такое разбиение $\check{R}$ множества V_0 называется (q,w)-минимальным разбиением в графе G.

Данная задача является одной из разновидностей задачи компоновки схемы управляющей системы в конструктивные блоки. Граф G в этом случае выступает в качестве модели компонуемой схемы: вершины в V_0 сопоставляются элементам схемы, а рёбра в U_0 – множествам электрических цепей в схеме, объединяющих пары полюсов соответствующих элементов. Вес такого ребра равен мощности сопоставленного ему множества цепей. Вершинами в $V-V_0$ представляются электрические цепи схемы, объединяющие более двух полюсов (промежуточные узлы связи). Ребро, соединяющее вершину в V_0 и вершину в $V-V_0$, указывает на инцидентность в схеме соответствующих элемента и электрической цепи. Поскольку объём w конструктивного блока ограничен, а размеры w_j реальных физических элементов m_j конечны, то в каждом блоке i при компоновке схемы может быть размещено лишь множество таких элементов, общий объём которых не превышает w. Отсюда следует ограничение на $w(V_i)$ в постановке задачи. Кроме того, конструктивные блоки соединяются между собой посредством разъёмов с ограниченным числом q контактов. Тем самым накладывается ограничение на число $q(V_i)$ внешних связей блока i, т.е. связей элементов в блоке i с элементами других блоков. При подсчёте этого числа все проводники, принадлежащие одной и той же электрической цепи, отождествляются с одним проводником, вследствие чего величина $q(V_i)$ вычисляется по приведённой выше формуле при $Y=V_i$. Общее количество конструктивных блоков, по которым распределяются элементы схемы, должно быть наименьшим; отсюда – требование минимальности числа классов в разбиении $\check{R}$.

T-интерпретация

Множество $Y\subseteq V_0$ называется *q-совместимым* (*w-совместимым*), если $q(Y)\leq q$, а, соответственно, $w(Y)\leq w$. Множество Y, являющееся одновременно q-совместимым и w-совместимым, называется *(q,w)-совместимым*. Пусть $X=V_0$, P – множество всех (q,w)-совместимых подмножеств в X и $F(R^Y)=|R^Y|$. Тогда решение T-задачи для $<X,P,F>$ является (q,w)-минимальным разбиением в графе G.

Параметры метода

Каждое (q,w)-совместимое подмножество в $Y\subseteq X$ является q-совместимым подмножеством некоторого w-совместимого подмножества $Q\subseteq Y$. В связи с этим алгоритм перечисления φ для рассматриваемой задачи предложено представлять как композицию (последовательное выполнение) двух алгоритмов – $\varphi 2$ и $\varphi 3$. Алгоритм $\varphi 2$ в любом $Y\subseteq X$ перечисляет все максимальные w-совместимые подмножества Q, содержащие вершину y_0 наибольшего веса, а алгоритм $\varphi 3$ для каждого $Q\in\varphi 2\,(Y)$ перечисляет все такие его q-совместимые подмножества, содержащие вершину $y_0\in Y$, которые являются объединениями некоторых максимальных плотных подмножеств из Q. Множество $A\subseteq X$ называется *плотным*, если для любого непустого подмножества $C\subset A$ имеет место $q(C)>q(A)$. Приводится конкретная реализация алгоритма перечисления. Операция ψ исключает из $Z=\varphi(Y)$ всякое такое множество $A\in Z$, для которого в Z найдётся множество $B\supset A$ со свойством $q(A)\geq q(B)$. Допустимость этой операции доказывается соответствующей теоремой. Граничная функция F_0 определяется так же, как в задаче о разбиении множества чисел.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Агибалов Г.П.* Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
2. *Берж К.* Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962. 319 с.
3. *Агибалов Г.П., Беляев В.А.* Метод сокращённого обхода дерева поиска и его применение в синтезе интегральных схем // Управляющие системы и машины. 1977. № 6. С. 99–103.
4. *Агибалов Г.П., Беляев В.А.* Технология решения комбинаторно-логических задач методом сокращённого обхода дерева поиска. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 125 с.
5. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
6. *A.M. Geoffrion, R.E. Marsten.* Integer programming: a framework and state-of-the-art survey // Management Science. 1972. Vol. 18. № 9.
7. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. 476 с.
8. *Ершов А.П.* Введение в теоретическое программирование. М.: Наука, 1977. 288 с.
9. *Закревский А.Д.* Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М.: Наука, 1971. 512 с.

