

УДК 1: 001; 001.8

В.А. Суровцев

Л. ВИТГЕНШТЕЙН И Ф.П. РАМСЕЙ О ТОЖДЕСТВЕ (2)¹

Рассматривается теория классов, основанная на концепции тождества объектов, предложенная Б. Расселом и А. Уайтхедом. Анализируется критика данной концепции Л. Витгенштейном и Ф.П. Рамсеем, с точки зрения которой сравниваются предложенные ими решения возникающих в концепции тождества проблем. Показано, что концепция тождества как уравнивание знаков, используемых в математических выражениях (Л. Витгенштейн), контрастирует с понятием тождества, используемого как интегративная часть специфических математических тавтологий (Ф.П. Рамсей).

Ключевые слова: теория классов, тождество, уравнение, тавтология, понятие числа, символическая система.

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой преимущественно рассматривалась критика Л. Витгенштейном, представленная им в *Логико-философском трактате (ЛФТ)* [2], теории тождества из *Principia Mathematica (PM)* [3] А. Уайтхеда и Б. Рассела, а идеи Ф.П. Рамсея рассматривались как возможное дополнение данной критики и как попытка развития этой критики с учётом предложенного в *ЛФТ* перевода записи, использующей тождество в *PM*, в запись без тождества. Запись без тождества, даже если учитывать все достижения из *ЛФТ*, испытывает значительные затруднения, что и демонстрирует Рамсей, используя предложения Витгенштейна как прямо, так и со значительными модификациями в способах записи и их интерпретации. Значительные затруднения, рассмотренные в предыдущей статье, показывают, что, предложенный Витгенштейном перевод может быть осуществлён только лишь с уходом в бесконечность допущений.

Здесь в первую очередь рассматриваются те положения из *PM*, которые как раз и подверглись критике в *ЛФТ*, и на основании их содержания анализируются подходы Витгенштейна и Рамсея к истолкованию содержания математики, которое первый трактует как уравнивание знаков (лингвистическую конвенцию), позволяющее использовать подстановку одних выражений вместо других, а второй в своих *Основах математики (ОМ)* [4] – как особый тип тавтологий, характеризующих взаимосвязи в рамках символической системы, основанных на истинностных значениях пропозиций. Важность различения этих подходов позволяет охарактеризовать эволюцию направления логицизма в основаниях математики, считающего, что математика является продвинутой частью логики.

Рассмотрим, прежде всего, с какой целью в *PM* вводится знак '=', который, напомним, в соответствии с принципом отождествления неразличимых Лейбница определяется следующим образом (определение *13.01):

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 11-03-00039а) и в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, госконтракт № 02.740.11.0362.

$$x = y =_{\text{def}} : (\phi) : \phi!x. \supset . \phi!y,$$

т.е. «данное определение означает, что x и y будут называться тождественными, когда каждая предикативная функция, которая удовлетворяется x , также удовлетворяется y » [3. С. 245].

Исключительно важная роль знака тождества в *РМ* связана с тем, что с его помощью вводится общее понятие класса, конкретные классы и определение конкретных чисел (в частности, 0, 1 и 2) [3. Т. 1. С. 266–277, 396–429], которое потом развивается в общее определение понятия кардинального числа как класса всех равночисленных классов, т.е. классов, элементы которых находятся во взаимно-однозначном соответствии [3. Т. 2. С. 67–114]. Рассмотрим эти функции знака '=' последовательно.

Начнём с того, что под классом Рассел и Уайтхед понимают совокупность элементов, удовлетворяющих какую-то пропозициональную функцию, т.е. функцию, определенную на некоторой предметной области, которая своим значением имеет истину и ложь. Таким образом, каждая пропозициональная функция определяет некоторый класс, который составляют те и только те аргументы функции, для которых она является истинной [3. Т. 1. С. 265]. Так, функция ' x – разумен', заданная на множестве живых существ, определяет класс людей, поскольку только для элементов данного класса она является истинной. В формальной записи из *РМ* функция $\phi\hat{x}$, скажем, соответствующая свойству разумности, определяет класс $\hat{x}(\phi x)$, класс тех элементов x , которые обладают этим свойством, т.е. класс людей.

При этом вполне возможно, что один и тот же класс может определяться различными функциями. Функции, определяющие один и тот же класс, т.е. являющиеся истинными для одних и тех же аргументов, называются формально эквивалентными. Так, например, функции ' x – разумен' и ' x – имеет мягкую мочку уха', определённые на множестве живых существ, являются формально эквивалентными, поскольку истинны для одних и тех же аргументов, а значит, определяют один и тот же класс. То есть функции $\phi\hat{x}$ и $\psi\hat{x}$, соответствующие данным свойствам, могут определять один и тот же класс, т.е. классы $\hat{x}(\phi x)$ (класс разумных существ) и $\hat{x}(\psi x)$ (класс существ, имеющих мягкую мочку уха) могут совпадать, т.е. являться одним классом, а именно, классом людей.

