$$\frac{\partial p(x\mid y)}{\partial y}=p(x\mid y)\left[\frac{x^2 f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))^2}-\frac{f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))}\right] \quad (48$$

Введем функцию

$$P_1(x,y)=\frac{x^2 f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))^2}-\frac{f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))}. \quad (49)$$

Тогда (48) примет вид

$$\frac{\partial p(x\mid y)}{\partial y}=p(x\mid y)P_1(x,y). \quad (50)$$

Аналогично для второй производной будем иметь

$$\frac{\partial^2 p(x|y)}{\partial y^2}=p(x|y)\left[P_1^2(x,y)+\frac{\partial P_1^2(x,y)}{\partial y}\right]. \quad (51)$$

$$P_2(x,y)=P_1^2(x,y)+\frac{\partial P_1^2(x,y)}{\partial y}. \quad (52)$$

Тогда (51) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 p(x\mid y)}{\partial y^2}=p(x\mid y)P_2(x,y). \quad (53)$$

С учетом введенных обозначений уравнения (42) и (47) запишутся в следующем в виде:

$$m(T_k+0)=m(T_k-0)+ +\frac{D(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))} \quad (54)$$

$$D(T_k+0)=\frac{m^2(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))}+\frac{D(T_k-0)\left[1+2m(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))+m(T_k-0)^2P_2(x,m(T_k-0))\right]}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))}$$

$$-\left[m(T_k-0)+\frac{D(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))}\right]^2. \quad (55)$$

Заключение

На интервале между измерениями в случае гауссовой аппроксимации $m(t)$ и $D(t)$ определяются решениями уравнений (22), (34) с начальными условиями (54) и (55).

Решение этих уравнений уже гораздо проще, чем решение исходных уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазен Э.М.* Теория оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
2. *Поттосина С.А., Терпугов А.Ф.* // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 54.
3. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во ТГУ, 1988. 174 с.
4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 400 с.
5. *Федосов Е.Н.* //Известия вузов. Физика. 1995. № 3. С. 17.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 621.391.1:519.2

Н.С. Демин, М.Р. Кадиров

О КОЛИЧЕСТВЕ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОБРАТНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ КАНАЛАМ С ФИКСИРОВАННОЙ ПАМЯТЬЮ

Рассматривается информационный анализ задачи обратной экстраполяции (предсказания, прогноза) стохастических процессов по совокупности реализаций непрерывных и дискретных во времени процессов, которые зависят не только от текущего, но и от прошлого значения ненаблюдаемого процесса. Получено уравнение для совместного количества информации по Шеннону, на основе которого для процесса Орнстейна-Уленбека исследована эффективность наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти.

1. Постановка задачи

Полезный сигнал (ненаблюдаемый процесс) x_t принадлежит к классу n-мерных марковских случайных процессов диффузионного типа и определяется уравнением (в смысле Ито) [1]:

$$dx_t=f(t,x_t)dt+\Phi_1(t,x_t)d\omega_t,\ t\geq 0. \quad (1.1).$$

Сигналом на выходе непрерывного канала передачи (наблюдаемым процессом) является l-мерный процесс z_t, определяемый уравнением

$$dz_t=h(t,x_t,x_\tau)dt+\Phi_2(t)dv_t, \quad (1.2)$$

$$t_0<\tau<t,\ \tau=const.$$

Сигналом на выходе дискретного канала передачи (наблюдаемый процесс) является q-мерный процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем вида

$$\eta(t_m)=g(t_m,x_{t_m},x_\tau)+\Phi_3(t_m)\xi(t_m), \quad (1.3)$$
$$m=0,1,\dots,\ t_m\geq 0.$$

В (1.1)–(1.3) ω_t и v_t – стандартные винеровские процессы размеров r_1 и r_2; $\xi(t_m)$ – стандартная белая последовательность, а

$$Q(\cdot)=\Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot), R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot), V(\cdot)=\Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot)$$

– не вырождены. Требуется найти совместное количество информации по Шеннону ($M\{\cdot\}$ – математическое ожидание, $P\{\cdot\}$ – вероятность) [2]:

$$I_s^t\left[x_s, x_t; z_0^t, \eta_0^m\right] = M\left\{\ln\left[\frac{p_s^t(x_s, x_t)}{p(s, x_s; t, x_t)}\right]\right\}, (1.4)$$

где $p_s^t(x, x') = \partial^2 P\{x_s \le x, x_t \le x' \mid z_0^t, \eta_0^m\} / \partial x \partial x'$,

$$p(s, x; t, x') = \partial^2 P\{x_s \le x, x_t \le x'\} / \partial x \partial x',$$

о значениях процесса x_σ в текущий $\sigma{=}t$ и произвольный будущий $\sigma{=}s{>}t$ моменты времени, которое содержится в совокупности реализаций $z_0^t = \{z_\sigma : 0 \le \sigma \le t\}$ и $\eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \ldots, \eta(t_m)\}$ наблюдаемых процессов.

