$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left[\hat{\alpha}_{2j-1}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}(T+\tau)\right)+\right.$$
$$\left.+\hat{\alpha}_{2j}\sin\left(\frac{2\pi j}{m}(T+\tau)\right)\right]+\hat{\alpha}_{m-1}(-1)^{T+\tau}.$$
$$\forall\tau=\overline{1,12},\quad T=36,\quad m=12.$$

Доверительный интервал для прогнозных значений [2] имеет вид:

$$\hat{y}_{T+\tau} - t_{1-0,5\alpha}(T-m)\sqrt{\frac{m\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{T}} \le y_{T+\tau} \le$$
$$\le \hat{y}_{T+\tau} + t_{1-0,5\alpha}(T-m)\sqrt{\frac{m\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{T}},$$

где $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$ – оценка дисперсии случайной составляющей, $t_{1-0,5\alpha}(T-m)$ – квантиль уровня $1-0,5\alpha$ распределения Стьюдента с числом степеней свободы $T-m$, $\alpha = 0,05$. Результаты прогнозирования и построения доверительного интервала изображены на рис. 5.

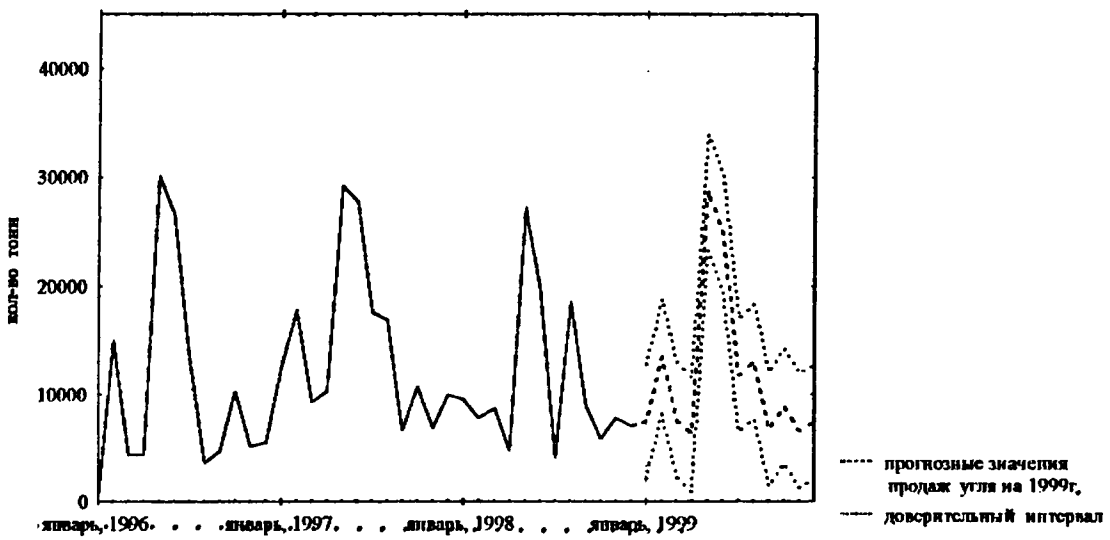

Рис. 5. График продаж с построенным прогнозом

В результате анализа временного ряда продаж угля удалось построить модель, отображающую исходные данные. Сезонная составляющая модели была представлена в виде тригонометрического тренда, что привело к функции оценки спроса вида (4). С помощью этой модели на основе наблюдаемых значений продаж за 1996–1998 гг. был построен прогноз спроса на уголь на 1999 г.

Важно отметить, что прогноз является основным ориентиром, позволяющим определить потребности потребителей, и неверный прогноз может повлечь за собой значительное уменьшение прибыли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кендалл М.* Временные ряды. М.: Финансы и статистика, 1981.
2. *Глинский В.В., Ионин В.Г.* Статистический анализ. М.: Филинъ, 1998.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 19 февраля 2000 г.

УДК 658.512

Ю.И. Параев

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ, ХРАНЕНИИ И СБЫТЕ ТОВАРА

Обсуждается задача об управлении процессом производства, хранения и сбыта товара с точки зрения теории оптимального управления. В отличие от работ [1, 2] вводится дополнение в математическую модель рассматриваемой задачи, связанное с учетом количества средств у потребителя, предназначенных для покупки товара. Основной результат состоит в том, что при конечных начальных средствах время производства товара уменьшается, причем тем больше, чем меньше количество начальных средств.