Однако функции, даже если они формально эквивалентны, с точки зрения определения истинностных значений высказывания, в которые они входят, могут играть разную роль. Во-первых, если истинность высказывания определяется только с точки зрения возможных аргументов функции, т.е. зависит только от определяемого функцией класса, то такая функция называется экстенсией. Во-вторых, если истинность высказывания зависит от особенностей того, как задаётся сама функция, то такая функция называется интенсией. Так, например, в высказываниях «Сократ – разумен» и «Все люди разумны» (или формально « ϕa » и « $(x).\phi x$ ») функция ' x – разумен' (т.е. функция $\phi\hat{x}$) – экстенсией, поскольку, если мы заменим её на функцию

‘ x – имеет мягкую мочку уха’ (т.е. на $\psi\hat{x}$), истинностное значение соответствующих высказываний не изменится. Действительно, «Сократ имеет мягкую мочку уха» и «Все люди имеют мягкую мочку уха» будут столь же истинными, как и высказывания «Сократ – разумен» и «Все люди разумны», поскольку истинность данного высказывания зависит исключительно от аргументов функции, составляющих один и тот же класс. Другими словами, экстенциональность функций определяется тем, что если они формально эквиваленты (т.е. имеет место $\phi x \equiv_x \psi x$), то они заменимы в любых контекстах (в частности, $(x)\phi x \equiv (x)\psi x$).

В отличие от экстенциональных функций, интенциональные функции этим свойством не обладают. Так, если мы возьмём высказывание «Иван считает, что все люди разумны», то здесь функция ‘ x – разумен’ является интенциональной, поскольку Иван не обязан знать, что все люди имеют мягкую мочку уха, а следовательно, высказывание «Иван считает, что все люди имеют мягкую мочку уха» не обязательно будет истинным. В данном случае замена $\phi\hat{x}$ на $\psi\hat{x}$ может приводить к изменению истинностного значения всего высказывания, а следовательно, функция $\phi\hat{x}$ является интенциональной.

Таким образом, экстенциональные функции в *PM* определяются как функции, которые взаимозаменяемы во всех контекстах, а именно, относительно свойства экстенциональности функции f от функции $\phi\hat{z}$ имеет место следующее утверждение:

$$\phi!x \equiv_x \psi!x : \supset_{\phi, \psi} f(\phi\hat{z}) \equiv f(\psi\hat{z}),$$

т.е. формально эквивалентные предикативные функции экстенциональны, если они выполняются для одних и тех же аргументов во всех контекстах.

Экстенциональные функции чрезвычайно важны, поскольку «когда функция $\phi\hat{z}$ экстенциональна, её можно рассматривать как нечто присущее классу, определяемому $\phi\hat{z}$, поскольку её истинностное значение не изменится, пока не изменится класс» [3. Т. 1. С. 266]. Поскольку с точки зрения Рассела и Уайтхеда, все интересные с точки зрения математики функции являются экстенциональными, постольку в математике ими можно и ограничиться. Это важно в связи с тем, что таким образом достигается значительное упрощение, поскольку вместо экстенциональных функций можно тогда говорить об определяемых этими функциями классах, хотя Рассел с Уайтхедом и считают классы логическим фикциями. Упрощение достигается в частности тем, что вместо различных экстенциональных функций, определяющих один и тот же класс, можно говорить о самом этом классе, поскольку классы, определяемые такими функциями, тождественны или равны. Равенство между классами определяется путём буквального применения приведённого выше определения *13.01 к определяющим функциям с соответствующей модификацией, учитывающей, что уравниваются не индивиды, а логические фикции, состоящие из этих индивидов (утверждение *20.15):

$$\vdash \therefore \psi x . \equiv_x . \chi x : \equiv . \hat{z} (\psi z) = \hat{z} (\chi z),$$

т.е. «два класса идентичны, тогда и только тогда, когда определяющие их функции формально эквивалентны. Это основное свойство классов» [3. Т. 1. С. 267].

Знак “=” применяется в *РМ* не только для установления отличительных характеристик классов, но и при задании особых классов, в частности пустого и универсального. В этом случае тождество выступает в качестве определяющей класс функции. Универсальный класс (‘ $\forall$ ’ в символике *РМ*, предложение *24.01) определяется следующим образом:

$$\forall =_{def} \hat{x} (x = x),$$

т.е. универсальный класс задаётся как класс самотождественных индивидов. Здесь определяющая класс функция сводится к равенству индивидов, обладающих одними и теми же свойствами. Универсальный класс можно было бы задать и каким-то другим свойством, которым обладают все индивиды, но в пользу равенства говорит то, что оно, в отличие от любых других свойств, хорошо описывается формально, поскольку задаётся однозначным определением. Действительно, так как предметы равны, если все их свойства одинаковы, то для единственного предмета это утверждение превращается в аналитическое тождество. Как утверждается в *РМ*: «Любое другое свойство, присущее всему, работает так же хорошо, как и “ $x = x$ ”, но это единственное из таких свойств, которое мы до сих пор изучали» [3. Т. 1. С. 293], следовало бы добавить, что до сих пор это свойство изучалось именно потому, что его можно определить значимым образом.

Аналогичным образом определяется нуль-класс или пустой класс, который рассматривается как дополнение к универсальному и который можно задать через отрицание определяющего универсальный класс свойства (т.е. $\Lambda =_{def} \hat{x} (x \neq x)$). Определённые таким образом универсальный и пустой классы, а также общее определение класса позволяют развить стандартную булеву алгебру классов, представляющую собой математизированную интерпретацию традиционной логики [3. Т. 1. С. 265–289, 293–306]. Все соотношения, предлагаемые классической аристотелевской силлогистикой, выполняются точно так же, как выполняются все соотношения, предлагаемые булевой алгеброй классов.

