

— есть приращения шенноновских количеств информации соответственно канала с памятью и канала без памяти. Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), получаем

$$\Delta_{s,t_m} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\tilde{\gamma}(t_m)}{\gamma(t_m)} \right]. \quad (3.6)$$

Рассмотрим зависимость Δ_{s,t_m} от параметра t^* , характеризующего глубину памяти канала наблюдения. При малых t^* , когда $at^* \ll 1$ ($\exp\{-at^*\} \approx 1$), имеем

$$\Delta_{s,t_m} \xrightarrow{at^* \rightarrow 0} \Delta_{s,t_m}^0, \text{ где}$$

$$\Delta_{s,t_m}^0 = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{\gamma^*(2G_0G_1 + G_1^2)}{V + \gamma^*G_0^2} \right]. \quad (3.7)$$

Как видно из (3.7), $\Delta_{s,t_m}^0 \geq 0$, если $(G_0, G_1) \notin M$, и $\Delta_{s,t_m}^0 < 0$, если $(G_0, G_1) \in M$ (рис. 1), где $M = \{(G_0, G_1): G_1^2 + 2G_0G_1 < 0\}$, т.е. если $(G_0, G_1) \notin M$, то при малых t^* канал с памятью несет в себе больше совместной информации о значениях x_s и x_t , чем канал без памяти. При больших t^* , когда $at^* \gg 1$ ($\exp\{-at^*\} \approx 0$), имеем $\Delta_{s,t_m} \xrightarrow{at^* \rightarrow \infty} \Delta_{s,t_m}^\infty$, где

$$\Delta_{s,t_m}^\infty = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{(\gamma^*)G_0^2G_1^2}{[V + \gamma^*G_1^2][V + \gamma^*G_0^2]} \right], \quad (3.8)$$

откуда следует, что $\Delta_{s,t_m}^\infty < 0$, т.е. при больших t^* дискретный канал наблюдения без памяти информативнее

канала с памятью всегда. Следовательно, Δ_{s,t_m} как функция от t^* является монотонно убывающей, если $(G_0, G_1) \notin M$ (рис. 2).

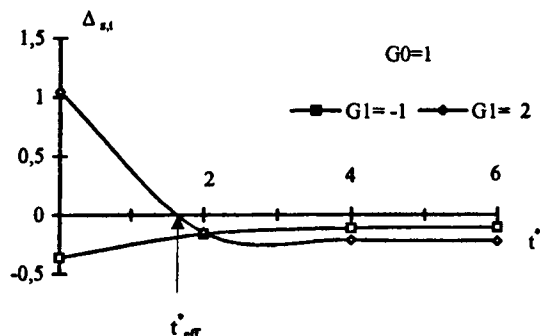


Рис. 2

Это говорит о том, что при $t^* < t^*_{eff}$, где

$$t^*_{eff} = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{G_1(V + \gamma^*G_0^2)}{G_0[\sqrt{V^2 + \gamma^*(VG_1^2 + \gamma^*G_0^2G_1^2)} - V]} \right]$$

находится из условия $\Delta_{s,t_m} = 0$, член G_1x_t содержит дополнительную информацию о значениях процесса x_t , а при $t^* \geq t^*_{eff}$ не содержит такой информации и действует как дополнительный шум. . . .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
3. Демин Н.С. Экстраполяция случайных процессов при непрерывно-дискретных каналах наблюдения с памятью // Автоматика и телемеханика. 1992. № 4. С. 64–72.
4. Розовский Б.Л. О формуле Ито-Вентцеля // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. 1973. № 1. С. 26–32.
5. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 86–96.
6. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 15 февраля 2000 г.

УДК 519.2

Н.С. Демин, О.В. Рожкова

РАСПОЗНАВАНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В СЛУЧАЕ НАБЛЮДЕНИЙ С ФИКСИРОВАННОЙ ПАМЯТЬЮ

В классе нерандомизированных байесовских решающих правил решена задача распознавания в случае, когда ненаблюдаемым является процесс с непрерывным временем, а наблюдаемыми являются процессы с непрерывным и дискретным временем, которые зависят не только от текущих, но и от произвольного числа прошлых значений ненаблюдаемого процесса.

