

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.8

АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛОГИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ L -РАЗБИЕНИЯ¹

А. В. Адельшин, А. А. Колоколов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, г. Омск, Россия

Исследуются задачи дискретной оптимизации с логическими ограничениями на основе моделей целочисленного линейного программирования и метода регулярных разбиений. Получена верхняя оценка мощности произвольного L -комплекса многогранника задачи 2-выполнимости, использование которой позволяет более эффективно решать некоторые прикладные задачи проектирования сложных изделий с помощью рассматриваемых подходов.

Ключевые слова: задача выполнимости, логические ограничения, целочисленное программирование, L -разбиение.

DOI 10.17223/20710410/30/10

ANALYSIS AND SOLUTION OF DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS WITH LOGICAL CONSTRAINTS ON THE BASE OF L -PARTITION APPROACH

A. V. Adelshin, A. A. Kolokolov

*Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Omsk, Russia,***E-mail:** adelshin@ofim.oscsbras.ru, kolo@ofim.oscsbras.ru

In the paper, we analyze discrete optimization problems with logical constraints based on integer linear programming models and L -partition approach. We obtain an upper bound for the power of any L -complex of the 2-SAT polytope. The use of this evaluation allows to solve some applied problems of designing complex products by these approaches much more efficiently.

Keywords: *satisfiability problem, logical constraints, integer programming, L -partition.*

Введение

Во многих задачах управления, планирования, проектирования и других областях возникают логические ограничения, которые необходимо учитывать в процессе принятия решений. Указанные ограничения часто описываются с помощью логических формул и приводят к задаче выполнимости, одной из центральных в теории сложности, а также к задаче максимальной выполнимости и смешанной задаче с логическими

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00862.

условиями. Широкое практическое применение этих задач является стимулом для разработки алгоритмов их решения [1–6]. В ряде работ проводились исследования указанных задач на основе моделей целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и L -разбиения [7], получены структурные свойства многогранников задач и предложены семейства трудных задач для определённых классов алгоритмов [8–10]. Кроме того, для задачи выполнимости разработан алгоритм, основанный на методе перебора L -классов [5]. В дальнейшем с его использованием предложены алгоритмы решения задачи максимальной выполнимости и смешанной задачи максимальной выполнимости. В данной работе продолжены исследования структуры многогранника задачи выполнимости, получено новое свойство его L -структуры, которое может оказаться полезным при анализе и разработке алгоритмов решения рассматриваемых задач, основанных на методах целочисленного программирования и аппарате непрерывной оптимизации.

Рассмотрим постановку задачи выполнимости (SAT). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — переменные, принимающие значение *истина* или *ложь*. Под литералом понимается либо переменная x_j , $j = 1, \dots, n$, либо её отрицание. Пусть логическая формула F представляет собой конъюнкцию формул (скобок) C_i , $i = 1, \dots, m$, каждая из которых является дизъюнкцией литералов. Требуется определить, выполнима ли формула F , т. е. существует ли такой набор значений переменных, при котором F принимает значение *истина*. Известно, что задача SAT является NP-полной, а в случае, когда каждая скобка содержит не более двух литералов, задача полиномиально разрешима [11]. Многие известные задачи теории графов, построения расписаний, криптографии могут быть сформулированы как задача выполнимости некоторой логической формулы в конъюнктивной нормальной форме [12–14].

Важным обобщением задачи SAT является задача максимальной выполнимости (MAX SAT). Предположим, что каждой скобке C_i соответствует неотрицательный вес c_i , тогда задача MAX SAT состоит в отыскании набора значений логических переменных, при котором суммарный вес выполненных скобок будет наибольшим.

Перейдём далее к рассмотрению моделей ЦЛП рассматриваемых задач. Приведём сначала модель для задачи выполнимости. Введём булевы переменные $y_1, \dots, y_n$, такие, что y_j соответствует переменной x_j , а $(1 - y_j)$ — её отрицанию, т. е. $y_j = 1$ тогда и только тогда, когда переменная x_j принимает значение *истина*, $j = 1, \dots, n$. Нетрудно показать, что условие выполнимости логической формулы F эквивалентно существованию решения системы

$$\sum_{j \in C_i^+} y_j - \sum_{j \in C_i^-} y_j \geq 1 - |C_i^-|, \quad i = 1, \dots, m; \quad (1)$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad (2)$$

$$y_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где C_i^- и C_i^+ — множества индексов переменных, входящих в скобку C_i с отрицанием и без него соответственно; величина $|C_i^-|$ — мощность множества C_i^- .

