

**Условие  
существования стационарного режима.  
Немарковская модель**

Пусть функции  $B(t)$  и  $A(t)$  неэкспоненциальны. В этом случае для нахождения условий существования стационарного режима воспользуемся следствием 2 предельной теоремы для цепи Маркова [6, §45]. Формулировка этого следствия для немарковской модели сети связи будет выглядеть следующим образом.

Чтобы неприводимая неперiodическая цепь Маркова имела стационарное распределение, достаточно существования  $\varepsilon > 0$ , натурального числа  $i_0$  и набора неотрицательных чисел  $x_k(i), k = \overline{0,2}, i \geq 0$ , таких, что выполняются условия:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{j \geq 0} P_{i_1, k_1, i_2, k_2} x_{k_2}(i_2) \leq x_{k_1}(i_1), i_1 > i_0, \\ 2) \sum_{j \geq 0} P_{i_1, k_1, i_2, k_2} x_{k_2}(i_2) < +\infty, i_1 < i_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для применения этого следствия построим вложенную цепь Маркова по моментам, непосредственно следующим за моментом  $t_n$ , т.е. за моментом изменения состояния  $k(t)$ . Запишем вероятности переходов из состояния в состояние за один шаг:

$$P_{i_1, k_1, i_2, k_2} = P\{i(t_n) = i_2, k(t_n) = k_2 / i(t_{n-1}) = i_1, k(t_{n-1}) = k_1\},$$

$$P_{i_1, 0, 0, 0} = \beta_{00} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dB(x), P_{i_1, 0, i_1, 1} = \beta_{11} = 1 - \beta_{00}. \quad (6)$$

Все остальные вероятности переходов равны нулю.

Запишем первую систему неравенств из (5) с учетом (6):  $x_0(i) - \varepsilon \geq \delta x_1(i) + (1 - \delta)x_1(i - 1)$ ,

$$x_1(i) - \varepsilon \geq \beta_0 x_0(i) + \beta_2 x_2(i + 1) + \beta_1 x_2(i + 2),$$

$$x_2(i) - \varepsilon \geq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x_0(i + j). \quad (7)$$

Будем искать решение системы в виде:

$$x_k(i) = B_k + Ai, \quad (8)$$

где положительные  $B_k$  и  $A$  не зависят от  $i$ .

$$\text{Заметим, что } \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha_j = \lambda a_1, \quad (9)$$

где  $a_1$  – средняя длительность интервала оповещения о конфликте.

Перепишем систему (7) с учетом (8) и (9):

$$B_0 - B_1 - \varepsilon \geq -(1 - \delta)A,$$

$$B_1 - \beta_0 B_0 - (1 - \beta_0)B_2 - \varepsilon \geq (\beta_2 + 2\beta_1)A,$$

$$B_2 - B_0 - \varepsilon \geq \lambda a_1 A. \quad (10)$$

Умножим первое и второе неравенства системы (10) на  $1/(2 + \beta_1 + \beta_2)$ , а третье – на  $(\beta_1 + \beta_2)/(2 + \beta_1 + \beta_2)$  и просуммируем. Слагаемые с  $B_k$  сокращаются, и мы получаем неравенство

$$A \left\{ \frac{-(1 - \delta) + \beta_2 + 2\beta_1 + \lambda a_1(\beta_1 + \beta_2)}{2 + \beta_1 + \beta_2} \right\} \leq -\varepsilon. \quad (11)$$

$$\text{Если } \frac{-(1 - \delta) + \beta_2 + 2\beta_1 + \lambda a_1(\beta_1 + \beta_2)}{2 + \beta_1 + \beta_2} < 0, \quad (12)$$