1. Постановка задачи

Ненаблюдаемый n -мерный процесс x_t и наблюдаемый l -мерный процесс z_t с непрерывным временем заданы на решениях стохастических дифференциальных уравнений [1]:

$$dx_t = F(t, \theta)x_t dt + \Phi_1(t, \theta)d\omega_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$dz_t = \left[H_0(t, \theta)x_t + \sum_{k=1}^N H_k(t, \theta)x_{t_k} \right] dt + \Phi_2(t)dv_t, \quad (2)$$

а q -мерный наблюдаемый процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = G_0(t_m, \theta)x_{t_m} + \sum_{k=1}^N G_k(t_m, \theta)x_{t_k} + \xi(t_m), \quad (3)$$

где $m=0,1,\dots; 0 \leq t_0 \leq \tau_N < \dots < \tau_1 < t_m \leq t$.

Предполагается: 1) процессы ω_t и v_t являются соответственно r_1 -мерным и r_2 -мерным стандартными винеровскими процессами [1];

2) $\theta \in \Omega_\theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_r\}$ с заданными вероятностями $p_0(\theta_j) = P\{\theta = \theta_j\}, j = \overline{0; r};$ (4)

3) процесс $\xi(t_m)$ является при всех $\theta = \theta_j, j = \overline{0; r}$, белым гауссовским с математическим ожиданием $b_j(t_m)$ и матрицей интенсивности $V(t_m, \theta_j);$

4) x_0 при $\theta = \theta_j$ является нормальным с параметрами $\mu_0^j, \Gamma_0^j;$

5) матрицы $R(t) = \Phi_2(t) \Phi_2^T Q(t, \theta) = \Phi_1(t, \theta) \Phi_1^T(t, \theta), V(t_m, \theta_j)$ для всех $\theta_j, j = \overline{1; r}$, являются положительными определенными;

6) $x_0, \omega, \nu, \xi(t_m)$ независимы.

Требуется по совокупности реализаций

$$z'_0 = \{z(s), 0 \leq s \leq t\} \text{ и } \eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \dots, \eta(t_m)\}$$

решить задачу распознавания гипотез $H_j \{\theta = \theta_j\}, j = \overline{0; r}$. Поскольку в классе нерандомизированных байесовских стратегий достаточными статистиками являются отношения правдоподобия $L_i(\theta_j; \theta_a)$, то их нахождение составляет содержание данной работы.

Обозначения: $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{y; a, B\}$ – плотность нормального (гауссовского) распределения с параметрами a и B ; $|B|$ и $\text{tr}[B]$ – определитель и след матрицы B ; « T » – транспонирование, если используется как правый верхний индекс; I и O – единичная и нулевая матрицы.

2. Предварительные результаты

Пусть $\tilde{x}_r^N = [x_{r1}^T \dots x_{rn}^T]^T, \tilde{x}_N = [x_1^T \dots x_N^T]^T,$
 $\tilde{\tau}_N = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N),$

$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j) = \begin{bmatrix} \mu(t | \theta_j) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t | \theta_j) \\ \mu(\tau_k | \theta_j) \end{bmatrix},$$

$$\mu(t | \theta_j) = M\{x_t | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\},$$

$$\mu(\tau_k | \theta_j) = M\{x_{\tau_k} | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\}, k = \overline{1; N}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Gamma(t | \theta_j) & \Gamma_{01}(\tau_1, t | \theta_j) & \Gamma_{0k}(\tau_k, t | \theta_j) \\ \Gamma_{01}^T(\cdot) & \Gamma_{11}(\tau_1, t | \theta_j) & \Gamma_{1k}(\tau_k, t | \theta_j) \\ \Gamma_{0k}^T(\cdot) & \Gamma_{1k}^T(\cdot) & \Gamma_{kk}(\tau_k, t | \theta_j) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$k = \overline{2; N}, l = \overline{1; N-1}, k > l,$$