2. Основные результаты

Теорема 1. Количество информации $I_s^t[x_s, x_t; z_0^t, \eta_0^m]$ удовлетворяет на произвольном интервале времени $t_m \le t < t_{m+1}$ уравнению

$$\frac{dI_s^t\left[x_s, x_t; z_0^t, \eta_0^m\right]}{dt} = \frac{1}{2} tr\left[R^{-1}(t) M\left\{\left[\overline{h(\tau \mid s, t)} - \overline{h(t)}\right]\left[\overline{h(\tau \mid s, t)} - \overline{h(t)}\right]^T\right\}\right] - \frac{1}{2} tr\left[Q(t) \times M\left\{\left[\frac{\partial \ln[p_s^t(x_s, x_t)]}{\partial x_t}\right]\left(\frac{\partial \ln[p_s^t(x_s, x_t)]}{\partial x_t}\right)^T - \frac{\partial \ln[p(s, x_s; t, x_t)]}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln[p(s, x_s; t, x_t)]}{\partial x_t}\right)^T\right]\right\}\right] - tr\left[Q(t) M\left\{\left[\frac{\partial \ln[p(s, x_s; t, x_t)]}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln[p(t, x_t)]}{\partial x_t}\right] \times \left(\frac{\partial \ln[p(t, x_t)]}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right] + tr\left[Q(t) M\left\{\left[\frac{\partial \ln[p_s^t(x_s, x_t)]}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln[p_t(x_t)]}{\partial x_t}\right]\left(\frac{\partial \ln[p_t(x_t)]}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right], (2.1)$$

где

$$\overline{h(\tau \mid s, t)} = M\{h(t, x_t, x_\tau) \mid x_s = x, x_t = x', z_0^t, \eta_0^m\}, \quad (2.2)$$

$$\overline{h(t)} = M\{h(t, x_t, x_\tau) \mid z_0^t, \eta_0^m\}, \quad (2.3)$$

$$p(t, x') = \partial P\{x_t \le x'\} / \partial x',$$

$$p_t(x') = \partial P\{x_t \le x' \mid z_0^t, \eta_0^m\} / \partial x',$$

с начальным условием

$$I_s^{t_m}\left[x_s, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m\right] = I_s^{t_m - 0}\left[x_s, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\right] + \Delta I_s^{t_m}\left[x_s, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m\right], (2.4)$$

где

$$\Delta I_s^{t_m}\left[x_s, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m\right] = M\left\{\ln\left[\frac{\overline{c(\eta(t_m), x_s, x_{t_m})}}{c(\eta(t_m))}\right]\right\},$$

$$\overline{c(\eta(t_m), x, x')} = M\{c(\eta(t_m), x_{t_m}, x_\tau) \mid x_s = x, x_{t_m} = x', z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\},$$

$$c(\eta(t_m)) = M\{c(\eta(t_m), x_{t_m}, x_\tau) \mid z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\},$$

$$c(\eta(t_m), x', x'') = \exp\{-(1/2)[\eta(t_m) - g(t_m, x', x'')]^T V^{-1}(t_m)[\eta(t_m) - g(t_m, x', x'')]\},$$

$$I_s^{t_m - 0}\left[x_s, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\right] = \lim_{t \uparrow t_m} I_s^t\left[x_s, x_t; z_0^t, \eta_0^m\right]$$

и является решением уравнения (2.1) на предыдущем интервале времени, вычисленным в точке t_m.

