

Результаты численных расчетов

Исходные данные и результаты расчета чистого приведенного дохода приведены в таблице. Обозначения в таблице: i_1, i_2 – нижняя и верхняя границы ставки сравнения; n – срок инвестиционного процесса; R_i – платежи, заданные интервалами, причем со знаком «–» – инвести-

ционные расходы; W_{1g}, W_{2g} – нижняя и верхняя границы чистого приведенного дохода, рассчитанного с помощью обобщенной интервальной арифметики. Вычисления проводились по формуле (2).

Результаты численных расчетов подтверждают возможность и перспективность использования методов интервальной математики в финансовом анализе.

Т а б л и ц а 1

Динамика чистого приведенного дохода
при изменении границ ставки сравнения и платежей

Ставка в процентах		Срок	Платежи						Чистый приведенный доход	
i_1	i_2	n	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	W_{1g}	W_{2g}
48,64	49,36	5	-159,0	92,5	83,5	100,5	191	94,5	21,579	32,737
			-155,0	96,5	85,5	102,5	194	95,5		
48,68	49,32	5	-158,9	92,6	83,6	100,6	191,1	94,6	21,981	32,336
			-155,1	96,4	85,4	102,4	193,9	95,4		
48,72	49,28	5	-158,8	92,7	83,7	100,7	191,2	94,7	22,382	31,935
			-155,2	96,3	85,3	102,3	193,8	95,3		
48,76	49,24	5	-158,7	92,8	83,8	100,8	191,3	94,8	22,783	31,535
			-155,3	96,2	85,2	102,2	193,7	95,2		
48,8	49,2	5	-158,6	92,9	83,9	100,9	191,4	94,9	23,183	31,135
			-155,4	96,1	85,1	102,1	193,6	95,1		
48,84	49,16	5	-158,5	93	84	101	191,5	95	23,583	30,735
			-155,5	96	85	102	193,5	95		
48,88	49,12	5	-158,4	93,1	84,1	101,1	191,6	95,1	23,983	30,336
			-155,6	95,9	84,9	101,9	193,4	94,9		
48,92	49,08	5	-158,3	93,2	84,2	101,2	191,7	95,2	24,382	29,937
			-155,7	95,8	84,8	101,8	193,3	94,8		
48,96	49,04	5	-158,2	93,3	84,3	101,3	191,8	95,3	24,780	29,538
			-155,8	95,7	84,7	101,7	193,2	94,7		
49	49	5	-158,1	93,4	84,4	101,4	191,9	95,4	25,179	29,140
			-155,9	95,6	84,6	101,6	193,1	94,6		

ЛИТЕРАТУРА

1. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело ЛТД, 1995.
2. Хансен Э.Р. Вычисление нулей функции при помощи обобщенной интервальной арифметики // Интервальные вычисления. 1993. № 3. С. 3–28.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
4. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
5. Домбровский В.В. Интервальные методы анализа инвестиций // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): Тезисы докладов. Новосибирск, 1998. Ч. III. С. 133–134.
6. Домбровский В.В. Интервальные методы в управлении финансами // Международная конференция по проблемам управления: Тезисы докладов. М., 1999. Т. 2. С. 213–214.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 22 февраля 2000 г.

УДК 519.2

Р.Т. Валеев, А.Ф. Терпугов

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН САМУЭЛЬСОНА ПО «ЯПОНСКИМ СВЕЧКАМ»

Находятся и исследуются оценки параметра тренда и волатильности процесса изменения цены финансового актива в модели изменения цен Самуэльсона по ценам открытия и закрытия, а также по максимальной и минимальной цене за период торговой сессии.

Введение

Технические методы анализа фондового и финансового рынков получили в настоящее время очень широкое распространение. Наряду с методами, имеющими теоретическое обоснование (например, метод скользящего среднего, метод осцилляторов), имеется целый ряд методов, для которых техническое обоснование отсутствует. К таким методам отно-

сится и популярный метод «японских свечек». Несмотря на то, что этому методу посвящены монографии [1, 2], авторам не удалось найти в научной литературе каких-либо теоретических обоснований этого метода.

В работе [3] авторами получены точные распределения вероятностей для некоторых величин, характеризующих эти «свечки». В данной работе на основании [3] строятся и исследуются оценки параметров модели изменения цен Самуэльсона и подтверждаются результаты, содержащиеся в [3].