где $\Gamma(t | \theta_j) = M\{\mu^0(t | \theta_j) | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\}$

$$\Gamma_{kk}(\tau_k, t | \theta_j) = M\{\mu^0(\tau_k, t | \theta_j) \mu^{0T}(\tau_k, t | \theta_j) | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\}$$

$$\Gamma_{0k}(\tau_k, t | \theta_j) = M\{\mu^0(t | \theta_j) \mu^{0T}(\tau_k, t | \theta_j) | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\}, \quad (7)$$

$$\Gamma_{1k}(\tau_k, \tau_l, t | \theta_j) = M\{\mu^0(\tau_l, t | \theta_j) \mu^{0T}(\tau_k, t | \theta_j) | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\},$$

$$\mu^0(t | \theta_j) = x_t - \mu(t | \theta_j), \quad \mu^0(\tau_k, t | \theta_j) = x_{\tau_k} - \mu(\tau_k, t | \theta_j),$$

$$\tilde{\mu}_{N+1}^0(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j) = \begin{bmatrix} \mu^0(t | \theta_j) \\ \tilde{\mu}_N^0(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^0(t | \theta_j) \\ \mu^0(\tau_k | \theta_j) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Пусть $p_i(x; \tilde{x}_N | \theta_j) =$

$$\frac{\partial^{N+1} P\{x_i \leq x, \tilde{x}_i^N \leq \tilde{x}_N | \theta_j, z'_0, \mu_0^m\}}{\partial x \partial \tilde{x}^N}, j = \overline{0; r},$$

$$= \frac{\partial^{N+1} P\{x_i \leq x, \tilde{x}_i^N \leq \tilde{x}_N | \theta_j, z'_0, \eta_0^m\}}{\partial x \partial \tilde{x}_N}, j = \overline{0; r}. \quad (9)$$

Лемма 1. Для условных апостериорных плотностей (9) имеет место свойство

$$p_i(x; \tilde{x}_N | \theta_j) =$$

$$= N\{\tilde{x}_{N+1}; \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j), \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \theta_j)\}. \quad (10)$$

Блочные составляющие – см. (5), (6) – параметров распределения (10) на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d_1 \mu(t | \theta_j) = F(t, \theta_j) \mu(t | \theta_j) dt + \tilde{H}_0^T(t | \theta_j) R^{-1}(t) d\tilde{Z}_t(\theta_j), \quad (11)$$

$$d_1 \mu(\tau_k, t | \theta_j) = \tilde{H}_k^T(t | \theta_j) R^{-1}(t) d\tilde{Z}_t(\theta_j), \quad (12)$$

$$\dot{\Gamma}(t | \theta_j) = F(t, \theta_j) \Gamma(t | \theta_j) + \Gamma(t | \theta_j) F^T(t, \theta_j) + Q(t, \theta_j) - \tilde{H}_0^T(t | \theta_j) R^{-1}(t) \tilde{H}_0(t | \theta_j), \quad (13)$$

$$\dot{\Gamma}_{kk}(\tau_k, t | \theta_j) = -\tilde{H}_k^T(t | \theta_j) R^{-1}(t) \tilde{H}_k(t | \theta_j), k = \overline{1; N}, \quad (14)$$

$$\dot{\Gamma}_{0k}(\tau_k, t | \theta_j) = F(t, \theta_j) \Gamma_{0k}(\tau_k, t | \theta_j) - \tilde{H}_0^T(t | \theta_j) R^{-1}(t) \tilde{H}_k(t | \theta_j), k = \overline{1; N}, \quad (15)$$

$$\dot{\Gamma}_{1k}(\tau_k, \tau_l, t | \theta_j) = -\tilde{H}_l^T(t | \theta_j) R^{-1}(t) \tilde{H}_k(t | \theta_j), k = \overline{1; N}, l = \overline{1; N-1}, k > l, \quad (16)$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m | \theta_j) = \mu(t_m - 0 | \theta_j) + \tilde{G}_0^T(t_m | \theta_j) W^{-1}(t_m | \theta_j) [\tilde{\eta}(t_m | \theta_j) - b_j(t_m)], \quad (17)$$

$$\mu(\tau_k, t_m | \theta_j) = \mu(\tau_k, t_m - 0 | \theta_j) + \tilde{G}_k^T(t_m | \theta_j) W^{-1}(t_m | \theta_j) [\tilde{\eta}(t_m | \theta_j) - b_j(t_m)], \quad (18)$$

