Для портфеля, используя формулу Ито, получим

$$d\Pi_t = \beta_t r B_t dt + \gamma_t S_0 e^{h_t} \left(dh_t + \frac{1}{2} dh_t^2 \right) = \left[\beta_t r B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} a(h_t, t) + \gamma_t S_0 e^{h_t} \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \gamma_t S_0 e^{h_t} \sigma dw_t. \quad (8)$$

Условие $d\Pi_t = dV(h_t, t)$ дает уравнения

$$\beta_t r B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} a(h_t, t) + \gamma_t S_0 e^{h_t} \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}, \quad (9)$$

$$\gamma_t S_0 e^{h_t} \sigma = \sigma \frac{\partial V}{\partial h_t}. \quad (10)$$

Сюда же надо добавить условие

$$\beta_t B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} = V(h_t, t) \quad (11)$$

Из уравнения (10) имеем $\gamma_t S_0 e^{h_t} = \frac{\partial V}{\partial h_t}$. Подстановка этого выражения в (11) дает

$$\beta_t B_t = V(h_t, t) - \frac{\partial V}{\partial h_t}.$$

Подставляя все это в (9), получим

$$r \left[V(h_t, t) - \frac{\partial V}{\partial h_t} \right] + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial h_t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2},$$

и видно, что слагаемые, содержащие функцию $a(h_t, t)$, сокращаются и для $V(h_t, t)$ получается уравнение, не зависящее от коэффициента сноса $a(h_t, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial h_t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2} - rV(h_t, t) = 0.$$

Переход к переменной $S_t = S_0 e^{h_t}$ приводит к обычному уравнению Блэка-Шоулса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0,$$

т.е. формула Блэка-Шоулса верна для более общей модели процесса h_t . Результаты, отличные от формулы Блэка-Шоулса, получаются лишь тогда, когда коэффициент волатильности σ^2 станет зависеть от h_t , так как в этом случае коэффициенты при $\partial^2 V / \partial h_t^2$ и $\partial V / \partial h_t$ станут переменными, зависящими от h_t , что и приведет к результирующей формуле, отличающейся от формулы Блэка-Шоулса.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy. 1973. Vol. 81. № 3. P. 637–659.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.2

Е.В. Сухушина, А.Ф. Терпугов

АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ СО СКАЧКАМИ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Рассматривается авторегрессионная модель изменения цены финансовых активов с изменением цен в моменты сделок, образующих пуассоновский поток событий постоянной интенсивности. Находятся основные характеристики процесса изменения цены (среднее значение, дисперсия, функция корреляции) и показывается его асимптотическая нормальность.

Модели изменения цен финансовых активов в настоящий момент привлекают к себе очень большое внимание, так как они необходимы для прогнозирования цены актива, расчета стоимости вторичных ценных бумаг и т.д.

Пусть S_t есть цена актива в момент времени t . Тогда при построении модели изменения цены S_t , обычно переходят к процессу h_t по формуле

$$h_t = \ln(S_t | S_0), \quad (1)$$

где S_0 – начальная цена актива (в момент времени $t = 0$). Дальнейшее развитие модели сводится к описанию процесса h_t . Одной из наиболее часто используемых моделей процесса h_t является авторегрессионная модель. В этом случае считается, что время меняется дискретно с интервалом Δt , так что $t_n = n\Delta t$. В случае авторегрессионной модели первого порядка значения $h_n = h(t_n)$ процесса h_t удовлетворяют уравнению

$$h_n = \mu + \rho(h_{n-1} - \mu) + \sigma \varepsilon_n, \quad (2)$$

где μ – среднее значение (тренд) процесса h_n ; ρ – коэффициент авторегрессии; σ – волатильность; ε_n считаются независимыми стандартными нормальными случайными величинами $N(0,1)$.

Однако в приложении к финансовому рынку такая модель не совсем адекватно отражает реальность. Дело в том, что цена актива изменяется и усугубляется в момент сделки, а моменты совершения сделок являются случайными. Представляется естественным считать, что изменения процесса h_t происходят лишь в те случайные моменты времени, когда совершаются сделки. Именно эта модель и рассматривается в данной работе.

Описание модели

Будем считать, что моменты совершения сделок $t_1, t_2, \dots, t_N$ являются случайными и образуют пуассоно-

вский поток событий постоянной интенсивности λ . Пусть $h_n = h(t_n)$, т.е. значение процесса h_t после совершения сделки в момент времени t_n . Для h_n снова возьмем модель (1): $h_n = \mu + \rho(h_{n-1} - \mu) + \sigma \varepsilon_n$, но теперь моменты t_n будут случайными.

Рассмотрим момент времени T . Тогда на интервале $[0, T]$ было заключено N сделок в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N$. Число сделок N является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона:

$$P(N) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}.$$

Обозначим $H_T = \sum_{n=1}^N h_n$, где число слагаемых N случайно. Тогда в момент времени T $S_T = S_0 \exp(H_T)$ и для нахождения статистических характеристик процесса S_T надо иметь статистическое описание процесса H_T .

