Обозначая $\frac{am}{1+am}$ через z, получим

$$F(z)=\frac{m+1}{m}(1-z^m)+2z^{m+1}.$$

Условие $F'(z)=0$ дает корень $z=0{,}5$, откуда следует, что экстремум (в данном случае – минимум) функции $F(a)$ достигается при $a=1/m$; это минимальное значение $F(1/m)$ равно

$$F\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{m+1}{m}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)+\frac{2}{2^{m+1}}=\frac{1}{m}\left(m+1-\frac{1}{2^m}\right).\quad(23)$$

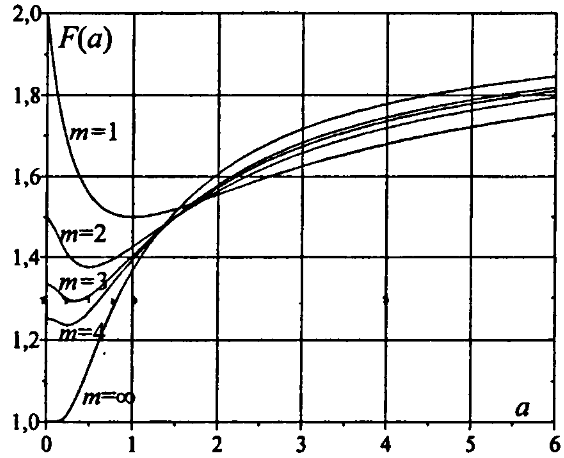

Рис. 1

Графики функции $F(a)$ для $m=\overline{1,4}$ приведены на рис. 1. Заметим еще, что при $m\to\infty$, что соответствует детерминированному потоку заявок,

$$\lim_{m\to\infty}F(a)=1+e^{-\frac{1}{a}}.$$

График $F(a)$ для $m=\infty$ также приведен на рис. 1.

Оценки параметров λ и θ_0

Полученные выше результаты дают возможность построить оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}_0$ параметров λ и θ_0 по наблюдениям над началами периодов занятости. Пусть мы имеем выборку $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N$ интервалов времени между началами периодов занятости. Тогда мы можем построить C_1 и C_2 величин $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ по стандартным формулам:

$$C_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i,\ C_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2.\quad(24)$$

Оценку $\hat{a}$ параметра a найдем из условия

$$(C_2/C_1^2)=F(\hat{a}).\quad(25)$$

Решение этого уравнения неоднозначно. Как видно из предыдущего частного случая, в области

$$\frac{m+1}{m}-\frac{1}{m2^m}\le\frac{C_2}{C_1^2}\le\frac{m+1}{m}$$

это уравнение имеет два корня, и какой корень соответствует реальности, надо решать из каких-то дополнительных соображений. В области $\frac{m+1}{m}<\frac{C_2}{C_1^2}<2$ это уравнение имеет один корень, а в областях $\frac{C_2}{C_1^2}<$ $<\frac{m+1}{m}-\frac{1}{m2^m}$ и $\frac{C_2}{C_1^2}>2$ является «запрещенным», в них уравнение (25) не имеет решения.

Зная оценку $\hat{a}$ параметра a, можно, используя соотношение (15), найти и оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}_0$ исходных параметров λ и θ_0:

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{C_1I_0(\hat{a})},\ \hat{\theta}_0=\frac{\hat{a}}{\hat{\lambda}}.$$

Можно получить и явные выражения для дисперсий оценок $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}_0$ и их ковариации, но получающиеся формулы очень громоздки и здесь не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E.V. Glukhova, A.F. Terpougov*. Estimation of the intensity of Poisson point processes with presence of a «dead time» // Information theory, statistical decision functions, random processes. Praga, 1994. P. 80–81.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.2

Ф.Ф. Идрисов, Т.А. Сазанова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАТИСТИК ОТ МОМЕНТОВ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЙ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Доказывается сходимость почти наверное и асимптотическая нормальность некоторых статистик от моментов наступления событий рекуррентного потока, наблюдаемого на фиксированном отрезке времени, интенсивность которого неограниченно увеличивается.

Постановка задачи

С рекуррентными потоками приходится сталкиваться при изучении многих физических и технических систем – при изучении потоков частиц, потоков сигналов в сетях связи и радиолокационных системах, при анализе систем массового обслуживания и т.д.