Описание модели

Пусть торговая сессия начинается в момент времени $t = 0$ и заканчивается в момент времени $t = T$. Цену финансового актива в момент времени t обозначим как S_t . Величинами, определяющими «японскую свечку», являются следующие: S_0 – цена открытия; S_t – цена закрытия; $S_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} S_t$ – максимальная цена за период сессии; $S_{\min} = \min_{0 \leq t \leq T} S_t$ – минимальная цена за период сессии. Для теоретического исследования перейдем от процесса S_t к процессу $h_t = \ln(S_t/S_0)$. Тогда «японская свеча» характеризуется величинами h_T , $h_{\max}$ и $h_{\min}$, так как $h_0 = 0$.

В дальнейшем для процесса h_t будет использоваться модель изменения цен Самуэльсона [4], когда считается, что процесс h_t является диффузионным случайным процессом, который записывается в виде $dh_t = \left(\mu_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw_t$, где μ_0 – коэффициент сноса; σ – коэффициент волатильности; w_t – стандартный винеровский случайный процесс. В этих предположениях в [3] получены точные выражения для совместных плотностей вероятностей пар $(h_{\max}, h_t)$ и $(h_{\min}, h_t)$. Они имеют вид

$$p(h_{\max}, h_t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tau^3}} (2h_{\max} - h_t) \times \exp\left(-\frac{(2h_{\max} - h_t)^2}{2\tau} + h_t \mu - \frac{\mu^2}{2} \tau\right), \quad (1)$$

$$p(h_{\min}, h_t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tau^3}} (h_{\min} - 2h_t) \times \exp\left(-\frac{(h_{\min} - 2h_t)^2}{2\tau} + h_t \mu - \frac{\mu^2}{2} \tau\right),$$

где параметры μ и τ

$$\mu = \left(\mu_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \quad \tau = \sigma^2 T. \quad (2)$$

Сами плотности вероятностей определены в следующих областях:

$$-\infty < h_t \leq h_{\max}, \quad h_{\max} \geq 0, \\ -\infty < h_{\min} \leq h_t, \quad h_{\min} \leq 0. \quad (3)$$

Оценка параметров μ и τ по методу максимального правдоподобия

Рассмотрим оценку параметров μ и τ по величинам h_t и $h_{\max}$. Для пары h_t и $h_{\min}$ результаты аналогичны. Оценки построены в предположении, что величины μ и τ не меняются от сессии к сессии. Пусть мы имеем n

«японских свечек», в которых значения $h_{\max}$ и h_t были $(h_{\max}^{(1)}, h_t^{(1)}; h_{\max}^{(2)}, h_t^{(2)}; \dots, h_{\max}^{(n)}, h_t^{(n)})$. Для сокращения дальнейших выкладок обозначим $H \equiv 2h_{\max} - h_t$, $h \equiv h_t$. Так как якобиан перехода $\frac{\partial(H, h)}{\partial(h_{\max}, h_t)} = 2$, то плотность вероятностей величин H и h имеет вид:

$$p(H, h) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \tau^3}} H \exp\left(-\frac{H^2}{2\tau} + h\mu - \frac{\mu^2}{2} \tau\right). \quad (4)$$

Выпишем область, в которой она определена. Заметим, что h меняется в пределах $-\infty < h < +\infty$. Что касается величины $H = 2h_{\max} - h_t$, то если $h_t < 0$, то $h_{\max} \geq 0$ (так как было $h_0 = 0$, а $h_{\max}$ не может быть меньше h_0) и, следовательно, $H \geq -h_t$. Если же $h_t > 0$, то $h_{\max} \geq h_t$ и $H \geq h_t$. Эти два условия можно объединить в одно и записать $H \geq |h_t|$. Таким образом, $p(H, h)$ определена в области $-\infty < h < +\infty, H \geq |h|$.

