

$$\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[\tilde{\eta}(t_m|\theta_j)-b_j(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}[\tilde{\eta}(t_m|\theta_\alpha)-b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha)\right\}} \times \frac{|\tilde{\eta}(t_m)-b_j(t_m)|}{|\tilde{\eta}(t_m)-b_\alpha(t_m)|}, \quad (55)$$

$$\text{где} \quad W(t_m|\theta_j) = V(t_m, \theta_j) + G_{0N}(t_m) \tilde{F}_{N+1}(\tilde{z}_N, t_m - 0) G_{0N}^T(t_m). \quad (56)$$

Утверждение. При условиях (53) в случае редких дискретных наблюдений односторонние дивергенции [2]

$$I_{t_m}(j:\alpha) = M\{\tilde{\Lambda}_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)H_j\}, \\ I_{t_m}(\alpha:j) = -M\{\tilde{\Lambda}_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)H_\alpha\} \quad (57)$$

где $\tilde{\Lambda}_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha) = \ln\{\Lambda_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)\}$, определяются формулами:

$$I_{t_m}(j:\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{|W(t_m|\theta_\alpha)|}{|W(t_m|\theta_j)|} + \frac{1}{2} \text{tr}[W^{-1}(t_m|\theta_\alpha)W(t_m|\theta_j)] + \\ + \frac{1}{2} [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_\alpha) [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)] - \frac{q}{2}, \\ I_{t_m}(\alpha:j) = \frac{1}{2} \ln \frac{|W(t_m|\theta_j)|}{|W(t_m|\theta_\alpha)|} + \frac{1}{2} \text{tr}[W^{-1}(t_m|\theta_j)W(t_m|\theta_\alpha)] + \\ + \frac{1}{2} [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)]^T W^{-1}(t_m|\theta_j) [b_j(t_m) - b_\alpha(t_m)] - \frac{q}{2}. \quad (58)$$

Формулы (58), (59) следуют в результате непосредственного вычисления по формулам (57) с учетом (31), (55) и условий 3 и 6 постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
3. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Автоматика и телемеханика. 1995. I. № 9. С. 49–59; II. № 10. С. 36–49.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 февраля 2000 г.

УДК 519.72

Н.С. Демин, И.Е. Сафронова

НАХОЖДЕНИЕ ШЕННОНОВСКОГО КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ КАНАЛАМ С ПАМЯТЬЮ

Получены уравнения для шенновской меры количества информации о значениях стохастического процесса в будущий момент времени, которое содержится в совокупности реализаций процессов с непрерывным и дискретным временем, обладающими памятью относительно ненаблюдаемого процесса.

1. Постановка задачи

Пусть n -мерный ненаблюдаемый процесс x_t и l -мерный наблюдаемый процесс z_t с непрерывным временем определяются уравнениями (в смысле Ито [1,2]):

$$dx_t = f(t, x_t)dt + \Phi_1(t, x_t)dw_t, \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

$$dz_t = h(t, x_t, x_{t_1}, \dots, x_{t_N})dt + \Phi_2(t)dv_t, \quad (2)$$

q -мерный наблюдаемый процесс $\eta(t_m)$ ($m = 0, 1, \dots; t_0 \geq 0$) с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m, x_{t_m}, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m), \quad (3)$$

где $0 < t_N < t_{N-1} < \dots < t_1 < t_m \leq t$; w_t и v_t , r_1 - и r_2 -мерные стандартные винеровские процессы; $\xi(t_m)$ – стандартная гауссовская r_3 -мерная последовательность с $M\{\xi(t_m)\} = 0$ и $M\{\xi(t_m)\xi^T(t_k)\} = I\delta_{mk}$ (I – единичная матрица, δ_{mk} – символ Кронекера).

Предполагается:

1) матрицы $Q(\cdot) = \Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot)$, $R(\cdot) = \Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)$,

$V(\cdot) = \Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot)$ не вырождены;

2) задана начальная плотность

$$p_0(x) = \partial P\{x_0 \leq x\} / \partial x;$$

3) $x_0, w_t, v_t, \xi(t_m)$ независимы в совокупности.