Одной из проблем, возникающих при экспериментальном изучении этих потоков, является оценка их параметров. Обычно наблюдение за таким потоком производится на некотором интервале времени $[0,T]$, и результаты измерений – это моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \ldots, t_N$. При построении оценок эти данные превращаются в статистики вида $S = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)$, где $f(\cdot)$ – некоторая функция.

При исследовании получающихся оценок неизбежно встаёт вопрос об их асимптотических свойствах – сходимости по распределению, сходимости почти наверное и т.д. Он напрямую зависит от соответствующих свойств статистик указанного выше типа. Однако надо отметить, что применение известных теорем теории вероятностей здесь не проходит по следующим причинам:

1) так как число событий N, наступивших на интервале $[0,T]$, случайно, то и число слагаемых в исследуемых статистиках также случайно;

2) Если зафиксировать N, то величины t_i становятся зависимыми.

Всё это приводит к необходимости отдельного исследования асимптотических свойств указанных выше статистик.

Описание рекуррентного потока и техники вычисления средних

Пусть начало отсчета времени приходится на момент t_0 и $t_1, t_2, \ldots, t_N$ – моменты измерений. Пусть $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,N}$, – интервалы времени между i-м и $(i-1)$-м измерениями. Поток моментов измерений $\{t_i\}$ называется рекуррентным потоком, если величины τ_i, $i = \overline{2,N}$ являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с плотностью вероятностей $p(\tau)$, так что $p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = p_1(\tau_1)\prod_{i=2}^{N} p(\tau_i)$.

Особую роль здесь играет величина $\tau_1 = t_1 - t_0$, так как в ней от t_1 отнимается не момент предыдущего измерения, а момент начала отсчета времени t_0, поэтому плотность вероятностей $p_1(\tau_1)$ величины τ_1 отлична от плотностей вероятностей других τ_1. Пусть $\bar\tau = M\{\tau\} = \int_0^\infty \tau p(\tau)d\tau$ и $\lambda = 1/\bar\tau$ – интенсивность рекуррентного потока моментов измерений. Тогда по общей теории [1, 2] $p_1(\tau) = \lambda\left[1 - \int_0^\tau p(u)du\right]$. Покажем для часто встречающихся статистик, как вычисляются математические ожидания при рекуррентном потоке моментов измерений.

В дальнейшем большую роль будет играть функция $\pi(\tau)$, определяемая следующим образом: пусть $p^{(k)}(\tau)$ есть k-кратная свертка функций $p(\tau)$, т.е. $p^{(k)}(\tau) = p(\tau) * p(\tau) * \ldots * p(\tau)$ (k раз). Определим $\pi(\tau)$ так:

$$\pi(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(\tau). \qquad (1)$$

Опишем путь аналитического нахождения $\pi(\tau)$ по известной функции $p(\tau)$. Обозначим через $p^*(s)$ преобразование Лапласа от функции $p(\tau)$: $p^*(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} p(\tau)d\tau$. Тогда, по своим свойствам [3], преобразование Лапласа от функции $p^{(k)}(\tau)$ есть $\left(p^*(s)\right)^k$. Значит, преобразование Лапласа $\pi^*(s)$ от функции $\pi(\tau)$:

$$\pi^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p^*(s)^k = \frac{p^*(s)}{1 - p^*(s)}. \qquad (2)$$

Пользуясь свойствами и таблицами обратного преобразования Лапласа [3, 4], можно найти и $\pi(\tau)$ в явном виде. Отметим еще, что $p^*(0) = 1$ и $p^{*\prime}(0) = -\bar\tau$, и тогда [3]: $\lim_{\tau\to\infty} \pi(\tau) = \lim_{s\to 0} s\pi^*(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sp^*(s)}{1 - p^*(s)} = \frac{1}{\bar\tau} = \lambda$, где неопределенность раскрыта по правилу Лопиталя. Вычислим еще функцию $\pi_1(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} p_1(\tau) * p^{(k-1)}(\tau)$.

