фициент дохода, средний остаток, текстовый комментарий (содержит всю доступную клиентам информацию о данном продукте).

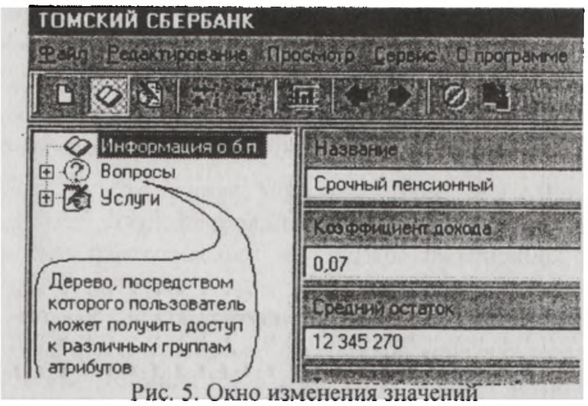

Рис. 5. Окно изменения значений атрибутов банковского продукта

Узел «Вопросы» обеспечивает доступ к атрибуту «множество вопросов», а его дочерние узлы обеспечивают доступ к атрибуту «множества вариантов ответа на вопросы», не исключающих возможности предложения этого продукта. Узел «Услуги» обеспечивает доступ к атрибуту «множество оказываемых услуг». Доступ к остальным атрибутам осуществляется аналогично.

Система реализована в среде Delphi [1]. Для создания и работы с базой данных использовалась СУБД Paradox [2]. Эксплуатация системы предполагает обязательную периодическую «подстройку» естественно изменяющихся со временем атрибутов, характеризующих банковские продукты. Кроме того, необходимо учитывать изменения в порядке обслуживания клиентов по вкладам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дарахвелидзе П.Г., Марков Е.П.* Программирование в Delphi 4. СПб.: БХВ–Санкт-Петербург, 1999. 864 с.
2. *Шумаков П.В.* Delphi 3 и разработка приложений баз данных. М.: НОЛИДЖ, 1998. 704 с.

Статья представлена кафедрой теоретической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 февраля 2000 г.

УДК 336.763:336.67(075.4)

Н.С. Дёмин, М.Ю. Шиширин

ЕВРОПЕЙСКИЙ ОПЦИОН С РИСКОВЫМИ ЦЕННЫМИ БУМАГАМИ ДВУХ ТИПОВ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

В работе осуществлен расчет стоимости опциона, портфеля и капитала для дискретного (B, S)-рынка ценных бумаг в случае рисковых активов двух типов. Проведено исследование свойств портфеля в общем случае и конкретизация результатов для стандартного Европейского опциона.

1.Постановка задачи

Рассмотрим финансовый (B,S)-рынок [1–3], в котором обращаются ценные бумаги двух типов: безрисковые (облигации) и рисковые (акции). Предположим, что на рынке обращаются два типа акций. Пусть (B_0, B_1,…, B_n) и $(S_0^1, S_1^1, ..., S_N^1)$, $(S_0^2, S_1^2, ..., S_N^2)$ – эволюции цен соответственно облигаций и акций двух различных типов в промежутке времени [0, N]. Предполагается, что $\frac{B_{n+1}}{B_n} = \rho, \frac{S_{n+1}^1}{S_n^1} = \xi_{n+1}^1, \frac{S_{n+1}^2}{S_n^2} = \xi_{n+1}^2, n = 0,..., N$, где $\rho > 1$ – некоторая постоянная, а величины ξ_k^1 и ξ_k^2 могут соответственно принимать только два значения: d_1, u_1 и d_2, u_2. Пусть $u_i > 1$ – сдвиг цены акции вверх от текущей цены, а $d_i < 1$ – сдвиг вниз, i=1, 2. В рамках использовавшихся обозначений цена акции в момент n+1 может быть $S_{n+1}^i = S_n^i u_i$, либо $S_{n+1}^i = S_n^i d_i$. Будем предполагать, что $u_i > \rho > d_i$. Это необходимо для предотвращения арбитража. Мы имеем единственную траекторию возрастания цены облигации $(B_0, B_0\rho, ..., B_0\rho^N)$ и 2^N возможных эволюций цены каждого типа акций $(S_0^i, S_0^i\xi_1^i, ..., S_0^i\xi_1^i\xi_2^i..\xi_N^i)$, i=1, 2. Важно отметить, что мы не задаем, как в [2, 3], никакой вероятностной меры на множестве траекторий $\{(S_0^i, S_1^i, ..., S_N^i)\}$ т.е. природа процесса изменения цен может быть любой.