В настоящее время возможность использования математических методов для исследования экономических процессов, в том числе и при решении задач маркетинга, зависит от разработанности, сложности и адекватности соответствующих математических моделей. В [1] приведена и проанализирована динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса. В [2] эта модель несколько уточнена, и для нее решена задача об оптимальном управлении процессом производства, хранения и сбыта товара. В настоящей работе вводится дополнение в математическую модель рассматриваемой задачи, связанное с учетом количества средств у потребителя, предназначенных для покупки товара. Для простоты проведения анализа влияния вводимой характеристики на решение задачи рассматривается упрощенная модель с товаром неограниченного спроса.

1.Постановка задачи

Пусть $z(t)$ – количество товара на складе производителя, $w(t)$ – количество средств у потребителя, предназначенных для покупки данного товара. В отличие от [2] здесь отсутствует переменная $v(t)$ – количество товара у потребителя, что допустимо при предположении, что товар имеет неограниченный спрос. Изменение введенных величин во времени можно описать уравнениями:

$$\overset{0}{z} = u - P,\ z(0) = 0,\quad \overset{0}{w} = -cP,\ w(0) = w_0, \qquad (1.1)$$

где $u(t)$ – темп производства; $P(t)$ – темп продажи, т.е. $u(t)\Delta t$ – количество товара, произведенного за время Δt; $P(t)\Delta t$ – количество товара, проданного за это же время; $c(t)$ – текущая цена товара. Так как здесь речь идет о товаре неограниченного спроса, то, как следует из [2], функция $P(t)$ не зависит от количества товара у покупателя. Поэтому выберем ее в виде

$$P(t)=z(t)N\{c(t), w(t)\}, \qquad (1.2)$$

где $N(c,w)$ – зависимость покупательной способности потребителя от цены товара и имеющихся средств, которую выберем в виде

$$N(c,w)=n_0\exp\{-c(t)w_0/w(t)\}, \qquad (1.3)$$

где n_0 – некоторый параметр, который можно назвать коэффициентом покупательной способности. Из (1.3) видно, что с уменьшением $w(t)$ покупательная способность падает. При $w_0=\infty$ имеем $w_0/w(t)=1$ и $N(c,w)=n_0\exp\{-c(t)\}$, т.е. получается случай, рассмотренный в [1, 2].

Предположим, что должно выполняться условие

$$u(t)\in[0,u_0], \qquad (1.4)$$

где u_0 – максимально возможный темп производства. Пусть весь процесс продолжается в течение конечного интервала времени $[0,T]$. Общий доход

$$J(T) = \int_0^T [c(t)P(t) - u(t) - kz(t)]dt, \qquad (1.5)$$

где k – коэффициент затрат на хранение товара ($k\geq 0$).

Получается стандартная задача из теории оптимального управления: найти такие функции $c(t)$ и $u(t)$ на интервале времени $[0,T]$, при которых функционал (1.5) максимален. Очевидно, что если производство не включается, то $J=0$. Такое решение назовем тривиальным. При решении данной задачи нужно также найти ограничения на параметры задачи n_0, w_0, k и T, при которых можно получить оптимальное решение, отличное от тривиального и такое, что $J(T)>0$.

2. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина

Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина состоит из выполнения следующих этапов. Вначале составляется функция Гамильтона

$$H(z,w,p_1,p_2,u,c)=p_1(u-P)-p_2cP-cP+u+kz=$$
$$=u(p_1+1)-(p_1+(1+p_2)c)P+kz, \qquad (2.1)$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – вспомогательные переменные. Минимум функции H по u с учетом (1.4) достигается при

$$u^*(t)=\begin{cases}0, \text{ если } p_1(t)+1>0,\\ u_0, \text{ если } p_1(t)+1<0.\end{cases} \qquad (2.2)$$

Минимум функции H по $c(t)$ с учетом (1.3) достигается при

$$c^*(t)=\frac{w(t)}{w_0} - \frac{p_1(t)}{1+p_2(t)}=\frac{w(t)}{w_0}\left(1-\frac{p_1(t)}{q(t)}\right), \qquad (2.3)$$

где $q(t)=w(t)(1+p_2(t))/w_0$. При этом должно выполняться условие

$$\frac{\partial^2 H(c^*)}{\partial c^2}=(1+p_2)\frac{w_0}{w(t)}P^*=q(t)\frac{w_0^2}{w^2(t)}P^*>0. \qquad (2.4)$$