Учитывая свойства преобразования Лапласа и вид функции $p_1(\tau)$, получаем, что преобразование Лапласа $p_1^*(s)$ от функции $p_1(\tau)$ есть $p_1^*(s) = \lambda\left[\frac{1}{s} - \frac{p^*(s)}{s}\right]$. Таким образом, преобразование Лапласа $\pi_1^*(s)$ от функции $\pi_1(\tau)$ есть $\pi_1^*(s) = \frac{\lambda(1 - p^*(s))}{s} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[p^*(s)\right]^{k-1} = \frac{\lambda}{s}$, откуда следует, что $\pi_1(\tau) = \lambda$.

Перейдем теперь к вычислению математических ожиданий от наиболее часто встречающихся статистик. Начнем со статистики $S_1 = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)$ и вычислим ее математическое ожидание, считая, что измерения производятся на интервале времени $[0, T]$, так что $t_0=0$ и все $t_i \in [0, T]$.

Чтобы избавиться от необходимости учитывать только те значения t_k, которые принадлежат отрезку $[0, T]$, введем функцию $\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x \ge 0, \\ 0 \text{ если } x < 0 \end{cases}$ и представим статистику S_1 в виде $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\theta(T - t_k)$, где функция $\theta(\cdot)$ автоматически оставит в выражении для S_1 только те слагаемые, для которых $t_k \in [0, T]$. Тогда

$$M\{S_1\} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_k)\theta(T - t_k)p_k(t_k)dt_k. \qquad (3)$$

Обозначим переменную t_k через t без индекса:

$$M\{S_1\} = \int_0^T f(t)\theta(T - t)\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)dt =$$

$$= \int_0^T f(t)\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_1(t) * p^{(k-1)}(t)\right)dt = \int_0^T f(t)\pi_1(t)dt = \lambda\int_0^T f(t)dt.$$

Итак,
$$M\left\{\sum_{i=1}^{N} f(t_i)\right\} = \lambda\int_0^T f(u)du, \qquad (4)$$

откуда видно, что это математическое ожидание совпадает с $M\{S_1\}$ для стационарного пуассоновского потока моментов измерений [7].

Рассмотрим математическое ожидание статистик вида
$$S_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_i, t_j). \quad (5)$$
Для этого вычислим сначала математическое ожидание статистики вида $S_2' = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} f(t_i, t_j)$. Чтобы избавиться от пределов суммирования до N, представим S_2' в виде $S_2' = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} f(t_i, t_j)\cdot\theta(T-t_i)\theta(T-t_j)$. Заметим, что $t_i = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_i$, $t_j = t_i + \tau_{i+1} + \tau_{i+2} + ... + \tau_j$. Обозначим комбинацию $\tau_{i+1} + \tau_{i+2} + ... + \tau_j$ через $\Delta t_{i,j-i}$. Тогда, в силу независимости значений τ_i, величина $\Delta t_{i,j-i}$ не зависит от t_i.

Обозначая $j-i$ через k, представим S_2' в виде $S_2' = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f(t_i, t_i + \Delta t_{i,k})\theta(T-t_i)\theta(T-t_i-\Delta t_{i,k})$ и тогда, после усреднения, получим
$$M\{S_2'\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t_i, t_i + \Delta t_{i,k})p(t_i, \Delta t_{i,k})\times$$
$$\times\theta(T-t_i)\theta(T-t_i-\Delta t_{i,k})dt_i\cdot d\Delta t_{i,k}.$$
В силу сказанного выше
$$p(t_i, \Delta t_{i,k}) = p_{1i}(t_i)p_k(\Delta t_{i,k}),$$
$$p_{1i}(u) = p_1(u) * p^{(i-1)}(u), \quad p_k(w) = p^{(k)}(w),$$
так что
$$M\{S_2'\} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(u, u+w)\theta(T-u)\theta(T-u-w)\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_1(u) * p^{(i-1)}(u)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(w)\right)dudw.$$
Вспоминая выражения для $\pi_1(\cdot)$ и $\pi(\cdot)$, получим
$$M\{S_2'\} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(u, u+w)\theta(T-u)\theta(T-u-w)\lambda\pi(w)dudw =$$
$$= \lambda\int_0^{T} du\int_0^{T-u} f(u, u+w)\pi(w)dw = \lambda\int_0^{T} du\int_u^{T} f(u, v)\pi(v-u)dv.$$
Отсюда для статистики
$$S_2'' = \sum_{i\neq j} f(t_i, t_j) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} f(t_i, t_j) + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=j+1}^{N} f(t_i, t_j),$$
$$M\{S_2''\} = \lambda\int_0^{T} du\int_u^{T}\left[f(u, v) + f(v, u)\right]\pi(v-u)dv$$
или, после некоторых преобразований,
$$M\{S_2''\} = \lambda\int_0^{T} du\int_0^{T} f(u, v)\pi(|u-v|)dv. \quad (6)$$
Так как $S_2 = S_2'' + \sum_{i=1}^{N} f(t_i, t_i)$, то окончательно
$$M\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_i, t_j)\right\} = \lambda\int_0^{T}\int_0^{T} f(u, v)\pi(|u-v|)dudv +$$
$$+ \lambda\int_0^{T} f(u, u)du. \quad (7)$$