Обладая капиталом X_n в момент времени n, мы можем распределить его между бумагами указанных типов. Пусть β_n и γ_n^1, γ_n^2 – соответственно количество облигаций и акций разных типов, суммарная стоимость которых равна

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n^1 S_n^1 + \gamma_n^2 S_n^2. \qquad (1)$$

Определение. Тройку $(\beta_n, \gamma_n^1, \gamma_n^2)$ называют *портфелем ценных бумаг* или просто *портфелем*. В следующий момент времени цена этого портфеля становится равной

$$X_{n+1} = \beta_n B_{n+1} + \gamma_n^1 S_{n+1}^1 + \gamma_n^2 S_{n+1}^2. \qquad (2)$$

Можно перераспределить этот капитал, образовав новый портфель $(\beta_{n+1}, \gamma_{n+1}^1, \gamma_{n+1}^2)$. Соблюдая условие самофинансирования $X_{n+1} = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1}^1 S_{n+1}^1 + \gamma_{n+1}^2 S_{n+1}^2$, в следующий момент времени получаем капитал $X_{n+2} = \beta_{n+1} B_{n+2} + \gamma_{n+1}^1 S_{n+2}^1 + \gamma_{n+1}^2 S_{n+2}^2$. Формирования капитала повторяется аналогичным образом. Цель игры на финансовом рынке – достижение неравенства $X_N \geq f(S_0^1, S_1^1, ..., S_N^1, S_0^2, S_1^2, ..., S_N^2)$, где N – срок действия опциона; $f(\bullet)$ – функция выплат. Продавец опциона, взимая за него определенную плату в начальный момент времени, обязуется в момент предъявления выплатить сумму, не меньшую $f(S_0^1, S_1^1, ..., S_N^1, S_0^2, S_1^2, ..., S_N^2)$. Чтобы обеспечить эту выплату, он должен играть, меняя содержание портфеля в зависимости от эволюции цен.

Определение. *Справедливой ценой опциона* называется минимальный начальный капитал $X_0 = C_N$, который позволяет продавцу добиться тождества $X_N \equiv f(S_0^1, S_1^1, ..., S_N^1, S_0^2, S_1^2, ..., S_N^2)$, если он следует оптимальной стратегии игры. Задача состоит в том, чтобы сделать расчет справедливой цены Европейского опциона с рисковыми ценными бумагами двух типов, оптимального портфеля ценных бумаг и капитала для этой модели, исследовать свойства этого портфеля и конкретизировать результаты для стандартного Европейского опциона.

2. Расчет портфеля, капитала и справедливой цены опциона

В качестве функции выплат будем рассматривать аддитивную функцию вида

$$f(\bullet) = f(S_N^1, S_N^2) = f^1(S_N^1) + f^2(S_N^2). \tag{3}$$

Лемма. Для того, чтобы обеспечить равенство

$$X_N = f(S_n^1, S_N^2), \tag{4}$$

необходимо в предшествующий момент иметь капитал

$$X_{N-1} = \rho^{-1}(pf^1(S_{N-1}^1 u_1) + qf^1(S_{N-1}^1 d_1)) + \\ + \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2}, \tag{5}$$

где
$$p = \frac{\rho - d_1}{u_1 - d_1}, q = 1 - p = \frac{u_1 - \rho}{u_1 - d_1}, \tag{6}$$

