Геометрически это означает, что площади фигур Φ_1 и Φ_2 (рис. 1) равны, где $\Phi_1=\{(x, y)|\rho\le y\le\varphi(x); x\in[0, a]\}$ – часть подграфика функции $y=\varphi(x)$, лежащая выше прямой $y=\rho$, а $\Phi_2=\{(x, y)|0\le y\le\rho; x_1(\rho)\le x\le x_2(\rho)\}$ – прямоугольник, заключенный между прямыми $y=\rho$, $y=0$, $x=x_1(\rho)$, $x=x_2(\rho)$. При этом значении ρ, учитывая (6), (9), (10), получим максимальную величину ОСШ (2):

$$M_{\max} = 2\,c\,\rho\,\sqrt{x_2(\rho)-x_1(\rho)}\,. \qquad (14)$$

Заключение

В рамках принятых предположений в результате решения оптимизационной задачи (3) – (5) нами получено, что оптимальная АФ апертуры детектора радиометриче-ской системы единственна и имеет следующий вид:

$$f_{\text{opt}}(x) = \chi_{D_\rho}(x), \qquad (15)$$

т.е. является характеристической функцией множества $D_\rho = \{x\in[0,a]\,|\,\varphi(x)\ge\rho\}$, где $[0, a]=\text{supp}\ \varphi$ – носитель функции ИВ $\varphi(x)$, а параметр ρ находится из уравнения (13). При этом максимальное значение ОСШ равно (14).

Примечательной особенностью полученной АФ (15) является то, что соответствующая ей апертура детектора обладает однородной чувствительностью к излучению, однако не по всему носителю функции ИВ (как это рекомендовано в [10]), а лишь в той его части, где лучевой размер ИВ больше некоторого критического значения, определяемого через параметр ρ из уравнения (13).

Полученные результаты могут быть использованы для оценки предельных возможностей радиометрических систем контроля, разрабатываемых для обнаружения в изделиях плотных ИВ сложной конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. В 2-х книгах. Кн. 1 / Под ред. В.В. Клюева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1986. 488 с.
2. *Горбунов В.И., Покровский А.В.* Радиометрические системы радиационного контроля. М.: Атомиздат, 1979. 224 с.
3. *Горбунов В.И., Завьялкин Ф.М., Солодушкин В.И., Удод В.А.* Выбор параметров радиометрических систем с дискретным сканированием радиационного поля // Автометрия. 1987. № 4. С. 21–27.
4. *Горбунов В.И., Горбунов В.М., Завьялкин Ф.М., Квасница М.С.* Влияние усреднения измеряемой характеристики изделия в поле зрения детектора на выбор радиометрического устройства // Дефектоскопия. 1976. № 2. С. 117–127.
5. *Завьялкин Ф.М., Удод В.А.* Двухапертурное кодирование проекций // Автометрия. 1990. № 2. С. 91–93.
6. *Недавний О.И., Максименко Б.В., Осипов С.П., Удод В.А.* Многоканальные радиометрические системы контроля с полутоновой визуализацией теневых радиационных изображений. Ч.2. Расчет оптимальных параметров систем // Дефектоскопия. 1993. № 7. С. 79–85.
7. *R.M. Henkelman, B.R. Preiss.* A nonuniform detector aperture for CT-IN // J. comput. assist. tomogr. 1981. Vol. 5. № 3. P. 401–408.
8. *Рудин У.* Основы математического анализа. Пер. с англ. В.П. Хавина. М.: Мир, 1966. 320 с.
9. *Троицкий И.Н.* Статистическая теория томографии. М: Радио и связь, 1989. 240 с.
10. *Старцева Л.В.* Разработка и исследование алгоритмов обнаружения дефектов в радиационной дефектоскопии: Автореф. канд. дис. Томск, 1981.

Статья представлена кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 февраля 2000г.

УДК 519.24

Б.Е. Тривоженко

ВЫДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА ВРЕМЕННОГО РЯДА СПЛАЙНАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЕФЕКТА ДВА

Рассматривается задача выделения тренда временного ряда, когда моменты измерений его значений образуют случайный поток событий и неизвестны. Для рассматриваемого случая получены рекуррентные алгоритмы оценки коэффициентов сплайна и исследованы их статистические свойства. Получено выражение для средней интегральной погрешности выделения тренда.

