УДК 517.987
DOI 10.17223/19988621/38/6

Д.В. Сергеева

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ *n*-АРНЫХ ПОДПОЛУГРУППАХ БИНАРНЫХ ГРУПП

Свертки мер и функций, преобразование Фурье мер на локально компактных абелевых *n*-арных группах были введены в работе [1]. Развитие гармонического анализа на *n*-арных алгебраических объектах, наделенных топологией, тесно связано с существованием на подобных объектах ненулевой инвариантной меры. Инвариантные меры на топологических *n*-арных полугруппах рассматривались в [2] и [3]. В теореме 2 данной работы установлены необходимые и достаточные условия существования левоинвариантной меры на топологических *n*-арных подполугруппах бинарных групп. Ее можно рассматривать, как распространение результатов работы [4] на случай топологических *n*-арных полугрупп. Теорема 1 устанавливает результат представляющий интерес для топологической алгебры.

Ключевые слова: *левоинвариантная мера*, *топологическая n-арная полугруппа*, *идеал n-арной полугруппы.*

1. Терминология и обозначения

Терминология и обозначения, относящиеся к *n*-арным алгебраическим системам, в основном, соответствуют монографии [5]. Последовательность $a_1,\ldots,a_k,c_1,\ldots,c_n$ элементов множества X обозначаем $a_1^k c_1^n$. Отображение $[\ ]: X^n \to X$ называют *n*-арной операцией на X. Данная операция ассоциативна, если для любой последовательности $x_1^{2n-1} \in X^{2n-1}$ имеют место следующие равенства:

$$\left[\, x_1^{n-1} \left[\, x_n^{2n-1} \,\right]\right] = \left[\, x_1^j \left[\, x_{j+1}^{j+n} \,\right] x_{j+n+1}^{2n-1} \,\right] \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Непустое множество X с ассоциативной *n*-арной операцией называют *n*-арной полугруппой. *n*-Арную полугруппу будем обозначать $\langle X; [\ ] \rangle$ или одной буквой X. *n*-Арную полугруппу $\langle X, [\ ] \rangle$ называют *n*-арной группой, если каждое из уравнений

$$\left[\, x a_1^{n-1} \,\right] = a \ \text{ и } \ \left[\, a_1^{n-1} x \,\right] = a$$

разрешимо для любой последовательности $a_1^{n-1} a \in X^n$. При $n = 2$ *n*-арную группу будем называть бинарной группой.

Непустое множество $I \subset X$ называют идеалом *n*-арной полугруппы $\langle X; [\ ] \rangle$, если $\left[\, x_1^j x x_{j+1}^{n-1} \,\right] \in I$ для любых $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$, любого $x \in I$ и любого $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Если же $\left[\, x_1^{n-1} x \,\right] \in I$ для любых $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$ и любого $x \in I$, то I называют левым идеалом *n*-арной полугруппы $\langle X; [\ ] \rangle$.

Пусть $K \subset X$, $x_1^{n-1} \in X^{n-1}$. Множество $\left\{ \left[x_1^{n-1} k \right] \mid k \in K \right\}$ обозначаем $\left[x_1^{n-1} K \right]$. Отображение $x \to \left[x_1^{i}\, x\, x_{i+1}^{n-1} \right] (x \in X)$ называют трансляцией n-арной полугруппы $\langle X; [\ ] \rangle$. При $i = n-1$ трансляцию будем называть левой трансляцией, а при $i = 0$ правой трансляцией.

n-Арная полугруппа $\langle X; [\ ] \rangle$, наделенная топологией τ, называется топологической полугруппой, если n-арная операция непрерывна по совокупности аргументов. Топологическую n-арную полугруппу будем обозначать парой (X, τ). Ниже, не оговаривая особо, предполагаем, что все рассматриваемые топологии хаусдорфовы. Идеал $I \subset X$ называем идеалом с открытыми трансляциями на элементы X, если для любого $U \subset I$, $U \in \tau$ и любой трансляции λ множество $\lambda(U)$ является открытым в (X, τ).

Левоинвариантной мерой на топологической n-арной полугруппе (X, τ) называем счетно-аддитивную неотрицательную функцию μ, определенную на наименьшем σ-кольце $\mathrm{B}(X)$ подмножеств X, содержащем семейство $\mathrm{K}(X)$ всех компактных подмножеств X, конечную на каждом компактном множестве, такую, что $\mu(B) = \sup\{ \mu(C) \mid C \subset B, C \in \mathrm{K}(X) \}$ для любого $B \in \mathrm{B}(X)$ и $\mu\left(\left[a_1^{n-1} B \right] \right) = \mu(B)$ для любых $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$ и $B \in \mathrm{B}(X)$, таких, что множество $\left[a_1^{n-1} B \right]$ принадлежит $\mathrm{B}(X)$. Элементы σ-кольца $\mathrm{B}(X)$ называют борелевскими подмножествами топологического пространства (X, τ).

