УДК 517.968.25
DOI 10.17223/19988621/38/4

**Д.Ю. Иванов**

# УСТОЙЧИВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРНО-ПОЛУГРУППОВЫМ ЯДРОМ

Исследуются возникающие в задачах теплопроводности двумерные граничные интегральные уравнения, операторные ядра которых выражаются через пространственно-временну́ю $C_0$-полугруппу. При условии $\partial\Omega \in C^{k+2}$ доказана устойчивая разрешимость интегральных уравнений в пространствах $k$ раз непрерывно дифференцируемых на границе $\partial\Omega$ векторных функций со значениями в пространствах типа Соболева, определяемых степенями генератора $C_0$-полугруппы .

**Ключевые слова**: *граничное интегральное уравнение*, *теплопроводность*, *существование*, *единственность*, *устойчивость.*

Одним из методов, применяемых для аналитического решения достаточно широкого класса краевых задач нестационарной теплопроводности, является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1, с. 175]. На его основе для решения начально-краевых задач теплопроводности был разработан ряд численных методов, традиционно объединяемых под общим названием «методы граничных элементов» [2, с. 156; 3–8]. В связи с необходимостью строгого обоснования таких численных методов, связанного с вопросами аппроксимации и устойчивости, были проведены исследования, посвященные устойчивой разрешимости соответствующих ГИУ в пространствах дифференцируемых функций [5, 6, 9, 10].

В настоящей работе исследуются двумерные векторные ГИУ типа Фредгольма второго рода с операторным ядром, выраженным через $C_0$-полугруппу $\boldsymbol{U}(\tau)$. Как показано в работе [11], такие ГИУ позволяют решить векторные краевые задачи первого, второго и третьего рода для линейных дифференциально-операторных уравнений $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}$ в плоской ограниченной односвязной открытой области $\Omega^+$ или ее внешности $\Omega^- \equiv \boldsymbol{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$. Операторный коэффициент $\boldsymbol{B}$ является генератором $C_0$-полугруппы $\boldsymbol{U}(\tau)$ в пространстве $L_2 \equiv L_2(I_Y \times I_T)$ ($I_Y \equiv [0,Y]$, $I_T \equiv [0,T]$): $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{f} = \lim\limits_{\tau\to+0} \tau^{-1}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{U}(\tau)\,\boldsymbol{f})$. В свою очередь, указанные краевые задачи суть возможные постановки начально-краевых задач теплопроводности на временно́м промежутке $I_T$ в однородном цилиндре $\Omega^+ \times I_Y$ или $\Omega^- \times I_Y$ с неоднородными граничными условиями первого, второго и третьего рода на боковой поверхности цилиндра, нулевыми граничными условиями первого, второго или третьего рода (в зависимости от оператора $\boldsymbol{B}$) на основаниях цилиндра и нулевым начальным условием. Двумерные векторные ГИУ не совпадают с обычными скалярными ГИУ типа Вольтерра – Фредгольма для таких задач теплопроводности, но представляют собой по существу прямые суммы скалярных ГИУ типа Вольтерра-Фредгольма в плоских областях $\Omega^{\pm}$, порождаемые спектральным разложением пространственной составляющей $C_0$ -полугруппы.

Преимущество таких двумерных ГИУ по сравнению с обычными состоит в возможности экономного вычисления разрешающих их сеточных операторов в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора. В работах [12, 13] построены соответствующие вычислительные схемы, исследованы их аппроксимирующие свойства и вопросы устойчивости. При обосновании этих положений возникает необходимость установления инвариантности пространств $C^k(\partial\Omega, H^n(I_Y \times I_T))$ относительно прямых и обратных операторов ГИУ, а также ограниченности таких операторов в указанных пространствах (здесь $C^k(\partial\Omega, H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T))$ – пространство $k$ раз непрерывно дифференцируемых на $\partial\Omega$ векторных функций со значениями в $H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T)$; $\partial\Omega$ – граница области $\Omega^+$; $H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T)$ – пространство типа Соболева, определяемое $n$+1 степенью оператора **B**). Основную задачу настоящей статьи составляет доказательство наличия у таких операторов перечисленных свойств.

Хотя исследуемые здесь интегральные уравнения и отличаются сами по себе от традиционно изучаемых, приведем еще несколько отличий полученных здесь результатов от аналогичных результатов других авторов. Разрешимость ГИУ в пространствах дифференцируемых функций, насколько мне известно, исследовалась или на границах типа $C^{\infty}$ [6, 9, 10], или липшицевых [5], причем в последнем случае, как и в [6, 9], лишь в пространствах, являющихся соболевскими по всем переменным. В работе [10] доказана устойчивая разрешимость ГИУ второго рода в пространствах типа $C^k(I_T, C^n(\partial\Omega))$ или $C^k(I_T, H^n(\partial\Omega))$ ($H^n(\partial\Omega)$ – пространство Соболева), причем в областях $\Omega$ произвольной размерности, но в предположении неограниченно гладкой границы. Поэтому стоит отметить, что в настоящей работе устойчивая разрешимость ГИУ в пространстве $C^k(\partial\Omega, H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T))$ доказана при менее обременительном условии $\partial\Omega \in C^{k+2}$.

Работа [14] представляет собой более ранний этап настоящего исследования: результаты получены лишь в пространствах $C(\partial\Omega, H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T))$ и $C^k(\partial\Omega, L_2)$; достаточное условие $\partial\Omega \in C^{k+2}$, по существу, только объявлено, но отсутствует часть доказательства, где оно используется (здесь теорема 1); исследовались лишь первая и вторая краевые задачи.

В конце настоящей работы сделано указание на справедливость утверждений, аналогичных полученным, для стационарных и нестационарных задач теплопроводности в плоской области и стационарных задач в цилиндре, а также целого класса абстрактных краевых задач для уравнения $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}$.