Задача: найти количество информации $I_s^m[x_s; z'_0, \eta_0^m]$ о значениях x_s , содержащееся в реализациях $z'_0 = \{z(s), t_0 \leq s \leq t\}$ и $\eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \dots, \eta(t_m); t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq t\}$.

Обозначения: $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{y; a, B\}$ – плотность гауссовского распределения с параметрами a и B ; $\text{tr}[\cdot]$ и $|\cdot|$ – след и определитель матрицы; «T» – транспонирование.

Введем расширенные процессы $\tilde{x}_t^N, \tilde{x}_{t,t}^{N+1}, \tilde{x}_{t,t,s}^{N+2}$ и расширенные переменные $\tilde{x}_N, \tilde{x}_{N+1}, \tilde{x}_{N+2}$:

$$\tilde{x}_t^N = \begin{bmatrix} x_{t_1} \\ \dots \\ x_{t_N} \end{bmatrix}, \tilde{x}_{t,t}^{N+1} = \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{x}_t^N \end{bmatrix}, \tilde{x}_{t,t,s}^{N+2} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{t,t}^{N+1} \\ x_s \end{bmatrix}, \\ \tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}, \tilde{x}_{N+1} = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix}, \tilde{x}_{N+2} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{N+1} \\ x^1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Количество информации по Шеннону о значениях x_s , содержащееся в совокупности реализаций, выражается формулой [3]:

$$\Gamma_s[x_s; z'_0, \eta_0^m] = M \left\{ \ln \frac{p'_s(x_s)}{p(s, x_s)} \right\}, \quad (5)$$

$$\text{где } p'_s(x^1) = \partial P\{x_s \leq x^1 \mid z'_0, \eta_0^m\} / \partial x^1, \quad (6)$$

$$p(s, x^1) = \partial P\{x_s \leq x^1\} / \partial x^1. \quad (7)$$

2. Предварительные результаты

Решение задачи конструктивным образом может быть осуществлено на основе совместной апостериорной плотности

$$p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1) = \partial^{N+2} P\{x_i \leq x; \tilde{x}_i^N \leq \tilde{x}_N; x_s \leq x^1 \mid z'_0, \eta_0^m\} / \partial x \partial \tilde{x}_N \partial x^1 \quad (8)$$

значений процесса x , в моменты времени, присутствующие в постановке задачи.

Лемма 1. Апостериорная плотность $p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1)$ на интервалах времени $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяется как

$$d_t p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1) = \left\{ \frac{p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1)}{p_t(x; \tilde{x}_N)} L_{t,x}[p_t(x; \tilde{x}_N)] - \right. \\ \left. - p_t(x; \tilde{x}_N) L_{t,x}^* \left[\frac{p_s^*(x; \tilde{x}_N; x^1)}{p_t(x; \tilde{x}_N)} \right] \right\} dt + p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1) \times \\ \times [h(t, x, \tilde{x}_N) - \bar{h}(t)]^T R^{-1}(t) [dz_t - \bar{h}(t) dt] \quad (9)$$

с начальным условием

$$p_s^{t_m}(x; \tilde{x}_N; x^1) = [c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m)) / c(\eta(t_m))] \times \\ \times p_s^{t_m-0}(x; \tilde{x}_N; x^1), \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{h}(t) = M\{h(t, x_t, \tilde{x}_t^N) \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (11)$$

$$c(\eta(t_m)) = M\{c(x_{t_m}, \tilde{x}_t^N, \eta(t_m)) \mid z'_0, \eta_0^{m-1}\}, \quad (12)$$

$$c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m)) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N)]^T \times \right. \\ \left. \times V^{-1}(t_m) [\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N)] \right\}, \quad (13)$$

$$p_t(x; \tilde{x}_N) = \partial^{N+1} P\{x_i \leq x; \tilde{x}_i^N \leq \tilde{x}_N \mid z'_0, \eta_0^m\} / \partial x \partial \tilde{x}_N, \quad (14)$$

$L_{t,x}[\cdot], L_{t,x}^*[\cdot]$ — прямой и обратный операторы Колмогорова, соответствующие процессу x_t [1], а $p_s^{t_m-0}(\cdot) = \lim p'_s(\cdot)$ при $t \uparrow t_m$ и является решением уравнения (9) на предыдущем интервале времени, вычисленном в точке t_m .