2. Основные результаты

Далее всюду $\langle G, \cdot \rangle$ – бинарная группа, $n \in N$ и $n > 2$, X – система образующих для G, такая, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \in X$ для любой последовательности $a_1^n \in X^n$. Формула $\left[a_1^n \right] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \ \left(a_1^n \in X^n \right)$ определяет n-арную операцию $[\ ]$ на X и алгебра $\langle X; [\ ] \rangle$ является n-арной полугруппой. Ее будем называть n-арной подполугруппой группы $\langle G, \cdot \rangle$.

Пример 1. Группа G – множество целых чисел относительно операции сложения, X – множество всех нечетных положительных чисел, $n = 3$. Тогда X – система образующих для G, для любых x_1, x_2, x_3 из X их сумма принадлежит X. Следовательно, X с тернарной операцией сложения трех чисел является тернарной подполугруппой G.

Теорема 1. Пусть $\langle X; [\ ] \rangle$ – n-арная подполугруппа бинарной группы G, τ_G – топология на G, такая, что (G, τ_G) является топологической группой, τ – топология на X, причем (X, τ) является топологической n-арной полугруппой. Пусть каждое $U \in \tau_G$, $U \subset X$ является открытым подмножеством (X, τ) и существует непустое множество $V \subset X$, удовлетворяющее следующему условию:

(i) $V \in \tau_G \cap \tau$ и сужение топологий τ_G и τ на V совпадают.

Тогда существует наибольшее (по включению) множество I среди подмножеств X, удовлетворяющих условию (i). I будет идеалом $\langle X;[\ ]\rangle$, обладающим открытыми трансляциями на элементы X.

Доказательство. Пусть $\{V\}$ – семейство всех подмножеств X, удовлетворяющих условию (i). Покажем, что множество $I=\bigcup\{V \mid V\in\{V\}\}$ также удовлетворяет условию (i). Имеем $I\subset X$ и $I\in\tau_G\cap\tau$. Пусть $U\subset I$ и $U\in\tau_G$. Тогда по предположению теоремы $U\in\tau$. Если же $U\in\tau$, то $U=\bigcup\{V\cap U \mid V\in\{V\}\}$. Имеем $V\cap U\in\tau$. Отсюда следует, что $U\in\tau_G$. Таким образом, множество I удовлетворяет условию (i), т.е. $I\in\{V\}$ и, по построению, является наибольшим подмножеством (по включению) семейства V.

Покажем, что I является идеалом X. Пусть $x_1^{n-1}\in X^{n-1}$. Имеем: $\left[\, x_1^j I\, x_{j+1}^{n-1}\right]=x_1\cdot\ldots\cdot x_j\cdot I\cdot x\cdot_{j+1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}\subset X$ и является открытым подмножеством (G,τ_G). Следовательно, $\left[\, x_1^j I\, x_{j+1}^{n-1}\right]\in\tau_G\cap\tau$. Пусть $U\subset\left[\, x_1^j I\, x_{j+1}^{n-1}\right]$ и $U\in\tau$. Тогда множество $W=x_j^{-1}\cdot\ldots\cdot x_1^{-1}\cdot U\cdot x_{n-1}^{-1}\cdot\ldots\cdot x_{j+1}^{-1}=\lambda^{-1}(U)\in\tau$, так как трансляция $\lambda(x)=\left[\, x_1^j x\, x_{j+1}^{n-1}\right]$ $(x\in X)$ является непрерывным отображением топологического пространства (X,τ) в себя и $W\subset I$. Следовательно, $W\in\tau_G$ в силу выполнения для I условия (i). Имеем $x_1\cdot\ldots\cdot x_j\cdot W\cdot x\cdot_{j+1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}=U\in\tau_G$. Отсюда вытекает, что для множества $\left[\, x_1^j I\, x_{j+1}^{n-1}\right]$ условие (i) выполняется и поэтому $\left[\, x_1^j I\, x_{j+1}^{n-1}\right]\subset I$. Таким образом, I – идеал $\langle X,[\ ]\rangle$.

Покажем, что если $V\subset I, V\in\tau$, то для любой трансляции λ полугруппы X множество $\lambda(V)\in\tau$. В самом деле $X\supset\lambda(V)=\left[\, x_1^j V\, x_{j+1}^{n-1}\right]=$ $=x_1\cdot\ldots\cdot x_j\cdot V\cdot x_{j+1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}\in\tau_G$, так как $V\in\tau_G$, в силу условия (i) для I. Следовательно, $\lambda(V)\in\tau$. Теорема доказана.

Следующий пример иллюстрирует теорему 1.