Для получения задачи ЦЛП необходимо ввести целевую функцию. В качестве такой функции может быть выбрана, например, $f(y) = y_1 \rightarrow \max$ или $f(y) = \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max$, где $y = (y_1, \dots, y_n)$. В данной работе рассматривается лексикографическая постановка задачи ЦЛП, т. е. ищется лексикографически максимальный вектор y , удовлетворяющий системе ограничений (1) — (3).

Модель ЦЛП задачи максимальной выполнимости выглядит следующим образом:

$$y_0 = \sum_{i=1}^m c_i z_i \rightarrow \max; \quad (4)$$

$$\sum_{j \in C_i^-} y_j - \sum_{j \in C_i^+} y_j + z_i \leq |C_i^-|, \quad i = 1, \dots, m; \quad (5)$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad (6)$$

$$0 \leq z_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad (7)$$

$$y_j, z_i \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Здесь каждой скобке C_i поставлена в соответствие переменная z_i , причём в любом допустимом целочисленном решении $z_i = 1$ только в том случае, когда C_i выполнена. Таким образом, оптимальное значение целевой функции равно наибольшему суммарному весу выполненных скобок. Отметим, что если в последнюю модель добавить ограничения вида (1), то получим модель ЦЛП для смешанной задачи с «жесткими» ограничениями (1) и «мягкими» ограничениями (5).

1. О методе регулярных разбиений

Для исследования структуры задач целочисленного программирования, построения и анализа методов их решения А. А. Колоколовым предложен подход, идея которого заключается в выделении семейства специальных разбиений релаксационного множества задачи. Особенности данного подхода подробно описаны в [7].

Приведём необходимые для дальнейшего изложения определения и обозначения. В первую очередь потребуется понятие лексикографического порядка. Для этого рассмотрим функцию

$$\eta(x, y) = \min\{i : x_i \neq y_i, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq y.$$

Вектор x лексикографически больше (меньше) вектора y , т. е. $x \succ y$ ($x \prec y$), если $x \neq y$ и $x_w > y_w$ ($x_w < y_w$) для $w = \eta(x, y)$. Отношение $\succ$ представляет собой отношение строгого линейного порядка. Запись $x \succeq y$ означает, что либо $x \succ y$, либо $x = y$. Аналогично понимается $x \preceq y$.

Для множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ полагаем: $X \succ Y$ ($X \prec Y$), если $x \succ y$ ($x \prec y$) для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $x \succ y$. Будем говорить, что точки x и y *отделимы*, если найдётся точка $z \in \mathbb{Z}^n$, для которой выполняется $x \succeq z \succeq y$. Точку z назовём *отделяющей*.

Дадим определение L -разбиения. Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \succ y$) называются *L -эквивалентными*, если не существует отделяющей их точки $z \in \mathbb{Z}^n$. Это отношение эквивалентности порождает разбиение любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ на непересекающиеся L -классы. Фактор-множество X/L называется *L -разбиением* множества X . Указанное разбиение обладает рядом полезных свойств, применяемых при разработке и исследовании алгоритмов целочисленного программирования, в частности алгоритмов перебора L -классов. Отметим некоторые из них:

- 1) каждая точка $z \in \mathbb{Z}^n$ образует отдельный L -класс, остальные классы состоят из нецелочисленных точек и называются *дробными*;
- 2) если X — ограниченное множество, то фактор-множество X/L конечно;
- 3) любой дробный L -класс $V \in X/L$ можно представить в виде

$$V = X \cap \{x : x_1 = a_1, \dots, x_{r-1} = a_{r-1}, a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, r$; $1 \leq r \leq n$.

Рангом L -класса V называется величина

$$r(V) = \begin{cases} \min\{i : x_i \neq [x_i], i = 1, \dots, n, x \in V\}, & \text{если } V \text{ — дробный,} \\ n + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подмножество K дробных L -классов из X/L называется *комплексом* (L -*комплексом*), если для любых $V, V' \in K$, $V \succ V'$, не существует точки $z \in X \cap \mathbb{Z}^n$, отделяющей V и V' , т. е. $V \succ z \succ V'$.