и этот капитал необходимо распределить между облигациями и акциями в соответствии с портфелем

$$\beta_{N-1} = \frac{\left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2}\right)u_1 - f^1(S_{N-1}^1 u_1)}{B_{N-1}(u_1 - \rho)}, \tag{7}$$

$$\gamma_{N-1}^1 = \frac{f^1(S_{N-1}^1 u_1) - \left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2}\right)\rho}{S_{N-1}^1(u_1 - \rho)}, \tag{7'}$$

$$\gamma_{N-1}^2 = \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2 S_{N-1}^2}. \tag{7''}$$

Доказательство. Из (1), (2), (4) получаем, что

$$X_{N-1} = \beta_{N-1} B_{N-1} + \gamma_{N-1}^1 S_{N-1}^1 + \gamma_{N-1}^2 S_{N-1}^2, \tag{8}$$

$$X_N = f(S_N^1, S_N^2) = \beta_{N-1} B_{N-1}\rho + \gamma_{N-1}^1 S_{N-1}^1 \xi_N^1 + \\ + \gamma_{N-1}^2 S_{N-1}^2 \xi_N^2. \tag{9}$$

Принимая во внимание (3), можем положить

$$f^1(S_{N-1}^1 \xi_N^1) = \beta_{N-1} B_{N-1}\rho + \gamma_{N-1}^1 S_{N-1}^1 \xi_N^1, \tag{10}$$

$$f^2(S_{N-1}^2 \xi_N^2) = \gamma_{N-1}^2 S_{N-1}^2 \xi_N^2. \tag{11}$$

Из (8), (10), (11) следует для портфеля $(\beta_{N-1}, \gamma_{N-1}^1, \gamma_{N-1}^2)$ система трех уравнений:

$$\begin{cases} B_{N-1}\beta_{N-1} + S_{N-1}^1\gamma_{N-1}^1 + S_{N-1}^2\gamma_{N-1}^2 = X_{N-1}, & (12) \\ \rho B_{N-1}\beta_{N-1} + S_{N-1}^1\xi_N^1\gamma_{N-1}^1 = f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1), & (13) \\ S_{N-1}^2\xi_N^2\gamma_{N-1}^2 = f^2(S_{N-1}^2\xi_N^2). & (14) \end{cases}$$

Из (14) следует
$$\gamma_{N-1}^2 = \frac{f^2(S_{N-1}^2\xi_N^2)}{S_{N-1}^2\xi_N^2}. \tag{15}$$

Формулу (15) подставим в (12) и получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} B_{N-1}\beta_{N-1} + S_{N-1}^1\gamma_{N-1}^1 = X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2\xi_N^2)}{\xi_N^2}, \\ \rho B_{N-1}\beta_{N-1} + S_{N-1}^1\xi_N^1\gamma_{N-1}^1 = f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1). \end{cases} \tag{16}$$

Решая систему (16), получим

$$\beta_{N-1} = \frac{\left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2\xi_N^2)}{\xi_N^2}\right)\xi_N^1 - f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1)}{B_{N-1}(\xi_N^1 - \rho)}, \tag{17}$$

$$\gamma_{N-1}^1 = \frac{f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1) - \left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2\xi_N^2)}{\xi_N^2}\right)\rho}{S_{N-1}^1(\xi_N^1 - \rho)}. \tag{18}$$

Условия независимости $(\beta_{N-1}, \gamma_{N-1}^1, \gamma_{N-1}^2)$ от ξ_N^1, ξ_N^2 записываются следующим образом:

$$\frac{\left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2}\right)u_1 - f^1(S_{N-1}^1 u_1)}{B_{N-1}(u_1 - \rho)} = \\ = \frac{\left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2 d_2)}{d_2}\right)d_1 - f^1(S_{N-1}^1 d_1)}{B_{N-1}(d_1 - \rho)}, \tag{19}$$

$$\frac{f^1(S_{N-1}^1 u_1) - \left(X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2}\right)\rho}{S_{N-1}^1(u_1 - \rho)} = \\ = \frac{f^1(S_{N-1}^1 d_1) - \left(X_{N-1} - \frac{f_2(S_{N-1}^2 d_2)}{d_2}\right)\rho}{S_{N-1}^1(d_1 - \rho)}, \tag{20}$$

$$\frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{S_{N-1}^2 u_2} = \frac{f^2(S_{N-1}^2 d_2)}{S_{N-1}^2 d_2}. \tag{21}$$