то существует такое положительное  $A$ , что неравенство (11) выполняется. Подставим в (12) выражения для  $\delta, \beta_1, \beta_2$  из (6), обозначим  $\rho = \lambda b, b$  – среднее время обслуживания,  $a_1 = bT_1, \gamma = \sigma b, \rho + \gamma = G$  и получим условие:

$$\rho < \frac{\beta_0 G}{1 + (1 - \beta_0)(1 + T_1 G)}, \quad (13)$$

где  $\rho$  имеет смысл загрузки системы. Если выполняется условие (13), то система неравенств (10) линейно зависима, поэтому имеет решение с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выберем так, чтобы  $B_k > 0$ . Тогда  $x_k(i) = B_k + Ai > 0$  и для них выполняется система неравенств (7). Следовательно, при выполнении условия (13) в системе существует стационарный режим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флинт Д. Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986.
2. Бертсекас Д., Галагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
3. Назаров А.А., Юревич Н.М. Исследование явления бистабильности в сети с протоколом АЛОХА для конечного числа станций // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 91–100.
4. Фалин Г.И. О неустойчивости сети АЛОХА // Проблемы передачи информации. 1990. № 1. С. 79–82.
5. Назаров А.А., Шохор С.Л. Сравнение асимптотической и допредельной моделей сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа // Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Изд-во «Пеленг». 1998. С. 233–242.
6. Климов Стохастические системы массового обслуживания.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 26 мая 2000 г.

УДК 519.872: 681.03

Ю.Д. Одышев

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ДОСТАВКИ СООБЩЕНИЯ  
В СЕТИ СВЯЗИ С ПРОТОКОЛОМ «СИНХРОННАЯ АДАПТИВНАЯ АЛОХА»  
ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТАНЦИЙ**

Рассмотрен класс адаптивных протоколов случайного множественного доступа, стабилизирующих неустойчивые сети связи, управляемые протоколом Алоха, в которых адаптация реализуется автоматом с целесообразным поведением (адаптером). Найдено асимптотическое распределение вероятностей времени доставки сообщения.

Протокол случайного множественного доступа «синхронная Алоха» является одной из модификаций известного протокола «Алоха», предназначенного для передачи сообщений через спутниковую сеть связи [1]. Он, как и многие протоколы данного класса, не отличается стабильным функционированием [2]. В [3] показано отсутствие стационарно-

го режима для протокола «синхронная Алоха» с бесконечным числом абонентских станций (АС), а в [4] рассмотрено явление бистабильности для того же протокола в случае конечного числа станций.

Для стабилизации таких систем используются адаптивные [5] протоколы доступа. Одним из них является алгоритм Ривеста [6], который совпадает с алгоритмом Михайлова [7], разработанным для протокола случайного множественного доступа «синхронная Алоха» с поступающим на вход системы простейшим потоком с параметром  $\lambda$ . Принцип работы этого алгоритма состоит в том, что вероятность повторной передачи пакета из источника повторных вызовов (ИПВ) меняется с изменением величины оценки числа пакетов в ИПВ, которая явным образом зависит от величины  $\lambda$ . Одним из достоинств режима случайного доступа является быстрый доступ к передающей среде и малое время доставки сообщения при ограниченных нагрузках. Недостаток этого режима состоит в том, что при больших нагрузках время доставки сообщения становится большим и меняется непредсказуемо. В этом случае использование обычно широко применяемой теоремы Литтла, позволяющей найти лишь среднее время доставки сообщения, представляется малоэффективным.

В данной работе рассмотрена неустойчивая сеть связи с конечным числом узлов и протоколом случайного множественного доступа «синхронная Алоха». Для ее стабилизации применяется адаптивная модификация протокола доступа, в которой адаптация реализуется автоматом с целесообразным поведением [8], названным здесь адаптером. Найдено асимптотическое распределение вероятностей времени доставки сообщения при  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  – количество АС.

## Математическая модель сети связи

Сеть связи с протоколом случайного множественного доступа «синхронная Алоха» моделируется однолинейной системой массового обслуживания (СМО). Пусть число АС конечно и равно  $N$  и каждая из  $N$  станций может осуществлять передачу сообщения только в начале временного интервала единичной длины с вероятностью  $\lambda/N$ . Сообщение, передаваемое АС (назовем его приходящим из внешнего источника), ожидает начала очередного такта и с вероятностью единица становится на обслуживание в течение этого интервала. Если на этом такте на приборе не было других требований, то исходная заявка считается успешно обслуженной и покидает систему. Если в одном такте на приборе находилось более одного сообщения, то фиксируется конфликтная ситуация (все заявки искажаются), и в момент окончания такта все искаженные сообщения переходят в ИПВ. В начале такта каждая заявка из ИПВ обращается к прибору с вероятностью  $q$  независимо от других требований с попыткой повторного обслуживания.