Статья представлена кафедрой защиты информации и криптографии факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.7

В.А. Бузанов

ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 98-01-00288

Предлагается способ применения специальных интервальных операций при вычислениях в задачах диагностики, если объект диагностики задан простейшей композицией произвольных функций – сложной функцией. Предполагается, что функции-компоненты композиции заданы их интервальными формами.

Для упрощения вычислений ранее [1] были предложены специальные интервальные операции для решения основных задач диагностики. При этом имелось в виду следующее.

Пусть $X = X_1\times\ldots\times X_i\times\ldots\times X_n$ – декартово произведение произвольных множеств X_i. Элементы множества X называются векторами или наборами.

Элементы множества $\hat{X} = \widetilde{X}_1 \times \ldots \times \widetilde{X}_i \times \ldots \times \widetilde{X}_n$, где $\widetilde{X}_i$, $i=1,2,\ldots,n$, – множества всех подмножеств множеств X_i соответственно, называются интервалами. Пусть $\Lambda \notin X_i$, $i=1,\ldots,n$, и $X_i^\Lambda = X_i \cup \{\Lambda\}$, $i=1,\ldots,n$. Элементы множества $X^\Lambda = X_1^\Lambda \times \ldots \times X_n^\Lambda$ называются Λ-векторами. Элементы множества $\hat{X}^\Lambda = \widetilde{X}_1^\Lambda \times \ldots \times \widetilde{X}_n^\Lambda$, где $\widetilde{X}_i^\Lambda$, $i=1,\ldots,n$ – множества всех подмножеств множеств X_i^Λ, $i=1,\ldots,n$ соответственно называются Λ-интервалами. Символ Λ в терминах Λ-вектор и Λ-интервал разрешается опускать, если это не вызывает недоразумений.

Пусть интервалы e, u представлены как

$$e = e_1 \ldots e_i \ldots e_n \text{ и } u = u_1 \ldots u_i \ldots u_n,$$

где e_i, $u_i \in \widetilde{X}_i^\Lambda, i=1,\ldots,n$. Определена покомпонентная операция «+» над любыми интервалами e и u как

$$e + u = (e_1 + u_1)\ldots(e_i + u_i)\ldots(e_n + u_n),$$

где
$$e_i + u_i = \begin{cases} e_i \setminus \{\Lambda\} \cup u_i, & \text{если } \Lambda \in e_i, \\ e_i, & \text{если } \Lambda \notin e_i. \end{cases}$$

Определена также операция «–» (в некотором смысле обратная операции «+») следующим образом: для пары интервалов $u = u_1 \ldots u_i \ldots u_n$ и $v = v_1 \ldots v_i \ldots v_n$, $u - v = (u_1 - v_1)\ldots(u_i - v_i)\ldots(u_n - v_n)$, где покомпонентно
$$u_i - v_i = \begin{cases} u_i \cup \{\Lambda\}, & \text{если } u_i \cap v_i \neq \varnothing, \\ u_i, & \text{если } u_i \cap v_i = \varnothing. \end{cases}$$

Операция «+» введена для отображения действия неисправности на аргумент функции, операция «–» введена для вычисления интервалов неисправностей.

Множество $U = \{u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_p\}$ интервалов называется интервальным покрытием множества $Z \subseteq X$, если $\bigcup_{i=1}^{p} u_i = Z$. Интервальной формой функции $f: Z \to Y, Z \subseteq X$ называется $\varphi: U \to Y, U \subseteq \hat{X}$ – такое отображение интервального покрытия $U= = \{u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_p\}$ множества Z в Y, что для каждого y из области значений функции f выполняется $\bigcup_i \varphi_i^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, где $f^{-1}(y)$ – полный прообраз y по отображению f; $\varphi_i^{-1}(y)$ – элементы полного прообраза y по отображению φ; объединение произведено по всем элементам этого прообраза.