Здесь

$$P^*(t)=N^*(t)z(t),$$
$$N^*(t)=N(c^*,w)=b\ \exp\left\{\frac{p_1}{q}\right\}, \qquad (2.5)$$

где $b=n_0/e$. После подстановки (2.2) и (2.3) в (2.1) получаем гамильтониан

$$H^*(t)=H^*(z,w,p_1,p_3,)=u^*(t)(p_1+1)-qP^*+kz=$$
$$=u^*(t)(p_1+1)-(qN^*(t)-k)z=\text{const}. \qquad (2.6)$$

Переменные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\dot p_1=-\partial H^*/\partial z=qN^*-k,\ p_1(T)=0. \qquad (2.7)$$

$$\dot p_2=-\frac{\partial H^*}{\partial w}=\left(\frac{1+p_2}{w_0}-\frac{p_1}{w(t)}\right)P^*=\frac{q-p_1}{w^2}P^*, \qquad (2.8)$$
$$p_2(T)=0.$$

Основная проблема при решении задач оптимального управления – нахождение начальных значений $p_1(0)$ и $p_2(0)$, для которых существует решение краевой задачи для уравнений (1.1), (2.7) и (2.8).

3. Предварительные результаты

Из уравнений (1.1) и (2.8) можно получить, что производная величины q равна нулю, т.е. q=const. При этом

$$q=1+p_2(0)=w(T)/w_0. \qquad (3.1)$$

Так как всегда должно выполняться условие $0<w(t)<w_0$, то $0\leq q\leq 1$. Если $w_0=\infty$, $w(T)=\infty$, $q=1$ и $p_2(t)\equiv 0$. Этот случай рассмотрен в [2]. Получается, что параметр q тем меньше, чем больше средств тратится на покупку товара. Ниже будет показано, что параметр q монотонно увеличивается от 0 до 1 при увеличении w_0 от 0 до ∞. Из последнего также следует, что условие (2.4) всегда выполняется. Отличие данной работы от [2] сводится к появлению в уравнениях постоянного параметра $q<1$ при конечных значениях w_0. То, что этот параметр постоянный, позволяет почти полностью повторить результаты работы [2].

Решение уравнения (2.7) можно записать в виде

$$p_1(t)=k(T-t)-q\ln F(t), \qquad (3.2)$$

где
$$F(t)=1+\frac{bq}{k}\left(\exp\left\{\frac{k(T-t)}{q}\right\}-1\right). \qquad (3.3)$$

При $k=0$

$$F(t)=1+b(T-t) \text{ и } \dot F(t)=-b\exp\left\{\frac{k(t-t)}{q}\right\}>0,$$

т.е. функция $F(t)$ монотонно убывает до 1. Из (3.2) следует, что

$$N^*(t)=\frac{b}{F(t)}\exp\left\{\frac{k(T-t)}{q}\right\}. \qquad (3.4)$$

4. Необходимые условия существования оптимального решения

Как следует из (2.2), оптимальное управление производством является релейным, т.е. производство либо включается на полную мощность, либо останавливается. Включения или остановки производства происходят в моменты времени, когда выполняется равенство

$$p_1(t)=-1, \qquad (4.1)$$

т.е. когда функция $p_1(t)$ пересекает уровень -1. Подставляя (3.2) в (4.1), получаем единственный корень

$$t_1=T-t^*(q), \qquad (4.2)$$

где $t^*(q)=\frac{q}{k}\ln\frac{qb-k}{qb-k\exp\{1/q\}}$ (если k=0, то $t^*(q)$= $=(\exp\{1/q\}-1)/b$). Отметим, что

$$F(t_1)=\frac{qb-k}{qb-k\exp\{1/q\}}\exp\{1/q\},$$
$$N^*(t_1)=b\ \exp\{-1/q\}. \qquad (4.3)$$

Таким образом, t_1 – момент остановки производства. Из требования, чтобы $0\le t_1\le T$, т.е. чтобы в начальный момент времени производство включалось, получаем *первое необходимое условие оптимальности*:

$$T>t^*(q). \qquad (4.4)$$

Смысл этого условия в том, что величина T должна быть достаточно большой, чтобы было выгодно начинать производство. Как показывает анализ, функция $t^*(q)$ монотонно увеличивается до бесконечности при уменьшении q до нуля. Поскольку время T предполагается конечным, то для выполнения условия (4.4) необходимо, чтобы величина q была ограничена снизу. В частности при k=0, должно выполняться условие $q>1/\ln(1+bT)$.