Для стабилизации неустойчивых сетей вероятность  $q$  повторного обращения положим равной  $q=1/T$ , где  $T$  – текущее состояние адаптера. Опишем его функционирование. Если в такте было пустое окно или успешное обслуживание, тогда значение  $T$  уменьшается на величину  $\alpha$ , но не может стать меньше единицы. Если обслуживание было конфликтным, то значение  $T$  увеличивается на  $\beta$ . Состояние адаптера меняется в конце текущего такта. Положительные величины  $\alpha$  и  $\beta$  являются параметрами адаптера.

Состояние системы определим вектором  $(i, T)$ , где  $i$  – число заявок в ИПВ, а  $T$  – состояние адаптера. Рассмотрим момент  $t(k)$ , непосредственно следующий за моментом окончания такта с номером  $k-1$  и предшествующий моменту начала такта с номером  $k$ . Обозначим  $(i(k), T(k))$  состояние системы в момент времени  $t(k)$ . Двумерный случайный процесс  $(i(k), T(k))$  с дискретным временем  $k$  является двумерной однородной марковской цепью.

Назовем временем пребывания заявки в системе длину  $W$  интервала от момента ее поступления в систему до момента окончания ее успешного обслуживания и ухода из системы. Величина  $W$  будет моделировать время доставки сообщения в сети связи с протоколом «синхронная адаптивная Алоха». Найдём стационарное распределение величины  $W$ .

## Распределение времени пребывания заявки в системе

В момент  $k$  выделим некоторую заявку в ИПВ и определим  $W(k)$  как длину интервала от момента  $k$  до момента ухода из системы выделенной заявки. Для исследования рассматриваемой сети обозначим

$$F(i, T, L) = P(W(k) > L / i(k) = i, T(k) = T), \\ P'(i, T) = P(i(k) = i, T(k) = T), \quad \delta = \alpha + \beta.$$

Очевидно, что для времени  $W$  пребывания заявки в системе имеет место равенство

$$P(W \leq L) = \\ = P^* + (1 - P^*) \left[ 1 - \sum_{i=0}^N \sum_{T \in \Omega} F(i, T, L) P(i, T) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $L \geq 0$ ,  $\Omega$  – множество состояний адаптера,  $P(i, T)$  – стационарное распределение состояния  $(i, T)$  системы, которое застает заявку, поступающая в момент времени  $k$ , а  $P^*$  – вероятность успешной передачи сообщения с первого раза.

Можно показать, что распределение  $F(i, T, L)$  удовлетворяет уравнению

$$F(i, T + \alpha, L + 1) = \\ = \sum_{n=0}^{N-i} C_{N-i}^n \left( \frac{\lambda}{N} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i-n} F(i+n, T + \delta, L) - \\ - (N-i) \frac{\lambda}{N} \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i-1} \left( 1 - \frac{1}{T+\alpha} \right)^i F(i+1, T + \delta, L) - \\ - \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i} \left( 1 - \frac{1}{T+\alpha} \right)^{i-1} \left( 1 + \frac{i-1}{T+\alpha} \right) F(i, T + \delta, L) + \\ + (N-i) \frac{\lambda}{N} \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i-1} \left( 1 - \frac{1}{T+\alpha} \right)^i F(i, T, L) + \\ + \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i} \left( 1 - \frac{1}{T+\alpha} \right)^i F(i, T, L) + \\ + \frac{i-1}{T+\alpha} \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-1} \left( 1 - \frac{1}{T+\alpha} \right)^{i-1} F(i-1, T, L) \quad (2)$$

