

$$= N\{\tilde{x}_{N+1}; \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s), \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s)\}, \quad (75)$$

$$\text{где } \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s) = \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + \tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{\tau}_N, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t)], \quad (76)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | s) = \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) - \tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{\tau}_N, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times (\tilde{\Gamma}_{01}(\tilde{\tau}_N, t, s))^T. \quad (77)$$

Использование (16) в (11), (63) дает:

$$\bar{h}(t) = M\{h(t, x_t, \tilde{x}_t^N) | z'_0, \eta'_0\} = H_0 M\{x_t | z'_0, \eta'_0\} + \\ + \sum_{k=1}^N H_k M\{x_{\tau_k} | z'_0, \eta'_0\} = H_0 \mu(t) + \sum_{k=1}^N H_k \mu(\tau_k, t), \quad (78)$$

$$\overline{h(t | x^1)} = M\{h(t, x_t, \tilde{x}_t^N) | x_s = x^1, z'_0, \eta'_0\} = \\ = H_0 M\{x_t | x^1, z'_0, \eta'_0\} + \sum_{k=1}^N H_k M\{x_{\tau_k} | x^1, z'_0, \eta'_0\} = \\ = H_0 \mu(t | s) + \sum_{k=1}^N H_k \mu(\tau_k, t | s). \quad (79)$$

$$\text{Таким образом, } \overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t) = H_0 [\mu(t | s) - \mu(t)] + \\ + \sum_{k=1}^N H_k [\mu(\tau_k, t | s) - \mu(\tau_k, t)]. \quad (80)$$

Распишем (76) почленно и получим

$$\mu(t | s) = \mu(t) + \Gamma_0^1(s, t)\Gamma^{-1}(s, t) \times [x^1 - \mu(s, t)], \quad (81)$$

$$\mu(\tau_k, t | s) = \mu(\tau_k, t) + \Gamma_{k, N+1}^1(\tau_k, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t)]. \quad (82)$$

Используем (81) и (82) в (80):

$$\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t) = H_0 \Gamma_0^1(s, t)\Gamma^{-1}(s, t) [x^1 - \mu(s, t)] + \\ + \sum_{k=1}^N H_k \Gamma_{k, N+1}^1(\tau_k, t, s)\Gamma^{-1}(s, t) [x^1 - \mu(s, t)] = \\ = \left[H_0 \Gamma_0^1(s, t) + \sum_{k=1}^N H_k \Gamma_{k, N+1}^1(\tau_k, t, s) \right] \Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t)]. \quad (83)$$

Использование (53) в (83) дает

$$\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t) = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t) \times [x^1 - \mu(s, t)]. \quad (84)$$

$$\text{Тогда } M\left\{\left[\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t)\right]\left[\overline{h(t | x^1)} - \bar{h}(t)\right]^T\right\} = \\ = M\left\{\tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)[x^1 - \mu(s, t)][x^1 - \mu(s, t)]^T \times \right. \\ \times \Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t)\} = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)M\{[x_s - \mu(s, t)] \times \\ \times [x_s - \mu(s, t)]^T\}\tilde{H}_{N+1}^T(t) = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t) \times \\ \times M\{[x_s - \mu(s, t)][x_s - \mu(s, t)]^T | z'_0, \eta'_0\} \times \\ \times \Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t) = \\ = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t) = \\ = \tilde{H}_{N+1}(t)\Gamma^{-1}(s, t)\tilde{H}_{N+1}^T(t). \quad (85)$$

Подстановка (85) в (60) приводит к уравнению (72).