Формула (7) позволяет вычислить дисперсию статистики $S_1 = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)$. В этом случае
$$M\{S_1^2\} = M\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_i)f(t_j)\right\} =$$
$$= \lambda\int_0^{T} f^2(u)du + \lambda\int_0^{T}\int_0^{T} f(u)f(v)\pi(|u-v|)dudv,$$
так что
$$D\{S_1\} = M\{S_1^2\} - M\{S_1\}^2 =$$
$$= \lambda\int_0^{T}\int_0^{T} f(u)f(v)\cdot\left[\pi(|u-v|)-\lambda\right]dudv + \lambda\int_0^{T} f^2(u)du.$$

Аналогичным образом можно получать математические ожидания и более сложных статистик, надо лишь разбивать область изменения всех аргументов на упорядоченные подобласти. Например,
$$M\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_i, t_j, t_k)\right\} = \lambda\int_0^{T} f(u, u, u)du +$$
$$+ \lambda\int_0^{T}\int_0^{T}\pi(|u-v|)\left[f(u, u, v) + f(u, v, u) +\right.$$
$$\left.+ f(v, u, u)\right]dudv +$$
$$+ \lambda\int_0^{T}\int_0^{T}\int_0^{T} f(u, v, w)\cdot\pi_3(u, v, w)dudvdw,$$
где $\pi_3(u, v, w)$ проще всего определить так. Пусть $u_{(1)} = \min(u, v, w)$, $u_{(3)} = \max(u, v, w)$, $u_{(2)}$ – второе по рангу значение переменных u, v, w. Другими словами, значения переменных интегрирования ранжированы по возрастанию, так что $u_{(1)} < u_{(2)} < u_{(3)}$, как это делается в порядковых статистиках. Тогда $\pi_3(u, v, w) = \pi_3(u_{(3)} - u_{(2)})\cdot\pi(u_{(2)} - u_{(1)})$. Можно расписать это подробно, но тогда будет 8 различных областей и запись станет очень громоздкой.

Асимптотическое поведение статистик

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение статистик типа $\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N} f(t_i)$ при $\lambda\to\infty$. Но что понимать под термином «асимптотическое поведение»? Как правило, под этим понимают свойства статистик, когда объём выборки неограниченно возрастает. В нашем случае, для рекуррентного потока моментов измерений, объём выборки N – случайная величина с $M\{N\}=\lambda T$, и тогда асимптотическое поведение получается при $\lambda T\to+\infty$. Но это может быть достигнуто двумя путями: либо $T\to+\infty$, либо $\lambda\to+\infty$. Асимптотика при $T\to\infty$ сложна и неудобна для изучения, так как при этом расширяется область задания функции $f(t)$, $0\le t\le T$ и приходится накладывать какие-то достаточно сильные ограничения на поведение функции $f(t)$ при $t\to\infty$. Поэтому в данной работе будем фиксировать T и изучать асимптотическое поведение статистик при $\lambda\to+\infty$.

Но как представить себе эту асимптотику? Возникающую ситуацию можно представить себе по аналогии со схемой серий в центральной предельной проблеме теории вероятности [8, 9].