Доказательство. Совместная апостериорная плотность

$$p_{\tau,s}^t(x, x', x'') = \frac{\partial^3 P\{x_s \le x, x_t \le x', x_\tau \le x'' \mid z_0^t, \eta_0^m\}}{\partial x \partial x' \partial x''} \quad (2.5)$$

описывается уравнением [3]

$$d_t p_{\tau,s}^t(x, x', x'') = \left\{\frac{p_{\tau,s}^t(x, x', x'')}{p_\tau^t(x', x'')} L_{t,x'}\left[p_\tau^t(x', x'')\right] - p_\tau^t(x', x'') L_{t,x'}^*\left[\frac{p_{\tau,s}^t(x, x', x'')}{p_\tau^t(x', x'')}\right]\right\} dt + p_{\tau,s}^t(x, x', x'')\left[h(t, x', x'') - \overline{h(t)}\right]^T R^{-1}(t) d\tilde{v}(t), (2.6)$$

с начальным условием

$$p_{\tau,s}^{t_m}(x, x', x'') = \frac{c(\eta(t_m), x', x'')}{c(\eta(t_m))} p_{\tau,s}^{t_m - 0}(x, x', x''), (2.7)$$

где

$$d\tilde{v}(t) = dz_t - \overline{h(t)} dt,$$

$$p_\tau^t(x', x'') = \frac{\partial^2 P\{x_t \le x', x_\tau \le x'' \mid z_0^t, \eta_0^m\}}{\partial x' \partial x''},$$

$$p_{\tau,s}^{t_m - 0}(x, x', x'') = \lim_{t \uparrow t_m} p_{\tau,s}^t(x, x', x''),$$

а $L[\cdot]$ и $L^*[\cdot]$ соответственно прямой и обратный операторы Колмогорова [1].

Интегрируя (2.6) слева и справа по x'', получаем, что совместная апостериорная плотность $p_s^t(x, x')$

$$d_t p_s^t(x, x') = \left\{\frac{p_s^t(x, x')}{p_t(x')} L_{t,x'}[p_t(x')] - p_t(x') L_{t,x'}^*\left[\frac{p_s^t(x, x')}{p_t(x')}\right]\right\} dt + p_s^t(x, x')\left[\overline{h(\tau \mid s, t)} - \overline{h(t)}\right]^T R^{-1}(t) d\tilde{v}(t). \quad (2.8)$$

Априорная плотность $p(t, x')$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова $d_t p(t, x') = L_{t,x'}[p(t, x')] dt$, а переходная плотность $p(s, x \mid t, x') = \partial P\{x_s \le x \mid x_t = x'\} / \partial x$, при $s > t$, по переменным $\{t, x'\}$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова $d_t p(s, x \mid t, x') = -L_{t,x'}^*[p(s, x \mid t, x')] dt$. Тогда

$$d_t p(s, x; t, x') = \left\{\frac{p(s, x; t, x')}{p(t, x')} L_{t,x'}[p(t, x')] - p(t, x') L_{t,x'}^*\left[\frac{p(s, x; t, x')}{p(t, x')}\right]\right\} dt, \quad (2.9)$$

так как $p(s, x; t, x') = p(s, x \mid t, x') p(t, x')$. Дифференцируя по формуле Ито с учетом (2.8) и (2.9) и учитывая, что процесс $\tilde{v}(t)$ – винеровский [1, 6], получаем

$$d_t \ln\left[\frac{p_s^t(x,x')}{p(s,x;t,x')}\right] = \left\{\frac{1}{p_t(x')} L_{t,x'}\left[p_t(x')\right] - \frac{p_t(x')}{p_s^t(x,x')} \times \right.$$

$$\left. \times L_{t,x'}^{*}\left[\frac{p_s^t(x,x')}{p_t(x')}\right]\right\}dt - \left\{\frac{1}{p(t,x')} L_{t,x'}\left[p(t,x')\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{p(t,x')}{p(s,x;t,x')} L_{t,x'}^{*}\left[\frac{p(s,x;t,x')}{p(t,x')}\right]\right\}dt -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\overline{h(\tau\mid s,t)} - \overline{h(t)}\right]^T R^{-1}(t)\left[\overline{h(\tau\mid s,t)} - \overline{h(t)}\right]dt +$$

$$+\left[\overline{h(\tau\mid s,t)} - \overline{h(t)}\right]^T R^{-1}(t)d\tilde{v}(t). \qquad (2.10)$$