Универсальный и нулевой классы позволяют интерпретировать традиционную логику. Но этого недостаточно для цели, которая ставится в *РМ*. Введение знака “=” связано не столько с тем, чтобы определить класс вообще или такие классы, как универсальный или нулевой, хотя нулевой класс и играет в дальнейшем определении в *РМ* кардинальных и ординальных чисел важную роль. Это связано, прежде всего, с тем, что с его помощью, вернее с помощью обозначаемого им свойства, или, лучше сказать (согласно приведённым выше определениям), с помощью определяемых им классов, можно ввести классы, содержащие точно определённое количество индивидов, поскольку классы с точно определённым количеством индивидов позволяют

затем вести понятие конкретных чисел и на этой общей основе разъяснить и определить общее понятие числа.

Действительно, если мы просто ограничиваемся понятием класса, предполагая, что он не универсальный и не нулевой, то возникает вопрос: «А можно ли на приведённых основаниях определить класс, содержащий точное количество индивидов, и при этом количество индивидов находилось бы в пределе от $\wedge$ до $\vee$?». То есть можно ли задать такую определяющую класс функцию, которая бы точно определяла количество предметов. Рассел и Уайтхед считают, что такие функции можно задать, как раз используя определяемое ими в *13.01 тождество объектов.

Прежде всего, в *PM* вводится единичный класс, т.е. класс, содержащий только один индивид. Это важно, поскольку класс, не содержащий индивидов, уже есть, а именно класс $\wedge$, а все следующие классы должны содержать большее количество индивидов. И резонно, что таким следующим классом должен быть класс, содержащий хотя бы один индивид. Единичный класс, т.е. класс, содержащий один элемент, в *PM* вводится так: «Мы вводим новую дескриптивную функцию $i'x$, означающую “класс термов, идентичных терму x ” или, что то же самое, “класс, единственный элемент которого есть x ” [3. Т. 1. С. 405]. Таким образом,

$$i'x =_{\text{def}} \hat{y} (y = x),$$

т.е. “ $i'x$ ” определяется через указание единственности объекта, входящего в класс, так как этот класс задаётся как класс всех тех элементов y , которые идентичны элементу x , т.е. единичный класс определяется как класс всех тех объектов, которые идентичны некоторому выбранному элементу. Здесь, как и в случае с универсальным классом, видимо, можно было бы использовать другое свойство, т.е. опять-таки равенство использовать не обязательно, если бы только можно было найти свойство, которое однозначно определяет класс с единственным элементом. И хотя в *PM* на это явно не указывается, можно сказать, что тождество, выражаемое как “=”, используется в силу простоты, задаваемой формальным определением *13.01.

Подобным образом, с использованием равенства, определяется класс, состоящий из двух элементов. В этом случае класс задаётся как объединение элементов, тождественных некоторому x , и элементов, тождественных некоторому y (в символике *PM* $i'x \cup i'y$). При этом для того чтобы обеспечить наличие именно двух элементов в данном классе, добавляется условие, опять-таки использующее тождество, а именно, необходимо, чтобы $x \neq y$, поскольку, в противном случае, опять получился бы единичный класс. Различие элементов задаётся через их нетождественность. То есть класс, содержащий два элемента, в полном выражении записывается, например, так: $\hat{y} (y = x) \cup \hat{z} (z = y),$ при этом необходимо указать, что $x \neq y$. Так мы получаем класс, состоящий из пары элементов. Нетрудно заметить, что подобным образом можно получить не только пары, но и любые классы, состоящие из нужного нам количества элементов. Более того, в *PM* рассматриваются не только про-

сто пары, но и упорядоченные пары, что сделать (опять-таки используя равенство) совсем не трудно. Нужно только пару определить таким образом, чтобы было ясно, какой элемент идёт первым. А значит, поскольку можно задать любые классы с нужным количеством элементов, можно задать и любые классы, где эти элементы упорядочены.

Таким образом, отталкиваясь от понятия формально эквивалентных экстенциональных функций, в системе *PM* можно перейти к классам, и не просто к классам, но к классам с точно определённым количеством элементов и даже к классам, где эти точно определённые элементы упорядочены. А это уже крайне важно, поскольку с точки зрения классов в *PM* вводятся основные понятия математики, а именно, понятия кардинального и ординального числа.

Остановимся только на кардинальных числах. Общее определение понятия кардинального числа, как класса всех классов, находящихся во взаимно-однозначном соответствии, вводится в начале второго тома *PM*: «Кардинальное число класса α , которое мы будем обозначать “ $Nc'\alpha$ ”, определяется как класс всех классов, подобных α » [3. Т. 2. С. 57]¹. Ещё ранее, в первом томе *PM*, на основании определения конкретных конечных классов вводятся конкретные кардинальные числа. В частности, в определениях:

$$*54.01. \quad 0 =_{def} \iota' \wedge,$$

$$*52.01. \quad 1 =_{def} \alpha \{(\exists x) . \alpha = \iota'x\},$$

$$*54.02. \quad 2 =_{def} \alpha \{(\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y\}$$

вводятся 0, 1 и 2, что в соответствии с приведёнными выше определениями конкретных классов означает, что 0 – это пустой класс, 1 – это класс всех единичных классов, 2 – это класс всех двухэлементных классов. Определения подобного рода нетрудно продолжить для других чисел. Во втором томе для удобства определения конкретных кардинальных чисел, с точки зрения общего определения понятия кардинального числа и введённого в конце второго тома понятия индуктивного числа для того, чтобы задать порождение класса всех кардинальных чисел, в обозначение, конечно, вводится подобие классов, но для существа дела это особого значения не имеет. В основании понятия подобия опять-таки лежит знак ‘=’ как указание на равночисленность используемых в определении конкретных чисел классов.