и начальному по  $L$  условию  $F(i, T, 0) = 1$ . В стационарном режиме  $P(i, T)$  удовлетворяет уравнению

$$P(i, T + \beta) = \sum_{n=0}^i C_{N-i+n}^n \left( \frac{\lambda}{N} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i} P(i-n, T) - \\ - (N-i+1) \frac{\lambda}{N} \left( 1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-i} \left( 1 - \frac{1}{T} \right)^{i-1} P(i-1, T) -$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-i} \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{i-1} \left(1 + \frac{i-1}{T}\right) P(i, T) + \\
& + (N-i) \frac{\lambda}{N} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-i-1} \left(1 - \frac{1}{T+\delta}\right)^i P(i, T+\delta) + \\
& + \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-i} \left(1 - \frac{1}{T+\delta}\right)^i P(i, T+\delta) + \\
& + \frac{i+1}{T+\delta} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-i-1} \left(1 - \frac{1}{T+\delta}\right)^i P(i+1, T+\delta). \quad (3)
\end{aligned}$$

Распределение  $P(i, T)$  должно удовлетворять крайним условиям при  $i=0$  и  $i=N$ , а также условию нормировки. Дальнейшие исследования будем проводить при  $\lambda > 1/e$ , т.е. в условиях перегрузки.

Решим системы (2) и (3) асимптотическим методом [9] при  $N \rightarrow \infty$ . Для этого, обозначив  $\varepsilon^2 = 1/N$ , сделаем замену переменных:

$$i\varepsilon^2 = a + \varepsilon u, \quad T\varepsilon^2 = b + \varepsilon v, \quad L\varepsilon^2 = h,$$

$$F(i, T, L) = f(u, v, h, \varepsilon), \quad \frac{1}{\varepsilon^2} P(i, T) = H(u, v, \varepsilon). \quad (4)$$

Здесь  $(a, b)$  – точка стабилизации системы, определенная соотношениями

$$\lambda(1-a) + \frac{a}{b} = g, \quad e^{-g} g = \lambda(1-a), \quad (5)$$

где  $G=g$  является решением уравнения

$$\delta e^{-G} (G+1) = \beta. \quad (6)$$

• • Соотношения (5)-(6) получены в [10]. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  обозначим  $H(u, v, 0) = H(u, v)$ ;  $f(u, v, h, 0) = f(u, v, h)$ .

Так как в рассматриваемой системе заявки не теряются, то производительность сети равна интенсивности входящего потока, который является ординарным, и по теореме Королюка его интенсивность и параметр совпадают. Отсюда получаем, что в асимптотике при  $N \rightarrow \infty$  производительность  $S$  будет определяться равенством  $S = \lambda(1-a)$ . Тогда соотношение (1) при  $N \rightarrow \infty$  перепишем так:

$$\begin{aligned}
& P(w \leq h) = Se^{-g} + \\
& + (1 - Se^{-g}) \left[ 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, h) H(u, v) du dv \right], \quad (7)
\end{aligned}$$

где  $w = W\varepsilon^2$ , а  $G=g$  является решением уравнения (6). Чтобы найти асимптотическое при  $N \rightarrow \infty$  распределение вероятностей (7) значений времени доставки сообщения в исследуемой сети связи, достаточно найти асимптотические распределения  $H(u, v)$ ,  $f(u, v, h)$  и сосчитать значение интеграла в (7).

Найдем асимптотическое решение системы (2). Для этого сделаем в ней замену (4). Получим уравнение

$$\begin{aligned}
& \times (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 f(u + \varepsilon u, v + \varepsilon v, h, \varepsilon) - \\
& - \lambda(1-a-\varepsilon u) (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 \times \\
& \times \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2}\right)^{\frac{a+\varepsilon u}{\varepsilon^2}} f(u + \varepsilon, v + \varepsilon v, h, \varepsilon) - \\
& - (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2}\right)^{\frac{a+\varepsilon u - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + \frac{a + \varepsilon u - \varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2}\right) f(u, v + \varepsilon v, h, \varepsilon) + \\
& + \lambda(1-a-\varepsilon u) (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 \frac{1-a-\varepsilon u - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \times \\
& \times \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2}\right)^{\frac{a+\varepsilon u}{\varepsilon^2}} f(u, v, h, \varepsilon) + \\
& + (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2}\right)^{\frac{a+\varepsilon u}{\varepsilon^2}} f(u, v, h, \varepsilon) + \\
& + \frac{a + \varepsilon u - \varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2} (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 \frac{1-a-\varepsilon u}{\varepsilon^2} \times \\
& \times \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b + \varepsilon v + \alpha\varepsilon^2}\right)^{\frac{a+\varepsilon u - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}} f(u - \varepsilon, v, h, \varepsilon). \quad (8)
\end{aligned}$$

