УДК 512.543
DOI 10.17223/19988621/38/3

А.И. Забарина, У.А. Гусельникова, Е.А. Фомина

О КОММУТИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ГРУППЫ

Изучены некоторые свойства тривиально коммутирующих и нетривиально коммутирующих элементов группы. Установлена их связь с множеством инволюций группы. Показано, что множество нетривиально коммутирующих элементов конечной группы образует коммутативный нормальный делитель. Исследован вопрос о мощности множества тривиально коммутирующих элементов конечных и обобщённо диэдральных групп.

Ключевые слова: *группа*, *инволюция*, *коммутирующий элемент*, *сопряжённый элемент*, *обобщённо диэдральная группа.*

Работа над одной из задач IV студенческой олимпиады по алгебре Московского государственного университета (2009 год) стала началом небольшого исследования свойств коммутирующих элементов произвольной группы.

1. Определения и простейшие свойства тривиально коммутирующих и нетривиально коммутирующих элементов

Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ есть произвольная неединичная группа.

Определение 1. Элемент g называется *тривиально коммутирующим*, если он не коммутирует ни с каким элементом, кроме самого себя и единицы [1].

Определение 2. Элемент, не являющийся *тривиально коммутирующим*, будем называть *нетривиально коммутирующим*.

Очевидно, каждый элемент центра группы является нетривиально коммутирующим элементом.

Множества всех тривиально коммутирующих элементов, нетривиально коммутирующих элементов и инволюций группы будем обозначать соответственно через U, W, J.

Предложение 1. $U \subset J$.

Доказательство. В группе для каждого неединичного элемента g всегда существуют два элемента, с которыми он коммутирует: e и g^{-1}. Если $g \in U$, то $g = g^{-1}$. Значит, $g \in J$. #

Очевидно, если $|G| = 2$, то $|U| = |W| = 1$.

Для всех остальных абелевых групп $|U| = 0$, $W = G$. Поэтому дальше нас будут интересовать неабелевы группы.

Непосредственные вычисления показывают, что в S_3 ровно три тривиально коммутирующих элемента:

$$U = \{(12), (23), (13)\}.$$

В группе кватернионов Q_8 множество U является пустым.

2. Свойства элементов *U* и *W* произвольной группы

Отметим некоторые свойства элементов U и W произвольной группы.

Предложение 2.

1) Элемент, сопряжённый тривиально коммутирующему элементу, есть тривиально коммутирующий элемент; элемент, сопряжённый нетривиально коммутирующему элементу есть нетривиально коммутирующий элемент:

$$\forall u \in U \ \ \forall w \in W \ \ \forall g \in G \ \ (u^g \in U \wedge w^g \in W).$$

2) Произведение двух тривиально коммутирующих элементов есть нетривиально коммутирующий элемент:

$$u_1 \in U \wedge u_2 \in U \Rightarrow u_1 u_2 \in W.$$

Доказательство.

1) а) Выясним, какие элементы группы коммутируют с элементом u^g.

Пусть $u^g a = a u^g$, где $a \in G$. Имеем

$$gug^{-1}a = agug^{-1} \Rightarrow ug^{-1}ag = g^{-1}agu \Rightarrow ua^{g^{-1}} = a^{g^{-1}}u .$$

Так как $u \in U$, то

$$a^{g^{-1}} = e \text{ или } a^{g^{-1}} = u .$$

Следовательно,

$$a = e \text{ или } a = u^g,$$

то есть u^g – тривиально коммутирующий элемент.

б) Пусть $w \in W$, тогда по определению

$$\exists a \in G \ (wa = aw \wedge a \neq e \wedge a \neq w).$$

Отсюда

$$wg^{-1}ga = ag^{-1}gw \wedge gag^{-1} \neq geg^{-1} \wedge gag^{-1} \neq gwg^{-1} \Rightarrow$$
$$gwg^{-1}gag^{-1} = gag^{-1}gwg^{-1} \wedge a^g \neq e \wedge a^g \neq w^g \Rightarrow$$
$$w^g a^g = a^g w^g, \text{ где } a^g \neq e,\ a^g \neq w^g,$$

то есть w^g – нетривиально коммутирующий элемент.

2) Пусть $u_1, u_2 \in U$.