Таким образом, понятие числа, а вместе с ним и вся математика основываются в *PM* на теории классов, а также теории тождества, без которого ни общая теория классов, ни определения конкретных классов оказались бы невозможными.

Понятно, что критика Витгенштейном и присоединившимся к нему Рамсеем теории тождества [1] обесмысливает аргументацию, принятую в *PM*,

¹ В принципиальных чертах это определение повторяет определение числа у Г. Фреге, первоначально предложенное в [5]. Правда, у Фреге речь идёт об объёмах понятий, но это не играет существенной роли, поскольку понятие класса выполняет в *PM* такую же роль, что и понятие объёма у Фреге.

фактически делая невозможным адекватное определение понятия класса и производных от него понятий¹. Уже тезис Витгенштейна, что «два объекта различаются только тем, что они разные» [2. 2.0233], утверждает, что два объекта, имеющие все свойства одинаковыми, могут быть различны (и в этом нет никакого логического противоречия), а следовательно, неверным оказывается и определение *13.01 со всеми вытекающими для всех остальных определений последствиями.

Для Витгенштейна здесь нет проблем, поскольку он в принципе считает, что «теория классов в математике совершенно излишня» [2. 6.031]. Это связано с тем, что с его точки зрения способы задания классов в *PM* не являются логически необходимыми, поскольку уже задание универсального и пустого класса зависит от того, могут ли объекты обладать свойством самотождественности. Ответ на этот вопрос зависит скорее от свойств нашего физического мира, нежели от логики, которая говорит только о возможности его описания, но равенство обозначений в рамках описания не говорит ничего необходимого о самом мире. Однако, как считает Витгенштейн, «общность, употребляемая в математике, – не случайная общность» [2. 6.031]. Поэтому фреге-расселовское определение конкретных чисел он заменяет понятием чисел как показателей операций [2. 6.021], осуществляемых при переходе от одного предложения к другому. При этом общее понятие числа определяется как общая форма построения всех таких показателей [2. 6.03], когда определена общая форма всех возможных предложений [2. 6], основанных на таких построениях (подробнее см. [7. С. 247–259]). Эти построения не выходят за рамки символического конструирования пропозициональных функций, и на этой основе считаются Витгенштейном не выходящими за рамки аналитического, необходимого знания, т.е. они ничего не говорят о мире, но являются лишь преобразованием языковых выражений.

В соответствии с таким подходом к понятию числа интерпретируются и предложения математики, относительно которых Витгенштейн считает, что они «не выражают никакой мысли» [2. 6.21], но являются уравнениями [2. 6.2], в которых уравниваются способы выражения, и это затрагивает лишь то, что обозначает, но не то, что обозначается, при этом «если два выражения связаны знаком равенства, то это означает, что они взаимозаменяемы. Но имеет ли это место – должно быть видно из самих этих двух выражений» [2. 6.23]. И далее: «В уравнении существенно то, что оно не необходимо для того, чтобы показать, что оба выражения, связываемые знаком равенства, имеют одинаковое значение, так как это может быть понято из самих этих двух выражений» [2. 6.232]. Таким образом, всё ограничивается лишь уровнем выражений, но не тем, что они обозначают. Функции '=' переводятся Вит-

¹ Здесь нельзя не согласиться с М. Мэрионом: «Исключение Витгенштейном тождества непосредственно ведёт к важному критицизму теории кардинальных чисел в *Principia Mathematica*. Для демонстрации этого достаточно обратиться к тому, как вводится единичный класс в *52 и пары кардинальных чисел в *54. Кардинальное число 2 определяется в *54.02 как класс всех пар формы $t'x \cup t'y$ (где $x \neq y$), последнее определяется как "класс, чьими единственными членами являются x и y ", поскольку, если есть третий элемент z в $t'x \cup t'y$, тогда $(z = x) \vee (z = y)$ (*51.232). Так, пары имеют форму: $((x = a) \wedge (y = b)) \vee ((x = c) \wedge (y = d) \wedge \dots$ (Здесь, конечно, знак '=' выражает не математическое равенство, но логическое тождество)» [6. С. 353]. Действительно, критика Витгенштейна тождества не оставляет камня на камне от большей части *PM*.

генштейном с уровня объектов на уровень знаков. Тожество, используемое в *ЛФТ*, больше не является тождеством в смысле *РМ*. Знак '=' не имеет онтологического измерения, он ничего не может сказать об отношениях объектов. Этот знак имеет лишь лингвистический, конвенциональный характер. Как утверждает Витгенштейн, «в жизни ведь нет никаких математических предложений, в которых мы бы нуждались, но математические предложения мы употребляем *только* для того, чтобы из предложений, не принадлежащих математике, выводить другие, равным образом не принадлежащие математике» [2. 6.211]. Например, предвзяв пример Рамсея, мы можем сказать, что из того, что у меня есть $2 + 2$ шляпы, я могу вывести, что у меня 4 шляпы, при этом, конечно, данные пропозиции нужно представить в соответствующем виде, чтобы вторую можно было представить как результат преобразований первой. Но всё равно ' $2 + 2 = 4$ ' в данном случае, есть лишь способ преобразования одного выражения в другое.