Применим к (2.10) формулу Ито-Венцеля [4, 5]:

$$d_t \ln\left[\frac{p_s^t(x_s,x_t)}{p(s,x_s;t,x_t)}\right] = \left\{\frac{1}{p_t(x_t)} L_{x_t}\left[p_t(x_t)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p_t(x_t)} L_{x_t}\left[p(x_t)\right]\right\}dt - \left\{\frac{p_t(x_t)}{p_s^t(x_s,x_t)} L_{x_t}^{*}\left[\frac{p_s^t(x_s,x_t)}{p_t(x_t)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{p(t,x_t)}{p(s,x_s;t,x_t)} L_{x_t}^{*}\left[\frac{p(s,x_s;t,x_t)}{p(t,x_t)}\right]\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\overline{h(\tau\mid s,t)} - \overline{h(t)}\right]^T R^{-1}(t)\left[\overline{h(\tau\mid s,t)} - \overline{h(t)}\right]dt +$$

$$+\left[\overline{h(\tau\mid s,t)} - \overline{h(t)}\right]^T R^{-1}(t)\Phi_2(t)dv_t +$$

$$+\left[\frac{1}{p_s^t(x_s,x_t)}\frac{\partial p_s^t(x_s,x_t)}{\partial x_t} - \frac{1}{p(s,x_s;t,x_t)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial p(s,x_s;t,x_t)}{\partial x_t}\right]^T f(t,x_t)dt + \left[\frac{1}{p_s^t(x_s,x_t)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial p_s^t(x_s,x_t)}{\partial x_t} - \frac{1}{p(s,x_s;t,x_t)}\frac{\partial p(s,x_s;t,x_t)}{\partial x_t}\right]^T \times$$

$$\times \Phi_1(t,x_t)d\omega_t + \frac{1}{2}tr\left\{Q(t) \times \right.$$

$$\times\left[\frac{1}{p_s^t(x_s,x_t)}\frac{\partial^2 p_s^t(x_s,x_t)}{\partial x_t^2} - \frac{1}{p(s,x_s;t,x_t)} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\partial^2 p(s,x_s;t,x_t)}{\partial x_t^2}\right]\right\}dt - \frac{1}{2}tr\left\{Q(t)\left[\frac{\partial \ln\left[p_s^t(x_s,x_t)\right]}{\partial x_t}(\bullet)^T - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \ln\left[p(s,x_s;t,x_t)\right]}{\partial x_t}(\bullet)^T\right]\right\}dt. \qquad (2.11)$$

Проводим преобразования: раскрываем члены с операторами Колмогорова $L[\cdot]$ и $L^*[\cdot]$, интегрируем уравнение (2.11) слева и справа в пределах от t_0 до t, берем слева и справа математическое ожидание, дифференцируем слева и справа по t и в результате получаем уравнение (2.1).

Для вывода начального условия (2.4) используем в (2.7) представление

$$p_{\tau,s}^{t_m}(x,x',x'') = p_{\tau|s,t_m}(x''\mid x,x')p_s^{t_m}(x,x'),$$

$$p_{\tau,s}^{t_m-0}(x,x',x'') = p_{\tau|s,t_m-0}(x''\mid x,x')p_s^{t_m-0}(x,x'),$$

где

$$p_{\tau|s,t_m}(x''\mid x,x') =$$

$$= \partial P\left\{x_\tau \le x'' \mid x_s = x, x_{t_m} = x', z_0^{t_m}, \eta_0^m\right\}/\partial x'',$$

$$p_{\tau|s,t_m-0}(x''\mid x,x') =$$

$$= \partial P\left\{x_\tau \le x'' \mid x_s = x, x_{t_m} = x', z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\right\}/\partial x''.$$

Проинтегрировав (2.7) слева и справа по x'', получаем

$$p_s^{t_m}(x,x') = \frac{\overline{c(\eta(t_m),x,x')}}{c(\eta(t_m))} p_s^{t_m-0}(x,x'). \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (1.4), при $t = t_m$ имеем

$$I_s^{t_m}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\right] = M\left\{\ln\left[\frac{p_s^{t_m}(x_s,x_t)}{p(s,x_s;t,x_t)}\right]\right\} =$$

$$= M\left\{\ln\left[\frac{p_s^{t_m-0}(x_s,x_t)}{p(s,x_s;t,x_t)}\right]\right\} + M\left\{\ln\left[\frac{\overline{c(\eta(t_m),x_s,x_t)}}{c(\eta(t_m))}\right]\right\} =$$

$$= I_s^{t_m-0}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\right] + \Delta I_s^{t_m}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\right],$$