Пример 2. Пусть группа G – множество действительных чисел с операцией сложения, τ_G – естественная топология на множестве действительных чисел, $n=3$ и $X=\{1,3,5\}\cup(6;+\infty)$, топология τ является сужением топологии τ_G на X. Тогда (X,τ) – топологическая n-арная полугруппа. Очевидно, что если $U\in\tau_G$ и $U\subset X$, то $U\subset(6,+\infty)$ и, следовательно, $U\in\tau$. В качестве множества V возьмем непустое открытое в τ_G подмножество $(6,+\infty)$. Тогда условие (i) теоремы 1 будет выполнено. Очевидно, что множество $I=(6,+\infty)$ будет открытым идеалом (X,τ), обладающим открытыми трансляциями на элементы X, и будет являться наибольшим по включению среди подмножеств X, удовлетворяющих условию (i).

Теорема 2. Пусть на $\langle X;[\ ]\rangle$ задана хаусдорфова топология τ, такая, что (X,τ) является топологической *n*-арной полугруппой. Тогда следующие условия равносильны:

(а) на (X,τ) существует ненулевая левоинвариантная мера μ, такая, что для любой последовательности $x_1^{n-1}\in X^{n-1}$ существует компактное множество K, такое, что $\mu\left(\left[\,Kx_1^{n-1}\right]\right)>0$;

(б) (X,τ) обладает открытым локально компактным идеалом I с открытыми трансляциями;

(в) на $\langle G,\cdot\rangle$ существует локально компактная топология τ_G, такая, что (G,τ_G) является топологической группой, сужение топологии τ_G на X слабее топологии τ, (X,τ) обладает открытым идеалом I, причем, сужение топологий τ и τ_G на I совпадают.

Доказательство. Пусть выполнено условие (а) теоремы и μ – ненулевая левоинвариантная на (X,τ) мера. Пусть $a_1^{n-2}\in X^{n-2}$ и $a=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\in G$. На группе $\langle G;\cdot\rangle$ зададим бинарную операцию $*$ следующим образом: $x*y=xa_1^{n-2}y\quad(x,y\in G)$. Легко проверяется, что $\langle G;*\rangle$ является бинарной группой, а $\langle X;*\rangle$ – устойчивым подмножеством $\langle G;*\rangle$, a^{-1} является нейтральным элементом $\langle G;*\rangle$ и $a^{-1}\cdot x^{-1}\cdot a^{-1}$ является элементом, обратным для x. Очевидно, что $x*y=\left[\,xa_1^{n-2}y\,\right]$ для любых x,y из X и что бинарная операция $*$ в $\langle X;*\rangle$ непрерывна по совокупности аргументов. Мера μ является левоинвариантной мерой на $\langle X;*\rangle$. Пусть $x\in X$. В силу условия (а) найдется компактное множество K в топологическом пространстве (X,τ) такое, что $\mu(K*x)=\mu\left(\left[\,Ka_1^{n-2}x\,\right]\right)>0$.

Из теоремы 4.8 работы [4] следует, что на $\langle G;*\rangle$ существует локально компактная топология τ_G, такая, что $\langle G;*\rangle$ становится топологической группой, существует непустое множество $V\subset X$, такое, что $V\in\tau_G\cap\tau$ и сужение топологий τ_G и τ на V совпадают.

Покажем, что $\langle G;\cdot\rangle$ с топологией τ_G является топологической группой. В топологическом пространстве (G,τ_G) операция $x\mapsto a^{-1}\cdot x^{-1}\cdot a^{-1}\quad(x\in G)$ непрерывна, а операция $(x,y)\mapsto x\cdot a\cdot y\quad(x,y\in G)$ непрерывна по совокупности аргументов. Полагая в последней операции $y=a^{-1}\cdot b$, получаем непрерывность операции $x\mapsto x\cdot a\cdot a^{-1}\cdot b=x\cdot b$, для любого $b\in G$. Аналогично устанавливаем непрерывность сдвига $x\mapsto b\cdot x\quad(x\in G)$. Так как $x\cdot y=x\cdot a\cdot\left(a^{-1}\cdot y\right)$, то бинарная операция $(x,y)\mapsto x\cdot y$ непрерывна по совокупности аргументов. Наконец, из равенства $x^{-1}=a\cdot\left(a^{-1}\cdot x^{-1}\cdot a^{-1}\right)\cdot a$ следует, что операция $x\mapsto x^{-1}\quad(x\in G)$ непрерывна в (G,τ_G).

Из теоремы 1 сразу вытекает справедливость условия (в) теоремы.

Если выполнено условие (в), то из теоремы 1 вытекает справедливость условия (б).