Далее рассмотрим лексикографическую задачу ЦЛП следующего вида: найти лексикографически максимальную точку y^* множества $(M \cap \mathbb{Z}^n)$, т. е.

$$\text{найти } y^* = \text{lexmax}(M \cap \mathbb{Z}^n), \quad (9)$$

где M — некоторый выпуклый многогранник. Важную роль в исследовании задачи (9) и методов её решения играет множество

$$M_* = \{y \in M : \forall z \in M \cap \mathbb{Z}^n (y \succ z)\},$$

которое называется *дробным накрытием* задачи (9). Фактор-множество M_*/L называется L -*накрытием* задачи.

Выделение этой части релаксационного множества задачи связано с тем, что в некоторых методах ЦЛП (методах отсечения, перебора L -классов) происходит последовательное исключение точек из M_* , т. е. эти методы можно рассматривать как определённые способы «снятия» дробных накрытий.

С использованием метода регулярных разбиений получен ряд теоретических результатов при исследовании задач с логическими условиями [5, 8–10]. Проведён анализ L -структуры многогранников (1) — (2) и (5) — (7) задач выполнимости и максимальной выполнимости. Построены семейства логических формул, для которых мощности L -накрытий задач выполнимости и максимальной выполнимости растут экспоненциально с увеличением числа переменных. Получены оценки числа итераций некоторых алгоритмов целочисленного линейного программирования при решении задач из построенных семейств.

2. Задача 2-выполнимости

Пусть каждая скобка в логической формуле F содержит не более двух литералов. В этом случае задачу выполнимости называют *задачей 2-выполнимости*. В работе [9] проведён анализ структуры задачи 2-выполнимости и доказана следующая

Лемма 1 [9]. Если многогранник M задачи 2-выполнимости, содержащий целочисленную точку, пересекается с некоторой k -мерной гранью куба $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n\}$, то M содержит вершину этой грани.

С помощью этой леммы получена верхняя оценка мощности L -накрытия лексикографического варианта (9) задачи 2-выполнимости

Теорема 1. Если многогранник M задачи 2-выполнимости содержит целочисленную точку, то для мощности L -накрытия выполняется $|M_*/L| \leq n - 1$.

Далее приводятся результаты исследований структуры многогранника данной задачи, обобщающие ранее полученную оценку теоремы 1.

Лемма 2. Пусть существуют $a = (a_1, \dots, a_n) \in M \cap \mathbb{Z}^n$ и $b = (b_1, \dots, b_n) \in M \cap \mathbb{Z}^n$, такие, что $a \succ b$ и не существует $c \in M \cap \mathbb{Z}^n$ со свойством $a \succ c \succ b$. Тогда для $\Omega = \{y \in M : a \succ y \succ b\}$ справедливо $|\Omega/L| \leq n - 1$.

Доказательство.

I. Допустим, L -комплекс Ω/L содержит L -класс V ранга n . Пусть $V = \{(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) : 0 < v_n < 1\}$, где $v_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, n-1$. Покажем, что $(v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \in M$ и $(v_1, \dots, v_{n-1}, 1) \in M$. Заметим, что в системе ограничений (1) задачи возможны четыре вида неравенств, содержащих переменную y_n : $y_j + y_n \leq 1$, $y_j + y_n \geq 1$, $y_j - y_n \leq 0$ и $y_j - y_n \geq 0$. Учитывая множества возможных значений координат $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$, легко видеть, что в любом из перечисленных неравенств значение v_n можно положить равным 0 или 1, при этом полученное решение останется допустимым.

Следовательно, если L -комплекс Ω/L содержит L -класс V ранга n , то $a = (v_1, \dots, v_{n-1}, 1) \in M$, $b = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \in M$, а значит, $|\Omega| = 1$.