Имеется выборка (H_i, h_i) , $i = \overline{1, n}$. Тогда совместная плотность вероятностей этих величин есть $\prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \tau^3}} H_i \exp\left(-\frac{H_i^2}{2\tau} + h_i \mu - \frac{\mu^2}{2} \tau\right)$, и логарифм этого выражения равен

$$L = \sum_{i=1}^n \left(\ln H_i - \frac{3}{2} \ln \tau - \frac{H_i^2}{2\tau} + h_i \mu - \frac{\mu^2}{2} \tau \right) + \text{const.} \quad (5)$$

Найдем оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\tau}$ величины μ и τ методом максимального правдоподобия. Из условий

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0: \sum_{i=1}^n h_i - n\mu = 0 \quad \text{или} \quad \mu\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i; \quad (6)$$

если $\frac{\partial L}{\partial \tau} = 0$, то $-\frac{3n}{2\tau} + \frac{1}{\tau^2} \times \sum_{i=1}^n H_i^2 - n \frac{\mu^2}{2} = 0$.

Учитывая предыдущее соотношение, имеем

$$-\frac{3n}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 = 0,$$

откуда после упрощений получаем

$$\tau = \frac{1}{3n} \left[\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Соотношение (6) дает теперь

$$\mu = \frac{3 \sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2}, \quad (8)$$

и оценки $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$ параметров τ и μ по методу максимального правдоподобия имеют вид

$$\hat{\tau} = \frac{1}{3n} \left(\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 \right), \quad (9)$$

$$\hat{\mu} = \frac{3 \sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2}. \quad (10)$$

Точное распределение

Прежде чем исследовать эти оценки, выведем точную формулу для плотности вероятностей некоторых величин, которые будут указаны ниже.

Из (9) и (10) видно, что оценки $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$ зависят от двух комбинаций: $\sum_{i=1}^n h_i = h$ и $\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 = \eta$.

Выведем точную формулу для совместной плотности вероятностей этих величин.

Как уже указывалось выше, для отдельной свечки $p(H_i, h_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^3}} H_i \exp\left(-\frac{H_i^2}{2\tau} + h_i\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau\right)$.

Найдем $g(s, \omega) = M\left\{e^{-sH_i^2 + i\omega h_i}\right\}$ (11) представляющие собой преобразование Фурье по переменной h и преобразование Лапласа по комбинации H^2 от $p(H_i, h_i)$. Имеем,

$$g(s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h_i} dh_i \int_{|h_i|}^{\infty} e^{-sH_i^2} \frac{H_i}{\sqrt{2\pi\tau^3}} e^{-\frac{H_i^2}{2\tau} + h_i\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau} dH_i.$$

Вычисляя эти интегралы, получим

$$g(s, \omega) = \frac{1}{(1+2\tau s)^{3/2}} \times \exp\left(i\omega \frac{\mu\tau}{1+2\tau s} - \omega^2 \frac{\tau}{2(1+2\tau s)} - \frac{\mu^2\tau^2 s}{1+2\tau s}\right). \quad (12)$$

Обозначим $P = \sum_{i=1}^n H_i^2$, $h = \sum_{i=1}^n h_i$. Тогда по свойствам преобразований Лапласа и Фурье

$$G(s, \omega) = M\left\{e^{-sP + i\omega h}\right\} = g^n(s, \omega) = \frac{1}{(1+2\tau s)^{3n/2}} \times \exp\left(i\omega \frac{\mu\tau n}{1+2\tau s} - \omega^2 \frac{n\tau}{2(1+2\tau s)} - \frac{\mu^2\tau^2 s}{1+2\tau s}\right). \quad (13)$$

Обратное преобразование Фурье по переменной ω дает

$$\hat{G}(s, h) = \frac{1}{(1+2\tau s)^{3n/2} \sqrt{2\pi n\tau}} \times \exp\left(-\frac{(h - \mu\tau n)^2}{2\tau n} - \frac{h^2 s}{n}\right).$$

Найдем обратное преобразование Лапласа и получим плотность вероятностей величин P и h :

$$p(P, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\tau}} \exp\left(-\frac{(h - \mu\tau n)^2}{2\tau n}\right) \times$$

$$\times \frac{\left(P - \frac{h^2}{n}\right)^{\frac{3n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{3n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{P - \frac{h^2}{n}}{2\tau}\right). \quad (14)$$

Переходя к величине $\eta = \sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 = P - \frac{h^2}{n}$,

получим окончательно совместную плотность вероятностей величин h и η :

$$p(h, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\tau}} \exp\left(-\frac{(h - \mu\tau n)^2}{2\tau n}\right) \times \frac{\eta^{\frac{3n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{3n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\eta}{2\tau}\right), \quad (15)$$

откуда, в частности, видно, что η и h есть независимые случайные величины, причем h распределена нормально с математическим ожиданием $n\mu\tau$ и дисперсией $n\tau$.