$$\dot{\Gamma}(t_m | \theta_j) = \dot{\Gamma}(t_m - 0 | \theta_j) - \tilde{G}_0^T(t_m | \theta_j) W^{-1}(t_m | \theta_j) \tilde{G}_0(t_m | \theta_j), \quad (19)$$

$$\Gamma_{kk}(\tau_k, t_m | \theta_j) = \Gamma_{kk}(\tau_k, t_m - 0 | \theta_j) - \tilde{G}_k^T(t_m | \theta_j) W^{-1}(t_m | \theta_j) \tilde{G}_k(t_m | \theta_j), \quad (20)$$

$$\Gamma_{0k}(\tau_k, t_m | \theta_j) = \Gamma_{0k}(\tau_k, t_m - 0 | \theta_j) - \tilde{G}_0^T(t_m | \theta_j) W^{-1}(t_m | \theta_j) \tilde{G}_k(t_m | \theta_j), \quad (21)$$

$$\Gamma_{1k}(\tau_k, \tau_l, t_m | \theta_j) = \Gamma_{1k}(\tau_k, \tau_l, t_m - 0 | \theta_j) -$$

$$-\tilde{G}_i^T(t_m|\theta_j)W^{-1}(t_m|\theta_j)\tilde{G}_k(t_m|\theta_j), \quad (22)$$

где

$$d\tilde{x}_i(\theta_j) = dz_i - \left[H_0(t, \theta_j)\mu(t|\theta_j) + \sum_{i=1}^N H_i(t, \theta_j)\mu(\tau_i, t|\theta_j) \right] dt, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(t|\theta_j) &= H_0(t, \theta_j)\Gamma(t|\theta_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^N H_i(t, \theta_j)\Gamma_{0i}^T(\tau_i, t|\theta_j), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(t|\theta_j) &= H_k(t, \theta_j)\Gamma_{kk}(\tau_k, t|\theta_j) + \\ &+ \sum_{i \neq k}^N H_i(t, \theta_j)\Gamma_{ki}^T(\tau_i, \tau_k, t|\theta_j), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t_m|\theta_j) &= \eta(t_m) - G_0(t_m, \theta_j)\mu(t_m - 0|\theta_j) - \\ &- \sum_{i=1}^N G_i(t_m, \theta_j)\mu(\tau_i, t_m - 0|\theta_j), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(t_m|\theta_j) &= G_0(t_m, \theta_j)\Gamma(t_m - 0|\theta_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^N G_i(t_m, \theta_j)\Gamma_{0i}^T(\tau_i, t_m - 0|\theta_j), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k(t_m|\theta_j) &= G_k(t_m, \theta_j)\Gamma_{kk}(\tau_k, t_m - 0|\theta_j) + \\ &+ \sum_{i \neq k}^N G_i(t_m, \theta_j)\Gamma_{ki}^T(\tau_i, \tau_k, t_m - 0|\theta_j), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} W(t_m|\theta_j) &= V(t_m, \theta_j) + \\ &+ G_{0N}(t_m, \theta_j)\tilde{\beta}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0|\theta_j)G_{0N}^T(t_m, \theta_j), \end{aligned} \quad (29)$$

$$G_{0N}(t_m, \theta_j) = [G_0(t_m, \theta_j) : G_1(t_m, \theta_j) : \dots : G_N(t_m, \theta_j)]. \quad (30)$$

Данный результат следует из [3, ч. II] с учетом того, что рассматриваемый в данной работе случай фиксированной памяти, когда $\tau_k = const$, является частным случаем скользящей памяти, и $\tau_k = t - t_k^*$, $t_k^* = const$, который рассматривался в [3].

Лемма 2. Процесс $\tilde{\eta}(t_m|\theta_j)$, определяемый формулой (26), является при гипотезе $H_j\{\theta = \theta_j\}$ гауссовским с параметрами $b_j(t_m)$ и $W(t_m, \theta_j)$, т.е.

$$p_{t_m}(\tilde{\eta}|H_j) = N\{\tilde{\eta}; b_j(t_m), W(t_m|\theta_j)\}, \quad (31)$$

где $W(t_m|\theta_j)$ определяется формулой (29).