## Постановки задач и предварительные сведения

Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Рассмотрим четыре краевые задачи ( $i = 1,2$ ):

$$a^2 \Delta_2 \boldsymbol{u}_i^{\pm} = \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{u}_i^{\pm} \quad ( x = (x_1, x_2) \in \Omega^{\pm} ), \tag{$1^{\pm}$}$$

$$\boldsymbol{u}_1^{\pm} = \boldsymbol{w}_1^{\pm} \quad ( x \in \partial\Omega ), \tag{2a}$$

$$\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_2^{\pm} - \eta\, \boldsymbol{u}_2^{\pm} = \boldsymbol{w}_2^{\pm} \quad ( x \in \partial\Omega ), \tag{2b}$$

решения которых – функции $\boldsymbol{u}_i^{\pm}(x)$ со значениями в $L_2$, определенные на $\overline{\Omega^{\pm}}$. Здесь $\boldsymbol{w}_i^{\pm}(x)$ – функции со значениями в $L_2$, заданные на $\partial\Omega$; $\boldsymbol{n}$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке *x*, направленная внутрь области $\Omega^{+}$; $\Delta_2 \equiv \partial^2_{x_1 x_1} + \partial^2_{x_2 x_2}$, $\partial_{\boldsymbol{n}}$ – сильные производные векторных функций; $a > 0$ – коэффициент температуропроводности, $\eta \ge 0$ – коэффициент теплообмена на боковой поверхности цилиндра. Оператор $\boldsymbol{B}$ определен в пространстве $L_2$ как $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{B}_t + \boldsymbol{B}_y + p\,\boldsymbol{E}$ на пересечении областей определения операторов $\boldsymbol{B}_t$ и $\boldsymbol{B}_y$. Здесь $\boldsymbol{E}$ – тождественный оператор; оператор $\boldsymbol{B}_t$: $(\boldsymbol{B}_t \boldsymbol{f})(y,t) = \partial_t f(y,t)$, задан на абсолютно непрерывных по $t$ функциях $f(y,t) \in L_2$, таких, что $\partial_t f \in L_2$ и $f\,|_{t=0} = 0$ при почти всех $y \in I_Y$; оператор $\boldsymbol{B}_y$: $(\boldsymbol{B}_y \boldsymbol{f})(y,t) = -a^2 \partial^2_{yy} f(y,t)$, задан на абсолютно непрерывно дифференцируемых по $y$ функциях $f(y,t) \in L_2$, таких, что $\partial^2_{yy} f \in L_2$ и $\left(\partial_y f - \lambda_0 f\right)|_{y=0} = \left(\partial_y f + \lambda_Y f\right)|_{y=Y} = 0$ ($0 \le \lambda_0, \lambda_Y \le \infty$) при почти всех $t \in I_T$; $p > -\mu_1$, где $\mu_1 \ge 0$ – наименьшее собственное значение оператора $\boldsymbol{B}_y$ ($\mu_1 = 0$ лишь при $\lambda_0 = \lambda_Y = 0$). Оператор $\boldsymbol{B}$ замкнут как сумма двух замкнутых операторов в пространстве $L_2$, порождающих $C_0$-полугруппы и действующих вдоль различных переменных [15]. Оператор $\boldsymbol{B}$ порождает экспоненциально убывающую $C_0$-полугруппу $\boldsymbol{U}(\tau)$: $\|\boldsymbol{U}(\tau)\| \le \exp[-(p + \mu_1)\tau]$, причем $\boldsymbol{U}(\tau)$ – нулевые операторы при $\tau \ge T$.

Будем считать, что если по условию значения векторной функции принадлежат банахову пространству, то предельные операции над этими значениями по умолчанию осуществляются в норме этого пространства. Обозначим через $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ пространства непрерывных и $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в $L_2$, определенных на множестве $\Omega' \subset \boldsymbol{R}^2$.

**Определение 1.** Решением уравнения ($1^{\pm}$) будем называть функцию $\boldsymbol{u}^{\pm}(x) \in C^2(\Omega^{\pm})$ со значениями в $D(\boldsymbol{B})$ (области определения оператора $\boldsymbol{B}$), обращающую уравнение ($1^{\pm}$) в истинное равенство.

**Определение 2.** Решением задачи $\{P_1^{\pm}\}$ будем называть функцию $\boldsymbol{u}_1^{\pm} \in C(\overline{\Omega^{\pm}})$, являющуюся решением уравнения ($1^{\pm}$) и удовлетворяющую граничному условию (2a). В случае задачи $\{P_1^-\}$ будем требовать также выполнения условия: $\|\boldsymbol{u}_1^-\|_{L_2} \to 0$ при $|x| \to \infty$.

**Определение 3.** Решением задачи $\{P_2^\pm\}$ будем называть функцию $\boldsymbol{u}_2^\pm \in C(\overline{\Omega^\pm})$, являющуюся решением уравнения ($1^\pm$) и имеющую с внутренней (внешней) стороны $\partial\Omega$ правильную нормальную производную $\partial_{\boldsymbol{n}}^\pm \boldsymbol{u}_2^\pm$ ($\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_2^\pm(x \pm \xi \boldsymbol{n}) \to \partial_{\boldsymbol{n}}^\pm \boldsymbol{u}_2^\pm(x)$ при $\xi \to +0$ равномерно относительно $x \in \partial\Omega$), определяемую равенством (2b): $\partial_{\boldsymbol{n}}^\pm \boldsymbol{u}_2^\pm = \boldsymbol{w}_2^\pm + \eta \boldsymbol{u}_2^\pm$. В случае задачи $\{P_2^-\}$ будем требовать также выполнения условия $|x| \, \|\boldsymbol{u}^-\|_{L_2} \|\nabla \boldsymbol{u}^-\|_{L_2} \to 0$ при $|x| \to \infty$ ($\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L_2}^2 = \|\partial_{x_1} \boldsymbol{u}\|_{L_2}^2 + \|\partial_{x_2} \boldsymbol{u}\|_{L_2}^2$).