II. Теперь докажем, что Ω/L не может содержать два L -класса одного ранга.

Предположим обратное: пусть существуют $V_1, V_2 \in \Omega/L$ ранга k и $V_1 \succ V_2$. Нетрудно показать, что они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k, \dots, \alpha_n) : 0 < \alpha_k < 1, 0 \leq \alpha_j \leq 1, j = k+1, \dots, n\}, \\ V_2 &= \{(b_1, \dots, b_{k-1}, \beta_k, \dots, \beta_n) : 0 < \beta_k < 1, 0 \leq \beta_j \leq 1, j = k+1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Это вытекает из леммы 1 и того, что между a и b нет других целочисленных точек.

Покажем, что существует целочисленная точка $d \in M$, такая, что $a \succ d \succ b$, и построим её алгоритмически.

Определим следующие множества. Пусть F — множество всех ограничений задачи, $Q^t \subseteq F$, $I = \{1, \dots, n\}$ — множество всех индексов переменных формулы, $J^t \subseteq \{j : j \geq k\}$. Будем рассматривать различные целочисленные точки $d^t = (d_1^t, \dots, d_n^t)$: для всех $j \in I$

$$d_j^t = \begin{cases} a_j, & \text{если } j \notin J^t, \\ b_j, & \text{если } j \in J^t. \end{cases}$$

Положим $Q^0 = \emptyset$, $J^0 = \{k\}$, $d^0 = (a_1, \dots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Нетрудно показать, что $a_k = 1$, $b_k = 0$, $\alpha_k \neq a_k$.

Пусть после итерации t имеются Q^t , J^t и соответствующая точка d^t , такие, что выполнены следующие свойства:

- ограничения из Q^t содержат только литералы с индексами из J^t ;
- $\forall j \in J^t (\alpha_j \neq a_j)$.

Покажем, что если $d^t \notin M$, то можно построить множества $Q^{t+1} \supset Q^t$, $J^{t+1} \supset J^t$ и соответствующую точку d^{t+1} , для которых данные свойства также будут выполнены. Пусть d^t удовлетворяет любому ограничению из Q^t . Значит, должно существовать ограничение $g(y_i, y_j) \in F \setminus Q^t$, которому точка d^t не удовлетворяет, но удовлетворяют точки a , b и L -класс V_1 . Попробуем его найти.

Возможны несколько вариантов такого ограничения:

- 1) $i \notin J^t$, $j \notin J^t$. Но тогда данному ограничению не удовлетворяет точка a . Противоречие.
- 2) $i \in J^t$, $j \in J^t$. Но тогда данному ограничению не удовлетворяет точка b . Противоречие.
- 3) $i < k$, $j \in J^t$. Возможны четыре вида ограничений: $y_i + y_j \leq 1$, $y_i + y_j \geq 1$, $y_i - y_j \leq 0$ и $y_i - y_j \geq 0$.

Рассмотрим первое из них $y_i + y_j \leq 1$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} d_i^t + d_j^t > 1, \\ a_i + a_j \leq 1, \\ a_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_i + d_j^t > 1, \\ a_i + a_j \leq 1, \\ a_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, d_j^t = 1, \\ a_i + a_j \leq 1, \\ a_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, d_j^t = 1, \\ 1 + a_j \leq 1, \\ 1 + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, d_j^t = 1, \\ a_j = 0, \\ \alpha_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие с } \alpha_j \neq a_j. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются оставшиеся ограничения, которые приводят к таким же противоречиям.

Таким образом, ограничения задачи, удовлетворяющие свойствам 1–3, не являются искомыми. Остаётся последний вариант:

- 4) $j \in J^t$, $i \notin J^t$ и $i > k$. Возможны те же четыре вида ограничений.

Рассмотрим первое $y_i + y_j \leq 1$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} d_i^t + d_j^t > 1, \\ a_i + a_j \leq 1, \\ \alpha_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_i + b_j > 1, \\ a_i + a_j \leq 1, \\ \alpha_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, b_j = 1, \\ a_i + a_j \leq 1, \\ \alpha_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, b_j = 1, \\ 1 + a_j \leq 1, \\ \alpha_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, b_j = 1, \\ a_j = 0, \\ \alpha_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha_j \neq a_j) \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, b_j = 1, \\ a_j = 0, \alpha_j > 0 \\ \alpha_i + \alpha_j \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1, b_j = 1, \\ a_j = 0, \alpha_j > 0 \\ \alpha_i < 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_i \neq a_i. \end{aligned}$$

Аналогично можно рассмотреть оставшиеся виды ограничений и получить такие же результаты.