Как уже говорилось, Рамсей согласен с критикой Витгенштейна, более того, он её развивает в определённых аспектах и пытается, применяя соглашения Витгенштейна, реализовать в формальной системе, не использующей знака тождества, что достаточно затруднительно [1]. Рассмотрению этой критики достаточно много места посвящено и в *ОМ*, как, впрочем, и недостаточности решения, предлагаемого Витгенштейном.

Начнём с критики. Действительно, Рамсей, касаясь возможности различия вещей, имеющих все свойства общими, утверждает: «Это вполне возможно, даже если, фактически, этого никогда не происходит. Возьмём две вещи *a* и *b*. Тогда ничего самопротиворечивого нет ни в том, чтобы *a* обладало любым самонепротиворечивым множеством элементарных свойств, ни в том, чтобы этим множеством обладало *b*, ни, следовательно, в том, чтобы *a* и *b* имели эти свойства общими. Стало быть, поскольку это логически возможно, существенно иметь такой символизм, который позволял бы нам рассматривать эти возможности, а не исключать их посредством определения» [4. С. 39]. То есть определение *13.01 из *РМ*, исключающее такую возможность, логически неоправдано. Вероятные аргументы, оправдывающие такую возможность, имеют содержательный, а не логический характер.

Пожалуй, единственный аргумент, который может сойти за логический, заключается в том, что уже именование объектов разными именами влечёт различие обозначаемых этими именами объектов. Кажущийся на первый взгляд логическим аргумент от необходимости различения объектов уже потому, что они обозначаются разными знаками, с точки зрения Рамсея, таковым не является: «Бесполезно выдвигать возражения, что невозможно различить две вещи, у которых все свойства общие, поскольку дать им различные имена влекло бы, что обладание этими именами уже является различными свойствами. Ибо, хотя, так сказать, это и совершенно верно, что я не могу по указанной причине знать какие-то две отдельные неразличимые вещи, однако я вполне могу рассматривать такую возможность или даже знать, что есть две неразличимые вещи, не зная, что они собой представляют. Возьмём аналогичную ситуацию: поскольку людей на земле больше, чем волос на голове любого человека, постольку я знаю, что должны быть по крайней мере два человека с одним и тем же числом волос, но я не знаю, какие именно это лю-

ди» [4. С. 39]. То есть я вполне могу использовать разные имена для вещей, обладающих одними и теми же свойствами, так как совершенно не обязательно знать, что это за вещи, поскольку я могу использовать и использую разные имена, и в этом нет никакого противоречия. Аргумент от различия вещей в силу различия их имён работает скорее в пользу точки зрения Витгенштейна, поскольку, используя выражение ' $a = b$ ', мы утверждаем, что используем разные обозначения одного и того же объекта, а не то, что разные объекты в каком-то смысле равны, так как если они равны, нужно было бы использовать ' $a = a$ ', а если не равны, то нужно было бы использовать ' $a \neq b$ '.

Стало быть, если всё-таки возможно иметь символизм, не использующий знака тождества в смысле *PM*, а из аргументации Витгенштейна следует, что его можно и следует разработать, то его необходимо разработать хотя бы для того, чтобы освободить логику от допущений, связанных в *PM* с определением *13.01. Но насколько это можно осуществить в соответствии с принципами *ЛФТ*?

Следуя Витгенштейну, Рамсей утверждает: «Когда и ' a ', и ' b ' являются именами, единственное значение, которое может быть придано ' $a = b$ ', состоит в том, что оно указывает на то, что мы используем ' a ' и ' b ' в качестве имён одной и той же вещи или, более обще, как эквивалентные символы» [4. С. 27]. Но насколько оправдана такая интерпретация? Используя равенство, в этом случае мы указываем на уравнивание выражений, т.е. формулы вроде ' $a = b$ ' указывают на то, что ' a ' и ' b ' являются равными символами. С этим можно было бы согласиться, но, как считает Рамсей, хотя «в этом есть определённое удобство, например, при рассмотрении ' $2 + 2 = 4$ '. Поскольку «У меня есть 2 + 2 шляпы» и «У меня есть 4 шляпы» являются одной и той же пропозицией, ' $2 + 2$ ' и ' 4 ' являются равными символами. В таком виде этот, очевидно, смехотворно узкий взгляд на математику и ограничивает её до простой арифметики... Я посвятил некоторое время развитию такой теории и нашёл, что она сталкивается с тем, что представляется мне непреодолимыми трудностями» [4. С. 28]¹.

С чем здесь связаны непреодолимые затруднения, на которые указывает Рамсей? Согласно установкам Витгенштейна, т.к. в жизни нет никаких математических утверждений, выражения чистой математики служат для того, чтобы из утверждений эмпирической арифметики получать другие утверждения эмпирической арифметики, как в случае примера со шляпами. В этом случае выражения чистой математики являются в терминологии *ЛФТ* псевдопредложениями, которые ничего не говорят о действительности, но уравнивают используемые знаки. То есть уравнения математики служат для того, чтобы из одних утверждений, не относящихся к чистой математике, получать другие утверждения, столь же не относящиеся к чистой математике, за счёт подстановки одного из уравниваемых знаков вместо другого, поскольку «ес-

¹ Интересно, что хотя Рамсей скептически относится к трактовке Витгенштейном математических утверждений как уравниваний, относящихся к равенству знаков, он нигде эксплицитно не рассматривает другую важную идею *ЛФТ*, а именно, трактовку чисел как показателей степени логических операций над предложениями. Было бы интересно сравнить эвристичность этой идеи для оснований математики с развиваемым Рамсеем в *ОМ* подходом к числу с помощью особых экстенциональных функций.