Пусть $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ – нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящие через точки $x'$ и $x$ соответственно и направленные внутрь области $\Omega^+$; дифференцирование $\partial_{\boldsymbol{n}_1}$ и $\partial_{\boldsymbol{n}_2}$ осуществляется по точкам $x'$ и $x$ соответственно. Зададим на множествах $\Omega^\pm$ векторные функции $\boldsymbol{p}_i^\pm(x)$ ($i = 1, 2$) со значениями в пространстве $L_2$ с помощью криволинейных интегралов первого рода:

$$\boldsymbol{p}_1^\pm(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_1} \boldsymbol{K}(r) \boldsymbol{v}_1^\pm(x')\, ds', \quad \boldsymbol{p}_2^\pm(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}(r) \boldsymbol{v}_2^\pm(x')\, ds',$$

где $r \equiv |x - x'|$, $\boldsymbol{v}_i^\pm(x)$ – векторные функции со значениями в $L_2$, заданные на $\partial\Omega$; $\boldsymbol{K}(r)$ ($r > 0$) – функция со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2$, определяемая равенствами

$$\boldsymbol{K}(r)\boldsymbol{f} \equiv (4\pi)^{-1} \int_{I_T} \tau^{-1} \exp\left[-r^2 / \left(4a^2\tau\right)\right] \boldsymbol{U}(\tau) \boldsymbol{f}\, d\tau \quad (\boldsymbol{f} \in L_2).$$

Согласно работе [11], при условиях $\partial\Omega \in C^2$ и $\boldsymbol{v}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$, функции $\boldsymbol{p}_1^\pm$ и $\boldsymbol{p}_2^\pm$ являются векторными аналогами потенциалов двойного и простого слоев соответственно. Если $\partial\Omega \in C^2$ и $\boldsymbol{w}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$, то задачи $\{P_i^\pm\}$ однозначно разрешимы и их решения представимы в виде соответствующих функций $\boldsymbol{p}_i^\pm$ с неизвестными $\boldsymbol{v}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$, однозначно определяемыми ГИУ:

$$\boldsymbol{G}_i^\pm \boldsymbol{v}_i^\pm \equiv \mp(-1)^i \, 2^{-1} \boldsymbol{v}_i^\pm + \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{v}_i^\pm = \boldsymbol{w}_i^\pm, \qquad (3_i^\pm)$$

$$(\boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{f})(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_1} \boldsymbol{K}(r) \boldsymbol{f}(x')\, ds',$$

$$(\boldsymbol{G}_2 \boldsymbol{f})(x) \equiv \int_{\partial\Omega} \left[\partial_{\boldsymbol{n}_2} \boldsymbol{K}(r) - \eta \boldsymbol{K}(r)\right] \boldsymbol{f}(x')\, ds'$$

$$(x \in \partial\Omega).$$

## Анализ интегральных операторов в пространствах дифференцируемых функций

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, где $s$ – длина дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки в определенном направлении и заканчивающейся в точке $x = (x_1, x_2)$. Функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, периодические с периодом $2S$ ($S$ – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv (-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Очевидно, что если функции $x_1(s)$, $x_2(s)$ принадлежат классу $C^k(\overline{I_S})$, т.е. имеют непрерывные производные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ до порядка $k$ включительно, то $\partial\Omega \in C^k$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если функции $x_1(s)$, $x_2(s)$ принадлежат классу $C^k(\overline{I_S})$. Кроме того, пусть $s$ и $s'$ – значения параметра, соответствующие точкам $x$ и $x'$, и пусть $\sigma \equiv s' - s$.

Введем в рассмотрение функции $\psi_m(s, s')$ ($m = 0,1,2$), заданные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ при $s' \neq s$ равенствами $\psi_m = \rho_m / \sigma^2$, где

$$\rho_0(s,s') \equiv \left(4a^2\right)^{-1} r^2 = \left(4a^2\right)^{-1} \left\{[x_1(s') - x_1(s)]^2 + [x_2(s') - x_2(s)]^2\right\},$$

$$\rho_1(s,s') \equiv \left(8\pi a^2\right)^{-1} r\, \partial_{\boldsymbol{n}_1} r = \left(8\pi a^2\right)^{-1} \{-[x_1(s') - x_1(s)]\, x_2'(s') + [x_2(s') - x_2(s)]\, x_1'(s')\},$$

$$\rho_2(s,s') \equiv \left(8\pi a^2\right)^{-1} r\, \partial_{\boldsymbol{n}_2} r = \left(8\pi a^2\right)^{-1} \{-[x_1(s) - x_1(s')]\, x_2'(s) + [x_2(s) - x_2(s')]\, x_1'(s)\},$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s,s) \equiv \left(4a^2\right)^{-1}, \ \psi_1(s,s) = \psi_2(s,s) \equiv \left(16\pi a^2\right)^{-1} [x_1''(s)\, x_2'(s) - x_2''(s)\, x_1'(s)].$$

**Теорема 1.** Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \boldsymbol{Z}_+ \equiv \{0,1,...\}$). Тогда существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^i \partial_{s'}^j \psi_m$ ($i = \overline{0, n-j}$, $j = \overline{0,n}$, $m = 0,1,2$).

**Лемма.** Пусть $I$ – замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция $f(z,\zeta)$ имеет в области $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j f$ ($i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,n'}$), причем $n < n'$ и $\partial_\zeta^j f\,|_{\zeta=z} = 0$ при $z \in I$, $j = \overline{0, q-1}$, где $q = n' - n$. Тогда функция $h(z,\zeta)$, заданная при $\zeta \neq z$ равенством $h(z,\zeta) \equiv f/(\zeta - z)^q$, а при $\zeta = z$ равенством $h(z,z) \equiv \partial_\zeta^q f\,|_{\zeta=z}/q!$, имеет в области $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$ при $i = \overline{0, n-j}$, $j = \overline{0,n}$.