Например, мы имеем последовательность значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ такую, что $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Тогда можно представить себе, что на интервале $[0,T]$ производятся серии измерений, причем в первой серии интенсивность потока измерений есть λ_1, во второй – λ_2, в третьей – λ_3 и так далее, и в n-й серии, где интенсивность потока измерений равна λ_n, значение статистики S равно $S_n = \frac{1}{\lambda_n T}\sum_{i=1}^{N_n} f\left(t_i^{(n)}\right)$, где N_n – объём выборки в n-й серии и $\{ t_i^{(n)} \}$ – моменты измерений в n-й серии. Под термином «асимптотическое поведение» будут пониматься асимптотические свойства статистик S_n при $n\to\infty$.

Для такого рассмотрения необходимо иметь асимптотическое поведение плотности вероятностей $p(\tau)$ при изменении λ. Мы рассмотрим ситуацию, когда $p(\tau)$ может быть записана в виде $p(\tau) = \lambda \cdot p_0(\lambda\tau)$, где $p_0(\tau)$ обладает следующими свойствами:

а) $p_0(\tau) \ge 0$ при $\tau>0$ и $p_0(\tau) \equiv 0$ при $\tau<0$;

б) $\int\limits_0^\infty p_0(\tau)d\tau = 1$; в) $\int\limits_0^\infty \tau p_0(\tau)d\tau = 1 \dots$.

В этом случае $M\{\tau\} = 1/\lambda$ и при увеличении λ $p(\tau)$ как бы «сжимается», не меняя своей формы. Введем обозначение $m_k = \int\limits_0^\infty \tau^k p_0(\tau)d\tau$.

Особую роль в дальнейшем будет играть величина m_2, которую мы представим в виде $m_2 = 1 + c^2$. Величина c^2 имеет смысл дисперсии случайной величины с плотностью вероятностей $p_0(\tau)$. Заметим, что для пуассоновского потока $c=1$.

Пусть $p_0^*(s)$ есть преобразование Лапласа от функции $p_0(\tau)$, т.е. $p_0^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-s\tau} p_0(\tau)d\tau$. Тогда $p^*(s)$ – преобразование Лапласа от $p(\tau)$ – имеет вид $p^*(s) = p_0^*(s/\lambda)$. Используя связь начальных моментов m_k с производными от $p_0^*(s)$ [3, 4], можно записать

$$p_0^*(s) = 1 - s + \frac{m_2}{2!}s^2 - \frac{m_3}{3!}s^3 + \frac{m_4}{4!}s^4 \mp \dots .$$

Тогда для $\pi^*(s)$:

$$\pi^*(s) = \frac{p^*(s)}{1-p^*(s)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{s}{\lambda} + \frac{m_2}{2!}\frac{s^2}{\lambda^2} - \frac{m_3}{3!}\frac{s^3}{\lambda^3} + \frac{m_4}{4!}\frac{s^4}{\lambda^4} \mp \dots}{\frac{s}{\lambda} - \frac{m_2}{2!}\frac{s^2}{\lambda^2} + \frac{m_3}{3!}\frac{s^3}{\lambda^3} - \frac{m_4}{4!}\frac{s^4}{\lambda^4} \pm}.$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора по степеням s/λ, получим (разложение проведено с помощью MathCAD v. 6.0 PLUS):

$$\pi^*(s) = \frac{\lambda}{s} + \left(\frac{m_2}{2} - 1\right) + a_1\frac{s}{\lambda} + a_2\frac{s^2}{\lambda^2} + \dots, \qquad (8)$$

где $$a_1 = \frac{m_2}{2} - \frac{m_3}{6} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_2}{2}\right)m_2,$$

$$a_2 = -\frac{m_3}{6} + \frac{m_4}{24} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{m_2}{2}\right)m_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_3}{6} - \frac{m_2^2}{4}\right)m_2, \qquad (9)$$

поэтому для $\pi(u)$ получается разложение

$$\pi(u) = \lambda + \frac{1}{2}\left(c^2 - 1\right)\delta(u) + \frac{a_1}{\lambda}\delta'(u) + \frac{a_2}{\lambda^2}\delta''(u)\dots . \qquad (10)$$

Однако при этом следует иметь в виду, что здесь $\delta(u)$ и ее производные – это немного «не те» функции, которые обычно употребляются, когда речь идет об обобщенных функциях[5, 6]. Так как в операционном исчислении все функции определены лишь для положительных значений аргумента, то и появившаяся в (10) δ-функция и ее производные «работают» по правилу

$$\int\limits_0^\infty f(u)\delta(u)du = f(0), \int\limits_0^\infty f(u)\delta^{(k)}(u)du = (-1)^k f^{(k)}(0).$$

Кроме того, в формулах для математических ожиданий функция $\pi(\cdot)$ имеет аргумент $|u-v|$, что приводит к некоторым особенностям. Рассмотрим их.