Из (21) следует

$$\frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2} = \frac{f^2(S_{N-1}^2 d_2)}{d_2}. \tag{22}$$

Соотношения (19), (20) с учетом (22) дают для X_{N-1} одно и то же выражение вида

$$X_{N-1} - \frac{f^2(S_{N-1}^2 u_2)}{u_2} = \rho^{-1}\left(\frac{\rho - d_1}{u_1 - d_1} f^1(S_{N-1}^1 u_1) + \\ + \frac{u_1 - \rho}{u_1 - d_1} f^1(S_{N-1}^1 d_1)\right). \tag{23}$$

Тем самым (5) следует из (23) с учетом (6). Так как $(\beta_{N-1}, \gamma_{N-1}^1, \gamma_{N-1}^2)$ не зависит от ξ_N^1, ξ_N^2, то из (15), (17) и (18) получаем при $\xi_N^1 = u_1$ и $\xi_N^2 = u_2$ требуемый вид оптимального портфеля. Лемма доказана.

Теорема 1. Стоимость опциона C_N и портфель $(\beta_k, \gamma_k^1, \gamma_k^2)$ в модели с двумя рисковыми активами определяются формулами:

$$C_N = \rho^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}p^j q^{N-1} f^1(S_0^1 u_1^j d_1^{N-j}) +$$

$$+\frac{f^2(S_0^2u_2^N)}{u_2^N}, \quad (24)$$

$$\beta_k=\frac{\left(X_k-\frac{f_{k+1}^2(S_k^2u_2)}{u_2}\right)u_1-f_{k+1}^1(S_k^1u_1)}{B_k(u_1-\rho)}, \quad (25)$$

$$\gamma_k^1=\frac{f_{k+1}^1(S_k^1u_1)-\left(X_k-\frac{f_{k+1}^2(S_k^2u_2)}{u_2}\right)\rho}{S_k^1(u_1-\rho)}, \quad (25')$$

$$\gamma_k^2=\frac{f_{k+1}^2(S_k^2u_2)}{u_2S_k^2}, \quad (25'')$$

где

$$f_k^1(S)=\rho^{-(N-k)}\sum_{j=0}^{N-k}\binom{N-k}{j}p^jq^{N-k-j}f^1(Su_1^jd_1^{N-k-j}),$$

$$f_k^2(S)=f^2(Su_2^{N-k})/u_2^{N-k}.$$

Доказательство. Положим

$$f_{N-1}(S^1,S^2)=\rho^{-1}(pf^1(S^1u_1)+qf^1(S^1d_1))+$$

$$+\frac{f^2(S^2u_2)}{u_2}=f_{N-1}^1(S^1)+f_{N-1}^2(S^2), \quad (26)$$

где $\quad f_{N-1}^1(S^1)=\rho^{-1}(pf^1(S^1u_1)+qf^1(S^1d_1)), \quad (27)$

$$f_{N-1}^2(S^2)=f^2(S^2u_2)/u_2. \quad (27')$$

Из (23), (26), (27), (27') с учетом (6) следует

$$X_{N-1}=f_{N-1}(S_{N-1}^1,S_{N-1}^2)=f_{N-1}^1(S_{N-1}^1)+f_{N-1}^2(S_{N-1}^2). \quad (28)$$

