ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том № 271 июнь 2000

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 336.763:336.67 (075.4)

С.Н. Авдеенко, В.В. Домбровский

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ В АНАЛИЗЕ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

В данной работе для анализа потоков платежей предлагается использовать методы интервальной математики. Выведены формулы для расчета наращенной суммы и современной величины годовой ренты с несколькими начислениями процентов в год. Приведены результаты численных расчетов.

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени. Такие последовательности платежей называются потоком платежей. Потоки платежей могут быть регулярными и нерегулярными. Компоненты нерегулярного потока платежей могут быть как положительными, так и отрицательными, а соответствующие платежи могут производиться через разные интервалы времени. Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют финансовой рентой [1]. Рента характеризуется следующими параметрами: *член ренты* – размер отдельного платежа, *период ренты* – временной интервал между двумя последовательными платежами, *срок ренты* – время от начала первого периода ренты до конца последнего периода, *процентная ставка* – ставка, по которой производится наращение или дисконтирование платежей.

Для анализа потоков платежей необходимо уметь рассчитывать их основные обобщающие характеристики. Таких характеристик две: наращенная сумма и современная (приведенная) величина. Наращенной суммой потока платежей называют сумму платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Современной величиной потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока или упреждающий его [1]. Наращенную сумму определяют, например, чтобы знать общую сумму задолженности на какой-либо момент времени, итоговый объем инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв. Современная величина является важнейшим показателем при оценке эффективности реальных и финансовых инвестиций, коммерческих сделок и т.д.

Для анализа и расчета характеристик потоков платежей необходимо точное задание всех параметров потока – размеров платежей, процентной ставки и т.д. При решении многих практических задач, как правило, эти параметры точно неизвестны, но всегда можно с достаточной степенью достоверности задать интервалы, в которых они лежат. В этом случае адекватным математическим аппаратом для количественного анализа потоков платежей могут служить методы интервального анализа [2, 3]. Применение интервального анализа позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они лежат в некоторых интервалах. При этом в интервалы решений включаются и ошибки округлений.

Существует несколько способов задания интервальных величин: обычная интервальная арифметика [4, 6 – 9], обобщенная интервальная арифметика [5, 8], арифметика Каухера и др. В данной работе анализ потоков платежей проведен с помощью обобщенной интервальной арифметики. Выведены формулы для вычисления обобщающих характеристик интервальных потоков платежей (под *интервальным* потоком будем понимать поток платежей, параметры которого – размеры платежей и процентная ставка – задаются интервалами) с использованием обобщенной интервальной арифметики.

1. Наращенная сумма годовой ренты с начислениями процентов *m* раз в год

Пусть платежи поступают один раз в год в конце года (т.е. интервал ренты равен одному году). Проценты на платежи начисляются по номинальной ставке $j \in [j_1, j_2]$, а число периодов начисления в год равно m. Каждый раз проценты начисляются по ставке $\frac{j}{m} \in \left[\frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m}\right]$. Представим платеж и ставку наращения в следующем виде: $R = R_0 + u_R, -s_R \le u_R \le s_R$, где R_0 – середина интервала $[R_1, R_2]$; $2s_R$ – ширина интервала $[R_1, R_2]$, $\frac{j}{m} = j_0 + u_j, \ldots -s_j \le u_j \le s_j$, j_0 – середина интервала $\left[\frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m}\right]$; $2s_j$ – ширина интервала $\left[\frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m}\right]$; n – срок ренты в годах. Тогда получим ряд платежей с начисленными процентами:

$$(R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)^{m\cdot(n-1)}, (R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)^{m\cdot(n-2)}.$$

и т.д. На последний платеж проценты не начисляются, и он будет равен $(R_0 + u_R)$.