т.е. получили (2.4). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть ($N\{y;a,B\}$ – нормальное распределение с параметрами a и B)

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)d\omega_t,$$

$$dz_t = \left[H_0(t)x_t + H_1(t)x_\tau\right]dt + \Phi_2(t)dv_t, \qquad (2.13)$$

$$\eta(t_m) = G_0(t_m)x_{t_m} + G_1(t_m)x_\tau + \Phi_3(t_m)\xi(t_m),$$

$p_0(x) = N\{x;\mu_0,\Gamma_0\}$. Тогда на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ уравнение для $I_s^t\left[x_s,x_\tau;z_0^t,\eta_0^m\right]$ принимает вид

$$\frac{dI_s^t\left[x_s,x_t;z_0^t,\eta_0^m\right]}{dt} = \frac{1}{2}tr\left[R^{-1}(t)\tilde{H}_{0,2}(t)\tilde{\Gamma}^{-1}(s,t)) \times \right.$$

$$\left. \times \tilde{H}_{0,2}^T(t)\right] - \frac{1}{2}\left[Q(t)\left[\Gamma(t) - \Gamma_{02}(s,t)\Gamma_{22}^{-1}(s,t)\Gamma_{02}^T(s,t)\right]^{-1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[Q(t)\left[D(t) - D_{02}(s,t)D^{-1}(s)D_{02}^T(s,t)\right]^{-1}\right], \qquad (2.14)$$

где $\Gamma(t)$, $\Gamma_{02}(s,t)$, $\Gamma_{22}(s,t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\Gamma}(t) = F(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)F^T(t) +$$

$$+Q(t) - \tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t), \qquad (2.15)$$

$$\dot{\Gamma}_{11}(\tau,t) = -\tilde{H}_1^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_1(t), \qquad (2.16)$$

$$\dot{\Gamma}_{22}(s,t) = -\tilde{H}_2^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_2(t), \qquad (2.17)$$

$$\dot{\Gamma}_{01}(\tau,t) = F(t)\Gamma_{01}(\tau,t) - \tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_1(t), \qquad (2.18)$$

$$\dot{\Gamma}_{02}(s,t) = \left[F(t) + Q(t)\Gamma^{-1}(t)\right]\Gamma_{02}(s,t) -$$

$$-\tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_2(t), \qquad (2.19)$$

$$\dot{\Gamma}_{12}(\tau,s,t) = -\tilde{H}_1^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_2(t) \qquad (2.20)$$

с начальными условиями

$$\Gamma(t_m) = \Gamma(t_m - 0) - \tilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\tilde{G}_0(t_m), \qquad (2.21)$$

$$\Gamma_{11}(\tau,t_m) = \Gamma_{11}(\tau,t_m - 0) - \tilde{G}_1^T(t_m)W^{-1}(t_m)\tilde{G}_1(t_m),$$

$$\Gamma_{22}(s,t_m) = \Gamma_{22}(s,t_m - 0) -$$

$$-\tilde{G}_2^T(t_m)W^{-1}(t_m)\tilde{G}_2(t_m), \qquad (2.22)$$

$$\Gamma_{01}(\tau,t_m) = \Gamma_{01}(\tau,t_m - 0) - \tilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\tilde{G}_1(t_m),$$

$$\Gamma_{02}(s,t_m) = \Gamma_{02}(s,t_m - 0) -$$

$$-\tilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\tilde{G}_2(t_m), \qquad (2.23)$$

$$\Gamma_{12}(\tau,s,t_m)=\Gamma_{12}(\tau,s,t_m-0)-\widetilde{G}_1^T(t_m)W^{-1}(t_m)\widetilde{G}_2(t_m),$$

в которых $\widetilde{\Gamma}(s,t)=\begin{bmatrix}\Gamma(t) & \Gamma_{02}(s,t)\\ \Gamma_{02}^T(s,t) & \Gamma_{22}(s,t)\end{bmatrix}$,

$$\widetilde{H}_{0,2}(t)=\left[\widetilde{H}_0(t)\ \ \widetilde{H}_2(t)\right],$$

$$\widetilde{H}_0(t)=H_0(t)\Gamma(t)+H_1(t)\Gamma_{01}^T(\tau,t),$$

$$\widetilde{H}_1(t)=H_0(t)\Gamma_{01}(\tau,t)+H_1(t)\Gamma_{11}(\tau,t),$$

$$\widetilde{H}_2(t)=H_0(t)\Gamma_{02}(s,t)+H_1(t)\Gamma_{12}(\tau,s,t),$$

$$\widetilde{G}_0(t_m)=G_0(t_m)\Gamma(t_m-0)+G_1(t_m)\Gamma_{01}^T(\tau,t_m-0),$$