Далее, чтобы функция $p_1(t)$ переходила из значения $p_1(t_1)=-1$ в значение $p_1(T)=0$, необходимо, чтобы в точке t_1 производная этой функции была положительной. Учитывая (2.7) и (4.3), получаем *второе необходимое условие оптимальности*:

$$k<qb\exp\{-1/q\} \text{ или } k<qN^*(t_1). \qquad (4.5)$$

Можно проверить, что если условие (4.5) выполняется, то производная функции $p_1(t)$ всегда положительна и эта функция монотонно возрастает на интервале $[0,T]$. Можно также проверить, что при выполнении условия (4.5) аргумент логарифма в (4.2) всегда больше 1. Смысл условия (4.5) заключается в том, что для получения оптимального решения затраты на хранение товара должны быть достаточно малы. Если правую часть уравнения (2.7) умножить на z, то видно, что производная функции $p_1(t)$ будет всегда положительной, если выполняется условие $qP(t)>kz(t)$, т.е. затраты на хранение должны быть меньше темпа продажи, умноженного на q. Таким образом, получается, что при оптимальном решении на интервале $[0,t_1]$ производство работает на максимальную мощность, а на интервале $[t_1,T]$ производства нет, а идет только продажа. Все это естественно, так как не следует производить лишний товар. Можно отметить, что длина интервала $[t_1,T]$ не зависит от величины T. Если $t_1>0$, то произведенное количество товара равно u_0t_1. При этом отношение времени производства t_1 ко всему интервалу T равно

$$\frac{t_1(q,k)}{T}=1-\frac{q}{\bar{k}bT}\ln\frac{q-\bar{k}}{q-\bar{k}\ \exp\{1/q\}}, \qquad (4.6)$$

где $\bar{k}=k/b$. Как функция от $\bar{k}$ отношение t_1/T достигает наибольшего значения при k=0, когда нет затрат на хранение товара. В этом случае имеем

$$\frac{t_1(q,0)}{T}=1-\frac{\exp\{1/q\}-1}{bT}. \qquad (4.7)$$

Как функция от q отношение t_1/T достигает наибольшего значения при q=1. Это значение равно

$$\frac{t_1(1,\bar{k})}{T}=1-\frac{1}{\bar{k}bT}\ln\frac{1-\bar{k}}{1-\bar{k}e}.$$

Анализ показывает, что при уменьшении параметра q отношение t_1/T убывает до 0. Зависимость $t_1(q,\bar{k})/T$ от q представлена на рис. 1 для разных значений $\bar{k}$ (кривая *1* – при $\bar{k}=0$; *2* – при $\bar{k}=0{,}1$; *3* – при $\bar{k}=0{,}2$). Видно, что с уменьшением параметра q при фиксированном значении T время производства t_1 и произведенное количество товара u_0t_1 уменьшаются.

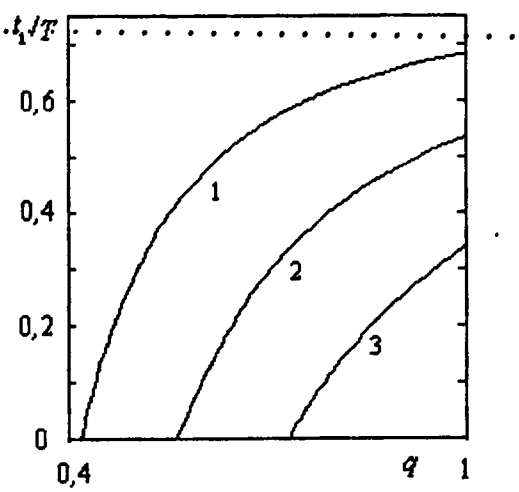

Рис. 1

5. Другие результаты

На всем интервале $[0,T]$ гамильтониан постоянен и из (2.6) получаем, что при оптимальном управлении

$$z(t)=u_0S(t), \qquad (5.1)$$

где $$S(t)=\begin{cases}\dfrac{p_1(t)-p_1(0)}{qN^*(t)-k} & \text{при } 0<t<t_1,\\ -\dfrac{p(0)+1}{qN^*(t)-k} & \text{при } t_1<t<T.\end{cases}$$