Корректировка оценок и вычисление их характеристик

Выражение для $p(h, \eta)$ позволяет найти характеристики оценок и скорректировать их. Начнем с $\hat{\tau}$, которая, в новых обозначениях, будет иметь вид $\hat{\tau} = \eta/3n$. Вычисляя математическое ожидание, получим

$$M\{\hat{\tau}\} = \frac{1}{3n} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{\frac{3n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{3n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\eta}{2\tau}\right) d\eta = \frac{3n-1}{3n} \tau, \quad (16)$$

откуда видно, что полученная оценка является смещенной. Чтобы оценка $\hat{\tau}$ параметра τ была несмещенной, ее следует взять в виде

$$\hat{\tau} = \frac{\eta}{3n-1} = \frac{1}{3n-1} \left[\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Так как $M\{\hat{\tau}\} = \frac{(3n+1)(3n-1)}{(3n-1)^2} \tau^2 = \frac{3n+1}{3n-1} \tau^2$, то

$$D\{\hat{\tau}\} = \frac{2\tau^2}{3n-1}. \quad (18)$$

Перейдем к оценке $\hat{\mu}$ параметра μ , которая в новых переменных имеет вид $\hat{\mu} = 3h/\eta$. Для нее имеем

$$M\{\hat{\mu}\} = 3M\{h\}M\left\{\frac{1}{\eta}\right\} = \frac{\eta}{n-1}\mu, \quad (19)$$

откуда видно, что оценка также смещена. Скорректированная оценка $\hat{\mu}$ параметра μ

$$\hat{\mu} = 3 \frac{n-1}{n} \frac{h}{\eta} = 3 \frac{n-1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n H_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2} \quad (20)$$

является уже несмещенной оценкой. Далее

$$M\{\hat{\mu}\} = 9 \frac{(n-1)^2}{n^2} M\{h^2\} M\left\{\frac{1}{\eta^2}\right\} = \\ = \frac{3n-3}{3n-5} \mu^2 + \frac{3n-3}{n(3n-5)} \frac{1}{\tau},$$

$$\text{так что } D\{\hat{\mu}\} = \frac{2}{3n-5} \mu^2 + \frac{3n-3}{n(3n-5)} \frac{1}{\tau}. \quad (21)$$

Наконец, так как

$$M\{\mu\tau\} = \frac{3n-3}{n(3n-1)} M\{h\} = \frac{3n-3}{3n-1} \mu\tau,$$

$$\text{то } \text{cov}(\hat{\mu}, \hat{\tau}) = -\frac{2}{3n-1} \mu\tau. \quad (22)$$

Отсюда видно, что оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\tau}$ коррелированы с коэффициентом корреляции

$$\text{corr}(\hat{\mu}, \hat{\tau}) = -\frac{2\mu}{\sqrt{2\left(2\frac{3n-1}{3n-5}\mu^2 + \frac{3(n-1)(3n-1)}{n(3n-5)}\frac{1}{\tau}\right)}}, \quad (23)$$

который при $n \rightarrow \infty$ сходится к предельному значению

$$\text{corr}(\hat{\mu}, \hat{\tau}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{2\mu^2\tau}}}. \quad (24)$$

Сходимость оценок почти наверное

Заметим, что h_i есть независимые одинаково распределенные случайные величины, так же как и H_i . Поэтому, по теореме Хинчина, при $n \rightarrow \infty$ почти наверное

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \rightarrow M\{h_i\} = \mu\tau, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^2 \rightarrow M\{H_i^2\} = \mu^2\tau^2 + 3\tau.$$

$$\text{Представляя оценку } \hat{\tau} = \frac{n}{3n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \right)^2 \right],$$

мы видим, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость почти наверное $\hat{\tau} \xrightarrow{mn} \tau$.

Аналогично, представляя

$$\hat{\mu} = 3 \frac{n-1}{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \right)^2},$$

видим, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость почти наверное $\hat{\mu} \xrightarrow{mn} \mu$.