***Доказательство леммы.*** Зададим на множестве $I \times I$ функции $g_{k,l,m}(z,\zeta)$ так, что при $\zeta \neq z$

$$g_{k,l,m}(z,\zeta) \equiv \frac{\partial_z^m \partial_\zeta^{k+l} f\,|_{\zeta=z}}{k!} + \frac{\partial_z^m \partial_\zeta^{k+l+1} f\,|_{\zeta=z}}{(k+1)!}(\zeta - z) + ... + \frac{\partial_z^m \partial_\zeta^{n'-1} f\,|_{\zeta=z}}{(n'-1-l)!}(\zeta - z)^{n'-1-k-l} +$$

$$+ \frac{1}{(n'-1-l)!(\zeta - z)^k} \int_z^\zeta \partial_z^m \partial_\zeta^{n'} f\,|_{\zeta=t}\, (\zeta - t)^{n'-1-l} dt \quad (l = \overline{0, n'-k},\ k = \overline{q, n'},\ m = \overline{0,n})$$

(если $k+l=n'$, то функция $g_{k,l,m}(z,\zeta)$ определяется только последним интегральным слагаемым), а при $\zeta=z$ $g_{k,l,m}(z,z)\equiv\partial_z^m\partial_\zeta^{k+l}f\,|_{\zeta=z}\big/k!$. Непосредственно проверяется существование непрерывных на $I\times I$ производных $\partial_z g_{k,l,m}$ и $\partial_\zeta g_{k,l,m}$ и выполнение равенств

$$\partial_z g_{k,l,m}=g_{k,l,m+1}+k\,g_{k+1,l,m}\,,\quad \partial_\zeta g_{k,l,m}=g_{k,l+1,m}-k\,g_{k+1,l,m}$$

при $k<n'$, $m<n$ и $k<n'$, $l<n'$ соответственно. Отсюда легко видеть, что производные $\partial_z^i\partial_\zeta^j g_{q,0,0}$ представляют собой линейные комбинации функций $g_{k,l,m}$ при $k+l\le q+i+j\le n'$, $m\le i$. В силу формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [16, с. 146] имеем $h=g_{q,0,0}$. Следовательно, если $i+j\le n$, то производные $\partial_z^i\partial_\zeta^j h$ существуют и непрерывны. Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Можно убедиться, что условия леммы выполняются, если $f=\rho_m$ и $q=2$, при этом для функций $\rho_0$ и $\rho_1$ полагаем $z=s'$, $\zeta=s$, а для функции $\rho_2$ полагаем $z=s$, $\zeta=s'$. Тогда получаем справедливость утверждения леммы для функций $h=\psi_m$. Теорема доказана.

Определим в пространстве $C(\partial\Omega)$ норму: $\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega)}\equiv\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(x)\|_{L_2}$, что делает это пространство банаховым. Введем также в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ ($k=1,2,\ldots$), состоящие из функций $\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_S}$ производные $\boldsymbol{f}^{(l)}$: $\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\equiv d^l\boldsymbol{f}\left(x(s)\right)\big/ds^l$ ($l=\overline{1,k}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)}\equiv\max\limits_{0\le l\le k}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}\right\|_{C(\partial\Omega)}$. Будем считать, что $C^0(\partial\Omega)\equiv C(\partial\Omega)$.

Оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий банахово пространство $\boldsymbol{S}$ само в себя, условимся обозначать как $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{S}]$.

**Теорема 2.** Пусть $\partial\Omega\in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_i\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ ($k\in\boldsymbol{Z}_+$, $i=1,2$) всюду определены и ограничены.

***Доказательство.*** Введем в рассмотрение вещественные функции $\chi_m(s,\sigma)\equiv\psi_m(s,s+\sigma)$ ($m=0,1,2$). Пусть $\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$. Запишем выражение $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f}$ в следующем виде:

$$(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f})(s)=\int\limits_{-S}^{S}|\sigma|^{-\alpha}\,\boldsymbol{Z}_i(s,\sigma)\,\boldsymbol{f}\left(x(s+\sigma)\right)d\sigma\ ,$$

$$\boldsymbol{Z}_i(s,\sigma)\boldsymbol{f}\equiv\int\limits_0^T\tau^{\alpha/2-1}z_i(s,\sigma,\tau)\,\boldsymbol{U}(\tau)\,\boldsymbol{f}\,d\tau\,,$$

$$z_1(s,\sigma,\tau)\equiv\lambda^{1+\alpha/2}\chi_1(s,\sigma)\exp[-\chi_0(s,\sigma)\lambda]\,,$$

$$z_2(s,\sigma,\tau)\equiv\lambda^{\alpha/2}\left[\chi_2(s,\sigma)\lambda-\tilde{\eta}\right]\exp[-\chi_0(s,\sigma)\lambda]\,,\qquad(4)$$

где $\alpha\in(0,1)$ – некоторое фиксированное число; $\lambda=\sigma^2\big/\tau$, $\tilde{\eta}=2a^2\eta$; $\boldsymbol{Z}_i$ – функции со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2$. В силу теоремы 1 существуют непрерывные при $(s,\sigma)\in\overline{I_S}\times\overline{I_S}$ производные $\partial_s^l\chi_m$ ($l=\overline{0,k}$). Отсюда с учетом неравенства $\chi_0>0$ получаем существование непрерывных и ограниченных на множестве $\overline{I_S}\times\overline{I_S}\times(0,\infty)$ производных $\partial_s^l z_i$ ($l=\overline{0,k}$). В результате, принимая во внимание ограниченность операторов $\boldsymbol{U}(\tau)$ ($\tau\ge 0$) в совокупности, приходим к существованию в операторной норме непрерывных на множестве $\overline{I_S}\times\overline{I_S}$ производных $\partial_s^l\boldsymbol{Z}_i$ ($l=\overline{0,k}$). Тогда, используя представление (4) и учитывая, что $\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$, имеем $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$ и оценки:

$$\left\|(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f})^{(l)}(s)\right\|_{L_2}=\left\|\sum_{l'=0}^{l}C_l^{l'}\int_{-S}^{S}|\sigma|^{-\alpha}\,\partial_s^{l'}\boldsymbol{Z}_i(s,\sigma)\,\partial_s^{l-l'}\boldsymbol{f}\left(x(s+\sigma)\right)d\sigma\right\|_{L_2}\le$$

$$\le 2(1-\alpha)^{-1}S^{1-\alpha}c_{i,l}\max_{0\le l'\le l,\,s\in\overline{I_S}}\left\|\boldsymbol{f}^{(l')}(s)\right\|_{L_2}\sum_{l'=0}^{l}C_l^{l'}\le 2^{k+1}(1-\alpha)^{-1}S^{1-\alpha}c_{i,k}\,\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)},$$