Суммируя эти слагаемые по правилам обобщенной интервальной арифметики [5, 8], получим интервальное значение наращенной суммы

$$S = (R_0 + u_R)\cdot\sum_{k=0}^{n}(1 + j_0 + u_j)^k.$$

Имеем геометрическую прогрессию с первым членом $(R_0 + u_R)$, знаменателем $(1 + j_0 + u_j)^m$ и количеством членов n. Применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S = (R_0 + u_R)\cdot\frac{(1 + j_0 + u_j)^{n\cdot m} - 1}{(1 + j_0 + u_j)^m - 1}.$$

Определим множитель наращения. Слагаемые в числителе и знаменателе:

$$(1 + j_0 + u_j)^{n\cdot m} = [A_1, A_2] + [B_1, B_2]\cdot u_j,$$

где $$A_1 = (1 + j_0)^{n\cdot m},$$

$$A_2=(1+j_0)^{n\cdot m}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n\cdot m}{2}\right]} C_{n\cdot m}^{2k}(1+j_0)^{n\cdot m-2k}\cdot s_j^{2k},$$

$$B_1=n\cdot m(1+j_0)^{n\cdot m-1},$$

$$B_2=n\cdot m(1+j_0)^{n\cdot m-1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n\cdot m-1}{2}\right]} C_{n\cdot m}^{2k+1}(1+j_0)^{n\cdot m-1-2k}\cdot s_j^{2k}.$$

$$(1+j_0+u_j)^m=[C_1,C_2]+[D_1,D_2]\cdot u_j,$$

где $$C_1=(1+j_0)^m,$$

$$C_2=(1+j_0)^m+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^{2k}(1+j_0)^{m-2k}\cdot s_j^{2k},$$

$$D_1=m(1+j_0)^{m-1},$$

$$D_2=m(1+j_0)^{m-1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_m^{2k+1}(1+j_0)^{m-1-2k}\cdot s_j^{2k}.$$

По правилам обобщенного деления и умножения

$$S\in[S_1,S_2]=(R_0+u_R)\cdot([K_1,K_2]+[M_1,M_2]\cdot u_j)=$$
$$=[R_0K_1,R_0K_2]+u_R\cdot[K_1-M_2\cdot s_j,K_2+M_2\cdot s_j]+$$
$$+u_j\cdot[R_0\cdot M_1,R_0\cdot M_2] \qquad (1)$$

где $$K_1=\frac{A_1-1}{C_2-1},\quad K_2=\frac{A_2-1}{C_1-1},$$

$$M_1=\frac{B_1\cdot(C_1-1)-D_2\cdot(A_2-1)}{(C_2-1)\cdot(C_2-1+D_2\cdot s_j)},$$

$$M_2=\frac{B_2\cdot(C_2-1)-D_1\cdot(A_1-1)}{(C_1-1)\cdot(C_1-1-D_2\cdot s_j)}.$$

Заменяя u_j и u_R на соответствующие интервалы с учетом (1), получим выражение для наращенной суммы:

$$S\in[S_1,S_2], \qquad (2)$$

где $S_1=R_0\cdot K_1-s_R\cdot(K_2+M_2\cdot s_j)-s_j\cdot R_0\cdot M_2$,

$S_2=R_0\cdot K_2+s_R\cdot(K_2+M_2\cdot s_j)+s_j\cdot R_0\cdot M_2$.

2. Современная величина годовой ренты с начислением процентов *m* раз в год

Оценку современной величины определим на момент времени, совпадающий с началом ренты. Дисконтный множитель $V=\frac{1}{1+\frac{j}{m}}$. Следовательно,

$$V\in[V_1,V_2]=\left[\frac{1}{\left(1+\frac{j_2}{m}\right)},\frac{1}{\left(1+\frac{j_1}{m}\right)}\right].$$ Представим отдельный платеж и дисконтный множитель в следующем виде: $R=R_0+u_R,\ldots-s_R\le u_R\le s_R$, где R_0 – середина интервала $[R_1,R_2]$, $2s_R$ – ширина интервала $[R_1,R_2]$, $V=V_0+u_V\ldots-s_v\le u_v\le s_v$, где V_0 – середина интервала $[V_1,V_2]$, $2s_V$ – ширина интервала $[V_1,V_2]$. Современная величина ренты определяется как сумма всех платежей, дисконтированных на момент оценки современной величины. Дисконтируя платежи, получим ряд слагаемых следующего вида: первый платеж на момент оценки равен $(R_0+u_R)(V_0+u_V)^m$, второй платеж равен $(R_0+u_R)(V_0+u_V)^{2\cdot m}$, и т.д. Последний платеж равен $(R_0+u_R)(V_0+u_V)^{n\cdot m}$.