Асимптотическая нормальность оценок

Докажем, что построенные нами оценки являются асимптотическими нормальными. Имея в виду их несмещенность и выражения для дисперсий, перейдем к их величинам

$$x = \left(\frac{\eta}{3n} - \tau \right) \sqrt{\frac{3n}{2\tau^2}} = \frac{\eta}{\tau\sqrt{6n}} - \sqrt{\frac{3n}{2}}, \quad (25) \\ y = \left(3\frac{h}{\eta} - \mu \right) \sqrt{n},$$

так что

$$\eta = (x\sqrt{6n} + 3n)\tau, \quad (26)$$

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\sqrt{n}} + \mu \right) (x\sqrt{6n} + 3n)\tau. \quad (27)$$

Для этого перехода

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \tau\sqrt{6n}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt{n}} (x\sqrt{6n} + 3n\tau) \quad (28)$$

Рассмотрим сначала сомножитель, зависящий только от η в выражении для $p(h, \eta)$. После умножения на $\partial \eta / \partial x$

$$I_2 = \tau\sqrt{6n} \frac{\eta^{\frac{3n-3}{2}}}{(2\tau)^{\frac{3n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right)} e^{-\frac{\eta}{2\tau}}. \quad (29)$$

Логарифмируя и подставляя вместо η его выражение через x , получим

$$\ln I_2 = \ln \tau + \frac{1}{2} \ln(6n) + \frac{3n-3}{2} \ln(x\tau\sqrt{6n} + 3n\tau) - \\ - \frac{3n-1}{2} \ln(2\tau) - \ln \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right) - \frac{x\tau\sqrt{6n} + 3n\tau}{2\tau}.$$

Далее имеем

$$\frac{3n-3}{2} \ln(x\tau\sqrt{6n} + 3n\tau) = \frac{3n-3}{2} \ln(3n\tau) + \\ + \frac{3n-3}{2} \ln\left(1 + \frac{x\sqrt{6n}}{3n}\right) = \frac{3n-3}{2} \ln(3n\tau) + \\ + \frac{3n-3}{2} \left(\frac{x\sqrt{6n}}{3n} - \frac{x^2}{2} \frac{6n}{9n^2} + \dots \right).$$

Поэтому

$$\ln I_2 = \frac{1}{2} \ln(6n) + \frac{3n-3}{2} \ln(3n) - \frac{3n-1}{2} \ln(2) - \\ - \ln \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right) - \frac{3n}{2} + \left[\ln \tau + \frac{3n-3}{2} \ln \tau - \frac{3n-1}{2} \ln \tau \right] + \\ + \left[\frac{3n-3}{2 \cdot 3n} x\sqrt{6n} - \frac{3n-3}{2} \frac{x^2}{2} \frac{6n}{9n^2} - \frac{x\sqrt{6n}}{2} \right].$$

Слагаемые, содержащие τ , сокращаются. Группа слагаемых, содержащая x , при $n \rightarrow \infty$ стремится к $-x^2/2$. Наконец, используя асимптотическое выражение для $\ln \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right)$, можно показать, что первая группа слагаемых, зависящая только от n , при $n \rightarrow \infty$ стремится к $-\ln \sqrt{2\pi}$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\ln I_2 \rightarrow -\frac{x^2}{2} - \ln \sqrt{2\pi}, \quad I_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь предельный переход в том сомножителе $p(h, \eta)$, который зависит лишь от h . Умноженный на $\partial h / \partial y$ он имеет вид

$$I_1 = \frac{x\sqrt{6n} + 3n\tau}{3\sqrt{n}\sqrt{2\pi}\tau n} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2\pi\tau} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{y}{\sqrt{n}} + \mu \right) (x\sqrt{6n} + 3n)\tau - \mu\tau \right]^2\right). \quad (31)$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{6n} + 3n\tau}{3\sqrt{n}\sqrt{2\pi\tau}} = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\tau} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{y}{\sqrt{n}} + \mu \right) \times \right. \\ \left. \times \left(x\sqrt{6n} + 3n \right) \tau - n\mu\tau \right]^2 = \frac{\tau}{2} \left(y^2 + \frac{2}{3} x\mu\sqrt{6n} + \frac{2}{3} \mu^2 x^2 \right)$,
так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau}{2} \left(\frac{2}{3} \mu^2 x^2 + \frac{2}{3} x\mu\sqrt{6} + y^2 \right) \right). \quad (32)$$

Объединяя все, получаем, что для плотности вероятностей $p(x, y)$ величин (x, y) в пределе $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x, y) = \frac{\tau}{2\pi} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left[\frac{2}{3} \mu^2 \tau + 1 \right] x^2 + \frac{2}{3} x\mu\sqrt{6\tau} + y^2 \tau \right) \right), \quad (33)$$

что говорит об асимптотической нормальности величин x, y и об асимптотической нормальности оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$.