ли два выражения связаны знаком равенства, то это означает, что они взаимозаменяемы» [2. 6.23]. В случае примера со шляпами уравнение “ $2 + 2 = 4$ ” так и работает. Можно предположить, что так работают и другие уравнения математики. Возьмём, например, выражение

$$‘x^2 - 3x + 2 = 0 : \supset_x : x = 2 \vee x = 1’.$$

Оно может относиться к такой форме и говорить об уравниваемых знаках. В интерпретации Витгенштейна оно указывало бы на то, что ‘Если “ $x^2 - 3x + 2$ ” означает 0, то “ x ” означает 2 или 1’. «Математика, – как считает Рамсей, – была бы тогда, по крайней мере частично, деятельностью по конструированию формул, которые таким способом соответствуют вербальным пропозициям» [4. С. 28]. Такую теорию трудно, а, может быть, и невозможно было бы развить в деталях. Но Рамсей считает, что её не просто можно, но и нужно отвергнуть по другим основаниям.

В *ОМ* основные затруднения, связанные с таким подходом, относятся к использованию математических выражений в обычных утверждениях, «они возникают, как только мы прекращаем трактовать математику как изолированную структуру и рассматриваем математические элементы в нематематических пропозициях» [4. С. 29]. Такие выражения можно легко найти там, где математические отношения характеризуют отношения между предметами реального мира. Возьмём, например, высказывание «Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб». Как формально проанализировать данное высказывание? Допустим, например, что пропозициональная функция $\phi\hat{x}$ истинна только для англичан, а пропозициональная функция $\psi\hat{x}$ истинна только для французов. Используя, пока для удобства обозначения, теорию классов из *РМ*, можно было бы сказать, что эти функции соответственно определяют классы $\hat{x}(\phi x)$ и $\hat{x}(\psi x)$ как класс англичан и класс французов. Тогда число класса англичан можно определить с помощью выражения ‘ $\hat{x}(\phi x) \in m$ ’, а число класса французов как ‘ $\hat{x}(\psi x) \in n$ ’ (где ‘ m ’ и ‘ n ’ определяются как соответствующие числа, т.е., согласно определениям *РМ*, как соответствующие классы подобных классов, а ‘ $\in$ ’ как отношение принадлежности элемента классу). В этом случае анализ высказывания «Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб» привёл бы, согласно Рамсею, к выражению

$$“(\exists m, n) . \hat{x}(\phi x) \in m . \hat{x}(\psi x) \in n . m^2 = n^3 + 2”.$$

Вот здесь возникает вопрос, является ли эта пропозиция математической? Очевидно, нет, поскольку речь здесь идёт о реальных англичанах и французах. Кроме того, поскольку квантор существования, с учётом приведённых определений, является ничем иным, как логической операцией, проводимой с определяющими функциями $\phi\hat{x}$ и $\psi\hat{x}$, её результатом является согласование истинностных возможностей пропозиций, получающихся из этих функций

заменой переменной на константы. Последние же являются эмпирическими пропозициями, значит, таковым является и результат применённой к ним операции. Всё указывает на то, что данное выражение является эмпирической, а не математической пропозицией. Но какую здесь роль тогда играет компонент ' $m^2 = n^3 + 2$ '? Если мы принимаем точку зрения Витгенштейна и рассматриваем компонент как лингвистический, т.е. относящийся только к способам выражения или, вернее, к способам уравнивания символов, тогда и всей пропозиции мы должны придать лингвистический смысл. То есть, согласно *ЛФТ*, математической псевдопропозиции $m^2 = n^3 + 2$ можно придать смысл, «только относя её к символам, делая тем самым всю пропозицию отчасти относящейся к символам» [4. С. 29]. Но, пожалуй, вряд ли можно согласиться, что высказывание «Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб» является лишь символическим соглашением. Здесь мы действительно нечто утверждаем о мире, и на основании этого утверждения, кстати, можно было бы, например, делать выводы об этническом составе населения Европы, не считая, что пропорции, характеризующие такой состав, относятся лишь к нашим языковым конвенциям. Во всяком случае, вопрос «Каково число англичан?» вполне осмыслен, и если на это вопрос я отвечу, что «число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб», то этот ответ также вполне осмыслен, т.е. он нечто говорит о действительности, не являясь выражением простой языковой конвенции.

Нельзя сказать, чтобы Рамсей совершенно не соглашался с Витгенштейном в понимании математических выражений. Математические псевдопропозиции действительно отличаются от эмпирических. Как бы не трактовались в этом случае логические и математические операции, для Рамсея «ясно, однако, одно: математика не состоит из подлинных предложений или утверждений о фактах, которые могут быть основаны на индуктивной очевидности..., но является в некотором смысле необходимой или тавтологичной» [4. С. 24]. Уже касаясь приведённого выше примера, связанного со шляпами, в некотором смысле можно утверждать, что использование математических уравнений затрагивает только то, что с их помощью из одних выражений получают другие выражения. Только, возможно, эти выражения имеют несколько иное значение, отличное от сугубо логических операций, преобразующих одно выражение в другое. Посредством логических операций, скажем, таких как отрицание, можно, например, осуществить следующий вывод: «“У меня есть две шляпы”, следовательно, “Неверно, что у меня нет двух шляп”». В этом случае вывод сводится к установлению того, что истинностные значения посылок совпадают с истинностными значениями заключения. Так, в общем, и считает Витгенштейн, утверждающий, что предложения с одинаковыми истинностными значениями являются одной построенной с помощью разных логических операций пропозицией, т.е. выражения разные, но то, что выражается, является одним и тем же. Эквивалентные преобразования предложений с помощью логических операций оправдываются тем, что в *ЛФТ* называется тавтологиями. Так, вывод «“У меня есть две шляпы”, следовательно, “Неверно, что у меня нет двух шляп”» оправдывает тавтология $p \supset \supset \sim \sim p$. Как пишет Витгенштейн: «Если, например, два предложения “ p ” и