Тем самым мы получили функцию выплат с моментом предъявления N–1. Чтобы обеспечить (28), мы должны, согласно лемме, в момент N–2 иметь капитал

$$X_{N-2}=\rho^{-1}(pf_{N-1}^1(S_{N-2}^1u_1)+qf_{N-1}^1(S_{N-2}^1d_1))+$$

$$+\frac{f_{N-1}^2(S_{N-2}^2u_2)}{u_2}.$$

Подставим выражение для f_{N-1}^1, f_{N-1}^2 через f^1, f^2:

$$X_{N-2}=\rho^{-2}(p^2f^1(S_{N-2}^1u_1^2)+2pqf^1(S_{N-2}^1u_1d_1)+$$

$$+q^2f^1(S_{N-2}^1d_1^2))+\frac{f^2(S_{N-2}^2u_2^2)}{u_2^2}=$$

$$=f_{N-2}(S_{N-2}^1,S_{N-2}^2), \quad (29)$$

где $f_{N-2}(S^1,S^2)=\rho^{-2}(p^2f^1(S^1u_1^2)+2pqf^1(S^1u_1d_1)+$

$$+q^2f^1(S^1d_1^2))+\frac{f^2(S^2u_2^2)}{u_2^2}=$$

$$=\rho^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}p^jq^{2-j}f^1(S^1u_1^jd_1^{2-j})+\frac{f^2(S^2u_2^2)}{u_2^2}. \quad (30)$$

Рассуждая по индукции, получаем в соответствии с (29), (30), что для обеспечения выплат в момент окончания контракта мы должны иметь в момент k капитал

$$X_k=f_k(S_k^1,S_k^2)=f_k^1(S_k^1)+f_k^2(S_k^2), \quad (31)$$

где $\quad f_k(S^1,S^2)=\rho^{-(N-k)}\sum_{j=0}^{N-k}\binom{N-k}{j}p^jq^{N-k-j}f^1\times$

$$\times(S^1u_1^jd_1^{N-k-j})+\frac{f^2(S^2u_2^{N-k})}{u_2^{N-k}}. \quad (32)$$

По аналогии с (12), (13), (14) составим систему

$$\begin{cases}B_k\beta_k+S_k^1\gamma_k^1+S_k^2\gamma_k^2=X_k, & (33)\\ \rho B_k\beta_k+S_k^1\xi_{k+1}^1\gamma_k^1=f_{k+1}^1(S_k^1\xi_{k+1}^1), & (34)\\ S_k^2\xi_{k+1}^2\gamma_k^2=f_{k+1}^2(S_k^2\xi_{k+1}^2). & (35)\end{cases}$$

Из (33)-(35) при $\xi_{k+1}^1=u_1$ и $\xi_{k+1}^2=u_2$ следует (25), (25'), (25"). В частности, в соответствии с (31) и (32) в начальный момент времени необходимо иметь капитал

$$X_0=\rho^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}p^jq^{N-j}f^1(S_0^1u_1^jd_1^{N-j})+$$

$$+\frac{f^2(S_0^2u_2^N)}{u_2^N}. \quad (36)$$

$X_0=C_N$ есть справедливая цена опциона в модели с двумя типами рисковых активов. Теорема доказана.

3. Исследование свойств портфеля

Определение. Функция $y=f(x)$ является *выпуклой* (*вниз*) на промежутке $[a,b]$, если

$$\forall\ \lambda\in[0,1] \text{ и } \forall\ x_1,x_2\in[a,b]:$$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \quad (37)$$

Функция $y=f(x)$ является *вогнутой* (*выпуклой вверх*) на промежутке $[a,b]$, если

$$\forall\ \lambda\in[0,1] \text{ и } \forall\ x_1,x_2\in[a,b]:$$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \quad (38)$$