Доказательство. Использование (3) в (26) дает при гипотезе $H_j\{\theta = \theta_j\}$ для $\tilde{\eta}(t_m|\theta_j)$ с учетом (5)–(8), (30) следующее представление:

$$\tilde{\eta}(t_m|\theta_j)_{H_j} = G_{0N}(t_m, \theta_j)\tilde{\mu}_{N+1}^0(\tilde{\tau}_N, t_m - 0|\theta_j) + \xi(t_m). \quad (32)$$

Тогда (31) следует из (10) с учетом (32), (5)–(8) и условий 3, 6 постановки задачи.

3. Основные результаты

Теорема 1. Отношение правдоподобия $\Lambda_i(\theta_j : \theta_\alpha)$ в задаче различения гипотез $H_j\{\theta = \theta_j\}$ и $H_\alpha\{\theta = \theta_\alpha\}$,

$j = \overline{0; r}, \alpha = \overline{0; r}$, на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} d_i \Lambda_i(\theta_j : \theta_\alpha) &= \Lambda_i(\theta_j : \theta_\alpha) \left[\overline{h(t|\theta_j)} - \overline{h(t|\theta_\alpha)} \right]^T \times \\ &\times R^{-1}(t) \left[dz_t - \overline{h(t|\theta_\alpha)} dt \right] \end{aligned} \quad (33)$$

с начальным условием $\Lambda_i(\theta_j : \theta_\alpha) = \frac{|W(t_m|\theta_j)|}{|W(t_m|\theta_\alpha)|} \times$

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j) \right\} \times \\ &\times \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha) \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha) \right\}} \times \\ &\times \frac{|\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)|}{|\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_m)|} \cdot \Lambda_{i, t_m-0}(\theta_j : \theta_\alpha) \end{aligned} \quad (34)$$

где $\overline{h(t|\theta_j)} = H_0(t, \theta_j)\mu(t|\theta_j) + \sum_{k=1}^N H_k(t, \theta_j)\mu(\tau_k, t|\theta_j), \quad (35)$

а $\tilde{\eta}(t_m|\theta_j)$ и $W(t_m|\theta_j)$ определяются по (26) и (29).

Доказательство. Из [3, ч. I] следует, что при $t_m < t < t_{m+1}$ для $p_i(x; \tilde{x}_N; \theta_j) = \partial^{N+1} P\{x_i \leq x, \tilde{x}_i^N \leq \tilde{x}_N, \theta = \theta_j | z_0', \eta_0^m\} / \partial x \partial \tilde{x}^N. \quad (36)$

имеет место уравнение

$$\begin{aligned} d_i p_i(x; \tilde{x}_N; \theta_j) &= L_{i,x} p_i(x; \tilde{x}_N; \theta_j) dt + p_i(x; \tilde{x}_N; \theta_j) \times \\ &\times [h(t, x, \tilde{x}_N, \theta_j) - \overline{h(t)}]^T R^{-1}(t) [dz_t - \overline{h(t)} dt], \end{aligned} \quad (37)$$

где $h(t, x, \tilde{x}_N, \theta_j) = H_0(t, \theta_j)x + \sum_{k=1}^N H_k(t, \theta_j)x_k, \quad (38)$

$$\overline{h(t)} = M\{h(t, x_i, \tilde{x}_i^N, \theta_j) | z_0', \eta_0^m\}. \quad (39)$$

По формуле условной вероятности

$$p_i(x; \tilde{x}_N; \theta_j) = p(x; \tilde{x}_N | \theta_j) p_i(\theta_j), \quad (40)$$

где $p_i(x; \tilde{x}_N | \theta_j)$ введено по определению (9), а

$$p_i(\theta_j) = P\{\theta = \theta_j | z_0', \eta_0^m\} \quad (41)$$

и являются апостериорными вероятностями гипотез $H_j\{\theta = \theta_j\}, j = \overline{0; r}$. Интегрирование (37) по $x, \tilde{x}_N$ приводит с учетом (5), (35), (40) к уравнению

$$\begin{aligned} d_i p_i(\theta_j) &= p_i(\theta_j) \left[\overline{h(t|\theta_j)} - \overline{h(t)} \right]^T R(t) [dz_t - \overline{h(t)} dt], \end{aligned} \quad (42)$$