Из (71) следует, что

$$\frac{c(\eta(t_m) | x^1)}{c(\eta(t_m))} = \frac{p_s^{t_m}(x^1)}{p_s^{t_m-0}(x^1)}. \quad (86)$$

Так как при ограничениях (15)–(17)

$$p_s^{t_m}(x^1) = N\{x^1; \mu(s, t_m), \Gamma(s, t_m)\}, \quad (87)$$

$$p_s^{t_m-0}(x^1) = N\{x^1; \mu(s, t_m-0), \Gamma(s, t_m-0)\}, \quad (88)$$

то использование (87), (88) в (86) дает:

$$\ln \frac{c(\eta(t_m) | x^1)}{c(\eta(t_m))} = \frac{1}{2} \ln |\Gamma(s, t_m-0)| - \frac{1}{2} \ln |\Gamma(s, t_m)| + \\ + \frac{1}{2} [x^1 - \mu(s, t_m-0)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m-0) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t_m-0)] - \frac{1}{2} [x^1 - \mu(s, t_m)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m) \times \\ \times [x^1 - \mu(s, t_m)]. \quad (89)$$

Последовательно получаем

$$M\{[x_s - \mu(s, t_m-0)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m-0) [x_s - \mu(s, t_m-0)]\} = \\ = \text{tr}\{M\{\Gamma^{-1}(s, t_m-0)M\{[x_s - \mu(s, t_m-0)] \times \\ \times [x_s - \mu(s, t_m-0)]^T | z'_0, \eta'_0\}\}\} = \text{tr}\{I_{n \times n}\} = n. \quad (90)$$

Аналогично

$$M\{[x_s - \mu(s, t_m)]^T \Gamma^{-1}(s, t_m) [x_s - \mu(s, t_m)]\} = n. \quad (91)$$

Использование (90), (91) в (89) с последующей подстановкой в (62) приводит к (73). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
2. Литцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
3. Демин Н.С. Теория фильтрации. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985.
4. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 48–59.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 22 февраля 2000 г.

УДК 62-50

В.И. Смагин, Е.В. Поползухина

СИНТЕЗ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассматривается алгоритм синтеза систем слежения по интегральному квадратичному критерию для непрерывных объектов с мультипликативными возмущениями и случайными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний. Управление формируется непосредственно по вектору измеряемого выхода без использования фильтров и наблюдателей.

Поведение объекта управления часто описывают совокупностью стохастических дифференциальных уравнений, которые задают режимы работы объекта. Между этими отдельными режимами происходят скачкообразные переходы,

описываемые цепью Маркова. К данному классу могут быть отнесены системы, в которых происходит случайное резкое изменение режима функционирования, возникающее, например, вследствие внезапных отказов. Кроме того, параметры

объекта могут флуктуировать, математической моделью такого явления могут быть аддитивные мультипликативные возмущения.

Задачи управления объектами со случайными параметрами рассматривались в работах [1–9], в которых в основном исследуются задачи стабилизации либо задачи слежения, использующие обратную связь по состоянию. В настоящей работе методы синтеза следящих систем управления по интегральным квадратичным критериям для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями развиваются для систем с неполной информацией о векторе состояния, при этом следящая система синтезируется по вектору наблюдаемого выхода

Постановка задачи

Пусть поведение объекта описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}(t) = A(\gamma)x(t) + B(\gamma)u(t) + \sum_{s=1}^m A_s(\gamma)x(t)\theta_s(t) + q(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния; $u(t) \in R^2$ – управление; x_0 – начальные условия ($M\{x_0\} = \bar{x}_0$, $M\{M\{x_0 x_0^T\} = P_{x_0}$); $q(t) \in R^n$, $\theta(t) \in R^m$ – белые гауссовские шумы с характеристиками: $M\{q(t)\} = 0$, $M\{\theta(t)\} = 0$, $M\{q(t)q^T(\tau)\} = Q\delta(t-\tau)$, $M\{\theta(t)\theta^T(\tau)\} = I\delta(t-\tau)$, $M\{q(t)\theta^T(\tau)\} = 0$; $\gamma(t) \in R^1$ – марковская цепь с дискретным множеством состояний: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ (вероятность перехода из i -го состояния в j -е ($i \neq j$) за время Δt равна $p_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$); $A(\gamma), B(\gamma)$ и $A_s(\gamma)$ ($s=1, \dots, m$) – матрицы порядка $n \times n$, $n \times l$, $n \times n$ соответственно.

Здесь приняты следующие обозначения: M – оператор математического ожидания, индекс $\langle T \rangle$ – операция транспонирования, $\delta(t-\tau)$ – дельта функция Дирака, $Q = Q^T \geq 0$ – неотрицательно определенная матрица, I – единичная матрица.