Отметим еще, что для ковариационной матрицы R величин x и y при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \mu^2 \tau + 1 & \frac{\sqrt{6}}{3} \mu \tau \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \mu \tau & \tau \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\mu \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} \mu^2 + \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

что полностью соответствует ковариации и дисперсиям оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$.

Доверительные интервалы для неизвестных параметров

Рассмотрим вопрос о доверительных границах для неизвестных параметров. Проще всего это сделать для параметра τ . Величина $z = \eta/\tau$ имеет плотность вероятностей

$$p(z) = \frac{z^{\frac{3n-1}{2}-1}}{2^{\frac{3n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{3n-1}{2}\right)} e^{-\frac{z}{2}}, \quad (35)$$

т.е. z имеет χ^2 распределение с числом степеней свободы $f = 3n - 1$.

Пусть α есть доверительный уровень. Найдем $C_1(f, \alpha)$ и $C_2(f, \alpha)$ из условия

$$P\{z < C_1(f, \alpha)\} = \frac{\alpha}{2}, P\{z > C_2(f, \alpha)\} = \frac{\alpha}{2}. \quad (36)$$

Сами значения $C_1(f, \alpha)$ и $C_2(f, \alpha)$ могут быть найдены, например, из таблиц. Тогда с вероятностью $(1 - \alpha)$ верно неравенство $C_1(f, \alpha) \leq z \leq C_2(f, \alpha)$. Так

как $\hat{\tau} = \eta / (3n - 1)$ и $z = \frac{\eta}{\tau} = (3n - 1) \frac{\hat{\tau}}{\tau}$, то с вероятностью $(1 - 2\alpha)$ $C_1(f, \alpha) \leq (3n - 1) \frac{\hat{\tau}}{\tau} \leq C_2(f, \alpha)$, откуда получается доверительный интервал для параметра τ :

$$\hat{\tau} \frac{3n-1}{C_2(f, \alpha)} \leq \tau \leq \hat{\tau} \frac{3n-1}{C_1(f, \alpha)}. \quad (37)$$

При больших η можно воспользоваться нормальной аппроксимацией; тогда доверительный интервал для параметра τ можно найти следующим образом: определить g_α как решение уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{g_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\alpha}{2}. \quad (38)$$

Тогда с вероятностью $((1 - \alpha) \frac{|\hat{\tau} - \tau|}{\tau \sqrt{\frac{2}{3n}}}) \leq g_\alpha$, откуда

получаем доверительный интервал для τ :

$$\frac{\hat{\tau}}{1 + g_\alpha \sqrt{\frac{2}{3n}}} \leq \tau \leq \frac{\hat{\tau}}{1 - g_\alpha \sqrt{\frac{2}{3n}}}. \quad (39)$$

При нахождении доверительного интервала для параметра μ можно воспользоваться нормальной аппроксимацией. Так как при $n \gg 1$

$$D(\hat{\mu}) = \left(\frac{2}{3} \mu^2 + \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{n} \quad (40)$$

и имеет место сходимость оценок почти наверное, то доверительный интервал для параметра μ имеет вид

$$\mu = \hat{\mu} \pm g_\alpha \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \hat{\mu}^2 + \frac{1}{\hat{\tau}} \right)}. \quad (41)$$

Все результаты для оценок по h_t и $h_{\min}$ совершенно аналогичны полученным выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Nison. Japanese candlestick charting techniques // New York: Institute of Finance, 1991. 315 p.
2. S. Nison. Beyond candlesticks // New York: John Wiley, 1994. 280 p.
3. Валеев Р.Т., Тертугов А.Ф. // Изв. вузов. Физика. 2000. № 4.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.