Суммируя эти величины по правилам обобщенной интервальной арифметики, получим выражение для интервального значения современной величины ренты $P=(R_0+u_R)\sum_{k=1}^{n}(V_0+u_V)^k$. Свернем полученное выражение по формуле геометрической прогрессии с первым членом $(R_0+u_R)(V_0+u_V)^m$ знаменателем $(V_0+u_V)^m$ и количеством членов *n*. Получим $P=(R_0+u_R)(V_0+u_V)^m\,\frac{(V_0+u_V)^{n\cdot m}-1}{(V_0+u_V)^m-1}$.

Определим интервальный множитель дисконтирования. Слагаемые в числителе и знаменателе:

$$(V_0+u_V)^{n\cdot m}=[A_1,A_2]+[B_1,B_2]\cdot u_V,$$

где $A_1=V_0^{n\cdot m}$, $A_2=V_0^{n\cdot m}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n\cdot m}{2}\right]} C_{n\cdot m}^{2k}V_0^{n\cdot m-2k}s_V^{2k}$,

$$B_1=n\cdot mV_0^{n\cdot m-1},$$

$$B_2=nmV_0^{n\cdot m-1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n\cdot m-1}{2}\right]} C_{n\cdot m}^{2k+1}V_0^{n\cdot m-1-2k}s_V^{2k}.$$

$$(V_0+u_V)^m=[C_1,C_2]+[D_1,D_2]\cdot u_V,$$

где $C_1=V_0^m$, $C_2=V_0^m+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^{2k}V_0^{m-2k}s_V^{2k}$,

$$D_1=m\cdot V_0^{m-1},$$

$$D_2=m\cdot V_0^{m-1}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_m^{2k+1}\cdot V_0^{m-1-2k}\cdot s_V^{2k}.$$

По правилу обобщенного деления и умножения

$$P\in[P_1,P_2]=(R_0+u_R)([K_1,K_2]+[M_1,M_2]u_j)=$$
$$=[R_0K_1,R_0K_2]+u_R[K_1-M_2s_j,K_2+M_2s_j]+$$
$$+u_j[R_0M_1,R_0M_2] \qquad (3)$$

где $$K_1=C_1\cdot\frac{A_1-1}{C_2-1};$$

$$K_2=C_2\cdot\frac{A_2-1}{C_1-1}+D_2\cdot\frac{B_2\cdot(C_2-1)-D_1\cdot(A_1-1)}{(C_1-1)\cdot(C_1-1-D_2\cdot s_V)};$$

$$M_1=D_1\cdot\frac{A_1-1}{C_2-1}+C_1\cdot\frac{B_1\cdot(C_1-1)-D_2\cdot(A_2-1)}{(C_2-1)\cdot(C_2-1+D_2\cdot s_V)};$$

$$M_2=D_2\cdot\frac{A_2-1}{C_1-1}+C_2\cdot\frac{B_2\cdot(C_2-1)-D_1\cdot(A_1-1)}{(C_1-1)\cdot(C_1-1-D_2\cdot s_V)}.$$

Заменяя u_V и u_R на соответствующие интервалы, с учетом (3) получим окончательный результат:

$$P\in[P_1,P_2], \qquad (4)$$

где $P_1=R_0\cdot K_1-s_R\cdot(K_2+M_2\cdot s_V)-s_V\cdot R_0\cdot M_2$,

$P_2=R_0\cdot K_2+s_R\cdot(K_2+M_2\cdot s_V)+s_V\cdot R_0\cdot M_2$.

3. Численные исследования

В работе проведены численные исследования зависимости размеров интервалов для наращенной суммы и современной величины потока платежей от изменения границ интервалов входных данных. Расчет наращенной суммы и современной величины проводился по формулам (2) и (4).

Исходные данные и динамика изменения наращенной суммы и современной величины ренты в зависимости от изменения границ интервалов платежей и ставок, приведены в таблицах 1, 2.