Процесс $\gamma(t)$ зададим уравнением

$$d\gamma(t) = \int v \Omega(dt, dv), \quad \gamma(0) = \gamma_0,$$

где γ_0 – начальное состояние переменной $\gamma(t)$, пуассоновская случайная мера $\Omega(dt, A)$ характеризуется

функцией $\Pi_{\gamma}(dv) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \delta(v + \gamma_i - \gamma_j) dv$, при $\gamma = \gamma_i$.

Предполагается, что наблюдению доступен вектор

$$y(t) = Sx(t), \quad (2)$$

где $y \in R^n$, S – матрица полного ранга. Пусть

$\xi(t) = Rx(t)$ ($\xi(t) \in R^{n_2}$) – вектор управляемого выхода объекта. Тогда необходимо выбрать такое управление $u(t)$ для объекта (1), при котором выход объекта $\xi(t)$ был бы достаточно близок к отслеживаемому сигналу $z(t) \in R^{n_2}$. Зададим меру близости в виде квадратичного интегрального критерия

$$J = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^T (\varepsilon^T(\tau) C \varepsilon(\tau) + u^T(\tau) D u(\tau)) d\tau + \varepsilon^T(T) E \varepsilon(T) / x(0) = x_0, \gamma(0) = \gamma_0 \right\}, \quad (3)$$

где $\varepsilon(t) = \xi(t) - z(t)$; $C = C^T \geq 0$, $D = D^T > 0$, $E = E^T \geq 0$ – весовые матрицы. Задача состоит в выборе такого управления $u(t)$, при котором достигается минимум критерия (3).

Задача слежения для объекта с мультипликативным возмущением

В этом случае будем предполагать, что зависимость от γ в уравнении (1) отсутствует. Структуру закона управления для следящей системы управления при неполной информации зададим в том же виде, что и в [8]:

$$u(t) = K(t)y(t) - D^{-1}B^T g. \quad (4)$$

Тогда основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Оптимальные коэффициенты передачи в (4) вычисляются по формуле:

$$K^*(t) = -D^{-1}B^T LNS^T(SNS^T)^{-1}, \quad (5)$$

если существуют матрицы $N(t) > 0$, $L(t) > 0$ и вектор $g(t)$, удовлетворяющие двухточечной краевой задаче:

$$\dot{N} = \tilde{A}N + N\tilde{A}^T + \sum_{s=1}^m A_s N A_s^T + \tilde{Q}, \quad N(0) = P_{x_0}, \quad (6)$$

$$\dot{\bar{x}} = \tilde{A}\bar{x} - Wg, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (7)$$

$$-\dot{g} = \tilde{A}^T g - R^T C z, \quad g(T) = -R^T E z(T), \quad (8)$$

$$-\dot{L} = \tilde{L}\tilde{A} + \tilde{A}^T L + S^T \Gamma^{-1} S N L W L N S^T \Gamma^{-1} S + \sum_{s=1}^m A_s^T L A_s + \tilde{C}, \quad L(T) = R^T E R, \quad (9)$$

$$(\tilde{A} = A - W L N S^T \Gamma^{-1} S, \quad \tilde{Q} = Q - W g \bar{x}^T - \bar{x} g^T W,$$

$$\Gamma = S N S^T, \quad W = B D^{-1} B^T, \quad \tilde{C} = R^T C R).$$

Доказательство. Вычислим значение критерия (3) при управлении (4):

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [\text{tr} N (\tilde{C} + S^T K^T D K S) + g^T W g + z^T C z - 2 g^T B K S \bar{x} - 2 z^T C R \bar{x}] dt + \frac{1}{2} \text{tr} N(T) R^T E R - z^T(T) E R \bar{x}(T) + \frac{1}{2} z^T(T) E z(T), \quad (10)$$

где $N = M\{xx^T\}$, $\bar{x} = M\{x\}$, tr – обозначает след матрицы. Выберем в качестве функции Ляпунова выражение

$$V(t, \bar{x}, N) = \psi + g^T \bar{x} + \frac{1}{2} \text{tr} L N + \frac{1}{2} \text{tr} \int_t^T \bar{Q} d\tau, \quad (11)$$