Отсюда на основании (2.2) имеем $P^*(t)=u_0S(t)N^*(t)$. Подставляя (2.3) в (1.1), получаем уравнение для изменения во времени средств потребителя

$$\dot{w}=-w\frac{u_0}{w_0}\left(1-\frac{p_1(t)}{q}\right)N^*(t)S(t),\ w(0)=w_0. \qquad (5.2)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$w(t) = w_0 \exp\left\{-\frac{u_0}{w_0} W(t,0)\right\}, \qquad (5.3)$$

где

$$W(t,0) = \int_0^t \left(1 - \frac{p_1(t)}{q}\right) S(t) N^*(t) dt. \qquad (5.4)$$

Последние выражения определяют решение задачи, но они зависят от неизвестного пока параметра q. Чтобы его найти, нужно решение (5.3) подставить в (3.1) и получить уравнение для вычисления q:

$$\ln q = -\frac{u_0}{w_0} W(T,0). \qquad (5.5)$$

Нужно найти корень этого уравнения, лежащий в интервале [0,1], с учетом неравенства (4.4). Проще решить обратную задачу: найти значение

$$\frac{u_0}{w_0} = \frac{W(T,0)}{\ln(1/q)} \qquad (5.6)$$

как функцию q на интервале [0,1] с учетом (4.4).

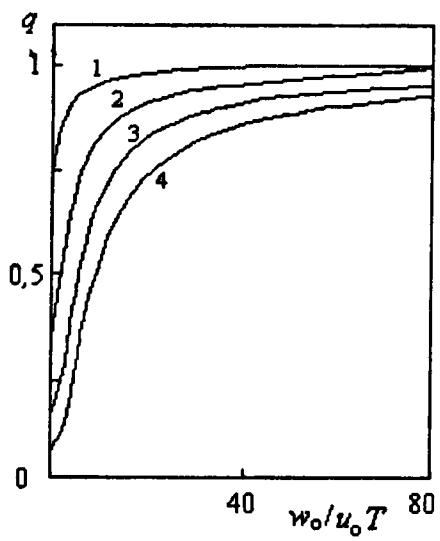

Рис. 2

Для иллюстрации рассмотрим простейший случай, когда k=0, т.е. отсутствуют затраты на хранение товара. В этом случае выражение (5.6) принимает вид

$$\frac{w_0}{u_0 T} = \frac{F(0)(\ln F(0) - 1) - F(t_1)(\ln F(t_1) - 1)}{bT \ln(1/q)},$$

причем $F(0)$=1+bT, $\ln F(t_1)$=1/q, $F(t_1)$=exp{1/q}. Заметим, что u_0T – количество товара, произведенного за время T, если бы производство постоянно работало. В результате табуляции последнего выражения получается зависимость параметра q от величины w_0/u_0T, которая представлена на рис. 2 для разных значений bT (кривая *1* – при bT=e; *2* – при bT=10; *3* – при bT=50; *4* – при bT=300).

Можно также протабулировать функцию t_1/T при k=0 и при различных значениях q – (см. формулу (4.7). В результате можно получить зависимость t_1/T от w_0/u_0T, которая представлена на рис. 3.

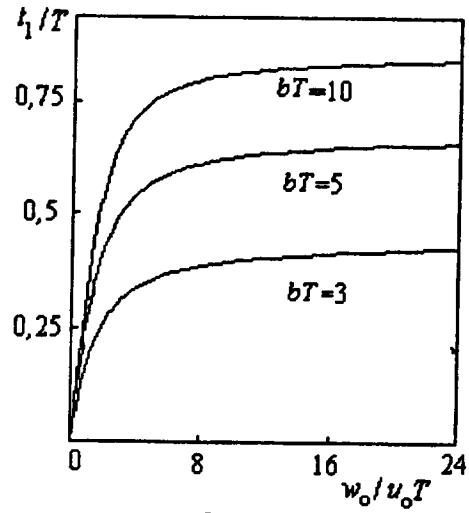

Рис. 3

Из рис. 3 видно, что при малых значениях w_0 время производства товара также оказывается малым.

Заключение

В работе проанализировано влияние начального количества средств у потребителя, предназначенных для покупки товара, на решение задачи об оптимальном управлении процессом производства, хранения и сбыта товара. Анализ показал, что введение этой величины не привело к существенному изменению содержания решения. Основной результат состоит в том, что при конечных начальных средствах время производства товара уменьшается, причем тем больше уменьшается, чем меньше количество начальных средств. Это легко объясняется – не следует производить лишний товар, который в дальнейшем не будет распродан.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 144–148.
2. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 103–107.

Статья поступила в научную редакцию 15 апреля 2000 г.