Теперь рассмотрим множества $Q^{t+1} = Q^t \cup \{g(y_i, y_j)\}$, $J^{t+1} = J^t \cup \{i\}$ и соответствующую точку d^{t+1} , где $d_i^{t+1} = b_i$. Очевидно, что:

- ограничения из Q^{t+1} содержат только литералы с индексами из J^{t+1} ;
- $\forall j \in J^{t+1} (\alpha_j \neq a_j)$.

Таким образом, мы построили множества $Q^{t+1} \supset Q^t$, $J^{t+1} \supset J^t$ и соответствующую точку d^{t+1} , для которых выполнены те же условия, что и для d^t . А значит, можно строить последовательность пар таких множеств (Q^{t+2}, J^{t+2}) , (Q^{t+3}, J^{t+3}) , ..., до тех пор, пока не найдём $d^s \in M$. Конечность данного процесса вытекает из конечности множеств F и I . А поскольку $a \succ d^s \succ b$ по построению, получаем противоречие. Следовательно, L -комплекс Ω/L не может содержать два L -класса одного ранга.

Таким образом, либо L -комплекс Ω/L содержит L -класс ранга n , и тогда $|\Omega/L| = 1$, либо не содержит, и тогда $|\Omega/L| \leq n - 1$. ■

Приведём пример формулы, для которой данная оценка достигается.

Пример 1. Рассмотрим логическую формулу

$$F = \bigwedge_{i < j \leq n} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j) \bigwedge_{i=2}^{n-1} (\bar{x}_i \vee x_{i+1}) \wedge (x_{n-1} \vee \bar{x}_n).$$

Нетрудно показать, что многогранник M содержит только две целочисленные точки: $z_1 = (1, 0, \dots, 0)$ и $z_2 = (0, 0, \dots, 0)$, а также в нём содержатся полуцелочисленные

точки вида

$$y^{(k)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1/2, \dots, 1/2), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

причём $z_1 \succ y^{(k)} \succ z_2$. Каждая точка $y^{(k)}$ является представителем L -класса

$$V^{(k)} = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, v_k, \dots, v_n), \quad 0 < v_k < 1, \quad 0 \leq v_j \leq 1, \quad j = k+1, \dots, n\},$$

причём $r(V^{(k)}) = k$. Таким образом, $|\{y \in M : z_1 \succ y \succ z_2\}/L| = n-1$.

Лемма 3. Пусть существует $a \in M \cap Z$ и не существует $c \in M \cap Z$, что $a \succ c$. Тогда для $\Omega = \{y \in M : a \succ y\}$ справедливо $|\Omega/L| \leq n-1$.

Доказательство. Легко показать (аналогично п. I доказательства леммы 2), что L -комплекс Ω/L не содержит L -класса ранга n , поскольку в противном случае существует точка $c \in M \cap Z$, для которой $a \succ c$.

Допустим, существуют $V_1, V_2 \in \Omega/L$ ранга $k < n$ и $V_1 \succ V_2$:

$$V_1 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \dots, \alpha_n) : 0 < \alpha_k < 1, \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad j = k+1, \dots, n\},$$

где $\alpha_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, k-1$, — фиксированные;

$$V_2 = \{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k, \dots, \beta_n) : 0 < \beta_k < 1, \quad 0 \leq \beta_j \leq 1, \quad j = k+1, \dots, n\},$$

где $\beta_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, k-1$, — фиксированные.

Тогда V_1 содержится в $(n-k+1)$ -мерной грани

$$S^1 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, y_k, \dots, y_n) : 0 \leq y_j \leq 1, \quad j = k, \dots, n\},$$

V_2 содержится в $(n-k+1)$ -мерной грани

$$S^2 = \{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, y_k, \dots, y_n) : 0 \leq y_j \leq 1, \quad j = k, \dots, n\}$$

и $S^1 \succ S^2$. Согласно лемме 1, в каждой из этих граней есть вершина, принадлежащая M . Обозначим их $c_1 \in S^1$ и $c_2 \in S^2$. Но поскольку $a \succeq S^1 \succ S^2$, получается, что $a \succ c_2$. Противоречие. ■

Приведём пример формулы, для которой данная оценка достигается.