где $\bar{Q}$ – некоторая матрица ($\bar{Q} \geq 0$, $\bar{Q} \geq \tilde{Q} + Q$), функции ψ, g и L удовлетворяют уравнениям:

$$-\dot{\psi} = \frac{1}{2} z^T C z - \frac{1}{2} g^T W g + \frac{1}{2} \text{tr} Q L, \quad \psi(T) = \frac{1}{2} z^T(T) E z(T), \quad (12)$$

$$-\dot{g} = (A + BKS)^T g - R^T Cz, \quad (13)$$

$$g(T) = -R^T Ez(T),$$

$$-\dot{L} = L(A + BKS) + (A + BKS)^T L + \bar{C}, \quad (14)$$

$$L(T) = R^T ER.$$

Первые три слагаемые в представлении функции Ляпунова (11) являются значением критерия

$$J[t, T] = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^T (\varepsilon^T(\tau) C \varepsilon(\tau) + u^T(\tau) Du(\tau)) d\tau + \right. \\ \left. + \varepsilon^T(T) E \varepsilon(T) / x(t), \gamma(t) \right\}$$

при управлении (4) [8], последнее слагаемое также неотрицательно при $L > 0, \bar{Q} \geq 0$, поэтому функция Ляпунова (11) неотрицательна. Проинтегрируем по времени полную производную функции Ляпунова, учитывая уравнения для N и $\bar{x}$:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} V(t, \bar{x}, N) dt = \int_0^T (\dot{\psi} + \dot{g}^T \bar{x} + g^T \dot{\bar{x}} + \\ + \frac{1}{2} \text{tr} \dot{L} N + \frac{1}{2} \text{tr} L \dot{N} - \text{tr} L \bar{Q}) dt = \\ = \int_0^T (g^T (A + BKS) \bar{x} - \frac{1}{2} g^T W g + \dot{\psi} + \dot{g}^T \bar{x} + \frac{1}{2} \text{tr} \dot{L} N - \\ - \frac{1}{2} \text{tr} L [(A + BKS) N + N(A + BKS)^T + \bar{Q}] + \\ + \sum_{i=1}^m A_i N A_i^T) dt = \psi(T) - \psi(0) + g^T(T) \bar{x}(T) - \\ - g^T(0) \bar{x}(0) + \psi(0) + g^T(T) \bar{x}(T) - g^T(0) \bar{x}(0) + \\ + \frac{1}{2} \text{tr} L(T) N(T) - \frac{1}{2} \text{tr} L(0) N(0) - \frac{1}{2} \text{tr} \int_0^T L \bar{Q} dt. \quad (15)$$

Учитывая (15), квадратичный критерий (10) представим в эквивалентной форме:

$$J = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} N (\bar{C} + S^T K^T DKS) + g^T A \bar{x} + \dot{\psi} + \right. \\ + g^T A \bar{x} + \dot{\psi} + \dot{g}^T \bar{x} + \frac{1}{2} \text{tr} \dot{L} N - z^T C R \bar{x} - \\ - \frac{1}{2} z^T C z - \frac{1}{2} g^T W g + \frac{1}{2} \text{tr} L [(A + BKS) N + \\ + N(A + BKS)^T + \bar{Q}] + \sum_{i=1}^m A_i N A_i^T \} dt - \\ - \frac{1}{2} \text{tr} L(0) \bar{Q}(0) + \psi(0) + g^T(0) \bar{x}(0) + \\ + \frac{1}{2} L(0) N(0) - \psi(T) + g^T(T) \bar{x}(T). \quad (16)$$