где $c_{i,l}=\max\limits_{0\le l'\le l,(s,\sigma)\in\overline{I_S}\times\overline{I_S}}\left\|\partial_s^{l'}\boldsymbol{Z}_i(s,\sigma)\right\|$, $s\in\overline{I_S}$, $C_l^{l'}=l!/[(l-l')!\,l'!]$ ($l=\overline{0,k}$). Из полученных оценок вытекает ограниченность операторов $\boldsymbol{G}_i\left[C^k(\partial\Omega)\right]$. Теорема доказана.

Обозначим через $H_{\boldsymbol{B}}^n$ пространство функций $\boldsymbol{f}\in L_2$, таких, что $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\in L_2$ ($m=\overline{1,n}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{H_{\boldsymbol{B}}^n}\equiv\left[\sum_{m=0}^{n}\left\|\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\right\|_{L_2}^2\right]^{1/2}$. В силу замкнутости оператора $\boldsymbol{B}$ пространства $H_{\boldsymbol{B}}^n$ банаховы. Введем в рассмотрение пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k=0,1,\ldots$, $n=1,2,\ldots$), состоящие из элементов $\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$, таких, что $\boldsymbol{f}(x)\in H_{\boldsymbol{B}}^n$ при $x\in\partial\Omega$ и $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$ ($m=\overline{1,n}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)}\equiv\max\limits_{0\le l\le k}\sup\limits_{s\in\overline{I_S}}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\right\|_{H_{\boldsymbol{B}}^n}$. Пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ также банаховы. Легко видеть, что если оператор $\boldsymbol{A}\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ всюду определен и ограничен и коммутирует с операторами $\boldsymbol{B}^m$ ($m=\overline{1,n}$) на множестве $C_n^k(\partial\Omega)$, то оператор $\boldsymbol{A}\left[C_n^k(\partial\Omega)\right]$ также всюду определен и ограничен: $\|\boldsymbol{A}\|_{k,n}\le\|\boldsymbol{A}\|_k$ (здесь $\|\boldsymbol{A}\|_{k,n}$, $\|\boldsymbol{A}\|_k$ – нормы операторов $\boldsymbol{A}\left[C_n^k(\partial\Omega)\right]$, $\boldsymbol{A}\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ соответственно).

**Следствие 1.** Пусть $\partial\Omega\in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_i\left[C_n^k(\partial\Omega)\right]$ ($k\in\boldsymbol{Z}_+$, $n\in\boldsymbol{N}$, $i=1,2$) всюду определены и ограничены.

***Доказательство.*** Используя замкнутость оператора $\boldsymbol{B}$ и выполнение равенств $\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(\tau)$ на множестве $D(\boldsymbol{B})$, несложно убедиться в справедливости равенств $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{G}_i$ ($m=\overline{1,n}$) на множестве $C_n^k(\partial\Omega)$. Поэтому с учетом теоремы 2 операторы $\boldsymbol{G}_i\left[C_n^k(\partial\Omega)\right]$ всюду определены и ограничены. Утверждение доказано.

**Теорема 3.** Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$, $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$ ($k \in \boldsymbol{Z}_+$, $i = 1,2$) и $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2^{\times}$, где $L_2^{\times} \equiv L_2(\partial\Omega \times I_Y \times I_T)$. Тогда $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$.

***Доказательство.*** Представим операторы $\boldsymbol{G}_i$ в виде $\boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon} + \boldsymbol{G}''_{i,\varepsilon}$, где

$$\left(\boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon}\boldsymbol{f}\right)(s) \equiv \int_{-S}^{S} \boldsymbol{K}'_{i,\varepsilon}(s,s')\,\boldsymbol{f}(x(s'))\,ds', \quad \left(\boldsymbol{G}''_{i,\varepsilon}\boldsymbol{f}\right)(s) \equiv \int_{-S}^{S} \boldsymbol{K}''_{i,\varepsilon}(s,s')\,\boldsymbol{f}(x(s'))\,ds',$$

$$\boldsymbol{K}'_{i,\varepsilon}(s,s') \equiv \boldsymbol{K}_i(s,s')\,\varphi_\varepsilon(\sigma), \quad \boldsymbol{K}''_{i,\varepsilon}(s,s') \equiv \boldsymbol{K}_i(s,s')\left[1-\varphi_\varepsilon(\sigma)\right],$$

$$\boldsymbol{K}_1(s,s')\,\boldsymbol{f} \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_1}\boldsymbol{K}(r)\,\boldsymbol{f} = \rho_1(s,s')\int_{I_T} \tau^{-2}\exp\left[-\rho_0(s,s')/\tau\right]\boldsymbol{U}(\tau)\,\boldsymbol{f}\,d\tau,$$

$$\boldsymbol{K}_2(s,s') \equiv \partial_{\boldsymbol{n}_2}\boldsymbol{K}(r) - \eta\,\boldsymbol{K}(r) = \int_{I_T}\left[\rho_2(s,s')\,\tau^{-2} - \tilde{\eta}\tau^{-1}\right]\exp\left[-\rho_0(s,s')/\tau\right]\boldsymbol{U}(\tau)\,\boldsymbol{f}\,d\tau,$$

$\varphi_\varepsilon(\sigma)$ – $k$ раз непрерывно дифференцируемая вещественная функция: $\varphi_\varepsilon(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \le \varepsilon/2$, $0 < \varphi_\varepsilon(\sigma) < 1$ при $\varepsilon/2 < |\sigma| < \varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \ge \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < S$); $\boldsymbol{K}'_{i,\varepsilon}(s,s')$, $\boldsymbol{K}''_{i,\varepsilon}(s,s')$, $\boldsymbol{K}_i(s,s')$ – функции со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2$.