Обозначим: $\quad S_k^1u_1=y, \quad (39)$

$$d_1/u_1=\lambda, \quad (40)$$

т.е. $\quad 0<\lambda<1. \quad (41)$

Пусть функция $f^1(\bullet)$ выпуклая, $f^1(0)=0$. Тогда, согласно (32), f_{k+1}^1 также выпуклая, $f_{k+1}^1(0)=0$ и, воспользовавшись (37), (41), получим

$$f_{k+1}^1(\lambda y)=f_{k+1}^1(\lambda y+(1-\lambda)0)\le$$

$$\le\lambda f_{k+1}^1(y)+(1-\lambda)f_{k+1}^1(0)=\lambda f_{k+1}^1(y). \quad (42)$$

Из (39), (40), (42) получим

$$d_1\ f_{k+1}^1(S_k^1u_1)\ge u_1\ f_{k+1}^1(S_k^1d_1). \quad (43)$$

Теорема 2. Для γ_k^2 имеет место свойство

$$\gamma_k^2\ge 0,\ \forall k=\overline{0;N-1}. \quad (44)$$

Если функция $f^1(\bullet)$ не убывает, то имеют место следующие свойства:

всегда – $\quad \gamma_k^1\ge 0; \quad (45)$

если функция $f^1(\bullet)$ выпуклая –

$$\beta_k\le 0,\ \forall k=\overline{0;N-1}; \quad (46)$$

если функция $f^1(\bullet)$ вогнутая –

$$\beta_k\ge 0,\ \forall k=\overline{0;N-1}. \quad (47)$$

Доказательство. Согласно теореме 1 капитал X_k можно представить в виде

$$X_k=\rho^{-1}(pf_{k+1}^1(S_k^1u_1)+qf_{k+1}^1(S_k^1d_1))+\frac{f_{k+1}^2(S_k^2u_2)}{u_2}. \quad (48)$$

Подстановка (48) в (25)-(25") дает

$$\beta_k=\frac{u_1\rho^{-1}(pf_{k+1}^1(S_k^1u_1)+qf_{k+1}^1(S_k^1d_1))}{B_k(u_1-\rho)}-\frac{f_{k+1}^1(S_k^1u_1)}{B_k(u_1-\rho)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{u_1 p}{\rho}-1\right)f^1_{k+1}(S^1_k u_1)+\frac{u_1 q}{\rho}f^1_{k+1}(S^1_k d_1)}{B_k(u_1-\rho)}, \qquad (49)$$

$$\gamma^1_k=\frac{f^1_{k+1}(S^1_k u_1)-pf^1_{k+1}(S^1_k u_1)-qf^1_{k+1}(S^1_k d_1)}{S^1_k(u_1-\rho)}=$$

$$=\frac{q(f^1_{k+1}(S^1_k u_1)-f^1_{k+1}(S^1_k d_1))}{S^1_k(u_1-\rho)}, \qquad (50)$$

$$\gamma^2_k=\frac{f^2_{k+1}(S^2_k u_2)}{u_2 S^2_k}. \qquad (51)$$

Так как $q>0, S^1_k>0, u_1-\rho>0, u_1>d_1$ и $f^1_{k+1}(S^1_k u_1)-f^1_{k+1}(S^1_k d_1)\ge 0$, что следует из неубывания функции $f^1(\bullet)$, то из (50) следует, что $\gamma^1_k\ge 0$. Тем самым свойство (45) доказано.

Из (49) и (43) можно получить неравенство

$$\beta_k=\frac{\left(\frac{u_1 p}{\rho}-1\right)f^1_{k+1}(S^1_k u_1)+\frac{u_1 q}{\rho}f^1_{k+1}(S^1_k d_1)}{B_k(u_1-\rho)}\le$$

$$\le\frac{\left(\frac{u_1 p}{\rho}-1\right)f^1_{k+1}(S^1_k u_1)+\frac{d_1 q}{\rho}f^1_{k+1}(S^1_k u_1)}{B_k(u_1-\rho)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{u_1 p}{\rho}-1+\frac{d_1 q}{\rho}\right)f^1_{k+1}(S^1_k u_1)}{B_k(u_1-\rho)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{u_1 p+d_1 q}{\rho}-1\right)f^1_{k+1}(S^1_k u_1)}{B_k(u_1-\rho)}=0,$$

т.к. $u_1 p+d_1 q=u_1\frac{\rho-d_1}{u_1-d_1}+d_1\frac{u_1-\rho}{u_1-d_1}=\rho$, т.е. получаем (46).

