ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика и механика № 6(38)

УДК 517.982
DOI 10.17223/19988621/38/7

А.Ш. Шукюров

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ ХМЫЛЕВОЙ И БУХТИНОЙ

Хорошо известно, что в каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис Шаудера, т.е. базис Шаудера $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\|x_n\|=1$ и $(x_n,x_m)=0$ для любых $n,m\in N$, $n\neq m$. Рассматривается последовательность элементов гильбертова пространства, для которой углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю. Изучается базисность и некоторые другие свойства таких систем. В частности, дается краткое доказательство одного результата Хмылёвой и Бухтиной и приводится обобщение этого результата.

Ключевые слова: *базис Шаудера*, *система представления*, *гильбертово пространство*, *ортонормированная система.*

Приведем следующие определения.

Определение 1. Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называется базисом Шаудера, если для любого элемента $x\in X$ существует единственная числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ сходится к элементу x по норме пространства X.

Определение 2. Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства X называется системой представления, если для любого элемента $x\in X$ существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ сходится к элементу x по норме пространства X.

Очевидно, что любой базис Шаудера является в то же время и системой представления; но обратное утверждение неверно, т.е. существуют системы представления, которые не являются базисами Шаудера.

Хорошо известно, что в каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис Шаудера, т.е. базис Шаудера $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\|x_n\|=1$ и $(x_n,x_m)=0$ для любых $n,m\in N, n\neq m.$ Тот факт, что существует базис, где 1 заменена на любое другое положительное число, тривиален. Поэтому, естественно, возникает вопрос о существовании базиса, где углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю, т.е. 0 заменен на другое число. Первый, известный нам, ответ на этот вопрос дается в следующей привлекательной теореме Хмылёва и Бухтиной [1]:

Теорема [1]. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H, удовлетворяющая условиям:

a) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$, $0 < |a| < 1$, $n, m \in N, n \neq m$.

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H.

Отметим, что система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется базисной, если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера в замыкании своей линейной оболочки.

В этой заметке предлагаются некоторые уточнения к формулировке этой теоремы и дается более короткое и простое доказательство этого результата. Кроме этого, применяемое доказательство дает возможность получать обобщение этого результата.

Сначала сформулируем некоторые факты, которые имеют и некоторый самостоятельный интерес.

Утверждение 1. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H, удовлетворяющая условиям

a) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$, $n, m \in N, n \neq m$, где a некоторое число, такое, что $a \neq 1$.

Тогда система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ω – линейно независима.

Доказательство. Пусть $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n + \ldots = \theta$. Скалярное умножение обеих частей на x_n дает нам

$$a \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) + a_n (1 - a) = 0 .$$

Отсюда вытекает $a_n = \text{const}$ для любого $n \in N$. Поэтому, так как ряд

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n + \ldots$$

сходится, то $a_n = 0, \forall n \in N$. **Утверждение доказано.**

Очень интересно, что при $a = 1$ это утверждение уже неверно (это легко следует из теоремы Коши – Буняковского – Шварца).

Утверждение 2. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H, удовлетворяющая условиям:

a) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$, $n, m \in N, n \neq m$, где a – некоторое число.

Тогда $a \geq 0$.

Доказательство. Известно (см. например, [3, задача 549]), что при этих условиях последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходиться к некоторому элементу x_0. Поэтому в равенствах $(x_m, x_n) = a$, переходя к пределу сначала при $m \to \infty$, получаем

$$(x_0, x_n) = a \text{, при } \forall n \in N . \tag{1}$$

А потом предельным переходом при $n \to \infty$ получаем окончательно, что

$$a = (x_0, x_0) = \|x_0\|^2 , \tag{2}$$

и поэтому $a \geq 0$. **Утверждение доказано.**

Из этого утверждения следует, что нет надобности использовать символ модуля для числа a в формулировке вышеприведенной теоремы. Более того, как показывает следующий уточненный вариант этой теоремы, вообще нет никакой нужды налагать на число a какие-то условия, кроме условия $a \neq 0$.

Теорема. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H, удовлетворяющая условиям:

a) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$, $a \neq 0$, $n, m \in N$, $n \neq m$.

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H.

Доказательство. Как уже отмечено, известно (см., например, [3, задача 549]), что при этих условиях последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходиться к некоторому элементу x_0. Так как x_0 принадлежит замкнутому линейному многообразию, порождаемому множеством $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, лемму 27 из [4, с. 81]), то для доказательства достаточно показать, что элемент x_0 не имеет разложения:

$$x_0 = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n + \ldots .$$

Пусть это разложение имеет место. Тогда, используя (1) и (2), имеем

$$a = (x_0, x_0) = a \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots),$$

$$a = (x_0, x_n) = a_n \cdot (1 - a) + a \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots).$$

Отсюда получается $a = a_n(1-a) + a$, и поэтому $a_n = 0,\ \forall n \in N$. Это означает, что $x_0 = \theta$. А это противоречит (2). **Теорема доказана.**

Замечание. При доказательстве теоремы считается, что $a \neq 1$, так как при $a = 1$ система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно зависима (случай равенства в неравенстве Коши – Буняковского – Шварца возможен только в этом случае).

Приведенное доказательство этой теоремы показывает справедливость следующего более общего результата:

Теорема. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H, удовлетворяющая условиям:

a) $\|x_n\| = 1$ для любого $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$, $a \neq 0$, $n, m \in N, n \neq m$.

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является системой представления в подпространстве H, порожденного этими элементами (и поэтому и в пространстве H).

Автор выражает благодарность А.А. Гусейнли за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хмылева Т.Е.*, *Бухтина И.П.* О некоторой последовательности элементов в гильбертовом пространстве, не являющейся базисом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1(1). С. 58–62.
2. *Люстерник Л.А.*, *Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

3. *Кириллов А.А.*, *Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
4. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы: общая теория. М.: ИЛ, 1962.

Статья поступила 14.03.2015 г.

Shukurov A. Sh. ON A PAPER BY KHMYLEVA AND BUKHTİNA

DOI 10.17223/19988621/38/7

It is well know that every separable Hilbert space possesses an orthonormal Schauder bases, i.e. a Schauder bases $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ for which $\|x_n\| = 1$ и $(x_n, x_m) = 0$ for any $n, m \in N$, $n \neq m$. In this note, we consider a sequence of elements in a Hilbert space for which angles between any two terms are equal and different from zero. Basicity and some other properties of such systems are investigated. In particular, a short proof of a result by Khmyleva and Bukhtina is provided and a more general form of this result is stated.

Keywords: Schauder bases, system of representation, Hilbert space, orthonormal system.

SHUKUROV Aydin Shukur (PhD, Research Fellow, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

E-mail: ashshukurov@gmail.com

REFERENCES

1. Khmyleva T.E., Bukhtina I.P. O nekotoroy posledovatel'nosti elementov v gil'bertovom prostranstve, ne yavlyayushcheysya bazisom. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2007, no. 1(1), pp. 58–62. (in Russian)
2. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Kratkiy kurs funktsional'nogo analiza*. Moskow, Vysshaya shkola Publ., 1982. (in Russian)