Применяя правила матричного дифференцирования [10] к формуле (16), из условия $dJ/dK=0$ получим уравнение для вычисления оптимальной матрицы K :

$$DKS N S^T + B^T L N S^T = 0. \quad (17)$$

Тогда в силу (17) K определится по формуле (5). Найдём в уравнении для L (14) выражение для матрицы $\bar{C}$ такое, чтобы критерий (16) был минимальным. Для этого правую часть (14) подставим вместо $\dot{L}$ в (16). Выполнив преобразования, получим

$$J = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} N (\bar{C} + S^T K^T DKS + \sum_{i=1}^m A_i^T L A_i - \right.$$

$$- \bar{C}) + g^T A \bar{x} + \dot{\psi} + \dot{g}^T \bar{x} - z^T C R \bar{x} - z^T C R \bar{x} - \\ - \frac{1}{2} z^T C z - \frac{1}{2} g^T W g + \frac{1}{2} \text{tr} L \bar{Q} \} dt - \\ - \frac{1}{2} \text{tr} L(0) \bar{Q}(0) + \psi(0) + g^T(0) \bar{x}(0) + \\ + \frac{1}{2} L(0) N(0) - \psi(T) + g^T(T) \bar{x}(T). \quad (18)$$

Так как значение критерия (18) должно быть всегда неотрицательным, то его минимум достигается при

$$\bar{C} = \bar{C} + S^T K^T DKS + \sum_{i=1}^m A_i^T L A_i. \quad (19)$$

Покажем, что полная производная функции Ляпунова при K , равной (5), отрицательна. Это необходимо для обеспечения устойчивости в среднем квадратическом [11]. Учитывая (12)–(14) и (19), получим

$$\frac{d}{dt} V(t, \bar{x}, N) = -\frac{1}{2} z^T C z - \frac{1}{2} g^T W g + \\ + z^T C R \bar{x} - \frac{1}{2} \text{tr} (S^T \Gamma^{-1} S N^T L^T W L N S^T \times \\ \times \Gamma^{-1} S + R^T C R) N - \frac{1}{2} \text{tr} L (\bar{Q} - \bar{Q} - \bar{Q}). \quad (20)$$

В силу очевидного равенства $\text{tr} R^T C R N = M \{ (x - \bar{x})^T \times \\ \times R^T C R (x - \bar{x}) \} + \bar{x}^T R^T C R \bar{x}$ (20) преобразуется:

$$\frac{d}{dt} V(t, \bar{x}, N) = -\frac{1}{2} (z - R \bar{x})^T C (z - R \bar{x}) - \\ - \frac{1}{2} g^T W g - \frac{1}{2} \text{tr} L (\bar{Q} - \bar{Q} - \bar{Q}) - \frac{1}{2} M \{ (x - \bar{x})^T R^T \times \\ \times C R (x - \bar{x}) \} - \frac{1}{2} \text{tr} (S^T \Gamma^{-1} S N^T L^T W L N S^T \Gamma^{-1} S) N.$$

А это означает, что полная производная функции Ляпунова при выполнении условий теоремы 1 будет отрицательной. Уравнения (6)–(9) получаются, если в уравнения для $N = M \{ x x^T \}$, $\bar{x} = M \{ x \}$ и в (13), (14) подставить выражение K , полученное из (17). Теорема доказана.

В случае, если канал измерений содержит аддитивную помеху $y(t) = Sx(t) + v(t)$, где $v(t) \in R^n$ – белый гауссовский шум ($M \{ v(t) \} = 0$, $M \{ v(t) v^T(\tau) \} = 0$, $M \{ v(t) \theta^T(\tau) \} = 0$, $M \{ v(t) v^T(\tau) \} = V \delta(t - \tau)$), в формулировке теоремы 1 необходимо в (6) матрицу $\bar{Q}$ заменить на $\bar{Q} = Q + B K V K^T B^T - \bar{x} g^T W - W g \bar{x}^T$, а матрицу Γ принять равной $S N S^T + V$.

Отметим также, что в стационарном случае при постоянном отслеживаемом сигнале вместо критерия (3) необходимо минимизировать критерий $\limsup \frac{1}{T} J$ при $E = 0$ (пара матриц A, B должна быть стабилизируемой). В этом случае задача синтеза упрощается, так как уравнения (6)–(9) становятся алгебраическими:

$$\tilde{A} N + N \tilde{A}^T + \sum_{i=1}^m A_i N A_i^T + \bar{Q} = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^T g + R^T C z = 0, \tilde{A} \bar{x} - W g = 0, \\ L \tilde{A} + \tilde{A}^T L + S^T \Gamma^{-1} S N L W L N S^T \Gamma^{-1} S + \\ + \sum_{s=1}^m A_s^T L A_s + \tilde{C} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tilde{A} = A - W L N S^T \Gamma^{-1} S$, $\tilde{Q} = Q - W g \bar{x} - \bar{x} g^T W$, а оптимальные коэффициенты передачи определяются по (5).

