется доказать.

Пусть n нечётно. Предположим, что на $(\Omega, \prec_G)$ достигается максимум величины $|\Phi(\Omega, \prec'_G)|$ по всем отношениям порядка $\prec'_G$, для которых выполняются условия (8). Если в Ω имеется не более одной точки b , для которой $|U_{(\Omega, \prec_G)}(b)| = [(n-1)/2]$ или $|W_{(\Omega, \prec_G)}(b)| = [(n-1)/2]$, то по предположению индукции

$$|\Phi(\Omega, \prec_G)| = |\Phi(\Omega \setminus \{b\}, \prec_G)| + |U_{(\Omega, \prec_G)}(b)| \leq \frac{(n-1)(n-3)}{4} + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

что и требуется доказать.

Пусть $i_1, \dots, i_t$ — все точки из Ω , для которых

$$|W_{(\Omega, \prec_G)}(i_\alpha)| = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad \alpha = 1, \dots, t, \quad t \geq 0,$$

и $j_1, \dots, j_s$ — все точки из Ω , для которых

$$|U_{(\Omega, \prec_G)}(j_\beta)| = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad \beta = 1, \dots, s, \quad s \geq 0.$$

Предположим, что $s = 0$. Тогда по условию случая $t \geq 2$. Пусть j — одна из точек, для которых $|W_{(\Omega, \prec_G)}(j)| = 0$. Построим на Ω отношение порядка $\prec'$, совпадающее с $\prec = \prec_G$ на элементах множества $\Omega \setminus \{j\}$; $|U_{(\Omega, \prec')}(j)| = 0$, а $W_{(\Omega, \prec')}(j)$ содержит $[(n-1)/2]$ элементов из множества $\Omega \setminus \{i_1, \dots, i_t, j\}$. Это можно сделать, поскольку $t \leq [(n-1)/2]$ (в противном случае получим противоречие с условием $s = 0$). Поскольку для любой точки $l \in \Omega$, для которой $|W_{(\Omega, \prec)}(l)| = 0$, имеет место

$$|U_{(\Omega, \prec)}(l)| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1,$$

для $(\Omega, \prec')$ выполняются условия (9). Но $|\Phi(\Omega, \prec')| > |\Phi(\Omega, \prec)|$, что противоречит условию выбора отношения $\prec$. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $t = 0$.

Пусть теперь $t > 0$, $s > 0$. Тогда $i_\alpha \prec j_\beta$ для любых $\alpha \in \{1, \dots, t\}$, $\beta \in \{1, \dots, s\}$. В самом деле, если $(i_\alpha, j_\beta) \notin \Phi(\Omega, \prec)$, то $W_{(\Omega, \prec)}(i_\alpha) \cap U_{(\Omega, \prec)}(j_\beta) = \emptyset$. Но тогда в объединении

$$W_{(\Omega, \prec)}(i_\alpha) \cup U_{(\Omega, \prec)}(j_\beta) \cup \{i_\alpha\} \cup \{j_\beta\}$$

содержится более n элементов, что невозможно. В таком случае, исключая из Ω две точки, например i_1 и j_1 , получим множество $\Omega' = \Omega \setminus \{i_1, j_1\}$ с тем же отношением порядка $\prec$, удовлетворяющим условиям (8). Действительно,

$$|W_{(\Omega', \prec)}(i_\alpha)| < \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, \quad |U_{(\Omega', \prec)}(j_\beta)| < \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$$

для $\alpha = 2, \dots, t$, $\beta = 2, \dots, s$. Вместе с точками i_1 и j_1 из множества $\Phi_{\prec}(\Omega)$ мы удалили $n-2$ пары элементов: $\lceil (n-1)/2 \rceil$ пар, содержащих i_1 , и $\lceil (n-1)/2 \rceil - 1$ пар, содержащих j_1 . По предположению индукции

$$|\Phi(\Omega, \prec)| = |\Phi(\Omega', \prec)| + |U_{(\Omega, \prec)}(i_1)| + |W_{(\Omega, \prec)}(j_1)| \leq \frac{(n-3)^2}{2} + n - 2 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil,$$

что и требуется доказать. ■

Следствие 1. Граф $G_{n, \lceil (n+1)/2 \rceil}$, состоящий из двух компонент связности, представляющих собой полные графы $K_{n/2}$, $K_{n/2}$ при чётном n и $K_{(n+1)/2}$, $K_{(n+1)/2}$ при нечётном n , является экстремальным.

В заключение отметим, что автору неизвестны точные значения $|\Gamma_{n,k}^{\max}|$ и $|G_{n,k}^{\max}|$ при произвольных n, k .

ЛИТЕРАТУРА

1. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1972.
2. Llado A. An Introduction to Extremal Graph Theory. CIMPA-UNESCO-Indonesia School on Extremal Problems and Hamiltonicity in Graphs. ITB, Bandung, 2–13 Febr. 2009.
3. Simonovits M. Introduction to Extremal Graph Theory. Budapest: Alfred Renyi Mathematical Institute, 2006.
4. McClintock J. Extremal Graphs Theory for Book-Embeddings. M. Sc. Thesis, University of Melbourne Department of Mathematics and Statistics, 2012.
5. Зубов А. Ю. О диаметре группы S_N относительно системы образующих, состоящей из полного цикла и транспозиции // Труды по дискретной математике. Т. 2. М.: ТВП, 1998. С. 112–150.

REFERENCES

1. Harary F. Graph Theory. Perseus Books, 1994.
2. Llado A. An Introduction to Extremal Graph Theory. CIMPA-UNESCO-Indonesia School on Extremal Problems and Hamiltonicity in Graphs. ITB, Bandung, 2–13 Febr. 2009.
3. Simonovits M. Introduction to Extremal Graph Theory. Budapest: Alfred Renyi Mathematical Institute, 2006.
4. McClintock J. Extremal Graphs Theory for Book-Embeddings. M. Sc. Thesis, University of Melbourne Department of Mathematics and Statistics, 2012.

5. Zubov A. Yu. O diametre gruppy S_N otnositel'no sistemy obrazuyushchikh, sostoyashchey iz polnogo tsikla i transpozitsii [On the diameter of the group S_N with respect to a system of generators consisting of a complete cycle and a transposition]. Tr. Diskr. Mat., 1998, vol. 2, pp. 112–150. (in Russian)