Сформулированное утверждение следует как частный случай из результатов [4].

Лемма 2. При выполнении ограничений

$$f(t, x_t) = F(t)x_t, \Phi_1(\cdot) = \Phi_1(t), \\ p_0(x) = N\{x; \mu_0, \Gamma_0\}, \quad (15)$$

$$h(t, x_t, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) = H_0(t)x_t + \sum_{k=1}^N H_k(t)x_{t_k}, \quad (16)$$

$$g(t_m, x_{t_m}, x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) = G_0(t_m)x_{t_m} + \sum_{k=1}^N G_k(t_m)x_{t_k} \quad (17)$$

для $p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1)$ имеет место свойство

$$p'_s(x; \tilde{x}_N; x^1) = N\{\tilde{x}_{N+2}; \tilde{\mu}_{N+2}(\tilde{x}_N, t, s), \tilde{\Gamma}_{N+2}(\tilde{x}_N, t, s)\}, \quad (18)$$

где

$$\tilde{x}_N = (\tau_1, \dots, \tau_N), \\ \tilde{\mu}_{N+2}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{x}_N, t) \\ \mu(s, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{x}_N, t) \\ \mu(s, t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+2}(\cdot) = \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{x}_N, t) & \Gamma_0^1(s, t) \\ (\tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{x}_N, t))^T & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{x}_N, t) & \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^1(\tilde{x}_N, s, t) \\ (\Gamma_0^1(s, t))^T & (\tilde{\Gamma}_{N,N+1}^1(\tilde{x}_N, s, t))^T & \Gamma(s, t) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{x}_N, t) & \tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{x}_N, t, s) \\ (\tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{x}_N, t, s))^T & \Gamma(s, t) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mu(t) = M\{x_t \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (21)$$

$$\tilde{\mu}_N(\tilde{x}_N, t) = M\{\tilde{x}_t^N \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (22)$$

$$\mu(s, t) = M\{x_s \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (23)$$

$$\Gamma(t) = M\{[x_t - \mu(t)][x_t - \mu(t)]^T \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (24)$$

$$\tilde{\Gamma}_N(\tilde{x}_N, t) = M\{[\tilde{x}_t^N - \tilde{\mu}_N(\tilde{x}_N, t)] \times \\ \times [\tilde{x}_t^N - \tilde{\mu}_N(\tilde{x}_N, t)]^T \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (25)$$

$$\Gamma(s, t) = M\{[x_s - \mu(s, t)][x_s - \mu(s, t)]^T \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (26)$$

$$\tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{x}_N, t) = M\{[x_t - \mu(t)] \times \\ \times [\tilde{x}_t^N - \tilde{\mu}_N(\tilde{x}_N, t)]^T \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (27)$$

$$\Gamma_0^1(s, t) = M\{[x_t - \mu(t)][x_s - \mu(s, t)]^T \mid z'_0, \eta_0^m\}, \quad (28)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N,N+1}^1(\tilde{x}_N, s, t) = M\{[\tilde{x}_t^N - \tilde{\mu}_N(\tilde{x}_N, t)] \times \\ \times [x_s - \mu(s, t)]^T \mid z'_0, \eta_0^m\}. \quad (29)$$

Блочные составляющие параметров распределения (18) на интервалах времени $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями:

$$d_t \mu(t) = F(t)\mu(t)dt + \tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)d\tilde{E}_t, \quad (30)$$

$$d_t \mu(\tau_k, t) = \tilde{H}_k^T(t)R^{-1}(t)d\tilde{E}_t, \quad k = \overline{1; N}, \quad (31)$$

$$d_t \mu(s, t) = \tilde{H}_{N+1}^T(t)R^{-1}(t)d\tilde{E}_t, \quad (32)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = F(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)F^T(t) + Q(t) - \\ - \tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t), \quad (33)$$

$$\dot{\Gamma}_k(\tau_k, t) = -\tilde{H}_k^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_k(t), \quad k = \overline{1; N}, \quad (34)$$