Запишем $\int\limits_{-\infty}^\infty f(v)\delta(|u-v|)dv$. Представим это так:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(v)\delta(|u-v|)dv = \int\limits_{-\infty}^u f(v)\delta(u-v)dv + \int\limits_u^\infty f(v)\delta(v-u)dv.$$

После замены переменных $u - v = x$ в первом интеграле и $v - u = x$ во втором, получим

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(v)\delta(|u-v|)dv = \int\limits_0^\infty f(u-x)\delta(x)dx +$$
$$+ \int\limits_0^\infty f(u+x)\delta(x)dx = 2f(u).$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(v)\delta'(|u-v|)dv = \int\limits_0^\infty f(u-x)\delta'(x)dx +$$
$$+ \int\limits_0^\infty f(u+x)\delta'(x)dx = \left[f'(u-x) - f'(u+x)\right]_{|x=0} = 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(v)\delta''(|u-v|)dv =$$
$$= \left[f''(u-x) + f''(u+x)\right]_{|x=0} = 2f''(u).$$

Перейдем теперь к рассмотрению асимптотик от статистик вида $S_1 = \frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^N f(t_i)$. Имеем

$$M\{S_1\} = \frac{1}{\lambda T}\lambda\int\limits_0^T f(u)du = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(u)du = f_1,$$

$$M\{S_1^2\} = \frac{1}{(\lambda T)^2}\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^T f(u)f(v)\pi(|u-v|)dudv +$$
$$+ \frac{\lambda}{(\lambda T)^2}\int\limits_0^T f^2(u)du.$$

Но, согласно написанному выше,

$$\lambda\int_0^T\int_0^T f(u)f(v)\pi(|u-v|)dudv = \lambda^2\left(\int_0^T f(u)du\right)^2 +$$
$$+\lambda\frac{1}{2}(c^2-1)\int_0^T\int_0^T f(u)f(v)\delta(|u-v|)dudv +$$
$$+a_1\int_0^T\int_0^T f(u)f(v)\delta'(|u-v|)dudv +$$
$$+\frac{a_2}{\lambda}\int_0^T\int_0^T f(u)f(v)\delta''(|u-v|)dudv + \dots .$$

Принимая во внимание (6) и (7), получаем

$$M\{S_1^2\} = \frac{1}{(\lambda T)^2}\int_0^T f^2(u)du + \frac{1}{T^2}\left(\int_0^T f(u)du\right)^2 +$$
$$+\frac{\lambda}{(\lambda T)^2}(c^2-1)\int_0^T f^2(u)du +$$
$$+\frac{2a_2}{\lambda(\lambda T)^2}\int_0^T f(u)f''(u)du + \dots =$$
$$= f_1^2 + \frac{c^2}{\lambda T}f_2 + \frac{2a_2}{\lambda(\lambda T)^2}\int_0^T f(u)f''(u)du + \dots .$$

С точностью до членов порядка $1/(\lambda T)^3$

$$D\{S_1\} = \frac{c^2}{\lambda T}f_2, \qquad (11)$$

откуда следует, что при $\lambda\to\infty$ статистика S_l сходится в среднеквадратичном к величине f_1. Аналогично можно получить, что

$$M\{S_1^3\} = f_1^3 + \frac{3c^2}{\lambda T}f_2 f_1 + \frac{1+3(c^2-1)+(c^2-1)^2}{(\lambda T)^2}f_3,$$
$$M\{S_1^4\} = f_1^4 + \frac{6c^2}{\lambda T}f_2 f_1^2 + \frac{1}{(\lambda T)^2}[4f_2 f_1 + 3f_2^2 + 3(c^2-1)f_2^2 +$$
$$+4(c^2-1)^2 f_2 f_1 + 12(c^2-1)f_2 f_1],$$

поэтому

$$M\{(S_1-f_1)^4\} = \frac{3c^2}{(\lambda T)^2}f_2^2 + O\left(\frac{1}{(\lambda T)^3}\right). \qquad (12)$$