где $\overline{h(t)} = \sum_{i=0}^r p_i(\theta_i) \overline{h(t|\theta_i)}. \quad (43)$

Формула (43) следует из (39), (40). Согласно [2] имеет место формула

$$\Lambda_i(\theta_j : \theta_\alpha) = [p_0(\theta_\alpha) / p_0(\theta_j)] P_i(\theta_j : \theta_\alpha), \quad (44)$$

где $P_i(\theta_j : \theta_\alpha) = p_i(\theta_j) / p_i(\theta_\alpha). \quad (45)$

Так как процесс $\tilde{z}_t$, с дифференциалом $d\tilde{z}_t = dz_t - \bar{h}(t)dt$, винеровский [1], то дифференцирование (45) по формуле Ито с использованием (42) дает:

$$d_t P_t(\theta_j; \theta_\alpha) = P_t(\theta_j; \theta_\alpha) \times \left[\bar{h}(t|\theta_j) - \bar{h}(t|\theta_\alpha) \right]^T R^{-1}(t) \left[dz_t - \bar{h}(t|\theta_\alpha) dt \right]. \quad (46)$$

Использование (44) в (46) приводит к (33). По формуле Байеса для $p_t(\theta_j)$ при $t = t_m$ имеем

$$p_{t_m}(\theta_j) = \frac{P(\eta(t_m)|\theta_j, z_0^{t_m}, r_0^{m-1}) p_{t_m-0}(\theta_j)}{\sum_{i=0}^r P(\eta(t_m)|\theta_i, z_0^{t_m}, r_0^{m-1}) p_{t_m-0}(\theta_i)}, \quad (47)$$

где $p_{t_m-0}(\theta_j) = P\{\theta = \theta_j | z_0^{t_m}, r_0^{m-1}\}$. Использование (44) – (45) и (47) дает:

$$\Lambda_{t_m}(\theta_j; \theta_\alpha) = \frac{P(\eta(t_m)|\theta_j, z_0^{t_m}, r_0^{m-1})}{P(\eta(t_m)|\theta_\alpha, z_0^{t_m}, r_0^{m-1})} \Lambda_{t_m-0}(\theta_j; \theta_\alpha). \quad (48)$$

Из (26) с учетом (31) следует, что

$$P(\eta(t_m)|\theta_j, z_0^{t_m}, r_0^{m-1}) = (2\pi)^{-q/2} |W(t_m|\theta_j)|^{-1/2} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]^T \times \right. \\ \left. \times W^{-1}(t_m|\theta_j) [\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]\right\}. \quad (49)$$

Использование (49) при $i = j$ и $i = \alpha$ в (48) приводит к (34). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Апостериорные вероятности гипотез $p_t(\theta_j)$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнением (42) с начальным условием

$$p(t_m|\theta_j) = \frac{|W(t_m|\theta_j)|^{-1/2}}{\sum_{i=0}^r |W(t_m|\theta_i)|^{-1/2}} \times \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j) \right. \\ \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j) \right. \right. \\ \left. \times \frac{[\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]}{[\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]} p_{t_m-0}(\theta_j)\right\}, \quad (50)$$

которое получается после использования (49) в (47).

4. Частные случаи

Теорема 2. Пусть непрерывные наблюдения отсутствуют. Тогда для $\Lambda_{t_m}(\theta_j; \theta_\alpha)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\Lambda_{t_m}(\theta_j; \theta_\alpha) = \frac{|W(t_m|\theta_j)|^{-1/2}}{|W(t_m|\theta_\alpha)|^{-1/2}} \times$$

$$\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j) \right. \\ \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha) \right. \right. \\ \left. \times \frac{[\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) - b_j(t_m)]}{[\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_m)]} \cdot \Lambda_{t_m-1}(\theta_j; \theta_\alpha)\right\}, \quad (51)$$

а в правых частях уравнений (11)–(16) отсутствуют члены, содержащие $\tilde{H}_0(t|\theta_j)$, $\tilde{H}_k(t|\theta_j)$.