Одна из задач анализа функционирования сложных технических систем – выделение тренда телеметрируемых параметров, характеризующих состояние системы в некоторые дискретные моменты времени. Определяющими факторами при решении этой задачи являются:

1) выбор математической модели, описывающей тренд наблюдаемых значений случайного процесса;

2) задание схемы наблюдений, на основе анализа которых этот тренд выделяется.

В работах по анализу временных рядов (например, [1, 2]) рассматривается случай, когда измерения значений случайного процесса производятся в моменты времени, отстоящие на одинаковую величину друг от друга. В предлагаемой работе измерение значений наблюдаемого процесса производится в некоторые случайные моменты времени, которые предполагаются неизвестными.

Пусть имеется временной ряд $y(t) = f(t) + n(t)$, являющийся суммой некоторой детерминированной функции $f(t)$, называемой трендом процесса $y(t)$, и $n(t)$ – случайной функцией, наличие которой обусловлено ошибками измерений, внешними помехами и т.д. Для выделения тренда временного ряда производятся $y(t)$ в некоторые моменты времени t_1, $t_2,\ldots$, которые являются случайными величинами и образуют простейший поток событий с параметром λ. Предполагается, что помехи измерений $n_i = n(t_i)$, $i=1$, $2,\ldots$ – независимые одинаково распределённые величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Относительно тренда предполагается, что он представляет собой сплайн второго порядка. В этом случае время наблюдения разбивается на интервалы одинаковой длины T и на k-м интервале тренд представляется в виде полинома второго порядка $f_k(t) = a_k + b_k\dfrac{t}{T} + c_k\left(\dfrac{t}{T}\right)^2$. Считается, что на каждом временном интервале отсчет времени ведётся от начала этого интервала. Эти полиномы должны быть «сшиты» на концах, т.е. конец $(k-1)$-го отрезка кривой должен быть началом k-го отрезка $f_{k-1}(T) = f_k(0)$. В отличие от случая, рассматриваемого в [3], в данной работе не требуется «сшивания» на границах интервалов разбиения первых производных. Предложенную модель тренда временного ряда будем называть сплайном второго порядка дефекта два. Для этой модели условие сшивания имеет вид

$$a_k = a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}. \qquad (1)$$

По результатам измерений значений временного ряда $y_i^{(k)}$ на k-ом интервале необходимо построить оценки коэффициентов a_k, b_k и c_k. Тогда оценка тренда временного ряда будет иметь вид $\hat{f}_k(t) = \hat{a}_k + \hat{b}_k + \hat{c}_k\left(\frac{t}{T}\right)^2$. Потребуем, чтобы эти оценки были также сплайном дефекта два, т.е. должны быть «сшиты» на концах интервалов $\hat{f}_{k-1}(T) = \hat{f}_k(0)$, что приводит к условию

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + \hat{b}_{k-1} + \hat{c}_{k-1}. \qquad (2)$$

Таким образом, $\hat{a}_k$ однозначно определяется оценками коэффициентов на предыдущем интервале, а по результатам наблюдений $y_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_k$, где N_k – число измерений на k-м интервале, которое в соответствии с принятой моделью является случайной величиной и подчиняется закону Пуассона, $p(N_k) = \frac{(\lambda T)^{N_k}}{N_k} e^{-\lambda T}$. Необходимо найти b_k и c_k.

Оценки недостающих коэффициентов b_k и c_k на k-м интервале будем находить из критерия

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N_k}\left[y_i^{(k)} - \hat{a}_k - b_k\frac{i}{N_k+1} - c_k\frac{i(i+1)}{(N_k+1)(N_k+2)}\right]^2 \Rightarrow \min_{b_k, c_k}.$$

Отсюда

$$\hat{b}_k = \frac{48(N_k+1)(3N_k^2+6N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_1^{(k)} - \frac{60(N_k+1)(N_k+2)(3N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_2^{(k)} - \frac{4(N_k+1)(3N_k+4)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{a}_k,$$

$$\hat{c}_k = -\frac{60(N_k+1)(N_k+2)(3N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_1^{(k)} + \frac{120(N_k+1)(N_k+2)(2N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_2^{(k)} + \frac{10(N_k+1)(N_k+2)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{a}_k, \qquad (3)$$

где

$$S_1^{(k)} = \frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\frac{i}{N_k+1}y_i^{(k)},$$

$$S_2^{(k)} = \frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\frac{i(i+1)}{(N_k+1)(N_k+2)}y_i^{(k)}.$$

Заменяя $\hat{a}_k$ выражением (2), получим следующую рекуррентную систему соотношений, определяющую оценки коэффициентов сплайна на k-ом интервале:

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + \hat{b}_{k-1} + \hat{c}_{k-1},$$

$$\hat{b}_k = -\frac{4(N_k+1)(3N_k+4)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{a}_{k-1} - \frac{4(N_k+1)(3N_k+4)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{b}_{k-1} - \frac{4(N_k+1)(3N_k+4)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{c}_{k-1} + \frac{48(N_k+1)(3N_k^2+6N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_1^{(k)} - \frac{60(N_k+1)(N_k+2)(3N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_2^{(k)},$$

$$\hat{c}_k = \frac{10(N_k+1)(N_k+2)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{a}_{k-1} + \frac{10(N_k+1)(N_k+2)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{b}_{k-1} + \frac{10(N_k+1)(N_k+2)}{3N_k^2+3N_k+2}\hat{c}_{k-1} - \frac{60(N_k+1)(N_k+2)(3N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_1^{(k)} + \frac{120(N_k+1)(N_k+2)(2N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}S_2^{(k)}. \qquad (4)$$

Исследуем свойства полученных оценок. Прежде всего проведём исследование этих оценок на асимптотическую несмещённость и устойчивость. Так как

$$M\{y_i^{(k)}|N_k\} = a_k + b_k\frac{i}{N_k+1} - c_k\frac{i(i+1)}{(N_k+1)(N_k+2)},$$

то

$$M\{S_1^{(k)}|N_k\} = \frac{1}{2}a_k + \frac{2N_k+1}{6(N_k+1)}b_k + \frac{3N_k+1}{12(N_k+1)}c_k,$$

$$M\{S_2^{(k)}|N_k\} = \frac{1}{3}a_k + \frac{3N_k+1}{12(N_k+1)}b_k + \frac{3N_k^2+6N_k+1}{15(N_k+1)(N_k+2)}c_k. \qquad (5)$$

Разрешая (5) относительно b_k и c_k, получим

$$b_k = \frac{48(N_k+1)(3N_k^2+6N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}M\{S_1^{(k)}|N_k\} - \left[\left(60(N_k+1)(N_k+2)(3N_k+1)\times(3N_k^2+6N_k+1)\right)M\{S_2^{(k)}|N_k\}/\left((N_k-1)\times(3N_k^2+6N_k+1)(3N_k^2+3N_k+2)\right)\right] - \frac{4(N_k+1)(3N_k+4)}{3N_k^2+3N_k+2}a_k,$$

$$c_k = \frac{60(N_k+1)(N_k+2)(3N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}M\{S_1^{(k)}|N_k\} + \frac{120(N_k+1)(N_k+2)(2N_k+1)}{(N_k-1)(3N_k^2+3N_k+2)}M\{S_2^{(k)}|N_k\} + \frac{10(N_k+1)(N_k+2)}{3N_k^2+3N_k+2}a_k. \qquad (6)$$

Вычитая из первого уравнения системы (4) соотношение (1), а из второго и третьего уравнения соотношения (6) и усредняя, получим для

$$\Delta a_k = \hat{a}_k - a_k,\quad \Delta b_k = \hat{b}_k - b_k,\quad \Delta c_k = \hat{c}_k - c_k$$

следующую систему:

$$\overline{\Delta a_k} = \overline{\Delta a_{k-1}} + \overline{\Delta b_{k-1}} + \overline{\Delta c_{k-1}},$$

$$\overline{\Delta b_k} = \frac{4(N_k+1)(3N_k+4)}{3N_k^2+3N_k+2}\left(\overline{\Delta a_{k-1}} - \overline{\Delta b_{k-1}} - \overline{\Delta c_{k-1}}\right),$$

$$\overline{\Delta c_k} = \frac{10(N_k+1)(N_k+2)}{3N_k^2+3N_k+2}\left(\overline{\Delta a_{k-1}} + \overline{\Delta b_{k-1}} + \overline{\Delta c_{k-1}}\right), \quad (7)$$

где черта означает усреднение по случайным моментам наступления событий $t_1^{(k)},\ t_2^{(k)},\dots,\ t_{N_k}^{(k)}$.

Для асимптотической несмещённости оценок $\hat{a}_k$, $\hat{b}_k$ и $\hat{c}_k$ необходимо, чтобы эта система была устойчивой. Это возможно, если корни её характеристического уравнения

$$\lambda^2\left(\lambda - \frac{N_k^2+5N_k+6}{3N_k^2+3N_k+2}\right) = 0$$

будут по модулю меньше единицы. Корни этого уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а $\lambda_3 = \dfrac{N_k^2+5N_k+6}{3N_k^2+3N_k+2}$ при $N_k > 2$ всегда меньше единицы. Таким образом, рекуррентные оценки (4) параметров сплайна являются устойчивыми и, следовательно, асимптотическими (по k) несмещёнными.

Перейдём теперь к выводу ковариационной матрицы полученных оценок. Из соотношений для Δa_k, Δb_k и Δc_k рассмотрим $\dfrac{\Delta t_i}{T} = \dfrac{t_i}{T} - \dfrac{i}{N+1}$. Здесь индекс k временно опущен. Тогда $M\left\{\dfrac{\Delta t_i}{T}\middle| N\right\} = 0$ и

$$M\left\{\frac{\Delta t_i}{T}\cdot\frac{\Delta t_j}{T}\middle| N\right\} = \frac{\min(i,j)}{(N+1)(N+2)} - \frac{ij}{(N+1)^2(N+2)} \cong \frac{1}{N}\left[\min\left(\frac{i}{N},\frac{j}{N}\right) - \frac{ij}{N^2}\right].$$

Используя линеаризацию по Δt_i, получаем

$$\left(\frac{t_i}{T}\right)^2 - \frac{i(i+1)}{(N+1)(N+2)} = \left(\frac{i}{N+1} + \frac{\Delta t_i}{T}\right)^2 - \frac{i(i+1)}{(N+1)(N+2)} \cong 2\frac{i}{N+1} + \frac{\Delta t_i}{T}.$$

Тогда $y_i^{(k)} = a_k + b_k\dfrac{t_i^{(k)}}{T} + c_k\left(\dfrac{t_i^{(k)}}{T}\right)^2 + n_i^{(k)} =$

$$\overline{y_i^{(k)}} + b_k\frac{\Delta t_i^{(k)}}{T} + 2c_k\frac{i}{N_k+1}\frac{\Delta t_i^{(k)}}{T} + n_i^{(k)}.$$

Подставляя это в выражение для $S_\nu^{(k)}$, имеем

$$\Delta S_\nu^{(k)} = S_\nu^{(k)} - \overline{S_\nu^{(k)}} = \frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{i}{N_k+1}\right)^\nu \times \left[b_k\frac{\Delta t_i^{(k)}}{T} + 2c_k\frac{i}{N_k+1}\frac{\Delta t_i^{(k)}}{T} + n_i^{(k)}\right],\quad \nu = 1, 2.$$

Если теперь подставить всё это в выражения для Δa_k, Δb_k, Δc_k, то получим

$$\Delta a_k = \Delta a_{k-1} + \Delta b_{k-1} + \Delta c_{k-1},$$

$$\Delta b_k = -4\Delta a_{k-1} - 4\Delta b_{k-1} - 4\Delta c_{k-1} + 48\Delta S_1^{(k)} - 60\Delta S_2^{(k)},$$

$$\Delta c_k = \frac{10}{3}\Delta a_{k-1} + \frac{10}{3}\Delta b_{k-1} + \frac{10}{3}\Delta c_{k-1} + 60\Delta S_1^{(k)} + 80\Delta S_2^{(k)}. \quad (8)$$

Будем считать, что сплайн, описывающий тренд временного ряда, является стационарным случайным процессом. Тогда в системе выделения тренда с течением времени также установится стационарный режим, в результате чего при больших k все статические характеристики перестанут зависеть от k.

Возводя в квадрат уравнения системы (8), перемножая их и усредняя, получим

$$D\{\hat{a}_k\} = D\{\hat{a}_{k-1}\} + D\{\hat{b}_{k-1}\} + D\{\hat{c}_{k-1}\} + 2\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1}) + 2\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) + 2\operatorname{cov}(\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}),$$

$$D\{\hat{b}_k\} = 16D\{\hat{a}_{k-1}\} + 16D\{\hat{b}_{k-1}\} + 16D\{\hat{c}_{k-1}\} + 32\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1}) + 32\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) + 32\operatorname{cov}(\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) + 2304D\{S_1^{(k)}\} + 3600D\{S_2^{(k)}\} - 5760\operatorname{cov}\{S_1^{(k)},S_2^{(k)}\},$$

$$D\{\hat{c}_k\} = \frac{100}{9}D\{\hat{a}_{k-1}\} + \frac{100}{9}D\{\hat{b}_{k-1}\} + \frac{100}{9}D\{\hat{c}_{k-1}\} + \frac{200}{9}\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1}) + \frac{200}{9}\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) + \frac{200}{9}\operatorname{cov}(\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) + 3600D\{S_1^{(k)}\} + 6400D\{S_2^{(k)}\} - 9600\operatorname{cov}\{S_1^{(k)},S_2^{(k)}\},$$

$$\operatorname{cov}(\hat{a}_k,\hat{b}_k) = -4D\{\hat{a}_{k-1}\} - 4D\{\hat{b}_{k-1}\} - 4D\{\hat{c}_{k-1}\} - 8\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1}) - 8\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) - 8\operatorname{cov}(\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}),$$

$$\operatorname{cov}(\hat{a}_k,\hat{c}_k) = \frac{10}{3}D\{\hat{a}_{k-1}\} + \frac{10}{3}D\{\hat{b}_{k-1}\} + \frac{10}{3}D\{\hat{c}_{k-1}\} + \frac{20}{3}\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1}) + \frac{20}{3}\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) + \frac{20}{3}\operatorname{cov}(\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}),$$

$$\operatorname{cov}(\hat{b}_k,\hat{c}_k) = -\frac{40}{3}D\{\hat{a}_{k-1}\} - \frac{40}{3}D\{\hat{b}_{k-1}\} - \frac{40}{3}D\{\hat{c}_{k-1}\} - \frac{80}{3}\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1}) - \frac{80}{3}\operatorname{cov}(\hat{a}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) - \frac{80}{3}\operatorname{cov}(\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}) - 2880D\{S_1^{(k)}\} - 4800D\{S_2^{(k)}\} + 7440\operatorname{cov}\{S_1^{(k)},S_2^{(k)}\}. \quad (9)$$

Получена система шести уравнений с шестью неизвестными. С течением времени в системе устанавливается стационарный режим, т.е. статистические характеристики рекуррентных оценок коэффициентов сплайна не зависят от k; введем обозначения:

$$D_a = D\{\hat{a}_k\},\ D_b = D\{\hat{b}_k\},\ D_c = D\{\hat{c}_k\},$$

$$C_{ab} = \operatorname{cov}(\hat{a}_k,\hat{b}_k),\ C_{ac} = \operatorname{cov}(\hat{a}_k,\hat{c}_k),\ C_{bc} = \operatorname{cov}(\hat{b}_k,\hat{c}_k),$$

и систему уравнений (9) приведем к системе из трёх уравнений

$$-16D_a + D_b = 2304D\{S_1^{(k)}\} + 3600D\{S_2^{(k)}\} - 5760\operatorname{cov}\{S_1^{(k)},S_2^{(k)}\},$$

$$-\frac{100}{9}D_a + D_c = 3600D\{S_1^{(k)}\} +$$

$$+6400D\left\{S_2^{(k)}\right\}-9600\operatorname{cov}\left\{S_1^{(k)},S_2^{(k)}\right\},$$
$$-14D_a-\frac{1}{2}D_b-\frac{1}{2}D_c=2880D\left\{S_1^{(k)}\right\}+$$
$$+4800D\left\{S_2^{(k)}\right\}-7440\operatorname{cov}\left\{S_1^{(k)},S_2^{(k)}\right\}$$

Разрешаем эту систему относительно D_a, D_b и D_c и подставляем в формулу для средней интегральной погрешности

$$D=M\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[\hat{a}_k+\hat{b}_k\frac{t}{T}+\hat{c}_k\left(\frac{t}{T}\right)^2-a_k-b_k\frac{t}{T}-c_k\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]^2dt\right\},$$ которая для стационарного режима принимает вид

$$D=-M\left\{\frac{1}{N}\right\}\left[-\frac{4}{9}D_a+\frac{1}{12}D_b-\frac{1}{20}D_c\right],$$

или $$D=M\left\{\frac{1}{N}\right\}\left[\frac{107}{840}\overline{b_k^2}+\frac{23}{84}\overline{b_kc_k}+\frac{53}{315}\overline{c_k^2}+3\sigma^2\right].$$

Отметим, что если считать исходный тренд стационарным случайным процессом, то $\overline{b_k^2}$, $\overline{b_kc_k}$ и $\overline{c_k^2}$ не являются независимыми величинами. Действительно, усредняя уравнение (1), имеем $\overline{a_k}=\overline{a_{k-1}}+\overline{b_{k-1}}+\overline{c_{k-1}}$. В стационарном случае все эти величины не должны зависеть от номера k. Тогда из последнего уравнения следует, что $\overline{b_k}+\overline{c_k}=0$, а величина $\overline{a_k}$ может быть произвольной. Записывая (1) в виде $\overline{a_k}-\overline{a_{k-1}}=\overline{b_{k-1}}+\overline{c_{k-1}}$, возводя его в квадрат и усредняя, получим $\overline{(a_k-a_{k-1})^2}=\overline{(b_{k-1}+c_{k-1})^2}$. Если обозначить $\overline{(a_k-a_{k-1})^2}$ через V, то в силу стационарности сплайна эта величина не зависит от k. Заметим, что это тот же самый параметр $\overline{(x_k-x_{k-1})^2}$, что и для линейных сплайнов первого порядка [3]. Так как $M\left\{\frac{1}{N}\right\}=\frac{1}{\lambda T}+\frac{1}{(\lambda T)^2}-\frac{3}{(\lambda T)^3}+\cdots$, то при $\lambda T\gg 1$ окончательно имеем $D\cong\frac{1}{\lambda T}\left[0{,}16V+3\sigma^2\right]$.

Из полученной формулы имеем, что средняя интегральная погрешность выделения тренда отлична от нуля при отсутствии помех измерения. Это обусловлено тем, что моменты измерений являются случайными величинами и вносят дополнительную погрешность в измеренные значения временного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
2. *Кендалл М.Д., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
3. *Тривоженко Б.Е.* Выделение трендов временных рядов и потоков событий. Томск: Изд-во ТГУ, 1989. 285 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 14 марта 2000 г.

УДК 519.2

Б.Е. Тривоженко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНК-ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТРЕНДА ИНТЕНСИВНОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

Получены уравнения для МНК-оценок параметров гиперболического тренда пуассоновского потока. Исследованы их статистические свойства. Показано, что эти оценки являются несмещёнными. Получены выражения для подтверждения эффективности МНК-оценок параметров и эффективности МНК-оценки гиперболического тренда.

Пуассоновский поток событий является простейшим для изучения, поскольку его свойства полностью описываются единственной функцией – его интенсивностью $\lambda(t)$ [1]. В нестационарном потоке сохраняются основные свойства, делающие его изучение лёгким, – независимость событий и ординарность.

Обозначим $\int_0^t\lambda(u)du$ через $\Lambda(t)$. Тогда вероятность того, что на интервале $[t_1,t_2]$ наступит i событий, будет

$$p_i=\frac{1}{i!}\left[\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1)\right]^i e^{-[\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1)]},\qquad(1)$$

а вероятность того, что на бесконечно малом интервале $[t,t+dt]$ наступит одно событие, равна $\lambda(t)dt$.

Будем предполагать, что интенсивность пуассоновского потока описывается функцией

$$\lambda(t)=\frac{1}{a+bt}.\qquad(2)$$

Такой вид зависимости интенсивности от t соответствует линейному тренду средней длительности интервалов между двумя последующими событиями в нестационарном пуассоновском потоке.

По наблюдениям моментов наступления событий $t_1<t_2<\ldots<t_N$ необходимо оценить неизвестные параметры a и b, т.е. выделить тренд интенсивности. Число событий N, по которым оцениваются параметры, фиксировано, и мы в данном случае имеем дело с N-планами эксперимента. Поскольку N фиксировано, то для того, чтобы можно было применять асимптотические методы, представим $\lambda(T)$ в виде

$$\lambda_0(t)=\lambda\left(\frac{t}{N}\right)=\frac{1}{a+bt/N}.\qquad(3)$$

Если t_i – момент наступления i-го события, то в [2] было показано, что асимптотически при $N\to\infty$