Для доказательства сходимости почти наверное воспользуемся теоремой из [10], гласящей, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} M\{|\xi_n - \xi|^\mu\}$ с некоторым $\mu>0$ следует сходимость ξ_n к ξ почти наверное при $n\to\infty$ для произвольных случайных величин ξ_n. Так как $M\{(S_1-f_1)^4\}$ убывает как $\frac{1}{\lambda^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ является сходящимся, то можно утверждать, что при $\lambda\to\infty$ $S_1\to f_1$ почти наверное, по крайней мере, для последовательности $\lambda_n = n\lambda_0$.

Асимптотическая нормальность статистик

Покажем теперь асимптотическую нормальность статистики $\sqrt{\lambda T}(S_1 - f_1)$. Для этого рассмотрим статистику

$$S_t = \sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{\{i:t_i>t\}} f(t_i) - \int_t^T f(u)du\right), \qquad (13)$$

только в качестве моментов времени t возьмем не произвольные моменты времени, а лишь моменты наступления событий потока.

Пусть $g(\omega,t) = M\{e^{i\omega S_t}\}$ и t соответствует моменту наступления события. Пусть следующее событие наступило в момент времени $t+\tau$. Плотность вероятностей величины τ есть $p(\tau) = \lambda p_0(\lambda\tau)$, и соотношение между функциями S_t и $S_{t+\tau}$ имеет вид

$$S_t = S_{t+\tau} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}f(t+\tau) - \sqrt{\lambda}f(t)\tau. \qquad (14)$$

Для характеристической функции $g(\omega,t)$ получается соотношение

$$g(\omega,t) = \int_0^\infty \lambda p_0(\lambda\tau)g(\omega,t+\tau)\times$$
$$\times\exp\left(i\omega\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f(t+\tau) - \sqrt{\lambda}f(t)\tau\right)\right)d\tau.$$

После замены $\lambda\tau=z$ это соотношение примет вид

$$g(\omega,t) = \int_0^\infty p_0(z)\cdot g\left(\omega,t+\frac{z}{\lambda}\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\omega\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f\left(t+\frac{z}{\lambda}\right) - f(t)\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)dz. \qquad (15)$$

При $\lambda\to+\infty$ имеют место следующие разложения в ряд Тейлора:

$$g\left(\omega,t+\frac{z}{\lambda}\right) = g(\omega,t) + \frac{\partial g(\omega,t)}{\partial t}\cdot\frac{z}{\lambda} + \dots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f\left(t+\frac{z}{\lambda}\right) - f(t)\frac{z}{\sqrt{\lambda}} = f(t)\frac{1-z}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Экспонента, стоящая под знаком интеграла в (15):

$$\exp\left(i\omega\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f\left(t+\frac{z}{\lambda}\right) - f(t)\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) =$$
$$= 1 + i\omega f(t)\frac{1-z}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\omega^2}{2}f^2(t)\frac{(1-z)^2}{\lambda} + \dots$$

Подставляя все эти разложения в (15), получим

$$g(\omega,t) = g(\omega,t) + i\omega f(t)g(\omega,t)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty(1-z)p_0(z)dz +$$
$$+\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial g(\omega,t)}{\partial t}\int_0^\infty zp_0(z)dz -\right.$$
$$\left.- g(\omega,t)\frac{\omega^2}{2}f^2(t)\int_0^\infty(1-z)^2p_0(z)dz\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Но $\qquad \int_0^\infty zp_0(z)dz = 1, \quad \int_0^\infty(1-z)^2p_0(z)dz = c^2.$

Сокращая $g(\omega,t)$, умножая оставшееся выражение на λ и делая предельный переход $\lambda\to\infty$, получим для $g(\omega,t)$ уравнение $\frac{\partial g(\omega,t)}{\partial t} = g(\omega,t)\frac{\omega^2}{2}f^2(t)c^2$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\ln g(\omega,t) = C + \frac{\omega^2c^2}{2}\int_0^t f^2(t)dt.$$