$$\widetilde{G}_1(t_m)=G_0(t_m)\Gamma_{01}(\tau,t_m-0)+G_1(t_m)\Gamma_{11}(\tau,t_m-0),$$

$$\widetilde{G}_2(t_m)=G_0(t_m)\Gamma_{02}(s,t_m-0)+G_1(t_m)\Gamma_{12}(\tau,s,t_m-0),$$

$$W(t_m)=V(t_m)+G_0(t_m)\Gamma(t_m-0)G_0^T(t_m)+G_1(t_m)\times$$
$$\times\Gamma_{01}^T(\tau,t_m-0)G_0^T(t_m)+G_0(t_m)\Gamma_{01}(\tau,t_m-0)G_1^T(t_m)+$$
$$+G_1(t_m)\Gamma_{11}(\tau,t_m-0)G_1^T(t_m)$$

и всюду $\varphi(\cdot,t_m-0)=\lim\varphi(\cdot,t)$ при $t\uparrow t_m$ обозначают решения соответствующих дифференциальных уравнений на предыдущем интервале времени, вычисленные при $t=t_m$. Матричные функции $D(t)$ и $D_{02}(s,t)$ определяются уравнениями

$$\dot{D}(t)=F(t)D(t)+D(t)F^T(t)+Q(t),$$
$$\dot{D}_{02}(s,t)=\left[F(t)+Q(t)D^{-1}(t)\right]D_{02}(s,t)$$

с начальными условиями $D(t_0)=\Gamma_0$, $D_{02}(s,t)|_{t=t_0}=$ $=D_{02}(s,t_0)$, $D(s)$ – решение уравнения для $D(t)$ в точке $t=s$, а $D_{02}(s,t_0)$ – решение уравнения $\dot{D}_{02}(y,t_0)=D_{02}(y,t_0)F^T(y)$ с начальным условием $D_{02}(y,t)|_{y=t_0}=\Gamma_0$, вычисленное в точке $y=s$. Начальное условие для уравнения (2.14) имеет вид (2.4), где ($|\cdot|$ – определитель матрицы) $\Delta I_s^{t_m}[.]=$ $=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\left|\widetilde{\Gamma}(s,t_m-0)\right|}{\left|\widetilde{\Gamma}(s,t_m)\right|}\right]$. Доказательство данного результата основано на вычислении математических ожиданий в (2.1), (2.4) с использованием (2.13).

3. Дискретная передача гауссовского марковского процесса диффузионного типа

Рассматривается задача обратной экстраполяции скалярного стационарного гауссовского марковского процесса x_t, описываемого уравнением

$$dx_t=-ax_tdt+\Phi_1d\omega_t\ \ (a>0) \qquad (3.1)$$

по наблюдениям скалярного стационарного процесса

$$\eta(t_m)=G_0x_{t_m}+G_1x_\tau+\xi(t_m) \qquad (3.2)$$

(непрерывные наблюдения отсутствуют).

Для случая редких дискретных наблюдений, когда на интервалах $[t_m,t_{m+1})$ решения дифференциальных уравнений (2.15)–(2.20) для рассматриваемой задачи достигают установившихся значений

$$\gamma^*=\gamma_{22}^*(T)=\gamma_{11}^*(t^*)=Q/(2a),$$
$$\gamma_{01}^*(t^*)=\gamma^*\exp\{-at^*\},\ \gamma_{02}^*(T)=\gamma^*\exp\{-aT\},$$
$$\gamma_{12}^*(t^*,T)=\gamma^*\exp\{-a(t^*+T)\},\ t^*=t-\tau,\ T=s-t,$$