Так как $\partial\Omega \in C^{k+2}$, то на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ при $s' \ne s$ существуют непрерывные производные $\partial_s^l \rho_0$ ($l = \overline{0,k+2}$) и $\partial_s^l \rho_1$, $\partial_s^l \rho_2$ ($l = \overline{0,k+1}$). Кроме того, $\rho_0 > 0$ при $s' \ne s$. Поэтому при $s' \ne s$ в операторной норме существуют непрерывные производные $\partial_s^l \boldsymbol{K}_i(s,s')$ ($l = \overline{0,k+1}$). Следовательно, если функцию $\boldsymbol{K}''_{i,\varepsilon}(s,s')$ доопределить при $s' = s$ нулевыми операторами, то на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ существуют непрерывные производные $\partial_s^l \boldsymbol{K}''_{i,\varepsilon}(s,s')$ ($l = \overline{0,k}$). Тогда, учитывая, что $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2^{\times}$ и $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$, имеем $\boldsymbol{h}_i^{\pm} \equiv \mp 2(-1)^i\left(\boldsymbol{w}_i^{\pm} - \boldsymbol{G}''_{i,\varepsilon}\boldsymbol{v}_i^{\pm}\right) \in C^k(\partial\Omega)$.

Далее заметим, что согласно теореме 6 [11] функции $\partial_{\boldsymbol{n}_i}\boldsymbol{K}(r)$ ограничены на $\partial\Omega$, а согласно теореме 3 [11] функция $r^{\alpha}\boldsymbol{K}(r)$ ограничена на $\partial\Omega$ при любом $\alpha > 0$. Кроме того, кривая $\partial\Omega \in C^2$ не имеет точек самопересечения, следовательно, существует $c_0 \equiv \max\limits_{(s,s')\in\overline{I_S}\times\overline{I_S}}(\sigma/r)$.

Зафиксируем некоторое число $\alpha \in (0,1)$. Обозначим $c_i \equiv \max\limits_{(s,s')\in\overline{I_S}\times\overline{I_S}}\left\|r^{\alpha/2}\boldsymbol{K}_i\right\|$, где функции $r^{\alpha/2}\boldsymbol{K}_i(s,s')$ доопределены при $s' = s$ по непрерывности. Полагая $\varepsilon^{1-\alpha} < (1-\alpha)\Big/\left(8c_0^{\alpha}c_i^2 S\right)$, имеем неравенства:

$$\left\|\boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon}\right\|^2 \le \int_{-S}^{S}\left(\int_{-S}^{S}\left\|r^{\alpha/2}\boldsymbol{K}'_{i,\varepsilon}(s,s')\right\|^2 r^{-\alpha}ds'\right)ds \le$$

$$\le c_0^{\alpha}\int_{-S}^{S}\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left\|r^{\alpha/2}\boldsymbol{K}_i(s,s+\sigma)\right\|^2\sigma^{-\alpha}d\sigma\right)ds \le 4\,(1-\alpha)^{-1}c_0^{\alpha}c_i^2 S\,\varepsilon^{1-\alpha} < 2^{-1},$$

в силу которых к уравнениям $\left(1 \mp 2(-1)^i \boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon}\right) \boldsymbol{v}_i^{\pm} = \boldsymbol{h}_i^{\pm}$, эквивалентным соответствующим уравнениям ($3_i^{\pm}$), применима теорема Банаха: функции $\boldsymbol{v}_i^{\pm}$ представимы в виде рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{j}_{i,n}^{\pm}$ ($\boldsymbol{j}_{i,n}^{\pm} \equiv \left(\pm 2\,(-1)^i\, G'_{i,\varepsilon}\right)^n \boldsymbol{h}_i^{\pm}$), сходящихся в норме $L_2^{\times}$.

Используя рассуждения предыдущей теоремы и учитывая, что

$$\left(\boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon} \boldsymbol{f}\right)(s) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\sigma|^{-\alpha}\, \boldsymbol{Z}_i(s,\sigma)\, \varphi_\varepsilon(\sigma)\, \boldsymbol{f}\left(x(s+\sigma)\right) d\sigma$$

и $|\varphi_\varepsilon(\sigma)| \le 1$, получаем существование непрерывных производных $\left(\boldsymbol{j}_{i,n}^{\pm}\right)^{(l)}$ ($l = \overline{0,k}$) на множестве $\overline{I_S}$ и справедливость оценок:

$$\left\| \left( \left[\pm 2\, \boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon}\right]^n \boldsymbol{f} \right)^{(l)}(s) \right\|_{L_2} \le 2^{l+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,l} \max_{0 \le l' \le l,\, s \in \overline{I_S}} \left\| \left( \left[\pm 2\, \boldsymbol{G}'_{i,\varepsilon}\right]^{n-1} \boldsymbol{f} \right)^{(l')}(s) \right\|_{L_2} \le \ldots$$

$$\le \left(2^{l+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,l}\right)^n \max_{0 \le l' \le l,\, s \in \overline{I_S}} \left\| \boldsymbol{f}^{(l')}(s) \right\|_{L_2} \le \left(2^{k+2} (1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,k}\right)^n \|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)}.$$

Тогда, налагая дополнительное условие $\varepsilon^{1-\alpha} < 2^{-k-2}(1-\alpha)/c_{i,k}$, получаем оценки:

$$\left\| \left(\boldsymbol{j}_{i,n}^{\pm}\right)^{(l)}(s) \right\|_{L_2} \le q^n \left\|\boldsymbol{h}_i^{\pm}\right\|_{C^k(\partial\Omega)}$$

($q \equiv 2^{k+2}(1-\alpha)^{-1} \varepsilon^{1-\alpha} c_{i,k} < 1$, $l = \overline{0,k}$, $s \in \overline{I_S}$), вследствие которых ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\boldsymbol{j}_{i,n}^{\pm}\right)^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0,k}$) равномерно сходятся на $\overline{I_S}$ в норме $L_2$. Тогда в силу $\boldsymbol{j}_{i,n}^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$ имеем $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$. Теорема доказана.