Пример 2. Рассмотрим логическую формулу

$$F = \bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_i \vee x_{i+1}) \bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_i \vee \bar{x}_{i+1}).$$

Многогранник M содержит только две целочисленные точки: $z_1 = (1, \dots, 1, 1)$ и $z_2 = (1, \dots, 1, 0)$, а также в нём содержатся полуцелочисленные точки вида

$$y^{(k)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, 1/2, \dots, 1/2), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

причём $z_2 \succ y^{(k)}$. Каждая точка $y^{(k)}$ является представителем L -класса

$$V^{(k)} = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, v_k, \dots, v_n) : 0 < v_k < 1, \quad 0 \leq v_j \leq 1, \quad j = k+1, \dots, n\},$$

причём $r(V^{(k)}) = k$.

Таким образом, $|\{y \in M : z_2 \succ y\}/L| = n-1$.

Из лемм 2 и 3 следует верхняя оценка мощности произвольного L -комплекса многогранника задачи 2-SAT.

Теорема 2. Мощность любого L -комплекса многогранника задачи 2-SAT, содержащего целочисленную точку, не превосходит $n - 1$.

Полученные свойства полезны при анализе и разработке алгоритмов решения задачи выполнимости и смешанной задачи максимальной выполнимости. В частности, в работе [6] предложен алгоритм решения последней, в котором используется процедура перехода от одного допустимого решения к другому в порядке лексикографического убывания. Эта процедура основана на переборе L -классов и её трудоёмкость определяется числом дробных L -классов между соседними целочисленными решениями. В некоторых прикладных задачах (например, проектирования [5]) набор логических ограничений представляет собой задачу 2-выполнимости, а значит, теорема 2 гарантирует, что перебор допустимых решений в указанной процедуре будет осуществляться достаточно быстро. Таким образом, представляется целесообразным построение алгоритмов, использующих перебор L -классов, для рассматриваемых постановок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А. А., Адельшин А. В., Ягофарова Д. И. Решение задачи выполнимости с использованием метода перебора L -классов // Информационные технологии. 2009. № 2. С. 54–59.
2. Gu J., Purdom P., Franco J., and Wah B. Algorithms for the satisfiability (SAT) problem: a survey // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. American Mathematical Society, 1996. P. 19–152.
3. Hamadi Y., Jabbour S., and Sais L. ManySAT: a parallel SAT solver // J. Satisfiability, Boolean Modeling and Comput. 2009. No. 6. P. 245–262.
4. Thornton J., Bain S., Sattar A., and Pham D. N. A two level local search for MAX-SAT Problems with hard and soft constraints // Proc. 15th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence, AustAI-2002. Canberra, Australia, 2002. P. 603–614.
5. Колоколов А. А., Адельшин А. В., Ягофарова Д. И. Исследование задач дискретной оптимизации с логическими ограничениями на основе метода регулярных разбиений // Прикладная дискретная математика. 2013. № 1(19). С. 99–109.
6. Адельшин А. В., Кучин А. К. Разработка алгоритмов решения смешанной задачи максимальной выполнимости // Материалы V Всерос. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2012. С. 99.
7. Колоколов А. А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журнал исследования операций. 1994. № 2. С. 18–39.
8. Адельшин А. В. Исследование задач максимальной и минимальной выполнимости с использованием L -разбиения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 35–42.
9. Ягофарова Д. И. Анализ L -структуры задачи 2-выполнимости // Материалы конф. «Под знаком ‘Сигма’». Омск, 1994. С. 71–77.
10. Kolokolov A., Adelshin A., and Yagofarova D. Analysis and solving SAT and MAX-SAT problems using an L -partition approach // J. Math. Modeling Algorithm. 2013. No. 12(2). P. 201–212.
11. Cook S. A. The complexity of theorem-proving procedure // Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing. N. Y.: ACM, 1971. P. 151–159.
12. Колоколов А. А., Ярош А. В. Автоматизация проектирования сложных изделий с использованием дискретной оптимизации и информационных технологий // Омский научный вестник. 2010. № 2(90). С. 234–238.

