

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2016

№ 1(39)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конец, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.02.2016.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.48. Уч.-изд. л. 11.74. Тираж 300 экз. Заказ № 4.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 1635.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Богданова Р.А. Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий	5
Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте отображения поверхностей применительно к раскрою сетеполотна	13
Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей	25
Трофименко Н.Н. О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых»	36
Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе	42
Хмылёва Т.Е. О гомеоморфизме прямой Зоргефрея и ее модификации S_Q	53

МЕХАНИКА

Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Басалаев С.А., Бабушкин Н.А. Моделирование подъема затонувших предметов при продувке понтона управляемым открытым твёрдотопливным газогенератором	57
Борзенко Е.И., Хегай Е.И. Численное моделирование стационарного течения жидкости Балкли – Гершеля в канале с внезапным расширением	68
Мартынов В.А., Пасечник К.А., Власов А.Ю. Определение скоростей пропитки низковязким органическим связующим углеродной армирующей ткани сатинового плетения	82
Пикущак Е.В., Миньков Л.Л. Метод расчета аэродинамического коэффициента полезного действия осевого вентилятора	90
Шагапов В.Ш., Дударева О.В. Проявление нелинейных эффектов фильтрации в низкопроницаемых коллекторах при переменных режимах функционирования скважины	102

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Крылов П.А., Чехлов А.Р. К 110-летию со дня рождения Сергея Антоновича Чунихина	115
Геннадий Васильевич Сибиряков (к 75-летию со дня рождения)	125

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	129
---------------------------	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Bogdanova R.A. Two-point invariants of groups of motions in some phenomenologically symmetric two-dimensional geometries.....	5
Bukhtyak M.S., Solomina A.V. On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring	13
Radygin V.M., Polyanskii I.S. Modified method of successive conformal mappings of polygonal domains.....	25
Trofimenko N.N. On linear homeomorphisms of spaces of continuous functions on «long lines».....	36
Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary	42
Khmyleva T.E. On the homeomorphism of the Sorgenfrey line and its modifications S_Q	53

MECHANICS

Barsukov V.D., Goldaev S.V., Basalaev S.A., Babushkin N.A. Simulating the recovery of sunken objects by blowing the pontoon by a controllable solid fuel gas generator.....	57
Borzenko E. I., Khagai E. I. Numerical simulation of the steady-state Herschel – Bulkley fluid flow in a channel with sudden expansion	68
Martinov V. A., Pasechnik K. A., Vlasov A. Yu. Determining the rates of impregnation by a low-viscous organic binder for a carbon reinforcing satin weave fabric.....	82
Pikushchak E.V., Minkov L.L. Method of calculating the aerodynamic efficiency of the axial fan	90
Shagapov V.Sh., Dudareva O.V. Manifestation of nonlinear filtration effects in low permeability reservoirs at variable modes of well functioning.....	102

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

Krylov P.A., Chekhlov A.R. To the 110th anniversary of Sergei Antonovich Chunikhin	115
To the 75th anniversary of Gennadiy Vasil'evich Sibiryakov	125

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	129
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:514.1:514.7
DOI 10.17223/19988621/39/1

Р.А. Богданова

**ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ
ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ**

Находится множество всех невырожденных двухточечных инвариантов групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей). Для решения соответствующих функциональных уравнений применяется аналитический метод.

Ключевые слова: феноменологически симметричная двумерная геометрия, локальная группа движений, двухточечный инвариант, функциональное уравнение.

В работах [1, 2] для четырех феноменологически симметричных двумерных геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей), т.е. геометрий максимальной подвижности [3] решением соответствующих функциональных уравнений на множество движений найдены трехпараметрические группы движений.

Целью данной работы является нахождение полной системы невырожденных двухточечных инвариантов групп движений упомянутых выше четырех геометрий как решение соответствующих функциональных уравнений на множество двухточечных инвариантов групп преобразований.

Феноменологически симметричные двумерные геометрии строятся на гладком двумерном многообразии M_2 [4]. Сущность феноменологической симметрии состоит в наличии связи между всеми взаимными расстояниями для некоторого конечного числа точек [5, 6]. Точки многообразия M_2 удобно, в целях сокращения записи, обозначать строчными буквами латинского алфавита: i, j, k и т.д. Текущая точка $i \in M_2$ задается локальными координатами x_i, y_i . Основу построения двумерной геометрии составляет гладкое класса C^2 отображение $f: \mathfrak{S}_f \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathfrak{S}_f \in M_2 \times M_2$, сопоставляющее паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ действительное число $f(i, j) \in \mathbb{R}$ [4], называемое метрической функцией. Ее координатное представление для двумерных геометрий имеет следующий вид:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (1)$$

Эта функция, в отличие от обычной метрики, удовлетворяет только естественным

математическим требованиям гладкости класса C^2 , невырожденности и определенности почти всюду в $M_2 \times M_2$ [4].