$$\dot{\Gamma}_{0k}(\tau_k, t) = F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k, t) - \tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t) \times \\ \times \tilde{H}_k(t), \quad k = \overline{1; N}, \quad (35)$$

$$\dot{\Gamma}_k(\tau_k, \tau_l, t) = -\tilde{H}_k^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_l(t), \quad k = 1; \\ \overline{N-1}, l = \overline{2; N}, l > k, \quad (36)$$

$$\dot{\Gamma}_0^1(s, t) = [F(t) + Q(t)]\Gamma^{-1}(t)\Gamma_0^1(s, t) - \tilde{H}_0^T(t) \times \\ \times R^{-1}(t)\tilde{H}_{N+1}(t), \quad (37)$$

$$\dot{\Gamma}(s, t) = -\tilde{H}_{N+1}^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_{N+1}(t), \quad (38)$$

$$\dot{\Gamma}_{k,N+1}(s, \tau_k, t) = -\tilde{H}_k^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_{N+1}(t), \quad k = \overline{1; N}, \quad (39)$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m) = \mu(t_m - 0) + \tilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\tilde{F}(t_m), \quad (40)$$

$$\mu(\tau_k, t_m) = \mu(\tau_k, t_m - 0) + \tilde{G}_k^T(t_m) W^{-1}(t_m) \times \times \tilde{\eta}(t_m), \quad k = \overline{1; N}, \quad (41)$$

$$\mu(s, t_m) = \mu(s, t_m - 0) + \tilde{G}_{N+1}^T(t_m) W^{-1}(t_m) \tilde{\eta}(t_m), \quad (42)$$

$$\Gamma(t_m) = \Gamma(t_m - 0) - \tilde{G}_0^T(t_m) W^{-1}(t_m) \tilde{G}_0(t_m), \quad (43)$$

$$\Gamma_{kk}(\tau_k, t_m) = \Gamma_{kk}(\tau_k, t_m - 0) - \tilde{G}_k^T(t_m) W^{-1}(t_m) \tilde{G}_k(t_m), \quad (44)$$

$$\Gamma_{0k}(\tau_k, t_m) = \Gamma_{0k}(\tau_k, t_m - 0) - \tilde{G}_0^T(t_m) W^{-1}(t_m) \times \times \tilde{G}_k(t_m), \quad k = \overline{1; N}, \quad (45)$$

$$\Gamma_{kl}(\tau_k, \tau_l, t_m) = \Gamma_{kl}(\tau_k, \tau_l, t_m - 0) - \tilde{G}_k^T(t_m) \times \times W^{-1}(t_m) \tilde{G}_l(t_m), \quad k = \overline{1; N-1}, \quad l = \overline{2; N}, \quad l > k, \quad (46)$$

$$\Gamma(s, t_m) = \Gamma(s, t_m - 0) - \tilde{G}_{N+1}^T(t_m) W^{-1}(t_m) \tilde{G}_{N+1}(t_m), \quad (47)$$

$$\Gamma_0^l(s, t_m) = \Gamma_0^l(s, t_m - 0) - \tilde{G}_0^T(t_m) W^{-1}(t_m) \tilde{G}_{N+1}(t_m), \quad (48)$$

$$\Gamma_{k, N+1}^l(s, \tau_k, t_m) = \Gamma_{k, N+1}^l(s, \tau_k, t_m - 0) - \tilde{G}_k^T(t_m) \times \times W^{-1}(t_m) \tilde{G}_{N+1}(t_m), \quad (49)$$

$$\text{где } d\tilde{z}_i = dz_i - \left[H_0(t) x_i + \sum_{j=1}^N H_j(t) \mu(\tau_j, t) \right] dt, \quad (50)$$