13. *Посыпкин М. А., Заикин О. С., Беспалов Д. В., Семенов А. А.* Решение задач криптоанализа потоковых шифров в распределенных вычислительных средах // Труды ИСА. 2009. Т. 46. С. 119–137.
14. *Massacci F. and Marraro L.* Logical cryptanalysis as a SAT problem // J. Automated Reasoning. 2000. No. 24. P. 165–203.

REFERENCES

1. *Kolokolov A. A., Adelshin A. V., Yagofarova D. I.* Reshenie zadachi vpolnimosti s ispol'zovaniem metoda perebora L -klassov [Solving SAT problem using L -class enumeration method]. Informatsionnye Tekhnologii, 2009, no. 2, pp. 54–59. (in Russian)
2. *Gu J., Purdom P., Franco J., and Wah B.* Algorithms for the satisfiability (SAT) problem: a survey. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. American Mathematical Society, 1996, pp. 19–152.
3. *Hamadi Y., Jabbour S., and Sais L.* ManySAT: a parallel SAT solver. J. Satisfiability, Boolean Modeling and Comput., 2009, no. 6, pp. 245–262.
4. *Thornton J., Bain S., Sattar A., and Pham D. N.* A two level local search for MAX-SAT Problems with hard and soft constraints. Proc. 15th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence, AustAI-2002. Canberra, Australia, 2002, pp. 603–614.
5. *Kolokolov A. A., Adelshin A. V., Yagofarova D. I.* Issledovanie zadach diskretnoy optimizatsii s logicheskimi ogranicheniyami na osnove metoda regul'yarnykh razbieniy [Study of discrete optimization problems with logical constraints based on regular partitions]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2013, no. 1(19), pp. 99–109. (in Russian)
6. *Adelshin A. V., Kuchin A. K.* Razrabotka algoritmov resheniya smeshannoy zadachi maksimal'noy vpolnimosti [Development of algorithms for solving a mixed problem of maximal satisfiability]. Materialy V Vseross. konf. «Problemy optimizatsii i ekonomicheskie prilozheniya», Omsk, 2012, p. 99. (in Russian)
7. *Kolokolov A. A.* Regul'yarnye razbieniya i otsecheniya v tselochislennom programmirovani [Regular partitions and truncations in integer programming]. // Sibirsk. Zh. Issled. Oper., 1994, no. 2, pp. 18–39. (in Russian)
8. *Adelshin A. V.* Issledovanie zadach maksimal'noy i minimal'noy vpolnimosti s ispol'zovaniem L -razbieniya [Investigation of maximum and minimum satisfiability problems using L -partition]. Avtomat. i Telemekh., 2004, no. 3, pp. 35–42. (in Russian)
9. *Yagofarova D. I.* Analiz L -struktury zadachi 2-vpolnimost' [Analysis of the L -structure for 2-SAT problem]. Materialy konf. «Pod znakom 'Sigma'». Omsk, 1994, pp. 71–77. (in Russian)
10. *Kolokolov A., Adelshin A., and Yagofarova D.* Analysis and solving SAT and MAX-SAT problems using an L -partition approach. J. Math. Modeling Algorithm, 2013, no. 12(2), pp. 201–212.
11. *Cook S. A.* The complexity of theorem-proving procedure. Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing. N. Y., ACM, 1971, pp. 151–159.
12. *Kolokolov A. A., Yarosh A. V.* Avtomatizatsiya proektirovaniya slozhnykh izdeliy s ispol'zovaniem diskretnoy optimizatsii i informatsionnykh tekhnologiy [Computer-aided design of complex products using discrete optimization and information technologies]. Omskiy nauchnyy vestnik, 2010, no. 2(90), pp. 234–238. (in Russian)
13. *Posypkin M. A., Zaikin O. S., Bespalov D. V., Semenov A. A.* Reshenie zadach kriptanaliza potochnykh shifrov v raspredelennykh vychislitel'nykh sredakh [Cryptanalysis of stream ciphers in distributed computing systems]. Trudy ISA, 2009, vol. 46, pp. 119–137. (in Russian)
14. *Massacci F. and Marraro L.* Logical cryptanalysis as a SAT problem. J. Automated Reasoning, 2000, no. 24, pp. 165–203.