Приведенные выше интервальные операции предлагается применять при решении основных задач диагностики. Показано [1], как такие средства могут применяться для решения прямой и обратной задач диагностики, если объект диагностики задан интервальной формой произвольной функции. Однако не всякий объект диагностики можно считать таковым, поэтому ниже обсуждается один из способов применения данного аппарата к объектам диагностики, заданным простейшей композицией произвольных функций – сложной функцией.

Другие определения и факты (кроме общеизвестных) можно найти в [1]. Кванторы и логические связки в тексте употребляются в их содержательном смысле как соответствующие сокращения выражений естественного языка. В бесскобочных выражениях старшими считаются операции «+», «–», затем по старшинству идут теоретико-множественные операции и отношения. В обозначениях элементы множеств и одноэлементные множества, как правило, не отличаются.

1. Модель объекта диагностики

Если множество значений функции f_i содержится в множестве определения функции f_{i+1}, (т.е. $f_i: Z_i \to Y_i \subset Z_{i+1}$ $i=1,\ldots,n-1$), то функция, определяемая равенством

$$(f_n f_{n-1} \ldots f_1)(\alpha) = f_n(f_{n-1}(\ldots f_1(\alpha)\ldots)) = \alpha f_1 f_2 \ldots f_n,$$

$\alpha \in Z_1$, называется $(n-1)$-кратной композицией функций или сложной функцией.

Пусть

$$X_i = X_{i1} \times \ldots \times X_{ij_i} \times \ldots \times X_{im_i},\ Z_{ij_i} \subseteq X_{ij_i},\ i=1,\ldots,n.$$

Вектор $e_i \in X_i^\Lambda$, где $X_i^\Lambda = X_{i1}^\Lambda \times \ldots \times X_{ij_i}^\Lambda \times \ldots \times X_{im_i}^\Lambda$, $i=1,\ldots,n$, называется аргументной неисправностью функции $f_i: Z_i \to Y_i$, $i=1,\ldots,n$ (т.е. функции-компоненты сложной функции), если для каждого $\alpha \in Z_i$ выполняется $(e_i + \alpha) \in Z_i$. Множество Λ-векторов, удовлетворяющих последнему условию, будем обозначать как Z_i^Λ, $i=1,\ldots,n$. Неисправностью сложной функции назовем $e=(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_n)$.

Пусть $\overline{R}$ – отношение различения на Y_n. Будем говорить, что вектор $\alpha \in Z_1$ обнаруживает неисправность $e = (e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_n), e_i \in Z_i^\Lambda$, если

$$f_n(f_{n-1}(\ldots f_1(\alpha)\ldots))\overline{R} f_n(e_n +$$
$$+ f_{n-1}(e_{n-1} + \ldots e_2 + f_1(e_1 + \alpha)\ldots)),$$

или, что то же, $F(\alpha)\overline{R}F^{e_1\ldots e_n}(\alpha)$, где обозначено

$$f_n(f_{n-1}(\ldots f_1(\alpha)\ldots)) = F(\alpha),$$
$$f_n(e_n + f_{n-1}(e_{n-1} + \ldots e_2 + f_1(e_1 + \alpha)\ldots)) =$$
$$= \alpha f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_n^{e_n} = F^{e_1\ldots e_n}(\alpha).$$

Пусть $\varphi_1: U_1 \to Y_1$, $U_1 = \{u_{11},\ldots,u_{1p_1}\}$,

$$\ldots$$
$$\varphi_n: U_n \to Y_n,\ U_n = \{u_{n1},\ldots,u_{np_n}\}$$

есть интервальные формы функций $f_1,\ldots,f_n$ соответственно. Для так заданной сложной функции рассмотрим задачу вычисления множества всех неисправностей, обнаруживаемых заданным вектором $\alpha \in Z_1$.