Очевидно, что $S_T\equiv0$, и поэтому $g(\omega,T)\equiv1$. Отсюда находится константа C:

$$C=-\frac{\omega^2c^2}{2}\int_0^T f^2(u)du \text{ и окончательно } \ln g(\omega,t)=$$

$$=-\frac{\omega^2c^2}{2}\int_t^T f^2(u)du, g(\omega,t)=\exp\left(-\frac{\omega^2c^2}{2}\int_t^T f^2(u)du\right).$$

В частности, $g(\omega,0)=\exp\left(-\frac{\omega^2c^2}{2}\int_0^T f^2(u)du\right)$, т.е. статистика S_0 асимптотически нормальная.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.А.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966. 431 с.
2. *Кокс Дж. Р., Смит В.* Теория восстановления. М.: Сов. радио, 1967. 299 с.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
7. *Марголис Н.Ю.* Оценка интенсивности флуктуирующего пуассоновского потока методом полиномиальной аппроксимации // Управляемые системы массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та,1984. Вып. 3. С. 73–91.
8. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962. 719 с.
9. *Хеннекен П.А., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974. 472 с.
10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.872: 681.03

Д.Ю. Кузнецов, А.А. Назаров

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ С АДАПТИВНЫМИ ПРОТОКОЛАМИ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТАНЦИЙ

Рассматривается спутниковая сеть связи с большим числом абонентских станций (АС), распределенных на значительной территории. Так как спутниковый канал имеет ограниченную пропускную способность и используется одновременно всеми АС, такую сеть можно смоделировать, используя протоколы случайного множественного доступа (СМД). Из [1, 2] известно, что сети связи с протоколом СМД функционируют достаточно нестабильно. В сетях с конечным числом АС в них может возникать явление бистабильности [2], а в сетях с бесконечным числом АС в них отсутствует стационарный режим, то есть пропускная способность таких сетей равна нулю, а средняя задержка пакета растет неограниченно по мере продолжительности работы системы. Проблему стабилизации таких систем можно решить использованием адаптивных протоколов доступа, в которых адаптация реализуется автоматом с целесообразным поведением [3], названным здесь адаптером.

Попробуем описать функционирование рассматриваемой здесь сети следующим образом: спутник-ретранслятор может находиться в одном из трех состояний: либо он ждет прихода сообщения от АС, либо занят его передачей, либо, если он получил сообщение от одной АС в момент обслуживания сообщения от другой, он находится в режиме оповещения о конфликте. Те АС, сообщения которых не были успешно переданы, будут пытаться передавать свои сообщения снова, пока не получат уведомление об их успешной передаче.

Математическую модель такой сети можно построить в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший с параметром λ поток требований, и с обслуживающим прибором, который может находиться в одном из трех состояний: k=0, если он свободен; k=1, когда он занят обслуживанием заявки; k=2, когда на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если за это время другие требования не поступали, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на интервале оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов, из которого вновь обращаются к прибору с попыткой повторного обслуживания. Повторное обращение происходит после случайной задержки, имеющей экспоненциальное распределение с параметром σ. Число заявок в ИПВ обозначим i.

Время обслуживания заявок рекуррентное с функцией распределения $B(s)$. Длины интервалов оповещения о конфликте имеют функцию распределения $A(s)$.

Для стабилизации неустойчивых сетей интенсивность σ повторного обращения будет возрастать непрерывно при любом состоянии канала и убывать дискретно в момент окончания в канале сигнала оповещения о конфликте. Для такого изменения σ, положив $\sigma=1/T$, конструкцию адаптера выберем так, чтобы его состояние $T(t)$ с течением времени t менялось следующим образом: в любой момент времени $T(t+\Delta t)=T(t)+\alpha\Delta t$ за исключением момента окончания распространения сигнала оповещения о конфликте, когда $T(t+\Delta t)=T(t)-\beta$. Здесь α и β – параметры адаптера, которые будут определены ниже. Если при убывании $T(t)$ достигает заданного значения $T_0>0$, то состояние адаптера остается равным этому значению до момента его увеличения на β. Можно предложить и другие конструкции адаптеров.

Состояние рассматриваемой системы определим вектором (k, i, T). Введем переменную $z(t)$, имеющую смысл длины интервала времени, который остался до момента смены текущего состояния прибора. Процесс $\{k(t), i(t), z(t), T(t)\}$ – марковский. Проведем исследование этого процесса.