$$\tilde{H}_0(t) = H_0(t) \Gamma(t) + \sum_{j=1}^N H_j(t) \Gamma_{0j}^T(\tau_j, t), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(t) = & H_k(t) \Gamma_{kk}(\tau_k, t) + \\ & + \sum_{j=0, j \neq k}^N H_j(t) \Gamma_{kj}^T(\tau_k, \tau_j, t), \quad k = \overline{1; N}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\tilde{H}_{N+1}(t) = H_0(t) \Gamma_0^l(s, t) + \sum_{k=1}^N H_k(t) \Gamma_{k, N+1}^l(s, \tau_k, t), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t_m) = & \eta(t_m) - G_0(t_m) \mu(t_m - 0) - \sum_{j=1}^N G_j(t_m) \times \\ & \times \mu(\tau_j, t_m - 0), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(t_m) = & G_0(t_m) \Gamma(t_m - 0) + \sum_{j=1}^N G_j(t_m) \times \\ & \times \Gamma_{0j}^T(\tau_j, t_m - 0), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k(t_m) = & G_k(t_m) \Gamma_{kk}(\tau_k, t_m - 0) + \sum_{j=0, j \neq k}^N G_j(t_m) \times \\ & \times \Gamma_{kj}^T(\tau_j, \tau_k, t_m - 0), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{N+1}(t_m) = & G_0(t_m) \Gamma_0^l(s, t_m - 0) + \sum_{k=1}^N G_k(t_m) \times \\ & \times \Gamma_{k, N+1}^l(s, \tau_k, t_m - 0), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} W(t_m) = & V(t_m) + G_{0, N}(t_m) \times \\ & \times \tilde{\Gamma}_{N+1}^T(\tilde{\tau}_N, t_m - 0) G_{0, N}^T(t_m), \end{aligned} \quad (58)$$

$$G_{0, N}(t_m) = [G_0(t_m) \quad G_1(t_m) \quad \dots \quad G_N(t_m)]. \quad (59)$$

Сформулированное утверждение следует как частный случай из результатов [4].

3. Основные результаты

Теорема 1. Количество информации $I_s^m[x_s; z_0', \eta_0^m]$ на произвольных интервалах времени $t_m \leq t < t_{m+1}$ удовлетворяет уравнению

$$dI_s^m[x_s; z_0', \eta_0^m] / dt = \frac{1}{2} \text{tr} [R^{-1}(t) M \{ \overline{h(t | x_s)} - \bar{h}(t) \} \times$$

$$\times [\overline{h(t | x_s)} - \bar{h}(t)]^T] \quad (60)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} I_s^m[x_s; z_0', \eta_0^m] = & I_s^{m-0}[x_s; z_0', \eta_0^{m-1}] + \\ & + \Delta I_s^m[x_s; z_0', \eta(t_m)], \end{aligned} \quad (61)$$

$$\text{где } \Delta I_s^m[x_s; z_0', \eta(t_m)] = M \left\{ \ln \frac{c(\overline{\eta(t_m) | x_s})}{c(\eta(t_m))} \right\}, \quad (62)$$

$$\overline{h(t | x^1)} = M \{ h(t, x_t, \tilde{x}_t^N) | x_s = x^1, z_0', \eta_0^{m-1} \}, \quad (63)$$

$$c(\overline{\eta(t_m) | x^1}) = M \{ c(x_t, \tilde{x}_t^N, \eta(t_m)) | x_s = x^1, z_0', \eta_0^{m-1} \}, \quad (64)$$

$$I_s^{m-0}[x_s; z_0', \eta_0^{m-1}] = \lim_{t \uparrow t_m} I_s^m[\cdot] \quad (65)$$

и является решением уравнения (60) на предыдущем интервале времени $t_{m-1} \leq t < t_m$, вычисленном в точке t_m , а $\bar{h}(t)$, $c(\eta(t_m))$ и $c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m))$ определены в лемме 1.

Доказательство уравнения (60) проводится по методике доказательства теоремы 7.1 в [3]. Для доказательства (61) воспользуемся леммой 1. Из (10):

$$p_s^m(x; \tilde{x}_N; x^1) = \left[\frac{c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m))}{c(\eta(t_m))} \right] p_s^{m-0}(x; \tilde{x}_N; x^1). \quad (66)$$

По формуле условной вероятности

$$p_s^m(x; \tilde{x}_N; x^1) = p_s^m(x; \tilde{x}_N | x^1) p_s^m(x^1), \quad (67)$$

$$p_s^{m-0}(x; \tilde{x}_N; x^1) = p_s^{m-0}(x; \tilde{x}_N | x^1) p_s^{m-0}(x^1), \quad (68)$$