2. Прямая задача

Через $\alpha F\overline{R}$ обозначим множество всех $y \in Y_n$, для которых $F(\alpha)\overline{R}y$. Пусть $\varphi_n^{-1}(\alpha F\overline{R}) = \{\varphi_{n1}^{-1}(\alpha F\overline{R}),\ldots$ $\ldots,\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\overline{R}),\ldots,\varphi_{np_n}^{-1}(\alpha F\overline{R})\}$ – полный прообраз множества $\alpha F\overline{R}$ по отображению φ_n и интервалы $\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\overline{R})$ – элементы этого прообраза. Образуем декартово произведение $\prod_{i=1}^{n-1} U_i \times \varphi_n^{-1}(\alpha F\overline{R})$. Нетрудно видеть, что оно есть множество кортежей вида $(u_{1j_1}, u_{2j_2}, \ldots, u_{ij_i}, \ldots, u_{n-1,j_{n-1}}, \varphi^{-1}_{nj_n}(\alpha F\bar{R}))$. Для краткости будем обозначать их как $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n}$.

Каждому такому $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n}$ сопоставим n-ку (кортеж)

$$(\alpha, \varphi_1(u_{1j_1}), \ldots, \varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_{n-2}(u_{n-2,j_{n-2}}), \varphi_{n-1}(u_{n-1,j_{n-1}})),$$

где $\alpha \in Z_1$, и для краткости обозначим как $\alpha\varphi_{j_1\ldots j_{n-1}}$.

Другими словами,

$$(\alpha, \varphi_1(u_{1j_1}), \ldots, \varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_{n-2}(u_{n-2,j_{n-2}}), \varphi_{n-1}(u_{n-1,j_{n-1}})) = \alpha\varphi_{j_1\ldots j_{n-1}}$$

получается из $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n}$, если слева к $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n}$ приписать α, справа отбросить $\varphi^{-1}_{nj_n}(\alpha F\bar{R})$ и заменить $u_{1j_1}, \ldots, u_{ij_i}, \ldots, u_{n-1,j_{n-1}}$ функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots, \varphi_{n-1}$ от $u_{1j_1}, \ldots, u_{ij_i}, \ldots, u_{n-1,j_{n-1}}$ соответственно. Таким образом, число компонент в $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n}$ и $\alpha\varphi_{j_1\ldots j_{n-1}}$ одно и то же и между ними возможны покомпонентные операции.

Рассмотрим операцию

$$u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n} - \alpha\varphi_{j_1\ldots j_{n-1}} =$$
$$= (u_{1j_1}, u_{2j_2}, \ldots, u_{ij_i}, \ldots, u_{n-1,j_{n-1}}, \varphi^{-1}_{nj_n}(\alpha F\bar{R})) -$$
$$-(\alpha, \varphi_1(u_{1j_1}), \ldots, \varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}), \ldots \varphi_{n-2}(u_{n-2,j_{n-2}}),$$
$$\varphi_{n-1}(u_{n-1,j_{n-1}})) = (u_{1j_1} - \alpha, u_{2j_2} - \varphi_1(u_{1j_1}), \ldots, u_{ij_i} -$$
$$- \varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}), \ldots, \varphi^{-1}_{nj_n}(\alpha F\bar{R}) - \varphi_{n-1}(u_{n-1,j_{n-1}})).$$

Будем относиться к этому действию как к операции, обозначаемой $d_{\alpha>}$, над $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n}$, т.е. будем считать, что $u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n} - \alpha\varphi_{j_1\ldots j_{n-1}} = d_{\alpha>}(u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n})$.

Нетрудно видеть, что в результате применения $d_{\alpha>}$ получается некоторый интервал неисправностей. Применением операции $d_{\alpha>}$ к каждому элементу множества $\prod_{i=1}^{n-1}U_i \times \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R})$ получается некоторое множество интервалов неисправностей. Прямая задача в этом случае состоит в том, чтобы, вычисляя возможные неисправности, установить, какие из них обнаруживаются вектором α, и убедиться, что установлены все обнаружимые им неисправности.

Будем обозначать как $\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i \times \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R}))$ множество всех элементов декартова произведения $\prod_{i=1}^{n-1}U_i \times \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R})$, над каждым элементом которого произведена операция $d_{\alpha>}(u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n})$. Через

$$E_\alpha = \cup(\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R})))$$

обозначим множество всех векторов e, для которых в $\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R}))$ найдется интервал

$$d_{\alpha>}(u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n})$$

такой, что $e \in d_{\alpha>}(u_{j_1\ldots j_{n-1}}\varphi^{-1}_{nj_n})$. Покажем, как, в частности, можно решить прямую задачу диагностики для сложной функции. Имеет место следующее утверждение, определяющее один из возможных способов решения прямой задачи – нужно вычислить $\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i \times \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R}))$.