Если
$$u_1 = u_2,$$
то
$$u_1 u_2 = e \in W.$$

Пусть теперь $u_1 \neq u_2$ и $u_1 u_2 = v$. Предположим, что v – тривиально коммутирующий элемент, тогда

$$\mathrm{o}(v) = \mathrm{o}(u_1) = \mathrm{o}(u_2) = 2 \Rightarrow$$
$$v = v^{-1} \Rightarrow u_1 u_2 = (u_1 u_2)^{-1} = u_2^{-1} u_1^{-1} = u_2 u_1,$$

что противоречит определению 1. Следовательно, v – нетривиально коммутирующий элемент. #

Теорема 3. Если множество тривиально коммутирующих элементов конечной группы не пусто, то их ровно половина: пусть $|G| = n$, $|U| \neq 0$, тогда $|U| = |W|$.

Доказательство. Рассмотрим $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ и $u^* \in U$. Согласно предложению 2,

$$\{u_1 u^*, \ldots, u_s u^*\} \subset W.$$

Следовательно, $|U| \leq |W|$.

С другой стороны, так как

$$Z(u^*) = \{e, u^*\},$$

то

$$|G/Z(u^*)| = n/2.$$

Легко видеть, что отображение

$$f\colon \{u^{*g} \mid g\in G\} \to G/Z(u^*),$$

такое что

$$f(u^{*g}) = gZ(u^*),$$

является биекцией.

В силу предложения 2,

$$|U| \geq |\{u^{*g} \mid g\in G\}| = n/2.$$

Следовательно, $|U| \geq |W|$. Таким образом, $|U| = |W|$. #

Следствие 4. Пусть $|G| = n$, $U \neq \varnothing$. Тогда

1) $\forall w\in W\ \ \forall u^*\in U\ \ \exists u', u''\in U\ (w = u^*u' = u''u^*)$.

2) Множество тривиально коммутирующих элементов совпадает с множеством инволюций группы: $U = J$.

3) $|G| = n = 4q + 2$.

Доказательство.

1) Согласно теореме 3, $U = \{u_1, \ldots, u_{n/2}\}$. Пусть $u^*\in U$.

Тогда

$$\{u^*u_1,\ldots, u^*u_{n/2}\} = \{u_1u^*,\ldots, u_{n/2}u^*\} = W.$$

2) Согласно предложению 1, $U \subset J$. Предположим теперь, что найдётся инволюция j, которая является нетривиально коммутирующим элементом. Тогда, согласно пункту 1) данного следствия,

$$j = u^*u_k,\ \text{где}\ u^* \neq u_k.$$

Имеем

$$j = j^{-1} \Rightarrow u^*u_k = (u^*u_k)^{-1} = u_k^{-1}(u^*)^{-1} = u_ku^* \Rightarrow u^*u_k = u_ku^*,$$

что противоречит определению 1. Значит, $J \subset U$. С учётом предложения 1, получаем $U = J$.

3) Согласно [2, с. 28, № 3.13], $n/2 = 2q + 1$, то есть $n = 4q + 2$. #

Обратимся теперь к нетривиально коммутирующим элементам.

Теорема 5. Пусть $|G| = n$, $U \neq \varnothing$. Тогда W есть коммутативный нормальный делитель группы G.

Доказательство. Воспользуемся критерием подгруппы. Пусть $a, b\in W$. Зафиксируем $u^*\in U$. Имеем

$$ab^{-1} = u'u^*(u''u^*)^{-1} = u'u''\in W.$$

Далее:

$$[a, b] = (u^*u_i)^{-1}(u^*u_j)^{-1}(u^*u_i)(u^*u_j) = (u_iu^*u_j)^2 = u_k^2 = e.$$

Заметим, наконец, что, согласно предложению 2,

$$\forall w\in W\ \ \forall g\in G\ (w^g\in W).\ \#$$

Обратимся теперь к произвольным группам.

Предложение 6. Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ – абелева группа, имеющая инволюции, $\langle D(A), \circ\rangle$ – обобщённо диэдральная группа [2, с. 15–16, № 1.46]. Тогда множество U тривиально коммутирующих элементов группы $D(A)$ является пустым.

Доказательство. По определению

$$D(A) = \{(a, \varepsilon) \mid a \in A, \varepsilon = \pm 1;\ (x, \varepsilon_1) \circ (y, \varepsilon_2) = (xy^{\varepsilon 1}, \varepsilon_1\varepsilon_2)\}.$$

Легко видеть, что множество всех инволюций J группы $D(A)$ есть

$$\{(a, -1) \mid a\in A\} \cup \{(a, 1) \mid a\in A,\ \mathrm{o}(a) = 2\}.$$

Убедимся, что ни одна из инволюций группы $D(A)$ не является тривиально коммутирующим элементом.