Пусть функция $f^1(\bullet)$ вогнутая, $f^1(0)=0$. Тогда, согласно (32), f^1_{k+1} также вогнутая, $f^1_{k+1}(0)=0$ и, следовательно, с учетом (32) аналогично (43) можно получить

$$d_1\, f^1_{k+1}(S^1_k u_1)\le u_1\, f^1_{k+1}(S^1_k d_1). \qquad (52)$$

Дальнейшее доказательство (47) повторяет доказательство (46). Из (51) следует (44). Теорема 2 доказана.

4. Стандартный Европейский опцион

Теорема 3. Пусть на (B, S)-рынке для модели с двумя рисковыми активами рассматривается *опцион купли Европейского типа* с функцией выплаты

$$f(S^1_N,S^2_N)=f^1(S^1_N)+f^2(S^2_N), (53)$$

где $f^2(S^2_N)=(S^2_N-K_2)^+$; $f^1(S^1_N)=(S^1_N-K_1)^+$;

$(S^i_N-K_i)^+=\max(0,\ S^i_N-K_i),\ i=1,2.$

Справедливая стоимость опциона C_N задается формулой

$$C_N=S^1_0 B(j_0,N;\tilde p)-K_1\rho^{-N}B(j_0,N;p)+$$

$$+\frac{(S^2_0 u_2^N-K_2)^+}{u_2^N}, \qquad (54)$$

где $$B(i,N;p)=\sum_{j=i}^{N}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}, \qquad (55)$$

$$j_0=1+\left[\ln\frac{K_1}{S^1_0 d_1^N}\Big/\ln\frac{u_1}{d_1}\right],\ j_0<N, \qquad (56)$$

а [D] – целая часть D.

Доказательство. Из (36), (53) следует

$$X_0=\rho^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}(S^1_0 u_1^j d_1^{N-j}-K_1)^++$$

$$+\frac{(S^2_0 u_2^N-K_2)^+}{u_2^N}. \qquad (57)$$

Пусть j_0 – то наименьшее целое, для которого

$$S^1_0\left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{j_0}d_1^N>K_1. \qquad (58)$$

Тогда $X_0=\rho^{-N}\sum_{j=j_0}^{N}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}S^1_0 u_1^j d_1^{N-j}-$

$$-K_1\rho^{-N}\sum_{j=j_0}^{N}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}+\frac{(S^2_0 u_2^N-K_2)^+}{u_2^N}=$$

$$=S^1_0\sum_{j=j_0}^{N}\binom{N}{j}\left(\frac{pu_1}{\rho}\right)^j\left(\frac{(1-p)d_1}{\rho}\right)^{N-j}-$$

$$-K_1\rho^{-N}\sum_{j=j_0}^{N}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}+\frac{(S^2_0 u_2^N-K_2)^+}{u_2^N}. \qquad (59)$$

Обозначим $$\tilde p=p\frac{u_1}{\rho}. \qquad (60)$$

Из (60) следует: $1-\tilde p=1-p\frac{u_1}{\rho}=\frac{d_1}{\rho}(1-p)$. (61)

Используя (55), (60), (61) в (59), получим

$$C_N=X_0=S^1_0 B(j_0,N;\tilde p)-K_1\rho^{-N}B(j_0,N;p)+$$

$$+\frac{(S^2_0 u_2^N-K_2)^+}{u_2^N},$$

т.е. (54) доказана, а (56) следует непосредственно из (58). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нагаев А.В.* К вопросу о вычислении справедливой цены опциона // Экономико-математические методы. 1998. Т. 34. № 1. С. 166–171.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т.1, 2. М.: Фазис, 1998.
3. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 23–79.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 мая 2000 г.