формулы (2.21)–(2.23) принимают вид

$$\gamma(t_m)=\gamma^*-\frac{(\gamma^*)^2(G_0+G_1\exp\{-at^*\})^2}{V+\gamma^*[G_0^2+2G_0G_1\exp\{-at^*\}+G_1^2]},$$

$$\gamma_{22}(\tau,t_m)=\gamma^*-$$
$$-\frac{(\gamma^*)^2\exp\{-2aT\}(G_0+G_1\exp\{-at^*\})^2}{V+\gamma^*[G_0^2+2G_0G_1\exp\{-at^*\}+G_1^2]},$$

$$\gamma_{02}(\tau,t_m)=\gamma(t_m)\exp\{-aT\}.$$

Если канал наблюдения без памяти ($G_1=0$), то

$$\widetilde{\gamma}(t_m)=\gamma^*-\frac{(\gamma^*)^2G_0^2}{V+\gamma^*G_0^2},$$

$$\widetilde{\gamma}_{22}(\tau,t_m)=\gamma^*-\frac{(\gamma^*)^2G_0^2\exp\{-2aT\}}{V+\gamma^*G_0^2},$$

$$\widetilde{\gamma}_{02}(\tau,t_m)=\widetilde{\gamma}(t_m)\exp\{-2aT\}.$$

Введем меру информационной эффективности

$$\Delta_{s,t_m}=I_s^{t_m}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\right]-$$
$$-\Delta\widetilde{I}_s^{t_m}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\right] \qquad (3.3)$$

где

$$\Delta I_s^{t_m}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\gamma^*\gamma_{22}^*(T)-(\gamma_{02}^*(T))^2}{\gamma(t_m)\gamma_{22}(s,t_m)-(\gamma_{02}(s,t_m))^2}\right], \qquad (3.4)$$

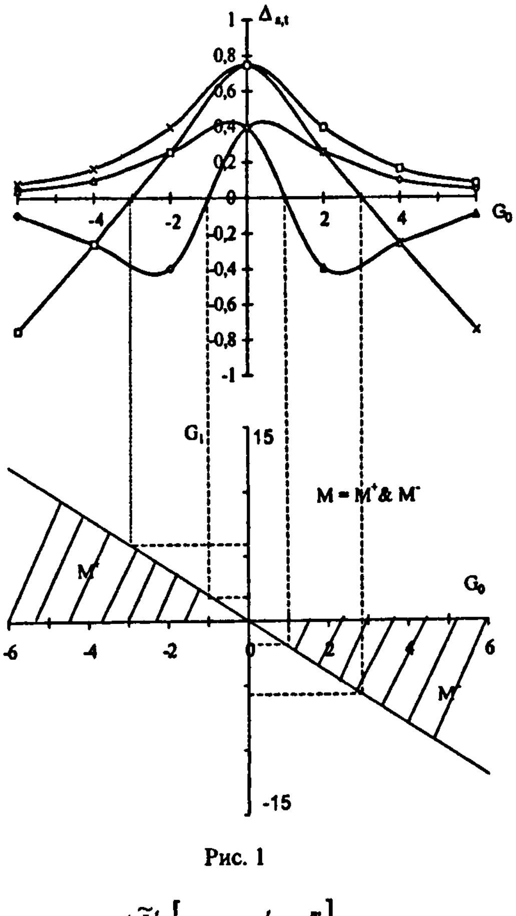

Рис. 1

$$\Delta\widetilde{I}_s^{t_m}\left[x_s,x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\gamma^*\gamma_{22}^*(T)-(\gamma_{02}^*(T))^2}{\widetilde{\gamma}(t_m)\widetilde{\gamma}_{22}(s,t_m)-(\widetilde{\gamma}_{02}(s,t_m))^2}\right] \qquad (3.5)$$

– есть приращения шенноновских количеств информации соответственно канала с памятью и канала без памяти. Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), получаем

$$\Delta_{s,t_m} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\tilde{\gamma}(t_m)}{\gamma(t_m)}\right]. \qquad (3.6)$$

Рассмотрим зависимость Δ_{s,t_m} от параметра t^*, характеризующего глубину памяти канала наблюдения. При малых t^*, когда $at^* \ll 1$ ($\exp\{-at^*\} \cong 1$), имеем $\Delta_{s,t_m} \xrightarrow[at^* \to 0]{} \Delta^0_{s,t_m}$, , где

$$\Delta^0_{s,t_m} = \frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{\gamma^*(2G_0G_1+G_1^2)}{V+\gamma^* G_0^2}\right]. \qquad (3.7)$$