Теорема. $F(\alpha)\bar{R}F^{e_1\ldots e_n}(\alpha) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e_1 \ldots e_n \in \cup(\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i \times \varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R}))).$$

Для доказательства теоремы потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. Если $f: Z \to Y, Z \subseteq X = X_1, \ldots, X_n$, и $\varphi: U \to Y, U = \{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_m\}$ – произвольная интервальная форма функции f; $a, b \in Z$, $bf\bar{R}$ – множество всех $y \in Y$, для которых $f(b)\bar{R}y$; множество $\varphi^{-1}(bf\bar{R}) = \{\varphi_1^{-1}(bf\bar{R}), \ldots, \varphi_i^{-1}(bf\bar{R}), \ldots, \varphi_p^{-1}(bf\bar{R})\}$ – полный прообраз множества $bf\bar{R}$ по отображению φ; интервалы $\varphi_i^{-1}(bf\bar{R})$ – элементы этого прообраза и $e \in Z^\wedge$, то

$$f(b)\bar{R}f(e+a) \Leftrightarrow \exists\varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) \in$$
$$\in \varphi^{-1}(bf\bar{R})(e \in \varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) - a).$$

Доказательство

1. ($\Rightarrow$):Ввиду теоремы 1 (из [1] о различимости двух неисправностей)

$$f(\varepsilon + a)\bar{R}f(e + a) \Leftrightarrow \exists(u,v) \in$$
$$\in \bar{R}\varphi^{-1}(\varepsilon \in u - a \,\&\, e \in v - a),$$

(положим $\varepsilon = b$)

$$f(b+a)\bar{R}f(e+a) \Leftrightarrow \exists(u,v) \in$$
$$\in \bar{R}\varphi^{-1}(b \in u - a \,\&\, e \in v - a),$$

(поскольку $b \in Z \Rightarrow b + a = b$)

$$f(b)\bar{R}f(e+a) \Leftrightarrow \exists(u,v) \in \bar{R}\varphi^{-1}(b \in u - a \,\&\, e \in v - a),$$

(т.к. $b \in u - a \,\&\, b \in Z \Rightarrow b \in u$)

$$f(b)\bar{R}f(e+a) \Rightarrow \exists(u,v) \in \bar{R}\varphi^{-1}(b \in u \,\&\, e \in v - a),$$

(т.к. из определения множества $\bar{R}\varphi^{-1}$ [1])

$$(u,v) \in \bar{R}\varphi^{-1} \,\&\, b \in u \Rightarrow v \in \varphi^{-1}(bf\bar{R})),$$

то
$$f(b)\bar{R}f(e+a) \Rightarrow \exists(u,v) \in \bar{R}\varphi^{-1}(b \in u \,\&\, v \in$$
$$\in \varphi^{-1}(bf\bar{R}) \,\&\, e \in v - a),$$
$$f(b)\bar{R}f(e+a) \Rightarrow \exists\varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) \in$$
$$\in \varphi^{-1}(bf\bar{R})(e \in \varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) - a).$$

2. ($\Leftarrow$):Поскольку $u - \alpha + \alpha = u$, то

$$\exists\varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) \in \varphi^{-1}(bf\bar{R})(e \in \varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) - a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(b) = f(b) \,\&\, \varphi(e+a) = f(e+a) = \varphi(\varphi_i^{-1}(bf\bar{R}) -$$
$$- a + a)) = \varphi(\varphi_i^{-1}(bf\bar{R})) \in bf\bar{R} \Rightarrow f(b)\bar{R}f(e+a),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если $f: Z \to Y, Z \subseteq X = X_1 \times \ldots \times X_n$ и $\varphi: U \to Y, U = \{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_m\}$ – произвольная интервальная форма функции f и $e \in X^\wedge$, то

$$\forall\alpha \in Z((f(e+\alpha) \in Y) \Leftrightarrow e \in \bigcup_{i=1}^{m}(u_i - \alpha)).$$

Доказательство.