“ q ”, связанные как “ $p \supset q$ ”, дают тавтологию, то ясно, что q следует из p » [2. 6.1221]. Особенностью тавтологий является то, что они для любых распределений истинностных значений принимают значение «истина». Тавтологии вместе с противоречиями, т.е. пропозициями, принимающими значение «ложь» при любых распределениях истинностных значений у их компонент (ясно, что отрицание тавтологии даёт противоречие, и наоборот), образуют то, что Витгенштейн называет предложениями логики. Особенностью логических предложений является то, что они ничего не говорят о действительности, «их истинность узнаётся из символа самого по себе» [2. 6.113]. Логические предложения характеризуют свойства знаковой системы, организуя предложения, которые нечто говорят о действительности и которые считаются подлинными предложениями. В отличие от последних, имеющих смысл именно потому, что они являются образами действительности, «в логике каждое предложение является формой доказательства» [2. 6.1264], т.е. формой связи одних осмысленных предложений с другими. Логика как наука есть теория, представляющая логические предложения в систематическом виде. Логическая теория в этом смысле является не более чем реестром форм доказательств, облегчающая распознавание тавтологий там, где они усложнены [2. 6. 1262].

В качестве тавтологий, т.е. псевдопредложений, характеризующих свойства знаковой системы, можно попытаться истолковать и псевдопредложения математики. Если бы мы понимали математические уравнения по такому же типу, как тавтологии, то следовало бы математические операции уподобить логическим. Тогда вывод, использующий математические выражения, вполне соответствовал бы выводу, использующему логические операции. В этом случае и логические, и математические операции рассматриваются как способ построения разных форм описания одного и того же. С этим трудно не согласиться, поскольку аналогия вполне уместна. Выражения формы ‘ $2 + 2 = 4$ ’ должны трактоваться как тавтологии, тогда «‘ $2 + 2 = 4$ ’ само является не подлинной пропозицией, в пользу которой требуется опытная очевидность, но тавтологией, которую как тавтологию может видеть, кто способен полностью схватить её значение» [4. С. 24]. Эти выражения были бы не просто уравнениями в смысле Витгенштейна, т.е. выражениями, на основании которых мы просто подставляем одни знаки вместо других, но выражениями, характеризующими те свойства знаковой системы, которые позволяют приводить в систематическую связь подлинные предложения, нечто говорящие о действительности. Точно так же, как и в случае с предложениями логики, выражения математики можно было бы представить в виде упорядоченной системы. Тогда математика представляла бы собой реестр форм доказательств, использующих специфические математические тавтологии. Функция математики как теории уподоблялась бы функции логики как теории, т.к. математика становится способом распознавания математических тавтологий, поскольку «когда в математике мы продвигаемся дальше, пропозиции становятся столь усложнёнными, что мы непосредственно не можем видеть, что они являются тавтологиями, и должны убедиться в этом, выводя их из более очевидных тавтологий. Исходные пропозиции, на которые мы в конечном

счёте выпадаем, должны быть такими, что для них не нужно требовать никакой очевидности, поскольку они являются явными тавтологиями» [4. С. 24].

Вместе с тем совершенно очевидно, что математические тавтологии чем-то должны отличаться от логических тавтологий. Как считает Рамсей, «тавтологии, из которых состоит математика, вероятно, могут в свою очередь относиться к тавтологиям не витгенштейнианского типа, но какого-то другого» [4. С. 24]. Но в любом случае их использование должно облегчать вывод, демонстрируя, что определённая связь одного выражения с другим, являясь тавтологией в таком смысле, позволяет получить первое выражение из другого. Связь предложений, как и в случае с логическими тавтологиями, показывала бы то, что связь предложений обеспечивается соотношением их истинностных значений. Рамсей утверждает: «Возможно, что есть другие виды формул, которые могут использоваться, чтобы облегчить вывод; например, те, которые мы могли бы назвать тождествами типа ' $a = b$ ', обозначающими, что ' a ' и ' b ' могут быть подставлены вместо друг друга в любую пропозицию без её изменения. Я имею в виду, не без изменения её истинности или ложности, но без изменения того, чем является пропозиция. В этом смысле ' $2 + 2 = 4$ ' вполне может быть тождеством, поскольку ' $У$ меня есть $2 + 2$ шляпы' и ' $У$ меня есть 4 шляпы' являются одной и той же пропозицией, так как они согласуются и не согласуются с одним и тем же множеством предельных истинностных возможностей» [4. С. 24–25].