Пусть выполнено условие (б) и пусть $a \in I$, $x \in X$. Тогда $x = \left(xa^{n-1} \right) \cdot \left(a^{-1} \right)^{n-1}$ и $x^{-1} = a^{n-1} \cdot \left(x \cdot a^{n-1} \right)^{-1}$. Так как $x \cdot a^{n-1} = \Big[x \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-1} \Big] \in I$, то отсюда вытекает, что открытый идеал I является системой образующих для G. Заметим, что сужение топологии τ на I является локально компактной топологией, $\langle I;[\ ] \rangle$ является топологической n-арной полугруппой. Из теоремы и следствия 2 к ней работы [6] вытекает, что на G существует локально компактная топология τ_G, такая, что (G, τ_G) является топологической полугруппой, $I \in \tau_G$ и сужение топологии τ_G на I совпадает с сужением τ на I. Пусть $a \in I$. Так как для каждого компактного множества $K \subset X$ имеем $K \subset a^{n-1}K \subset I$ и $a_1^{n-1}K$ является компактным подмножеством в топологии τ, то $a^{n-1}K$ является компактным подмножеством топологического пространства (G, τ_G). Отсюда следует, что K также, является компактным подмножеством (G, τ_G). Из этого вытекает, что каждое борелевское подмножество (X, τ) является борелевским подмножеством (G, τ_G). Пусть λ – левая мера Хаара группы (G, τ_G). Отметим, что если K – компактное подмножество G положительной меры, $x \in G$, то $\lambda(Kx) > 0$. Сужение μ меры λ на борелевские подмножества (X, τ) будет удовлетворять всем требованиям условия (а). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухин В.В.*, *Сергеева Д.В.* Теорема двойственности для локально компактных абелевых *n*-групп // Сибирский математический журнал. 2008. № 6. С. 1361–1368.
2. *Мухин В.В.* Инвариантные меры на топологических *n*-полугруппах // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз. мат. навук. 2000. № 4. С. 16–21.
3. *Сергеева Д.В.* О существовании инвариантных мер на топологических абелевых *n*-арных полугруппах с сокращениями // Вестник ИжГТУ. Математика. 2013. № 2. С. 140–141.
4. *Mukhin V.V.* Invauiant measurcs on topologicals semigroups which have on ideal with open translation mappings // Semigroup Forum. 2001. V. 62. P. 159–172.
5. *Русаков С.А.* Алгебраические *n*-арные системы: Силовская теория *n*-арных групп. Мн.: Навука i тэхнiка, 1992. 264 с.
6. *Мухин В.В.*, *Филипова Е.Е.* О продолжении топологии с системы образующих группы до топологии на группе // Известия вузов. Математика. 2009. № 6. С. 37–41.

Статья поступила 31.03.2015 г.

Sergeeva D.V. LEFT-INVARIANT MEASURES ON TOPOLOGICAL *N*-ARY SUBSEMIGROUP OF BINARY GROUPS

DOI 10.17223/19988621/38/6

Convolutions of measures and functions, as well as the Fourier transform of measures on locally compact Abelian n-ary groups were introduced in [1]. Development of harmonic analysis on n-ary algebraic objects endowed with a topology is closely related to the existence of a non-zero invariant measure on such objects. Invariant measures on topological n-ary semigroups were considered in [2] and [3].

In Theorem 2 of this paper, we establish necessary and sufficient conditions for the existence of a left-invariant measure on topological n-ary subsemigroups of binary groups. It can be treated as an extension of the results of [4] to the case of n-ary topological semigroups. The result established in Theorem 1 establishes is interesting for topological algebra.

Keywords: left-invariant measure, topological n-ary semigroup, ideal of an n-ary semigroup.

SERGEEVA Dina Vladimirovna (Vologda Institute of Law and Economics, Vologda, Russian Federation)

E-mail: dina_sergeeva@mail.ru

REFERENCES

1. Mukhin V.V., Sergeeva D.V. Teorema dvoystvennosti dlya lokal'no kompaktnykh abelevykh n-grupp. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 2008, no. 6, pp. 1361–1368. (in Russian)
2. Mukhin V.V. Invariantnye mery na topologicheskikh n-polugruppakh. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz. mat. navuk*, 2000, no. 4, pp. 16–21. (in Russian)
3. Sergeeva D.V. O sushchestvovanii invariantnykh mer na topologicheskikh abelevykh n-arnykh polugruppakh s sokrashcheniyami. *Vestnik IzhGTU. Matematika*, 2013, no. 2, pp. 140–141. (in Russian)
4. Mukhin V.V. Invauiant measurcs on topologicals semigroups which have on ideal with open translation mappings. *Semigroup Forum*, 2001, vol. 62, pp. 159–172.
5. Rusakov S.A. *Algebraicheskie n-arnye sistemy: Silovskaya teoriya n-arnykh grupp*. Minsk, Navuka i tekhnika Publ., 1992. 264 p. (in Russian)
6. Mukhin V.V., Filipova E.E. O prodolzhenii topologii s sistemy obrazuyushchikh gruppy do topologii na gruppe. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2009, no. 6, pp. 37–41. (in Russian)