Математическое ожидание и дисперсия

Вычислим математическое ожидание и дисперсию процесса H_T , считая $\lambda T \gg 1$, т.е. считая, что на интервале T было много сделок. Для этого запишем h_n в виде $h_n = \mu + \sigma \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \varepsilon_{n-s}$. Тогда ясно, что $M\{h_n\} = \mu$ и

$$\text{cov}(h_n, h_k) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \rho^{|n-k|} \quad [1].$$

Так как $H_T = \sum_{n=1}^N h_n$, то при фиксированном N имеем $M\{H_T|N\} = \mu N$ и, усредняя еще и по N с учетом того, что для распределения Пуассона $M\{N\} = \lambda T$, получим $M\{H_T\} = \mu \lambda T$.

Для H_T^2 можно записать $H_T^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N h_n h_k$. Так как

$$M\{h_n, h_k\} = \mu^2 + \text{cov}(h_n, h_k) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \rho^{|n-k|},$$

то при фиксированном N $M\{H_T^2|N\} = \mu^2 N^2 + \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \times$

$\times \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \rho^{|n-k|}$. Суммируя по диагоналям, получим

$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \rho^{|n-k|} = N + 2 \sum_{s=1}^{N-1} (N-s) \rho^s$. При больших N асимптотически

$N \sum_{s=1}^{N-1} \rho^s \sim N \sum_{s=1}^{\infty} \rho^s = N \frac{\rho}{1-\rho}$, $\sum_{s=1}^{N-1} s \rho^s \sim$

$\sim \sum_{s=1}^{\infty} s \rho^s = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$, и поэтому асимптотически при

$N \gg 1$ $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \rho^{|n-k|} = N + 2N \frac{\rho}{1-\rho} = N \frac{1+\rho}{1-\rho}$, так что

$M\{H_T^2|N\} = \mu^2 N^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} N$. Усредняя еще и по N с

учетом того, что для распределения Пуассона $M\{N^2\} = (\lambda T)^2 + \lambda T$, получим $M\{H_T^2\} = \mu^2 (\lambda T)^2 +$

$+ \lambda T \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \right)$, так что для дисперсии величины H_T имеем выражение $D\{H_T\} = \lambda T \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \right)$.

Функция корреляции процесса H_T

Пусть T и T' — два момента времени. Найдем явное выражение для функции корреляции $R(T, T')$ процесса H_T , где $R(T, T') = \text{cov}(H_T, H_{T'})$. Будем считать, что

$T' > T$ и $\lambda(T' - T) \gg 1$. Тогда $H_T H_{T'} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N'}$

$M\{H_T H_{T'} | N, N'\} = \mu^2 N N' + \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N'} \rho^{|n-k|}$.

Суммируя по диагоналям, получим

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N'} \rho^{|n-k|} = N(1 + \rho + \dots + \rho^{N'-N}) + \sum_{s=1}^{N-1} (N-s) \rho^s + \sum_{s=1}^{N-1} (N-s) \rho^{N'-N+s}.$$

Но при больших N асимптотически

$$\sum_{s=1}^{N-1} (N-s) \rho^s \sim N \sum_{s=1}^{\infty} \rho^s = N \frac{\rho}{1-\rho},$$

$$\sum_{s=1}^{N-1} (N-s) \rho^{N'-N+s} \sim N \sum_{s=1}^{\infty} \rho^{N'-N+s} = N \frac{\rho^{N'-N+1}}{1-\rho},$$

и асимптотически при $N, N' \gg 1$ $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N'} \rho^{|n-k|} =$

$$= N \frac{1-\rho^{N'-N+1}}{1-\rho} + N \frac{\rho}{1-\rho} + N \frac{\rho^{N'-N+1}}{1-\rho} = N \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Подставляя $M\{H_T H_{T'} | N, N'\} = \mu^2 N(N' - N + N) +$

$+ N \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}$ и усредняя по N и $N' - N$, получим

$$M\{H_T H_{T'}\} = \mu^2 ((\lambda T)^2 + \lambda T) + \mu^2 \lambda^2 T(T' - T) +$$

$$+ \lambda T \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}, \text{ т.е. } R(T, T') = M\{H_T H_{T'}\} - \mu^2 \lambda^2 T T' =$$

$$= \lambda T \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \right).$$

Учитывая симметричность функции корреляции по обоим аргументам, окончательно запишем $R(T, T') = \lambda \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \right) \min(T, T')$ и

для коэффициента корреляции значений $H_{T'}$ и H_T

$$\text{corr}(H_T, H_{T'}) = \min\left(\sqrt{T/T'}, \sqrt{T'/T}\right).$$

Асимптотическая нормальность процесса H_T

Докажем, что при $\lambda T \rightarrow \infty$ величина H_T сходится по распределению к нормальной случайной величине.