В (2) распределение  $F(i, T, L)$  определено на дискретном множестве точек  $(i, T, L)$ . В (8) функцию  $f(u, v, h, \varepsilon)$  доопределим для всех  $-\infty < u, v < +\infty, h \geq 0$  с достаточной степенью гладкости, сохраняя выполнение равенства (8).

Теорема 1. Распределение (7) имеет вид

$$P(w \leq h) = Se^{-g} + (1 - Se^{-g}) \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{1}{b} e^{-g} h\right\}\right], \quad (9)$$

где  $G=g$  является корнем уравнения (6).

Доказательство. Все функции в (8) разложим в ряд по приращениям аргументов в окрестности точек  $(u, v, h, \varepsilon)$  с точностью до слагаемых второго порядка  $\varepsilon$  и, обозначив

$$\begin{aligned}
& (1 - \lambda\varepsilon^2) \varepsilon^2 \frac{1-a-\varepsilon u}{\varepsilon^2} = \chi_1(u, \varepsilon), \\
& \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b + \varepsilon v}\right)^{\frac{a+\varepsilon u}{\varepsilon^2}} = \chi_2(u, v, \varepsilon), \quad (10)
\end{aligned}$$

получим равенство

$$\begin{aligned}
\varepsilon \alpha \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial h} &= \varepsilon \lambda(1-a) \frac{\partial f}{\partial u} - \varepsilon^2 \lambda u \frac{\partial f}{\partial u} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \lambda(1-a) [1 + \lambda(1-a)] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \varepsilon \delta \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \\
& + \varepsilon^2 \lambda(1-a) \delta \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \varepsilon \lambda(1-a-\varepsilon u) \chi_1 \chi_2 \frac{\partial f}{\partial u} - \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \lambda(1-a) \chi_1 \chi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \varepsilon \delta \lambda(1-a-\varepsilon u) \chi_1 \chi_2 \frac{\partial f}{\partial v} - \\
& - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \lambda(1-a) \chi_1 \chi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \varepsilon^2 \delta \lambda(1-a) \chi_1 \chi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \\
& - \varepsilon \delta \chi_1 \chi_2 \left(1 + \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{u}{b} - \varepsilon \frac{av}{b^2}\right) \frac{\partial f}{\partial v} - \\
& - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \chi_1 \chi_2 \left(1 + \frac{a}{b}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \varepsilon \chi_1 \chi_2 \left(\frac{a}{b} + \varepsilon \frac{u}{b} - \varepsilon \frac{av}{b^2}\right) \frac{\partial f}{\partial u} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \chi_1 \chi_2 \frac{a}{b} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \varepsilon^2 \frac{\chi_1 \chi_2}{b} f + o(\varepsilon^2). \\
\frac{\partial f(u, v, h)}{\partial h} &= -(a_{11} u + a_{12} v) \frac{\partial f(u, v, h)}{\partial u} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (a_{21}u + a_{22}v) \frac{\partial f(u, v, h)}{\partial v} + b_1 \frac{\partial^2 f(u, v, h)}{\partial u^2} + \\
& + b_2 \frac{\partial^2 f(u, v, h)}{\partial v^2} + b_{12} \frac{\partial^2 f(u, v, h)}{\partial u \partial v} - \\
& - \frac{e^{-s}}{b} f(u, v, h). \quad (11)
\end{aligned}$$

Здесь  $f(u, v, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(u, v, h, \varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda + e^{-s} \lambda [(1-a)k - 1] + \frac{ak + 1}{b} e^{-s}, \\
a_{12} &= \lambda \frac{a(1-a)}{b^2} e^{-s} + \frac{a(a-b)}{b^3} e^{-s}, \\
\frac{a_{21}}{\delta} &= a_{11} + \kappa e^{-s} - \lambda, \quad \frac{a_{22}}{\delta} = a_{12} + \frac{a}{b^2} e^{-s}, \\
2b_1 &= \lambda(1-a)[\lambda(1-a) + 1 - e^{-s}] + \frac{a}{b} e^{-s}, \\
2b_2 &= \alpha\beta, \quad b_{12} = (\alpha\delta/b)e^{-s},
\end{aligned}$$

где  $\kappa = \lambda - 1/b$ , а  $g$  является корнем уравнения (6). (12)

Можно показать, что  $H(u, v)$  является двумерным нормальным распределением и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial u} \{ (a_{11}u + a_{12}v) H(u, v) \} + \\
& + \frac{\partial}{\partial v} \{ (a_{21}u + a_{22}v) H(u, v) \} + b_{12} \frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u \partial v} +
\end{aligned}$$

$$+ b_1 \frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u^2} + b_2 \frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial v^2} = 0, \quad (13)$$

где все коэффициенты имеют вид (12).

Обозначим  $\Phi(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, h) H(u, v) du dv$  и

найдем функцию  $\Phi(h)$ , для чего домножим уравнение (11) на  $H(u, v)$  и проинтегрируем почленно это соотношение по  $-\infty < u, v < +\infty$ . После интегрирования по частям соответствующих слагаемых с учетом (13) получим

$$\Phi'(h) = -(1/b)e^{-s}\Phi(h). \quad (14)$$

В результате решения (14) в силу начального условия  $\Phi(0) = 1$  получаем равенство

$$\Phi(h) = \exp\left\{-\frac{1}{b}e^{-s}h\right\},$$

откуда с учетом (7) следует соотношение (9). Теорема 1 доказана.

### Заключение

В настоящей работе найдено асимптотическое при  $N \rightarrow \infty$  распределение времени доставки сообщения в сети связи с протоколом случайного множественного доступа «синхронная адаптивная Алоха». Методом, изложенным в работе, может быть найдено распределение времени доставки и для других протоколов этого класса.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Юревич Н.М. Исследование явления бистабильности в сети с протоколом Алоха для конечного числа станций // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 91–100.
2. Бертсекас Д., Галагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
3. Фалин Г.И. О неустойчивости сети Алоха // Проблемы передачи информации. 1990. № 1. С. 79–82.
4. Одышев Ю.Д. Исследование явления бистабильности в сети с протоколом «синхронная Алоха» для конечного числа станций // Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Пеленг, 1998. С. 242–247.
5. Горцев А.М., Назаров А.А., Тертугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978.
6. Rivest R.L. Network control by bayesian broadcast (Report MIT/LCS/TM-285). Cambridge, MA: MIT, Laboratory for computer science, 1985.
7. Михайлов В.А. Геометрический анализ устойчивости цепей Маркова в  $R^n$ , и его приложение к вычислению пропускной способности адаптивного алгоритма случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. 1988. № 1. С. 61–73.
8. Цетлин М.Л. Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969.
9. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.
10. Одышев Ю.Д. Исследование сети связи с протоколом «синхронная адаптивная Алоха» для конечного числа станций // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. С. 115–119.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 20 марта 2000 г.

УДК 519.872

И.С. Шмырин

## ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача об оценке параметров потока событий с переключениями. Предлагается рекуррентный алгоритм расчета оценок параметров потока событий. Реализуется имитационная модель потока, приводятся результаты численных расчетов.

Случайные потоки событий являются широко применяемой моделью для описания процессов в реальных физических, экономических, технических и других системах. Характеристики потоков событий, описывающих эти процессы, как правило, имеют случайную природу. Одной из распространенных моделей таких процессов являются МС-потоки событий – потоки, интенсивность которых является кусочно-постоянным марковским процессом с конечным числом состояний (такие потоки иначе называют потоками с переключениями [1]). Режимы функционирования реальных физических и технических систем обычно зависят от текущей интенсивности потоков событий, циркулирующих в системе; с другой стороны, параметры потоков, как правило, являются ненаблюдаемыми величинами. Вследствие этого важной является задача оценки параметров потока событий в произвольный момент времени по наблюдениям за этим потоком.