Как видно из (3.7), $\Delta^0_{s,t_m} \ge 0$, если $(G_0,G_1) \notin M$, и $\Delta^0_{s,t_m} < 0$, если $(G_0,G_1) \in M$ (рис. 1), где $M = \{(G_0,G_1): G_1^2 + 2G_0G_1 < 0\}$, т.е. если $(G_0,G_1) \notin M$, то при малых t^* канал с памятью несет в себе больше совместной информации о значениях x_s и x_t, чем канал без памяти. При больших t^*, когда $at^* \gg 1$ ($\exp\{-at^*\} \cong 0$), имеем $\Delta_{s,t_m} \xrightarrow[at^* \to \infty]{} \Delta^\infty_{s,t_m}$, где

$$\Delta^\infty_{s,t_m} = \frac{1}{2}\ln\left[1-\frac{(\gamma^*)G_0^2G_1^2}{\left[V+\gamma^* G_1^2\right]\left[V+\gamma^* G_0^2\right]}\right], \qquad (3.8)$$

откуда следует, что $\Delta^\infty_{s,t_m} < 0$, т.е. при больших t^* дискретный канал наблюдения без памяти информативнее канала с памятью всегда. Следовательно, Δ_{s,t_m} как функция от t^* является монотонно убывающей, если $(G_0,G_1) \notin M$ (рис. 2).

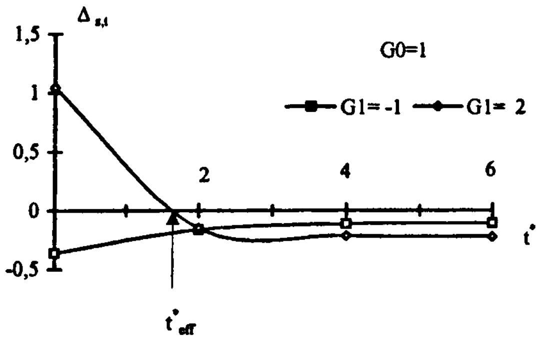

Рис. 2

Это говорит о том, что при $t^* < t^*_{eff}$, где

$$t^*_{eff} = \frac{1}{a}\ln\left[\frac{G_1(V+\gamma^* G_0^2)}{G_0\left[\sqrt{V^2+\gamma^*(VG_1^2+\gamma^* G_0^2G_1^2)}-V\right]}\right]$$

находится из условия $\Delta_{s,t_m} = 0$, член $G_1 x_\tau$ содержит дополнительную информацию о значениях процесса x_t, а при $t^* \ge t^*_{eff}$ не содержит такой информации и действует как дополнительный шум.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
3. *Демин Н.С.* Экстраполяция случайных процессов при непрерывно-дискретных каналах наблюдения с памятью // Автоматика и телемеханика. 1992. № 4. С. 64–72.
4. *Розовский Б.Л.* О формуле Ито-Вентцеля // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. 1973. № 1. С. 26–32.
5. *Демин Н.С., Короткевич В.И.* О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 86–96.
6. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 15 февраля 2000 г.

УДК 519.2

Н.С. Демин, О.В. Рожкова

РАСПОЗНАВАНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В СЛУЧАЕ НАБЛЮДЕНИЙ С ФИКСИРОВАННОЙ ПАМЯТЬЮ

В классе нерандомизированных байесовских решающих правил решена задача распознавания в случае, когда ненаблюдаемым является процесс с непрерывным временем, а наблюдаемыми являются процессы с непрерывным и дискретным временем, которые зависят не только от текущих, но и от произвольного числа прошлых значений ненаблюдаемого процесса.

1. Постановка задачи

Ненаблюдаемый n-мерный процесс x_t и наблюдаемый l-мерный процесс z_t с непрерывным временем заданы на решениях стохастических дифференциальных уравнений [1]:

$$dx_t = F(t,\theta)x_t\,dt + \Phi_1(t,\theta)d\omega_t,\ t \ge 0, \qquad (1)$$

$$dz_t = \left[H_0(t,\theta)x_t + \sum_{k=1}^{N} H_k(t,\theta)x_{\tau_k}\right]dt + \Phi_2(t)dv_t, \qquad (2)$$

а q-мерный наблюдаемый процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = G_0(t_m,\theta)x_{t_m} + \sum_{k=1}^{N} G_k(t_m,\theta)x_{\tau_k} + \xi(t_m), \qquad (3)$$

где $m = 0,1,\cdots$; $0 \le t_0 \le \tau_N < \ldots < \tau_1 < t_m \le t$.

Предполагается: 1) процессы ω_t и v_t являются соответственно r_1-мерным и r_2-мерным стандартными винеровскими процессами [1];