Пусть $a^*\in A$, $o(a^*) = 2$. Тогда

$$\forall a\in A\ ((a, -1)\circ(a^*, 1) = (aa^*, -1) = (a^*a, -1) = (a^*, 1)\circ(a, -1)).$$

Таким образом, в группе $D(A)$ нет тривиально коммутирующих элементов. #

Теорема 7. Пусть $D(A)$ – обобщённо диэдральная группа, где группа A не содержит инволюций. Тогда множество всех тривиально коммутирующих элементов U группы $D(A)$ есть множество $\{(a, -1)|\ a\in A\}$ и $|U| = |W|$.

Доказательство. Покажем, что

$$\forall a\in A\ (|Z(a, -1)| = 2).$$

Пусть $g\in A$ и

$$(a, -1)\circ(g, \varepsilon) = (g, \varepsilon)\circ(a, -1).$$

Отсюда

$$ag^{-1} = ga^{\varepsilon} = a^{\varepsilon}g.$$

При $\varepsilon = 1$ получаем

$$ag^{-1} = ag \Rightarrow g^{-1} = g \Rightarrow g = e$$

(так как инволюций в A нет), то есть $(g, \varepsilon) = (e, 1)$.

Если $\varepsilon = -1$, то

$$ag^{-1} = a^{-1}g = (ag^{-1})^{-1} \Rightarrow ag^{-1} = e, \text{ то есть } g = a.$$

Следовательно, $(g, \varepsilon) = (a, -1)$.

Так как других инволюций в $D(A)$ нет, то

$$U = \{(a, -1)|\ a\in A\}.$$

Согласно определению 2, $W = \{(a, 1)\,|\,a\in A\}$, отсюда $|U| = |W|$. #

Теорема 8. Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ – группа, множество инволюций J которой не пусто, и множество $H = G\backslash J$ является её подгруппой, $H \neq \{e\}$. Тогда

1) H – коммутативный нормальный делитель G; $|G/H| = 2$;

2) Множество тривиально коммутирующих элементов U группы G совпадает с J и $|W| = |U|$;

3) $G \cong D(H)$.

Доказательство.

1) Каждый элемент g группы G либо принадлежит H, либо J. Так как

$$\forall g\in H\ \forall h\in H\ (h^g\in H),$$

то убедимся, что

$$\forall j\in J\ \forall h\in H\ (jhj = h^{-1}).$$

Достаточно заметить, что $jh\in J$. Действительно, если $jh\notin J$, то $jh\in H$. Отсюда $j\in H$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $jh\in J$, то есть $jh = h^{-1}j$.

Следовательно, $H \lhd G$.

Вычислим индекс подгруппы H в группе G. Предположим, что произведение двух различных инволюций есть инволюция: пусть $j \neq k$, и $jk = j^*$, где $o(j) = o(k) = o(j^*) = 2$. Тогда

$$\forall h\in H\ (j^*hj^* = h^{-1} = (jk)^{-1}h(jk) = kjhjk = h) -$$

получили противоречие. Следовательно,

$$\forall h\in H\ (jH = kH),$$

то есть $|G/H| = 2$.

Вычислим $[h_1, h_2]$. Имеем

$$[h_1, h_2] = (jh_1j)\cdot(jh_2j)h_1h_2 = (h_1h_2)^{-1}h_1h_2 = e.$$

Пункт 1) доказан.

2) Пусть $j \in J$. Так как

$$\forall h \in H \; (jh = h^{-1}j),$$

то

$$(jh = hj \Rightarrow h^{-1}j = hj \Rightarrow h = e).$$

Если $k \in J$, $k \neq j$, то

$$(jk = kj \Rightarrow (jk)^2 = jkkj = e),$$

где $jk \in H$ (смотри доказательство пункта 1) данной теоремы), $(jk) \neq e$ – получили противоречие.

Следовательно,

$$\forall j \in J \;\; (Z(j) = \{e, j\}), \text{ то есть } U = J.$$

Отсюда $W = H$.

Так как $|G/H| = 2$, то $|U| = |W|$. Пункт 2) доказан.

3) Убедимся, что

$$\forall j \in J \;\; \langle H, j \rangle = \{h, hj \mid h \in H\}.$$

Достаточно заметить, что

$$h_1(h_2 j)^{-1} = h_1 j h_2^{-1} = h_1 h_2 j,$$

$$(h_2 j)h_1^{-1} = h_2 h_1 j;$$

$$(h_1 j)(h_2 j)^{-1} = h_1 h_2^{-1}.$$

Так как

$$\forall k \in J \; (kj \in H),$$

то $k = hj$. Следовательно, $\forall j \in J \; (G = \{h, hj \mid h \in H\})$.