Данный результат следует из теоремы 1 с учетом того, что в случае отсутствия непрерывных наблюдений $H_0(t, \theta) = 0$, $H_k(t, \theta) = 0$, а при $t_m < t < t_{m+1}$ для $\Lambda_t(\theta_j; \theta_\alpha)$ справедливо уравнение $d_t \Lambda_t(\theta_j; \theta_\alpha) = 0$.

Следствие 2. В случае отсутствия непрерывных наблюдений для $\Lambda_t(\theta_j; \theta_\alpha)$ справедлива формула

$$\Lambda_{t_m}(\theta_j; \theta_\alpha) = \prod_{s=0}^m \frac{|W(t_s|\theta_j)|^{-1/2}}{|W(t_s|\theta_\alpha)|^{-1/2}} \times \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_s|\theta_j) - b_j(t_s)]^T W^{-1}(t_s|\theta_j) \right. \\ \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [\tilde{\eta}(t_s|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_s)]^T W^{-1}(t_s|\theta_\alpha) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[\tilde{\eta}(t_s|\theta_j) - b_j(t_s)]}{[\tilde{\eta}(t_s|\theta_\alpha) - b_\alpha(t_s)]}\right\}\right\}. \quad (52)$$

Данный результат следует из (51) с учетом того, что $\Lambda_{t_{m-1}}(\theta_j; \theta_\alpha) = 1$. Рассмотрим случай, когда гипотезы связаны только с шумом $\xi(t_m)$, т.е.

$$F(\cdot) \equiv F(t), \Phi_1(\cdot) \equiv \Phi_1(t), H_0(\cdot) \equiv H(t), G_0(\cdot) \equiv G_0(t_m), \\ H_k(\cdot) \equiv H_k(t), G_k(\cdot) \equiv G_k(t_m) \quad (53)$$

В этом случае зависимость от θ_j сохраняется только в начальных условиях и только через $b_j(t_m)$ и $V(t_m, \theta_j)$, а дифференциальные уравнения (11)–(16) зависят от типа гипотезы только через начальные условия (17)–(22) указанным способом. Если дискретные наблюдения редкие, то в решениях дифференциальных уравнений (11)–(16) на интервале $[t_{m-1}, t_m)$ теряется различие в начальных условиях к моменту времени t_m . С учетом сказанного, согласно (26),

$$\tilde{\eta}(t_m|\theta_j) = \tilde{\eta}(t_m) = \eta(t_m) - G_0(t_m)\mu(t_m - 0) - \\ - \sum_{k=1}^N G_k(t_m)\mu(\tau_k, t_m - 0) \quad (54)$$

Кроме того, в случае редких дискретных наблюдений решение имеет смысл выносить только по текущим значениям $\Lambda_{t_m}(\theta_j; \theta_\alpha)$, которые приобрета-

$$\text{ют вид} \quad \Lambda_{t_m}(\theta_j; \theta_\alpha) = \frac{|W(t_m|\theta_j)|^{-1/2}}{|W(t_m|\theta_\alpha)|^{-1/2}} \times$$

$$\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[\tilde{\eta}(t_m|\theta_j)-b_j(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}[\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha)-b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha)\right\}} \times \frac{|\tilde{\eta}(t_m)-b_j(t_m)|}{|\tilde{\eta}(t_m)-b_\alpha(t_m)|}, \quad (55)$$

$$\text{где} \quad W(t_m|\theta_j) = V(t_m, \theta_j) + G_{0N}(t_m) \tilde{F}_{N+1}(\tilde{r}_N, t_m - 0) G_{0N}^T(t_m). \quad (56)$$

Утверждение. При условиях (53) в случае редких дискретных наблюдений односторонние дивергенции [2]

$$I_{t_m}(j:\alpha) = M\{\tilde{\Lambda}_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)H_j\}, \\ I_{t_m}(\alpha:j) = -M\{\tilde{\Lambda}_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)H_\alpha\} \quad (57)$$