где $p_s^m(x; \tilde{x}_N | x^1) = \partial^{N+1} P \{ x_t \leq x; \tilde{x}_t^N \leq \tilde{x}_N^m | x_s =$

$$= x^1, z_0', \eta_0^m \} / \partial x \partial \tilde{x}_N, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} p_s^{m-0}(x; \tilde{x}_N | x^1) = & \partial^{N+1} P \{ x_t \leq x; \tilde{x}_t^N \leq \tilde{x}_N | x_s = \\ & = x^1, z_0', \eta_0^{m-1} \} / \partial x \partial \tilde{x}_N. \end{aligned} \quad (70)$$

Интегрирование (66) слева и справа по x , $\tilde{x}_N$ с использованием (64), (67), (68) дает:

$$p_s^m(x^1) = \frac{c(\overline{\eta(t_m) | x^1})}{c(\eta(t_m))} p_s^{m-0}(x^1). \quad (71)$$

Использование (71) в (5) при $t = t_m$ дает (61). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются ограничения (15) – (17). Тогда $I_s^l[x_s; z_0', \eta_0^m]$ на интервалах времени $t_m \leq t < t_{m+1}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} dI_s^l[x_s; z_0', \eta_0^m] / dt = & \frac{1}{2} \text{tr} [R^{-1}(t) \tilde{H}_{N+1}(t) \times \\ & \times \Gamma^{-1}(s, t) \tilde{H}_{N+1}^T(t)] \end{aligned} \quad (72)$$

с начальным условием (61), в котором

$$\Delta I_s^m[x_s; z_0', \eta(t_m)] = \frac{1}{2} \ln \frac{\Gamma(s, t_m - 0)}{\Gamma(s, t_m)}, \quad (73)$$

а $\tilde{H}_{N+1}(t)$ определяется формулой (53).

Доказательство. По свойству многомерных нормальных распределений [2] для

$$\begin{aligned} p_s^l(\tilde{x}_{N+1} | x^1) = & \partial^{N+1} P \{ x_t \leq x; \tilde{x}_t^N \leq \tilde{x}_N | x_s = \\ & = x^1, z_0', \eta_0^m \} / \partial \tilde{x}_{N+1} \end{aligned} \quad (74)$$

с учетом (18) – (20) имеет место свойство

$$p_s^l(\tilde{x}_{N+1} | x^1) =$$

$$= N\{\tilde{x}_{N+1}; \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s), \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s)\}, \quad (75)$$

$$\text{где } \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s) = \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + \tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{\tau}_N, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t)], \quad (76)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s) = \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) - \tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{\tau}_N, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times (\tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{\tau}_N, t, s))^T. \quad (77)$$

Использование (16) в (11), (63) дает:

$$\bar{h}(t) = M\{h(t, x_t, \tilde{x}_t^N) | z'_0, \eta'_0\} = H_0 M\{x_t | z'_0, \eta'_0\} + \\ + \sum_{k=1}^N H_k M\{x_{\tau_k} | z'_0, \eta'_0\} = H_0 \mu(t) + \sum_{k=1}^N H_k \mu(\tau_k, t), \quad (78)$$

$$\overline{h(t | x^1)} = M\{h(t, x_t, \tilde{x}_t^N) | x_s = x^1, z'_0, \eta'_0\} = \\ = H_0 M\{x_t | x^1, z'_0, \eta'_0\} + \sum_{k=1}^N H_k M\{x_{\tau_k} | x^1, z'_0, \eta'_0\} = \\ = H_0 \mu(t | s) + \sum_{k=1}^N H_k \mu(\tau_k, t | s). \quad (79)$$

$$\text{Таким образом, } \overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t) = H_0 [\mu(t | s) - \mu(t)] + \\ + \sum_{k=1}^N H_k [\mu(\tau_k, t | s) - \mu(\tau_k, t)]. \quad (80)$$

Распишем (76) почленно и получим

$$\mu(t | s) = \mu(t) + \Gamma_0^1(s, t)\Gamma^{-1}(s, t) \times [x^1 - \mu(s, t)], \quad (81)$$

$$\mu(\tau_k, t | s) = \mu(\tau_k, t) + \Gamma_{k, N+1}^1(\tau_k, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t)]. \quad (82)$$