Теорема 2. Если существует решение уравнений (21) такое, что матрицы $N > 0$, $L > 0$ и пара матриц $\sqrt{\tilde{C}}$, A детектируема, то матрица $\tilde{A} = A + B K^* S$ асимптотически устойчива.

Доказательство. Последнее уравнение в (21) эквивалентно уравнению

$$(A + B K^* S)^T L + L(A + B K^* S) + \tilde{C} + S^T K^* D K^* S + \sum_{s=1}^m A_s^T L A_s = 0,$$

и тогда из леммы 12.2 [12] при условии, что $L > 0$ и пара матриц

$$\sqrt{\tilde{C} + S^T K^* D K^* S + \sum_{s=1}^m A_s^T L A_s}, A + B K^* S \quad (22)$$

детектируема, следует, что матрица $A + B K^* S$ асимптотически устойчива. Применяя теорему 3.6 [12], получаем, что если пара матриц $\sqrt{\tilde{C}}$, A детектируема, то и пара матриц (22) также детектируема. Теорема доказана.

Задача слежения для объекта со скачкообразными параметрами

Рассмотрим сначала случай полной информации о состоянии объекта ($y(t) = x(t)$). Применяя принцип оптимальности Беллмана, можно показать, что оптимальное управление объектом (1) имеет вид

$$u^*(t) = -D^{-1} B^T(\gamma) (G(\gamma) x(t) + g(\gamma)), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{где } -\frac{\partial g}{\partial t} = (A(\gamma) - W(\gamma) G(\gamma))^T g - R C z + \\ + \mathfrak{R}_\gamma[g(\gamma)], g(T, \gamma) = -R^T E z(T), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial t} = A^T(\gamma) G(\gamma) + G A(\gamma) - G(\gamma) W(\gamma) G(\gamma) + \tilde{C} + \\ + \sum_{s=1}^m A_s^T(\gamma) G(\gamma) A_s(\gamma) + \\ + \mathfrak{R}_\gamma[G(\gamma)], G(T, \gamma) = R^T E R. \end{aligned} \quad (25)$$

В (24), (25) $W(\gamma) = B(\gamma) D^{-1} B^T(\gamma)$. Так как $\gamma(t)$ — марковская цепь, то обратный производящий оператор в (24), (25) определяется по формуле $\mathfrak{R}_\gamma[\rho(\gamma)] =$

$$= \sum_{j=1}^r p_{ij} (\rho(\gamma_j) - \rho(\gamma_i)) \text{ при } \gamma = \gamma_i \text{ (} i = \overline{1, r} \text{). Тогда уп-}$$

равление (23) примет вид $u^*(t) = -D^{-1} B_i^T (G_i x(t) + g_i)$ при $\gamma(t) = \gamma_i$, где G_i и g_i удовлетворяют уравнениям

$$-\dot{g}_i = (A_i - W_i G_i)^T g_i - R C z + \sum_{j=1}^r p_{ij} (g_j - g_i),$$

$$g_i(T) = -R^T E z(T),$$

$$\begin{aligned} -\dot{G}_i = A_i^T G_i + G_i A_i - G_i W_i G_i + \tilde{C} + \\ + \sum_{s=1}^m A_s^{(i)T} G_i A_s^{(i)} + \sum_{j=1}^r p_{ij} (G_j - G_i), G_i(T) = R^T E R, \end{aligned}$$

$$(A_i = A(\gamma_i), B_i = B(\gamma_i), A_s^{(i)} = A_s(\gamma_i),$$

$$W_i = B_i D^{-1} B_i^T, g_i = g(\gamma_i), G_i = G(\gamma_i), (i = \overline{1, r})).$$