где $\tilde{\Lambda}_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha) = \ln\{\Lambda_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)\}$, определяются формулами:

$$I_{t_m}(j:\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{|W(t_m|\theta_\alpha)|}{|W(t_m|\theta_j)|} + \frac{1}{2} \text{tr}[W^{-1}(t_m|\theta_\alpha)W(t_m|\theta_j)] + \\ + \frac{1}{2} [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha) [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)] - \frac{q}{2}, \\ I_{t_m}(\alpha:j) = \frac{1}{2} \ln \frac{|W(t_m|\theta_j)|}{|W(t_m|\theta_\alpha)|} + \frac{1}{2} \text{tr}[W^{-1}(t_m|\theta_j)W(t_m|\theta_\alpha)] + \\ + \frac{1}{2} [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j) [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)] - \frac{q}{2}. \quad (58)$$

Формулы (58), (59) следуют в результате непосредственного вычисления по формулам (57) с учетом (31), (55) и условий 3 и 6 постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
3. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Автоматика и телемеханика. 1995. I. № 9. С. 49–59; II. № 10. С. 36–49.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 февраля 2000 г.

УДК 519.72

Н.С. Демин, И.Е. Сафронова

НАХОЖДЕНИЕ ШЕННОНОВСКОГО КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ КАНАЛАМ С ПАМЯТЬЮ

Получены уравнения для шенновской меры количества информации о значениях стохастического процесса в будущий момент времени, которое содержится в совокупности реализаций процессов с непрерывным и дискретным временем, обладающими памятью относительно ненаблюдаемого процесса.

1. Постановка задачи

Пусть n -мерный ненаблюдаемый процесс x_t и l -мерный наблюдаемый процесс z_t с непрерывным временем определяются уравнениями (в смысле Ито [1,2]):

$$dx_t = f(t, x_t)dt + \Phi_1(t, x_t)dw_t, \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

$$dz_t = h(t, x_t, x_{t_1}, \dots, x_{t_N})dt + \Phi_2(t)dv_t, \quad (2)$$

q -мерный наблюдаемый процесс $\eta(t_m)$ ($m = 0, 1, \dots; t_0 \geq 0$) с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m, x_{t_m}, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m), \quad (3)$$

где $0 < t_N < t_{N-1} < \dots < t_1 < t_m \leq t$; w_t и v_t , r_1 - и r_2 -мерные стандартные винеровские процессы; $\xi(t_m)$ – стандартная гауссовская r_3 -мерная последовательность с $M\{\xi(t_m)\} = 0$ и $M\{\xi(t_m)\xi^T(t_k)\} = I\delta_{mk}$ (I – единичная матрица, δ_{mk} – символ Кронекера).

Предполагается:

1) матрицы $Q(\cdot) = \Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot)$, $R(\cdot) = \Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)$,

$V(\cdot) = \Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot)$ не вырождены;

2) задана начальная плотность

$$p_0(x) = \partial P\{x_0 \leq x\} / \partial x;$$

3) $x_0, w_t, v_t, \xi(t_m)$ независимы в совокупности.

Задача: найти количество информации $I_s^m[x_s; z'_0, \eta_0^m]$ о значениях x_s , содержащееся в реализациях $z'_0 = \{z(s), t_0 \leq s \leq t\}$ и $\eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \dots, \eta(t_m); t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq t\}$.

Обозначения: $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{y; a, B\}$ – плотность гауссовского распределения с параметрами a и B ; $\text{tr}[\cdot]$ и $|\cdot|$ – след и определитель матрицы; « T » – транспонирование.

Введем расширенные процессы $\tilde{x}_t^N, \tilde{x}_{t,t}^{N+1}, \tilde{x}_{t,t,s}^{N+2}$ и расширенные переменные $\tilde{x}_N, \tilde{x}_{N+1}, \tilde{x}_{N+2}$:

$$\tilde{x}_t^N = \begin{bmatrix} x_{t_1} \\ \dots \\ x_{t_N} \end{bmatrix}, \tilde{x}_{t,t}^{N+1} = \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{x}_t^N \end{bmatrix}, \tilde{x}_{t,t,s}^{N+2} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{t,t}^{N+1} \\ x_s \end{bmatrix}, \\ \tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}, \tilde{x}_{N+1} = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix}, \tilde{x}_{N+2} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{N+1} \\ x^1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Количество информации по Шеннону о значениях x_s , содержащееся в совокупности реализаций, выражается формулой [3]: