В предложенном алгоритме не используется никакой информации о распознаваемом потоке, кроме времен наступления событий. При усовершенствовании процедуры принятия решений этот алгоритм позволит распознавать МС-потоки с различным числом состояний; оценивать их интенсивности и длительности нахождения потока в каждом интервале стационарности, что при большем числе событий, нежели в приведенном примере, поможет оценить интенсивности перехода из одного состояния в другое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терпугов А.Ф.* Математическая статистика. Томск: Изд-во ТГУ, 1974.
2. *Катаева С.С.* Об одном подходе к распознаванию МС-потока событий // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: Материалы международной конференции «Математические методы исследования телекоммуникационных сетей». Минск, 1997. С. 43.
3 *Беккерман Е.Н., Катаева С.С.* Эвристический способ обнаружения информационного признака МС-потока и его исследование // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: Материалы международной конференции «Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания». Минск, 1998. С. 5–9.
4. *Шеннон К.* Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.

Статья представлена кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 19 февраля 2000 г.

УДК 519.8

Е.В. Глухова, А.С. Шкуркин

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ В ОДНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ВЫТЕСНЕНИЕМ ЗАЯВОК

Находится преобразование Лапласа от плотности вероятностей длительности периода занятости в однолинейной СМО с вытеснением заявок, а также математическое ожидание и дисперсия длительности периода занятости. Строятся оценки интенсивности входящего потока заявок и среднего времени обслуживания по наблюдениям над моментами начала периодов занятости.

Постановка задачи

Однолинейные СМО с вытеснением заявок встречаются при описании так называемого продлевающегося мертвого времени [1]. Математическая модель таких систем СМО выглядит следующим образом. Имеется однолинейная СМО, на которую поступает рекуррентный поток заявок с плотностью вероятностей для интервалов времени τ между заявками вида $p_\tau(\tau)=\lambda p_1(\lambda\tau)$, где $p_1(z)$ – функция, обладающая свойствами:

а) $p_1(z)\ge 0$,

б) $\int\limits_0^\infty p_1(z)dz=1$, $\int\limits_0^\infty z p_1(z)dz=1$. (1)

Тогда λ имеет смысл интенсивности потока заявок.

Если каждая заявка обслуживается независимо от остальных, то время её обслуживания t имеет плотность вероятностей вида $p_\tau(t)=\frac{1}{\theta_0}p_0\left(\frac{t}{\theta_0}\right)$, где функция $p_0(z)$ имеет те же свойства, что и функция $p_1(z)$. В этом случае параметр θ_0 – среднее время обслуживания заявки. Термин «вытеснение заявок» означает следующее: если в период обслуживания какой-то заявки придет следующая заявка, то она вытесняет с обслуживающего прибора находящуюся там заявку и сама занимает её место. Вытесненная заявка теряется и на обслуживание не возвращается. Обозначим через ξ длительность периода занятости в такой системе и через η – интервал времени, проходящий между началами периодов занятости. Нас будет интересовать распределение вероятностей этих величин. В частном случае пуассоновского входящего потока эта задача решена в [1].

Распределение вероятностей величин ξ и η

Найти плотности вероятностей величин ξ и η затруднительно, а преобразование Лапласа от них вычислить можно. Пусть $p_\xi(\xi)$ и $p_\eta(\eta)$ – плотности вероятностей ξ и η, а

$$\begin{aligned} g_\xi(s)&=\int\limits_0^\infty e^{-s\xi}p_\xi(\xi)d\xi=M\left\{e^{-s\xi}\right\},\\ g_\eta(s)&=\int\limits_0^\infty e^{-s\eta}p_\eta(\eta)d\eta=M\left\{e^{-s\eta}\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

– их преобразования Лапласа. Найдём выражение для $g_\eta(s)$. Пусть в пустую СМО поступила заявка, требующая для своего обслуживания времени t. Тогда возможны два варианта.

1. За время обслуживания этой заявки не поступит никакой другой заявки, т.е. наступит событие $t>\tau$. В этом случае $\eta=\tau$, так как через время t период занятости окончится и следующий период начнётся в момент τ.

2. За время обслуживания этой заявки в систему поступит новая заявка, т.е. наступит событие $\tau<t$. В этом случае $\eta=\tau+\eta'$, где η' – интервал времени до начала нового периода занятости, отсчитываемый от поступления этой новой заявки. η и η' имеют одно и то же распределение вероятностей, так как новая заявка вытесняет старую. Получившаяся ситуация ничем не отличается от исходной и имеет место соотношение:

$$g_\eta(s)=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\theta_0}p\left(\frac{t}{\theta_0}\right)dt\int\limits_t^\infty e^{-s\tau}\lambda p_1(\lambda\tau)d\tau+$$
$$+M\left\{e^{-s\eta'}\right\}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\theta_0}p\left(\frac{t}{\theta_0}\right)dt\int\limits_0^t e^{-s\tau}\lambda p_1(\lambda\tau)d\tau.$$

Но, по сказанному выше, $M\left\{e^{-s\eta'}\right\}=g_\eta(s)$ и

$$g_\eta(s)=\frac{\int\limits_0^\infty p\left(\frac{t}{\theta_0}\right)\frac{dt}{\theta_0}\int\limits_t^\infty\lambda p_1(\lambda\tau)e^{-s\tau}d\tau}{1-\int\limits_0^\infty p\left(\frac{t}{\theta_0}\right)\frac{dt}{\theta_0}\int\limits_0^t\lambda p_1(\lambda\tau)e^{-s\tau}d\tau}, \tag{3}$$

что и даёт явное выражение для $g_\eta(s)$.

Аналогичные рассуждения для величины ξ отличаются от приведенных выше только в одном пункте: в случае 1 $\xi = t$, а не τ, как для величины η. Поэтому

$$g_\xi(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} p\left(\frac{t}{\theta_0}\right) dt \int_t^\infty e^{-s\tau} \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau + M\left\{e^{-s\xi'}\right\} \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} p\left(\frac{t}{\theta_0}\right) dt \int_0^t e^{-s\tau} \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau$$

и так как $M\left\{e^{-s\xi'}\right\}$ снова равно $g_\xi(s)$, то

$$g_\xi(s) = \frac{\int_0^\infty p\left(\frac{t}{\theta_0}\right) e^{-st} \frac{dt}{\theta_0} \int_t^\infty \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau}{1 - \int_0^\infty p\left(\frac{t}{\theta_0}\right) \frac{dt}{\theta_0} \int_0^t \lambda p_1(\lambda\tau) e^{-s\tau} d\tau}, \quad (4)$$

что и даёт явное выражение для $g_\xi(s)$.

Начальные моменты величины η

Вычислим в явном виде величины $\overline{C}_k = M\left\{\eta^k\right\}$ для $k = 1$ и 2. Они выражаются через производные от $g_\eta(s)$ следующим образом [2]: $\overline{C}_k = (-1)^k g_\eta^{(k)}(0)$. Обозначим

$$I_k(a) = \int_0^\infty \frac{1}{a} p_0\left(\frac{x}{a}\right) dx \int_t^\infty z^k p_1(z) dz, \quad (5)$$

$$J_k(a) = \int_0^\infty \frac{1}{a} p_0\left(\frac{t}{a}\right) dt \int_0^t z^k p_1(z) dz,$$

где $a = \lambda\theta_0$. Отметим, что

$$I_k(a) + J_k(a) = \int_0^\infty z^k p_1(z) dz = m_k. \quad (6)$$

В частности,
$$\begin{aligned} I_0(a) + J_0(a) &= m_0 = 1, \\ I_1(a) + J_1(a) &= m_1 = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

по свойствам функции $p_1(z)$.

Пусть
$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} p\left(\frac{t}{\theta_0}\right) dt \int_t^\infty e^{-s\tau} \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau, \\ F_2(s) &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} p\left(\frac{t}{\theta_0}\right) dt \int_0^t e^{-s\tau} \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, что

$$F_1^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} p_0\left(\frac{t}{\theta_0}\right) dt \int_t^\infty e^{-s\tau} \tau^k \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau,$$

$$F_2^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} p_0\left(\frac{t}{\theta_0}\right) dt \int_0^t e^{-s\tau} \tau^k \lambda p_1(\lambda\tau) d\tau$$

и, после замен переменных $\lambda\tau = z$, $\lambda t = x$,

$$F_1^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{\lambda^k} I_k(a); \; F_2^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{\lambda^k} J_k(a). \quad (9)$$

Так как
$$g_\eta(s) = \frac{F_1(s)}{1 - F_2(s)}, \quad (10)$$

то
$$g'_\eta(s) = \frac{F_1'(s)\left[1 - F_2(s)\right] + F_1(s) F_2'(s)}{\left[1 - F_2(s)\right]^2}, \quad (11)$$

$$g''_\eta(s) = \frac{1}{\left[1 - F_2(s)\right]^3} \left[(1 - F_2(s))\left(F_1''(s)\left[1 - F_2(s)\right] + \right.\right.$$
$$\left. + F_1(s) F_2''(s)\right) +$$
$$\left. + 2\left(F_1'(s)\left[1 - F_2(s)\right] + F_1(s) F_2'(s)\right) F_2'(s)\right]. \quad (12)$$

Подставляя $s = 0$, получим

$$\overline{C}_1 = -g'_\eta(0) = \frac{1}{\lambda} \frac{I_1(a)\left[1 - J_0(a)\right] + I_0(a) J_1(a)}{\left[1 - J_0(a)\right]^2}, \quad (13)$$

$$\overline{C}_2 = g''_\eta(0) = \frac{1}{\lambda^2 \left[1 - J_0(a)\right]^3} \left[(1 - J_0(a))\left(I_2(a)\left[1 - J_0(a)\right] + \right.\right.$$
$$\left. + I_0(a) J_2(a)\right) +$$
$$\left. + 2 J_1(a)\left(I_1(a)\left[1 - J_0(a)\right] + I_0(a) J_1(a)\right)\right]. \quad (14)$$

Упростим эти выражения. Так как $1 - J_0(a) = I_0(a)$,

$$\begin{aligned} \overline{C}_1 &= \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(a)\left[I_1(a) + J_1(a)\right]}{I_0^2(a)} = \frac{1}{\lambda I_0(a)}, \\ \overline{C}_2 &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{I_0(a) m_2 + 2 J_1(a)}{I_0^2(a)}, \end{aligned} \quad (15)$$

что и дает явное выражение для первых двух начальных моментов величины η.

Введём функцию

$$F(a) = \frac{\overline{C}_2}{\overline{C}_1^2} = I_0(a) m_2 + 2 J_1(a), \quad (16)$$

которая будет нужна нам для построения оценок параметров λ и θ_0 по выборке величин η_i.

Представляя $I_k(a)$ и $J_k(a)$ в виде

$$\begin{aligned} I_k(a) &= \int_0^\infty z^k p_1(z) dz \int_0^z \frac{1}{a} p_0\left(\frac{x}{a}\right) dx, \\ J_k(a) &= \int_0^\infty z^k p_1(z) dz \int_z^\infty \frac{1}{a} p_0\left(\frac{x}{a}\right) dx, \end{aligned} \quad (17)$$

легко получить, что

$$\begin{aligned} &\lim_{a \to +0} I_k(a) = m_k, \lim_{a \to 0} J_k(a) = 0, \\ &\lim_{a \to +\infty} I_k(a) = 0, \lim_{a \to \infty} J_k(a) = m_k, \end{aligned} \quad (18)$$

поэтому
$$F(0) = m_2, \; \lim_{a \to +\infty} F(a) = 2. \quad (19)$$

Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда

$$p_0(x) = e^{-x}, \; p_1(z) = \frac{m^m z^{m-1}}{(m-1)!} e^{-zm}, \quad (20)$$

что соответствует эрланговскому потоку порядка m на входе СМО и длительности обслуживания, распределённой по экспоненциальному закону. Тогда

$$m_2 = \int_0^\infty z^2 p_1(z) dz = \frac{m+1}{m},$$

$$I_0(a) = \int_0^\infty \frac{m^m z^{m-1}}{(m-1)!} e^{-mz} dz \int_0^z \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} dx = 1 - \left(\frac{am}{am+1}\right)^m,$$

$$J_1(a) = \int_0^\infty \frac{m^m z^{m-1}}{(m-1)!} e^{-mz} dz \int_z^\infty \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} dx = \left(\frac{am}{am+1}\right)^{m+1},$$

так что в этом случае

$$F(a) = \frac{m+1}{m} \left[1 - \left(\frac{am}{am+1}\right)^m\right] + 2\left(\frac{am}{am+1}\right)^{m+1}. \quad (21)$$

В частности,

$$F(0) = \frac{m+1}{m}; \; \lim_{a \to \infty} F(a) = 2. \quad (22)$$

Обозначая $\frac{am}{1+am}$ через z, получим

$$F(z)=\frac{m+1}{m}(1-z^m)+2z^{m+1}.$$

Условие $F'(z)=0$ дает корень $z=0{,}5$, откуда следует, что экстремум (в данном случае – минимум) функции $F(a)$ достигается при $a=1/m$; это минимальное значение $F(1/m)$ равно

$$F\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{m+1}{m}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)+\frac{2}{2^{m+1}}=\frac{1}{m}\left(m+1-\frac{1}{2^m}\right). \quad (23)$$

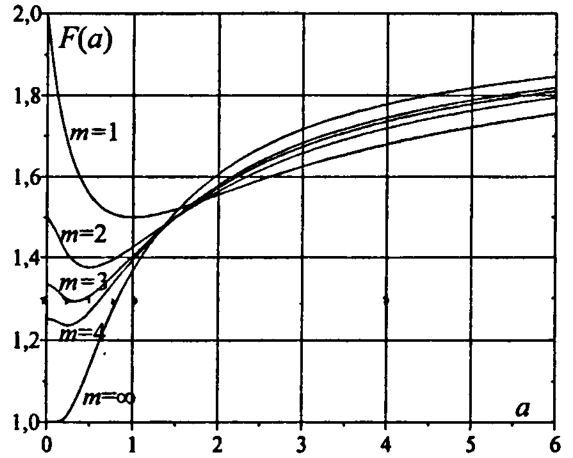

Рис. 1

Графики функции $F(a)$ для $m=\overline{1,4}$ приведены на рис. 1. Заметим еще, что при $m\to\infty$, что соответствует детерминированному потоку заявок,

$$\lim_{m\to\infty}F(a)=1+e^{-\frac{1}{a}}.$$

График $F(a)$ для $m=\infty$ также приведен на рис. 1.

Оценки параметров λ и θ_0

Полученные выше результаты дают возможность построить оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}_0$ параметров λ и θ_0 по наблюдениям над началами периодов занятости. Пусть мы имеем выборку $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N$ интервалов времени между началами периодов занятости. Тогда мы можем построить C_1 и C_2 величин $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ по стандартным формулам:

$$C_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i,\ C_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2. \quad (24)$$

Оценку $\hat{a}$ параметра a найдем из условия

$$(C_2/C_1^2)=F(\hat{a}). \quad (25)$$

Решение этого уравнения неоднозначно. Как видно из предыдущего частного случая, в области

$$\frac{m+1}{m}-\frac{1}{m2^m}\le\frac{C_2}{C_1^2}\le\frac{m+1}{m}$$

это уравнение имеет два корня, и какой корень соответствует реальности, надо решать из каких-то дополнительных соображений. В области $\frac{m+1}{m}<\frac{C_2}{C_1^2}<2$ это уравнение имеет один корень, а в областях $\frac{C_2}{C_1^2}<\frac{m+1}{m}-\frac{1}{m2^m}$ и $\frac{C_2}{C_1^2}>2$ является «запрещенным», в них уравнение (25) не имеет решения.

Зная оценку $\hat{a}$ параметра a, можно, используя соотношение (15), найти и оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}_0$ исходных параметров λ и θ_0:

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{C_1I_0(\hat{a})},\ \hat{\theta}_0=\frac{\hat{a}}{\hat{\lambda}}.$$

Можно получить и явные выражения для дисперсий оценок $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}_0$ и их ковариации, но получающиеся формулы очень громоздки и здесь не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E.V. Glukhova, A.F. Terpougov.* Estimation of the intensity of Poisson point processes with presence of a «dead time» // Information theory, statistical decision functions, random processes. Praga, 1994. P. 80–81.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.2

Ф.Ф. Идрисов, Т.А. Сазанова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАТИСТИК ОТ МОМЕНТОВ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЙ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Доказывается сходимость почти наверное и асимптотическая нормальность некоторых статистик от моментов наступления событий рекуррентного потока, наблюдаемого на фиксированном отрезке времени, интенсивность которого неограниченно увеличивается.

Постановка задачи

С рекуррентными потоками приходится сталкиваться при изучении многих физических и технических систем – при изучении потоков частиц, потоков сигналов в сетях связи и радиолокационных системах, при анализе систем массового обслуживания и т.д.

Одной из проблем, возникающих при экспериментальном изучении этих потоков, является оценка их параметров. Обычно наблюдение за таким пото-