**Следствие 2.** Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ ($k \in \boldsymbol{Z}_+$, $i = 1,2$) ограниченно обратимы.

***Доказательство.*** Согласно теореме 11 [11], уравнения ($3_i^{\pm}$) имеют единственные решения $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in L_2^{\times}$ при условии $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in L_2^{\times}$. Следовательно, в силу теоремы 3 уравнения ($3_i^{\pm}$) имеют единственные решения $\boldsymbol{v}_i^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$, если $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C^k(\partial\Omega)$. С учетом теоремы 2 это означает, что операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ являются биекциями, и поскольку они при этом замкнуты, то в силу теоремы о замкнутом графике обратные операторы $\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ ограничены. Утверждение доказано.

**Следствие 3.** Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}\left[C_n^k(\partial\Omega)\right]$ ($k \in \boldsymbol{Z}_+$, $n \in \boldsymbol{N}$, $i = 1,2$) ограниченно обратимы.

***Доказательство.*** Оператор $\boldsymbol{B}$ ограниченно обратим как порождающий экспоненциально убывающую $C_0$-полугруппу [17, с. 136, 149]. С учетом коммутативности операторов $\boldsymbol{G}_i^{\pm}$ и $\boldsymbol{B}^m$ ($m = \overline{1,n}$) на множестве $C_n^k(\partial\Omega)$ операторы $\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ и

$\boldsymbol{B}^{-m}$ коммутируют на множестве $C^k(\partial\Omega)$, следовательно, множество $C_n^k(\partial\Omega)$ инвариантно относительно $\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$. В силу следствия 1 и теоремы о замкнутом графике операторы $\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}\left[C^k(\partial\Omega)\right]$ ограничены. Утверждение доказано.

## Заключение

Следствия 2 и 3 являются обоснованием устойчивой разрешимости ГИУ ($3_i^{\pm}$) в пространствах $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k=0,1,\ldots, n=0,1,\ldots$, $C_0^k(\partial\Omega)\equiv C^k(\partial\Omega)$): при любой правой части $\boldsymbol{w}_i^{\pm}\in C_n^k(\partial\Omega)$ существует единственное решение $\boldsymbol{v}_i^{\pm}\in C_n^k(\partial\Omega)$, непрерывно зависящее от $\boldsymbol{w}_i^{\pm}$ в норме $C_n^k(\partial\Omega)$.

Класс задач, для которых справедливы полученные результаты, можно расширить. С учетом работы [11] для их получения к оператору $\boldsymbol{B}$ достаточно предъявить следующие требования: (A) оператор $\boldsymbol{B}$ порождает экспоненциально убывающую $C_0$-полугруппу и может быть расширен до оператора, допускающего спектральное разложение и также порождающего экспоненциально убывающую $C_0$-полугруппу; (B) операторы $\boldsymbol{G}_i$ должны быть компактны. Таким требованиям, кроме оператора $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_t+\boldsymbol{B}_y+p\boldsymbol{E}$, удовлетворяют также операторы $\boldsymbol{B}=p\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_t+p\boldsymbol{E}$ ($p>0$), в случае которых задачи $\{P_i^{\pm}\}$ представляют собой соответственно стационарные и нестационарные, , задачи теплопроводности в плоской области $\Omega^{\pm}$, а также оператор $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_y+p\boldsymbol{E}$ ($p>-\mu_1$), в случае которого задачи $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ представляют собой стационарные задачи теплопроводности в цилиндре $\Omega^{\pm}\times I_Y$. Вместе с тем стоит отметить, что компактность операторов $\boldsymbol{G}_i$ использовалась в работе [11] лишь для доказательства существования обратного оператора $\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}\left[L_2^{\times}\right]$ на основе теории Фредгольма. В работе [18] доказана ограниченная обратимость операторов $\boldsymbol{G}_i\left[L_2^{\times}\right]$, когда оператор $\boldsymbol{B}$ фактически удовлетворяет одному условию (A); при этом получены аппроксимации в виде рядов по неотрицательным степеням полугруппового оператора $\boldsymbol{U}(H)$ ($H>0$), сходящиеся к оператору $\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ при $H\to+0$ в норме $L_2^{\times}$. Поэтому представленные в настоящей статье и работе [11] результаты относительно задач $\left\{P_i^{\pm}\right\}$ и соответствующих им ГИУ могут быть распространены на достаточно большой класс абстрактных двумерных краевых задач для уравнений ($1^{\pm}$), определяемый условием (A), внутри эллиптического случая [17, с. 304].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения. Анализ-4 // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики». Фундаментальные направления. Т. 27. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 131–228.
2. *Бреббия К.*, *Теллес Ж.*, *Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

3. *Onishi K.* Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
4. *Mcintire E.A. Jr.* Boundary integral solutions for the heat equation // Mathematics of computation. 1986. V. 46. No. 173. P. 71–79.
5. *Costabel M.* Bounndary integral operators for the heat equation // Integral Equation Operator Theory. 1990. V. 13. No. 4. P. 498–552.
6. *Noon P.J.* The single layer heat potential and Galerkin boundary element methods for the heat equation. Ph. D. Thesis. University of Maryland. 1988.
7. *Shirota K.*, *Onishi K.* A boundary element Galerkim method for the Dirichlet problem of the heat equation in non-smooth domain // Scientiae Mathematicae. 1998. V. 1. No. 1. P. 107–123.
8. *Hongtao Y.* On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
9. *Arnold D.N.*, *Noon P.J.* Coercivity of the single layer heat potential // Journal of Computational Mathematics. 1989. V. 7. No. 2. P. 100–104.
10. *Hongtao Y.* A new analysis of Volterra-Fredholm boundary integral equations of second kind // Northeastern Mathematical Journal. 1997. V. 13. No. 3. P. 325–334.
11. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
12. *Иванов Д.Ю.* Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цидиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9. С. 16–32.
13. *Иванов Д.Ю.* Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университетата МАМИ. 2014. Т. 4. № 4(22). С. 26–38.
14. *Иванов Д.Ю.* Анализ двумерных граничных интегральных уравнений, определяющих решения задач теплопроводности в прямых цилиндрах // Перспективы науки. 2014. № 12(63). С. 103–109.
15. *Иванов Д.Ю.* Замкнутость сумм дифференциальных операторов, возникающих в задачах теплопроводности в пространствах $L_2$ // Тр. Ин-та системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. М.: КомКнига, 2005. Вып. 9(1). С. 111–123.
16. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.
17. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
18. *Иванов Д.Ю.* Решение в пространстве $L_2$ интегрального уравнения, соответствующего задаче теплопроводности в однородном прямом цилиндре на временной полуоси // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2013. № 11-1. С. 20–25.