1. $\forall\alpha \in Z(f(e+\alpha) \in Y) \Leftrightarrow \forall\alpha \in Z(e+\alpha \in Z)$.

Подставив правую часть этой эквивалентности в левую часть $\Leftrightarrow$ утверждения леммы, получим

$$\forall\alpha\in Z((e+\alpha\in Z)\Leftrightarrow e\in\bigcup_{i=1}^{m}(u_i-\alpha)).$$

2. По определению интервальной формы

$$\forall\alpha\in Z(e+\alpha\in Z)\Leftrightarrow\forall\alpha\in Z\exists u\subseteq Z(e+\alpha\in u).$$

Подставив правую часть последнего в результат 1-й подстановки, имеем

$$\forall\alpha\in Z(\exists u\subseteq Z(e+\alpha\in u)\Leftrightarrow e\in\bigcup_{i=1}^{m}(u_i-\alpha)).$$

3. Подставляя $e\in\bigcup_{i=1}^{m}(u_i-\alpha)\Leftrightarrow\forall\alpha\in Z\exists u_i\subseteq Z(e\in u_i-\alpha)$, в результат 2-й подстановки, имеем

$$\forall\alpha\in Z(\exists u_i\subseteq Z(e+\alpha\in u_i)\Leftrightarrow\exists u_i\subseteq Z(e\in u_i-\alpha)).$$

4. Ввиду леммы 4 [1] $e+\alpha\in u\Leftrightarrow e\in u-\alpha$, и после подстановки правой части последнего утверждения в левую часть результата 3-й подстановки получим

$$\forall\alpha\in Z(\exists u_i\subseteq Z(e\in u_i-\alpha)\Leftrightarrow\exists u_i\subseteq Z(e\in u_i-\alpha)),$$

что и требовалось доказать.

Приведем доказательство теоремы.

1. ($\Rightarrow$): По определению интервальной формы и по определениям сложной функции и аргументной неисправности существуют такие интервалы

$$u_{1j_1},\dots,u_{ij_i},\dots,u_{nj_n},$$

что

$$\alpha f_1^{e_1}=f_1(e_1+\alpha)=\varphi_1(u_{1j_1}),$$

$$\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}=f_2(e_2+\varphi_1(u_{1j_1}))=\varphi_2(u_{2j_2}),$$

$$\dots$$

$$\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}\dots f_i^{e_i}=f_i(e_i+\varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}))=\varphi_i(u_{ij_i}),$$

$$\dots$$

$$\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}\dots f_n^{e_n}=f_n(e_n+\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}))=\varphi_n(u_{nj_n}).$$

Ввиду этого и по определению сложной функции

$$F(\alpha)\bar{R}F^{e_1\dots e_n}(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(e_1+\alpha)\in Z_2\,\&\dots\&\,f_{n-1}(e_{n-1}+\varphi_{n-2}(u_{n-2j_{n-2}}))\in$$

$$\in Z_n\,\&\,F(\alpha)\ \bar{R}\ f_n(e_n+\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}))\Rightarrow$$

(ввиду леммы 2)

$$\Rightarrow\exists u_{1j_1}(e_1\in u_{1j_1}-\alpha)\,\&\,\forall i\in$$

$$\in\{2,\dots,n\}\exists u_{ij_i}(e_i\in u_{ij_i}-\varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}))\,\&$$

$$F(\alpha)\ \bar{R}\ f_n(e_n+\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}))\Rightarrow$$

(поскольку $F(\alpha)$ равно некоторому $f_n(b)$)

$$\Rightarrow\exists u_{1j_1}(e_1\in u_{1j_1}-\alpha)\,\&\,\forall i\in$$

$$\in\{2,\dots,n\}\exists u_{ij_i}(e_i\in u_{ij_i}-\varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}))\,\&$$

$$\&\,\exists b\in Z_n(f_n(b)\bar{R}\ f_n(e_n+\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}})))\Rightarrow$$