Обозначения в таблицах: i_1, i_2 – нижняя и верхняя границы процентной ставки i_1=12 (табл. 1); n – срок ренты: n=4 (табл. 1), n=6 (табл. 2); m – количество начислений процентов в год: m=2 (табл. 1), m=3 (табл. 2); R_1, R_2 – нижняя и верхняя границы платежа; S_1g, S_2g – нижняя и верхняя границы наращенной суммы; A_1g, A_2g – нижняя и верхняя границы современной величины.

4. Заключение

Численные исследования показывают, что применение обобщенной интервальной математики позволяет получить оценки основных характеристик потоков платежей в условиях интервальной неопределенности, причем интервалы для современной величины и наращенной суммы имеют вполне приемлемые границы в достаточно широком диапазоне изменения границ интервалов исходных данных.

Таблица 1

Динамика наращенной суммы при изменении границ процентной ставки и платежей

Ставка	Платежи		Наращенная сумма	
i_2	R_1	R_2	S_1g	S_2g
12	251,67	251,67	1209,17	1209,17
12,03	251,665	251,675	1209,15	1209,76
12,06	251,66	251,68	1209,12	1210,35
12,09	251,655	251,685	1209,10	1210,94
12,12	251,65	251,69	1209,07	1211,54
12,15	251,645	251,695	1209,04	1212,13
12,18	251,64	251,7	1209,01	1212,73
12,21	251,635	251,705	1208,98	1213,33
12,24	251,63	251,71	1208,95	1213,93
12,27	251,625	251,715	1208,92	1214,53
12,3	251,62	251,72	1208,89	1215,14
12,33	251,615	251,725	1208,85	1215,74
12,36	251,61	251,73	1208,82	1216,35
12,39	251,605	251,735	1208,78	1216,96
12,42	251,6	251,74	1208,74	1217,58
12,45	251,595	251,745	1208,71	1218,19
12,48	251,59	251,75	1208,67	1218,81
12,51	251,585	251,755	1208,63	1219,42
12,54	251,58	251,76	1208,59	1220,04
12,57	251,575	251,765	1208,55	1220,67
12,6	251,57	251,77	1208,50	1221,29

Таблица 2

Динамика современной величины при изменении границ платежей и процентной ставки

Ставка		Платежи		Современная величина	
i_1	i_2	R_1	R_2	A_1g	A_2g
43	43	246	256	452,768	471,173
42,9	43,1	246,2	255,8	452,136	471,805
42,8	43,2	246,4	255,6	451,510	472,434
42,7	43,3	246,6	255,4	450,888	473,060
42,6	43,4	246,8	255,2	450,271	473,683
42,5	43,5	247	255	449,658	474,303
42,4	43,6	247,2	254,8	449,050	474,920
42,3	43,7	247,4	254,6	448,447	475,534
42,2	43,8	247,6	254,4	447,848	476,146
42,1	43,9	247,8	254,2	447,254	476,754
42	44	248	254	446,665	477,359
41,9	44,1	248,2	253,8	446,080	477,962
41,8	44,2	248,4	253,6	445,499	478,561
41,7	44,3	248,6	253,4	444,923	479,157
41,6	44,4	248,8	253,2	444,352	479,751
41,5	44,5	249	253	443,785	480,342
41,4	44,6	249,2	252,8	443,223	480,930
41,3	44,7	249,4	252,6	442,665	481,514
41,2	44,8	249,6	252,4	442,112	482,096
41,1	44,9	249,8	252,2	441,563	482,675

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин В.И.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело ЛТД, 1995.
2. *Домбровский В.В.* Интервальные методы анализа инвестиций // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): Тезисы докладов. Новосибирск, 1998. Ч. III. С. 133–134.
3. *Домбровский В.В.* Интервальные методы в управлении финансами // Международная конференция по проблемам управления: Тезисы докладов. М., 1999. Т. 2. С. 213–214.
4. *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981.
5. *Хансен Э.Р.* Вычисление нулей функции при помощи обобщенной интервальной арифметики // Интервальные вычисления. 1993. № 3. С.3–28.
6. *R.E Morre.* Interval analysis – englewood cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966.
7. *R.H. Dargel, F.R Lascalzo, T.H. Witt.* Automatic error bounds on real zeros of rational function // Comm. ACM. 1966. Vol. 19. № 11.
8. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
9. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 22 февраля 2000 г.