Перейдем к рассмотрению задачи слежения по выходу для объекта (1) и канала измерений (2). В этом случае следящая система управления примет вид

$$u(t) = -D^{-1} B_i^T (L_i N_i S \Gamma_i^{-1} y(t) + g_i), \quad (26)$$

при $\gamma(t) = \gamma_i$ ($\Gamma_i = S N_i S^T$), где матрицы $N_i = M\{x(t) \times x^T(t) / \gamma(t) = \gamma_i\}$, L_i и векторы $\bar{x}^{(i)} = M\{x(t) / \gamma(t) = \gamma_i\}$, g_i определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_i = \tilde{A}_i N_i + N_i \tilde{A}_i^T + \sum_{j=1}^r p_{ij} (N_j - N_i) + Q + \\ + \sum_{s=1}^m A_s^{(i)} N_i A_s^{(i)T} - \bar{x}^{(i)} g_i^T W_i - W_i g_i \bar{x}^{(i)T}, \end{aligned}$$

$$N_i(0) = M\{x_0 x_0^T / \gamma(0) = \gamma_i\}, \quad (27)$$

$$\dot{\bar{x}}^{(i)} = \tilde{A}_i \bar{x}^{(i)} + W_i g_i + \sum_{j=1}^r p_{ij} (\bar{x}^{(j)} - \bar{x}^{(i)}), \dots$$

$$\bar{x}^{(i)}(0) = M\{x_0 / \gamma(0) = \gamma_i\}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -\dot{L}_i = L_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T L_i + S^T \Gamma_i^{-1} S N_i L_i W_i L_i N_i S^T \Gamma_i^{-1} S + \tilde{C} + \\ + \sum_{s=1}^m A_s^{(i)T} L_i A_s^{(i)} + \sum_{j=1}^r p_{ij} (L_j - L_i), L_i(T) = R^T E R, \end{aligned} \quad (29)$$

$$-\dot{g}_i = \tilde{A}_i^T g_i - R^T C z + \sum_{j=1}^r p_{ij} (g_j - g_i),$$

$$g_i(T) = -R^T E z(T). \quad (30)$$

В (27)–(30) $\tilde{A}_i = A_i - W_i L_i N_i S^T \Gamma_i^{-1} S$.

Закон управления (26) имеет структуру

$$u(t) = K_i(t) y(t) - D^{-1} B_i g_i \text{ при } \gamma(t) = \gamma_i. \quad (31)$$

Для доказательства того факта, что в (31) $K_i(t) = -D^{-1} B_i^T L_i N_i S^T \Gamma_i^{-1}$, применим метод, используемый при доказательстве теоремы 1. Отличие будет заключаться в том, что необходимо учесть скачкообразную составляющую. Общая схема доказательства останется той же. В стационарном случае, если отслеживаемый вектор постоянный, то двухточечная краевая задача (27) – (30) сводится к алгебраическим уравнениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Лидский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // Автоматика и телемеханика. 1961. № 9. С. 732–745; 1961. № 11. С. 1273–1278.
2. W.M. Wonham. Random differential equation in control theory // Probabilistic methods in applied mathematics / Ed. A.T. Bharucha-Reid. N.Y.: Academ Press, 1971. P. 131–213.

3. *M. Mariton*. On the influence of noise on jump linear systems // *IEEE Trans. Automatic Control*. 1987. V. AC-32. № 12. P. 1094–1097.
4. *Параев Ю.И.* Введение в статическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976. 184 с.
5. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Наука, 1993. 270 с.
6. *F.K. Boukas*. Control of systems with controlled jump Markov disturbances // *Control theory and advanced technology*. 1993. Vol. 9. № 2. P. 577–595.
7. *Пакиин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Наука, 1994. 303 с.
8. *Смагин В.И., Параев Ю.И.* Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. 171 с.
9. *Смагин В.И.* Локально-оптимальные следящие системы управления для дискретных объектов со случайными параметрами // *Автоматика и вычислительная техника*. 1997. № 2. С. 32–40.
10. *M. Athans*. The matrix minimum principle // *Information and control*. 1968. Vol. 11. P. 592–606.
11. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
12. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980. 376 с.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 19 февраля 2000 г.