Используем (81) и (82) в (80):

$$\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t) = H_0 \Gamma_0^1(s, t)\Gamma^{-1}(s, t) [x^1 - \mu(s, t)] + \\ + \sum_{k=1}^N H_k \Gamma_{k, N+1}^1(\tau_k, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) [x^1 - \mu(s, t)] = \\ = \left[H_0 \Gamma_0^1(s, t) + \sum_{k=1}^N H_k \Gamma_{k, N+1}^1(\tau_k, t, s) \right] \Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t)]. \quad (83)$$

Использование (53) в (83) дает

$$\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t) = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t) \times [x^1 - \mu(s, t)]. \quad (84)$$

$$\text{Тогда } M\left\{\left[\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t)\right]\left[\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t)\right]^T\right\} = \\ = M\left\{\tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)[x^1 - \mu(s, t)][x^1 - \mu(s, t)]^T \times \right. \\ \times \Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t)\} = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)M\{[x_s - \mu(s, t)] \times \\ \times [x_s - \mu(s, t)]^T\}\tilde{H}_{N+1}^T(t) = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times M\{[x_s - \mu(s, t)][x_s - \mu(s, t)]^T | z'_0, \eta'_0\} \times \\ \times \Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t) = \\ = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)\Gamma(s, t)\Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t) = \\ = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t). \quad (85)$$

Подстановка (85) в (60) приводит к уравнению (72).

Из (71) следует, что

$$\frac{c(\eta(t_m) | x^1)}{c(\eta(t_m))} = \frac{p_s^{t_m}(x^1)}{p_s^{t_m-0}(x^1)}. \quad (86)$$

Так как при ограничениях (15)–(17)

$$p_s^{t_m}(x^1) = N\{x^1; \mu(s, t_m), \Gamma(s, t_m)\}, \quad (87)$$

$$p_s^{t_m-0}(x^1) = N\{x^1; \mu(s, t_m-0), \Gamma(s, t_m-0)\}, \quad (88)$$

то использование (87), (88) в (86) дает:

$$\ln \frac{c(\eta(t_m) | x^1)}{c(\eta(t_m))} = \frac{1}{2} \ln |\Gamma(s, t_m - 0)| - \frac{1}{2} \ln |\Gamma(s, t_m)| + \\ + \frac{1}{2} [x^1 - \mu(s, t_m - 0)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m - 0) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t_m - 0)] - \frac{1}{2} [x^1 - \mu(s, t_m)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t_m)]. \quad (89)$$

Последовательно получаем

$$M\{[x_s - \mu(s, t_m - 0)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m - 0) [x_s - \mu(s, t_m - 0)]\} = \\ = \text{tr}\{M\{\Gamma^{-1}(s, t_m - 0)M\{[x_s - \mu(s, t_m - 0)] \times \\ \times [x_s - \mu(s, t_m - 0)]^T | z'_0, \eta'_0\}\}\} = \text{tr}\{I_{n \times n}\} = n. \quad (90)$$

Аналогично

$$M\{[x_s - \mu(s, t_m)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m) [x_s - \mu(s, t_m)]\} = n. \quad (91)$$

Использование (90), (91) в (89) с последующей подстановкой в (62) приводит к (73). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
2. Литцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
3. Демин Н.С. Теория фильтрации. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985.
4. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 48–59.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 22 февраля 2000 г.

УДК 62-50

В.И. Смагин, Е.В. Поползухина

СИНТЕЗ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассматривается алгоритм синтеза систем слежения по интегральному квадратичному критерию для непрерывных объектов с мультипликативными возмущениями и случайными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний. Управление формируется непосредственно по вектору измеряемого выхода без использования фильтров и наблюдателей.

Поведение объекта управления часто описывают совокупностью стохастических дифференциальных уравнений, которые задают режимы работы объекта. Между этими отдельными режимами происходят скачкообразные переходы,

описываемые цепью Маркова. К данному классу могут быть отнесены системы, в которых происходит случайное резкое изменение режима функционирования, возникающее, например, вследствие внезапных отказов. Кроме того, параметры