(ввиду леммы 1)

$$\Rightarrow\exists u_{1j_1}(e_1\in u_{1j_1}-\alpha)\,\&$$

$$\&\,\forall i\in\{2,\dots,n\}\exists u_{ij_i}(e_i\in u_{ij_i}-\varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}))\&$$

$$\&\,\exists\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\bar{R})\in\varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R})(e_n\in\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\bar{R})-$$

$$-\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}))\Rightarrow e_1\dots e_n\in d_{\alpha>}(u_{j_1\dots j_{n-1}}\varphi_{nj_n}^{-1})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_1\dots e_n\in\cup(\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i\times\varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R}))).$$

2. ($\Leftarrow$): $e_1\dots e_n\in\cup(\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i\times\varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R})))\Rightarrow$

$$\Rightarrow e_1\dots e_n\in d_{\alpha>}(u_{j_1\dots j_{n-1}}\varphi_{nj_n}^{-1})\Rightarrow e_1\dots e_n\in$$

$$\in(u_{1j_1}-\alpha,u_{2j_2}-\varphi_1(u_{1j_1}),u_{3j_3}-\varphi_2(u_{2j_2}),\dots,u_{ij_i}-$$

$$-\varphi_{i-1}(u_{i-1j_{i-1}}),\dots,\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\bar{R})-\varphi_{n-1}(u_{n-1,j_{n-1}})).$$

Имея в виду определение интервальной формы, вычислим $\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}\dots f_n^{e_n}$, используя при этом равенство $u-\alpha+\alpha=u$,

$$\alpha f_1^{e_1}=f(u_{1j_1}-\alpha+\alpha)=\varphi_1(u_{1j_1}),$$

$$\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}=f_2(u_{2j_2}-\varphi_1(u_{1j_2})+\varphi_1(u_{1j_2}))=\varphi_2(u_{2j_2}),$$

$$\dots$$

$$\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}\dots f_{n-1}^{e_{n-1}}=f_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}-\varphi_{n-2}(u_{n-2j_{n-2}})+$$

$$+\varphi_{n-2}(u_{n-2j_{n-2}}))=\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}),$$

$$\alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}\dots f_n^{e_n}=f_n(\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\bar{R})-\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}})+$$

$$+\varphi_{n-1}(u_{n-1j_{n-1}}))=\varphi_n(\varphi_{nj_n}^{-1}(\alpha F\bar{R}))\in\alpha F\bar{R}.$$

Следовательно,

$$e_1\dots e_n\in\cup(\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i\times\varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R})))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha f_1\ f_2\dots f_n\ \bar{R}\ \alpha f_1^{e_1}f_2^{e_2}\dots f_n^{e_n}\Leftrightarrow F(\alpha)\bar{R}F^{e_1\dots e_n}(\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Для обратных задач (т.е. вычисления тестов) очевидно существенным будет представление тестов (некоторых аргументов сложной функции) интервалами, поскольку векторы, решения задачи, должны быть выбраны из множеств большой мощности.

3. К обратной задаче диагностики для сложной функции

Обратную задачу диагностики можно представить как многократное решение прямой, где для уменьшения сложности вычислений при решении аргументы функций представляются интервалами и для интервалов вычисляются множества обнаруживаемых неисправностей, затем приемлемым способом сокращаются множества неисправностей и соответственно множества векторов-тестов, но для этого необходимо иметь способ вычисления множеств неисправностей, обнаруживаемых заданным интервалом, так что следующим за установлением приведенной выше теоремы мероприятием в этом отношении можно считать отыскание способа вычислений множества, аналогичного множеству $\Delta_{\alpha>}(\prod_{i=1}^{n-1}U_i\times\varphi_n^{-1}(\alpha F\bar{R}))$.

В заключение заметим, что вышеизложенное имеет целью применение и в теории дискретных автоматов на полурешетках [2], которой оно и было инициировано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бузанов В.А.* Интервальные операции для задач тестовой диагностики //Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1999. С. 7–17.

2. *Агибалов Г.П.* Дискретные автоматы на полурешетках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.

Статья представлена кафедрой защиты информации и криптографии факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 февраля 2000 г.