Пока мы оставляем в стороне детальное рассмотрение вопроса о том, как это можно было бы реализовать и как это действительно реализует Рамсей. Остановимся только на том, что понимание математических уравнений как тавтологий, во всяком случае, позволяет объяснить проблему того, как трактовать приведённое выше высказывание «Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб», не сводя его к реализации простой языковой конвенции, а рассматривая как утверждение, нечто проясняющее в рамках символической системы, связанное со структурой логического вывода, отражающего взаимосвязь истинностных значений пропозиций. Если математические псевдопропозиции уподобить предложениям логики, тогда в пропозиции " $(\exists m, n) . \hat{x}(\phi x) \in m . \hat{x}(\psi x) \in n . m^2 = n^3 + 2$ " выражение ' $m^2 = n^3 + 2$ ' следовало бы считать тавтологией для тех значений m и n , которые её выполняют, и противоречием для всех других. Если мы это принимаем, то начинают работать простые логические соответствия. Допустим, что ' $m^2 = n^3 + 2$ ' тавтология, тогда функция " $\hat{x}(\phi x) \in m . \hat{x}(\psi x) \in n . m^2 = n^3 + 2$ " для таких значений m и n становится просто высказыванием " $(\exists m, n) . \hat{x}(\phi x) \in m . \hat{x}(\psi x) \in n$ ", поскольку присоединение тавтологии оставляет истинностное значение пропозиции, построенной из данной функции, неизменным (т.к. присоединение тавтологии к любой пропозиции оставляет истинностное значение этой пропозиции неизменным), и, стало быть, выражение ' $m^2 = n^3 + 2$ ' – излишне. Если же ' $m^2 = n^3 + 2$ ' – противоречие, тогда " $(\exists m, n) . \hat{x}(\phi x) \in m . \hat{x}(\psi x) \in n . m^2 = n^3 + 2$ " было бы самопротиворечивой пропозицией, поскольку любая конъюнкция, компонентом которой является противоречие, сама является противоречием. Таким образом,

содержательно высказывание «Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб» выражалось бы просто как « $(\exists m, n) . \hat{x}(\phi x) \in m . \hat{x}(\psi x) \in n$ », а добавление ' $m^2 = n^3 + 2$ ' просто уточняло бы условия истинностной оценки данного высказывания либо не изменяя его истинностного значения, либо делая его противоречивым при соответствующих значениях m и n . Таким образом, выражение ' $m^2 = n^3 + 2$ ' характеризовало бы просто свойства логической системы, проявляя себя в качестве тавтологии в одном случае и в качестве противоречия – в другом. Как считает Рамсей, подобная трактовка математических тождеств избегает проблем, связанных с интерпретацией их как уравнений, принятых в *ЛФТ*, поскольку «затруднение, которое казалось фатальным для теории тождества, вообще избегается теорией тавтологий» [4. С. 30], если математическая псевдопропозиция трактуется как тавтология или противоречие, относящаяся только к возможности соответствующей истинностной оценки пропозиции, в которую она входит как компонент¹.

Таким образом, трактовка математических псевдопропозиций как тавтологий вполне возможна и даже, в некотором смысле, необходима, если нужно избежать крайностей их трактовки как просто языковых конвенций, предлагаемых Витгенштейном. И задача, которую ставит перед собой Рамсей, заключается в том, чтобы «решить, состоит ли математика из тавтологий (в точном смысле, определённом Витгенштейном) или формул некоторого другого сорта» [4. С. 25]. И хотя Рамсей считает, что вся математика состоит из тавтологий, для доказательства этого необходим детальный анализ, который позволил бы оправдать такие новые тавтологии именно как тавтологии. В приведённом примере анализа высказывания «Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб» математическая тавтология, входящая в него как компонент, трактовалась с точки зрения классов. Но должна ли она истолковываться именно так? Трактовка m и n как классов равночисленных классов возвращает к критике, которой подверглась *РМ* со стороны Витгенштейна. И здесь, если требуется сохранить классы, следует многое изменить не только в трактовке тавтологий, но и в трактовке самих классов.

Витгенштейн перевёл понимание знака '=' на уровень языковой конвенции, но реализация такого подхода полностью невозможна, поскольку не все утверждения математики можно трактовать с позиций такой конвенции. Трактовка математических утверждений Рамсеем как тавтологий заставляет вновь вернуться к классам. Такой подход потребовал от Рамсея значительной модификации некоторых понятий из *РМ*, в частности, понятия функции, определяющей класс, которую он заменяет понятием экстенциональной функции (function in extension), но это уже тема следующей статьи.

¹ Тавтологии и противоречия в качестве средства интерпретации тождества для улучшения способов перевода записи, использующей знак '=', в способ записи, не использующий таковой, Рамсей использует уже в черновиках к *ОМ*, представленных в составе его архивного наследия [8. С. 155–169], пытаясь реализовать конвенцию Витгенштейна [1]. Но только в *ОМ* сами выражения с тождеством начинают трактоваться как тавтологии и противоречия.

Литература

1. Суровцев В.А. Л. Витгенштейн и Ф.П. Рамсей о тождестве // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2009. № 4(8). С. 89–103.
2. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: Канон+, РООИ Реабилитация, 2008.
3. Уайтхед А.Н., Рассел Б. Основания математики: В 3 т. Самара: Самарский университет, 2005–2006.
4. Рамсей Ф.П. Основания математики // Рамсей Ф.П. Философские работы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. С. 15–64.
5. Фреге Г. Основоположения арифметики // Фреге Г. Логико-философские труды. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. С. 125–238.
6. Marion M. Wittgenstein and Ramsey on Identity // From Dedekind to Gödel. Essays on Development of the Foundation of Mathematics. N.Y.: Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 344–371.
7. Суровцев В.А. Автономия логики: источники, генезис и система философии раннего Витгенштейна. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.
8. Ramsey F.P. Notes on Philosophy, Probability and Mathematics. Napoli: Bibliopolis, 1991.