Статья поступила 26.09.2015 г.

*Ivanov D. Yu.* STABLE SOLVABILITY IN SPACES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS OF SOME TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS OF HEAT CONDUCTION WITH AN OPERATOR-SEMIGROUP KERNEL

DOI 10.17223/19988621/38/4

In this paper, we study two-dimensional vector boundary Fredholm integral equations of the second kind with an operator kernel expressed in terms of a spatial-temporal $C_0$-semigroup. Such two-dimensional integral equations allow one to obtain solutions of vector boundary value problems of the first, second, and third kind for linear differential-operator equations $\Delta_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ in a planar bounded simply connected domain $\Omega^+$ or its exterior $\Omega^- \equiv \boldsymbol{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$. The operator coefficient $\mathbf{B}$ is a generator of the $C_0$-semigroup in space $L_2(I_Y \times I_T)$ ($I_Y \equiv [0,Y]$, $I_T \equiv [0,T]$). In turn, these boundary value problems are possible formulations of initial boundary value problems of heat conduction on the time interval $I_T$ in a homogeneous cylinder $\Omega^+ \times I_Y$ or $\Omega^- \times I_Y$ with inhomogeneous boundary conditions of the first, second, and third kind on the lateral surface of the cylinder, zero boundary conditions of the first, second, or third kind (depending on the operator **B**) on the cylinder bases and zero initial conditions. The main result of this paper is as follows: under condition $\partial\Omega \in C^{k+2}$, the spaces $C^k(\partial\Omega, H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T))$ are invariant with respect to direct and inverse operators of the integral equations, and such operators are bounded in these spaces. Here, $C^k(\partial\Omega, H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T))$ is the space of vector functions, *k* times continuously differentiable on the border $\partial\Omega$ with values in the Sobolev type space $H^n_{\boldsymbol{B}}(I_Y \times I_T)$ defined by powers $n+1$ of the operator ***B***.

Keywords: boundary integral equation, heat conduction, existence, uniqueness, regularity.

*IVANOV Dmitrii Yurievich* (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State Academy of Water Transport, Moscow, Russian Federation)

REFERENCES

1. Maz'ya V.G. Granichnye integral'nye uravneniya. Analiz-4. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya «Sovremennye problemy matematiki». Fundamental'nye napravleniya.* Moskow, VINITI Publ., 1988, vol. 27, pp. 131–228. (in Russian)
2. Brebbia C.A., Telles J.C.F. Wrobel L.C. *Boundary element techniques*. Springer-Verlag, 1984. 464 p.
3. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*, 1981, vol. 17, pp. 213–225.
4. Mcintire E.A. Jr. Boundary integral solutions for the heat equation. *Mathematics of computation*, 1986, vol. 46, no. 173, pp. 71–79.
5. Costabel M. Bounndary integral operators for the heat equation. *Integral Equation Operator Theory*, 1990, vol. 13, no. 4, pp. 498–552.
6. Noon P.J. *The single layer heat potential and Galerkin boundary element methods for the heat equation*. Ph. D. Thesis. University of Maryland, 1988.
7. Shirota K., Onishi K. A boundary element Galerkim method for the Dirichlet problem of the heat equation in non-smooth domain. *Scientiae Mathematicae*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 107–123.
8. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of computation*, 1999, vol. 68, no. 226, pp. 547–557.
9. Arnold D.N., Noon P.J. Coercivity of the single layer heat potential. *Journal of Computational Mathematics*, 1989, vol. 7, no. 2, pp. 100–104.
10. Hongtao Y. A new analysis of Volterra-Fredholm boundary integral equations of second kind. *Northeastern Mathematical Journal*, 1997, vol. 13, no. 3, pp. 325–334.
11. Ivanov D.Yu. Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential equations*, 2010, vol. 46, no. 8. P. 1104–1113.
12. Ivanov D.Yu. Ekonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsidindrakh. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2014, no. 9, pp. 16–32. (in Russian)
13. Ivanov D.Yu. Vychislenie operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniem polugruppovoy simmetrii. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universitetata MAMI*, 2014, vol. 4, no. 4(22), pp. 26–38. (in Russian)
14. Ivanov D.Yu. Analiz dvumernykh granichnykh integral'nykh uravneniy, opredelyayushchikh resheniya zadach teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh. *Perspektivy nauki*, 2014, no. 12(63), pp. 103–109. (in Russian)

15. Ivanov D.Yu. Zamknutost' summ differentsial'nykh operatorov, voznikayushchikh v zadachakh teploprovodnosti v prostranstvakh L2. *Tr. In-ta sistemnogo analiza RAN. Dinamika neodnorodnykh sistem*. Moskow, KomKniga Publ., 2005. Vyp. 9(1), pp. 111–123. (in Russian)
16. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*, *vol. 2*. Moskow, Fizmatlit Publ., 2001. 810 p. (in Russian)
17. Kreyn S.G. *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve*. Moskow, Nauka Publ., 1967. 464 p. (in Russian)
18. Ivanov D.Yu. Reshenie v prostranstve L2 integral'nogo uravneniya, sootvetstvuyushchego zadache teploprovodnosti v odnorodnom pryamom tsilindre na vremennoy poluosi. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2013, no. 11-1, pp. 20–25. (in Russian)