Пусть число событий N фиксировано. Тогда характеристическая функция величин $h_1, h_2, \dots, h_N$ с учетом нормальности величин ϵ_k имеет вид [2]:

$$M \left\{ \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N \omega_n h_n \right\} \middle| N \right\} = \exp \left(i \mu \sum_{n=1}^N \omega_n - \frac{\sigma^2}{2(1-\rho^2)} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \omega_n \omega_k \rho^{|n-k|} \right).$$

H_T при фиксированном N равна $\sum_{n=1}^N h_n$. Тогда

$$M \{ \exp \{ \omega H_T \} \middle| N \} = M \left\{ \exp \left\{ i \omega \sum_{n=1}^N h_n \right\} \middle| N \right\},$$

и получим из предыдущего выражения, положив в нем все $\omega_n = \omega$:

$$M \{ \exp \{ \omega H_T \} \middle| N \} = \exp \left(i \omega \mu N - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2(1-\rho^2)} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \rho^{|n-k|} \right).$$

При $N \gg 1$ $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \rho^{|n-k|} \sim N \frac{1+\rho}{1-\rho}$, так что

$$M \{ \exp \{ \omega H_T \} \middle| N \} = \exp \left(i \omega \mu N - \frac{\sigma^2 \omega^2 N}{2(1-\rho)^2} \right).$$

Усредняя еще и по N , получим характеристическую функцию величины H_T в виде

$$g_H = \exp \left\{ \lambda T \left(\exp \left\{ i \omega \mu - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2(1-\rho)^2} \right\} - 1 \right) \right\}.$$

Перейдем к нормированной величине

$$\tilde{H}_T = \frac{H_T - M \{ H_T \}}{\sqrt{D \{ H_T \}}} = \frac{H_T - \mu \lambda T}{\sqrt{\lambda T \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \right)}}.$$

Для нее кумулянтная функция имеет вид

$$\varphi_{\tilde{H}}(\omega) = \lambda T \left[\exp \left\{ i \frac{\omega \mu}{\sqrt{\lambda T s^2}} - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2(1-\rho)^2 \lambda T s^2} \right\} - 1 \right] -$$

$- i \frac{\lambda T \mu \omega}{\sqrt{\lambda T s^2}}$, где для краткости обозначено $s^2 = \mu^2 +$

$\frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}$. Разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$\varphi_{\tilde{H}}(\omega) = -\frac{\omega^2}{2} + o \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda T}} \right),$$

откуда очевидно, что при $\lambda T \rightarrow \infty$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{H}}(\omega) = -\frac{\omega^2}{2}$ и $\tilde{H}_T$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Аналогичными выкладками можно показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ процесс $\tilde{H}_T$ сходится по распределению к нормальному случайному процессу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.95

Е.В. Чаусова

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕНДОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПРОСА НА УГОЛЬ

По данным о продажах фирмы, занимающейся поставками каменного угля в районы Томской области, проводится анализ спроса на уголь и строится прогноз с использованием трендовых моделей.

Прогнозирование является одной из наиболее важных задач при принятии управленческих решений. Для предсказания поведения спроса в будущем и вычисления ошибок прогнозирования требуется некоторая информация, касающаяся предыстории спроса. В связи с этим для анализа спроса приходится использовать данные о продажах. Если неудовлетворенный спрос откладывается до очередной поставки угля на склад, то данные о продажах можно считать условно эквивалентными данным о спросе. Под условной эквивалентностью подразумевается возможное искажение картины спроса вследствие того, что момент продажи связан с моментом выполнения заказа на поставку, поэтому временной характер продаж может отличаться от картины возникновения спроса во времени.

Данные о продажах угля представляют собой динамический временной ряд. На рис. 1 они изображены графически. На графике продаж угля имеются отчетливые годовые периоды, присутствуют резко выраженные пики, амплитуда колебаний постоянна. Пики объясняются наличием сезонности. Действительно, весной спрос на уголь резко возрастает в связи с началом навигации.

Потребители пытаются как можно больше угля вывезти по «большой» воде – это гораздо дешевле. Однако существует ряд клиентов, которым выгоднее возить уголь автотранспортом или железной дорогой, что объясняет наличие спроса в другое время года.

Так как спрос на уголь имеет явно выраженный сезонный характер, для составления прогноза спроса исследуем следующие две модели представления временных рядов: аддитивную модель [1] и модель тригонометрического тренда [2], представленные ниже соответствующими уравнениями (1) и (2):

$$y_t = m_t + s_t + \epsilon_t, \quad \forall t = \overline{1, T}, \quad (1)$$

где m_t – гладкая составляющая ряда, а s_t – сезонная компонента;

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \left[\alpha_{2j-1} \cos \left(\frac{2\pi j}{m} t \right) + \alpha_{2j} \sin \left(\frac{2\pi j}{m} t \right) \right] + \alpha_{m-1} (-1)^j + \epsilon_t, \quad \forall t = \overline{1, T}. \quad (2)$$