Зададим отображение f: $G \to D(H)$, такое, что

$$\forall h \in H \, f(h) = (h, 1), f(hj) = (h, -1).$$

Очевидно, что f – биекция. Проверим сохранение операции:

$$f(h_1h_2) = (h_1h_2, 1) = (h_1, 1)\circ(h_2, 1) = f(h_1)\circ f(h_2),$$

$$f(h_1h_2j) = (h_1h_2, -1) = (h_1, 1)\circ(h_2, -1) = f(h_1)\circ f(h_2j),$$

$$f(h_1 j h_2) = f(h_1h_2^{-1}j) = (h_1h_2^{-1}, -1) = (h_1, -1)\circ(h_2, 1) = f(h_1j)\circ f(h_2),$$

$$f(h_1 j h_2 j) = f(h_1h_2^{-1}) = (h_1h_2^{-1}, 1) = (h_1, -1)\circ(h_2, -1) = f(h_1j)\circ f(h_2j).$$

Таким образом, $G \cong D(H)$. #

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четвёртая* студенческая олимпиада по алгебре Московского государственного университета (2 декабря 2009) [Электронный ресурс]. URL: http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/2009/problems-09.pdf.
2. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с.

Статья поступила 20.10.2015 г.

Zabarina A. I., Guselnikova U. A., Fomina E. A. ON COMMUTING ELEMENTS OF A GROUP

DOI 10.17223/19988621/38/3

Let G be an arbitrary group. An element g is trivially commuting if it does not commute with any other elements but itself and unity. We call an element as non-trivially commuting if it is not trivially commuting. Sets of all trivially commuting elements, non-trivially commuting elements, and involutions of the group are denoted by U, W, J.

Proposition 1. $U \subset J$.

Proposition 2.

1) An element conjugate to a trivially commuting element is a trivially commuting element; an element conjugate to a not trivially commuting element is a non-trivially commuting element элемент: $\forall u \in U\ \ \forall w \in W\ \ \forall g \in G\ (u^g \in U\ \ w^g \in W)$.

2) A product of two trivially commuting elements is a non-trivially commuting element: $u_1 \in U,\ u_2 \in U \Rightarrow u_1 u_2 \in W$.

Theorem 3. If the set of trivially commuting elements of a finite group is not empty, they are exactly half to the group: let $|G| = n$, $|U| \neq 0$, then $|U| = |W|$.

Corollary 4. Let $|G| = n$, $|U| \neq 0$, then

1) $\forall w \in W\ \forall u^* \in U\ \exists u', u'' \in U\ (w = u^* u' = u'' u^*)$;

2) $U = J$;

3) $|G| = n = 4q + 2$.

Theorem 5. Let $|G| = n$, $|U| \neq 0$, then W is a commutative normal divisor of the group G.

Proposition 6. Let $\langle A, \cdot\rangle$ be an Abelian group with the involution and $\langle D(A), \circ\rangle$ be a generalized dihedral group. Then the set U of trivial commuting elements of the group $D(A)$ is empty.

Theorem 7. Let $\langle D(A), \circ\rangle$ be a generalized dihedral group and let the group A have no involutions. Then the set U of trivially commuting elements of the group $D(A)$ is the set $\{(a, -1) |\ a \in A\}$, $|U| = |W|$.

Theorem 8. Let $\langle G, \cdot\rangle$ be a group, the set of involutions J of the group G be not empty, and the set $H = G \backslash J$ be a subgroup, $H \neq \{e\}$. Then

1) H is a commutative normal divisor of G; $|G/H| = 2$;

2) The set U of trivially commuting elements of the group G coincides with J and $|W| = |U|$;

3) $G \cong D(H)$.

Keywords: group, involution, commuting element, conjugate element, generalized dihedral group.

ZABARINA Anna Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: aizabarina@gmail.com

GUSELNIKOVA Ulyana Aleksandrovna (Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: guselnikova.ulyana@yandex.ru

FOMINA Elena Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

1. *Chetvertaya studencheskaya olimpiada po algebre Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta (2 dekabrya 2009)* [Elektronnyy resurs]. URL: http://halgebra.math.msu.su/ Olympiad/2009/problems-09.pdf. (in Russian)
2. Belonogov V.A. *Zadachnik po teorii grupp*. Moskow, Nauka Publ., 2000. 240 p. (in Russian)