Все основные определения и соответствующие аксиомы, относящиеся к феноменологически симметричным ранга 4 двумерным геометриям представлены в работах Г.Г. Михайличенко [4] и автора [2].

Определение. Гладкое класса C^2 локальное взаимно однозначное (обратимое) отображение

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (2)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (3)$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$.

Равенство (4) есть также функциональное уравнение на множество двухточечных инвариантов группы преобразований двумерного многообразия как функций четырех переменных – координат точек i и j .

Наряду с хорошо известными геометриями, такими, как плоскость Евклида, плоскость Минковского, двумерная сфера и другие, в классификации [4], построенной Г.Г. Михайличенко, присутствуют двумерные геометрии гельмгольцевого типа, в которых окружность не имеет привычного образа, о чем говорит Гельмгольц в своей работе [7], а также симплицальная плоскость.

Для трех гельмгольцевых и симплицальной двумерных геометрий запишем координатное представление задающих их метрических функций:

1) плоскость Гельмгольца

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (5)$$

где $\gamma > 0$ – параметр семейства;

2) псевдогельмгольцева плоскость

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta \operatorname{ar(c)th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (6)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметр семейства;

3) дуальногельмгольцева плоскость

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right); \quad (7)$$

4) симплицальная плоскость

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \quad (8)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$.

Следуя работам автора (см. [1, 2]), для этих геометрий запишем группы преобразований двумерного многообразия M_2 :

1) трехпараметрическая группа движений плоскости Гельмгольца

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (9)$$

где $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{b}{a}) = 1$;

2) трехпараметрическая группа движений псевдогельмгольцевой плоскости

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (10)$$

где $(a^2 - b^2) \exp(2\beta \ar(c) \th \frac{b}{a}) = 1$;

3) трехпараметрическая группа движений дуальногельмгольцевой плоскости

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (11)$$

где $a^2 \exp(2 \frac{b}{a}) = 1$;

4) трехпараметрическая группа движений симплицальной плоскости

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \quad (12)$$

где $a^m b^n = 1$.

В настоящей работе для трех гельмгольцевых и симплицальной геометрий находятся все невырожденные двухточечные инварианты групп (9) – (12) преобразований двумерного многообразия M_2 как решение функционального уравнения (4). Заметим, что условие гладкости и обратимости (3) преобразований (2) совершенно естественно. В процессе решения функционального уравнения (4) устанавливается, что каждый такой инвариант с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ совпадает с метрической функцией соответствующей плоскости.

Сначала рассмотрим плоскость Гельмгольца.

Запишем функциональное уравнение (4) на множество двухточечных инвариантов группы преобразований (9) двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i - by_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j - by_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (13)$$

Теорема 1. Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (14)$$

где $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{b}{a}) = 1$, γ – положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией плоскости Гельмгольца и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство. Дифференцируя функциональное уравнение (13) по параметрам c, d и b с учетом того, что параметр a зависит от b , поскольку между

ними существует связь $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{b}{a}) = 1$, из которой следует $(a - \gamma b) \frac{da}{db} = -(b + \gamma a)$, получим систему функционально-дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} (-x_i \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} - y_i) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} (x_i - \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} y_i) + \\ + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} (-x_j \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} - y_j) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} (x_j - \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} y_j) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где, например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В системе (15) параметрам a, b, c, d придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} (-\gamma x_i - y_i) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - \gamma y_i) + \\ + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} (-\gamma x_j - y_j) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - \gamma y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Общее решение $\Theta(u, v) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j)$ первого и второго уравнений системы (16) подставим в третье уравнение:

$$-(\gamma u + v) \frac{\partial \Theta}{\partial u} + (u - \gamma v) \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad (17)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j, \quad v = y_i - y_j$. Общее решение уравнения (17) находится методом характеристик:

$$\Theta(u, v) = \chi((u^2 + v^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{v}{u})), \quad (18)$$

где χ – функция одной переменной с отличной от нуля производной класса C^2 . По (18) и (15) находим множество двухточечных инвариантов:

$$f(i, j) = \chi \left[((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) \right], \quad (19)$$

каждый из которых эквивалентен метрической функции плоскости Гельмгольца (5), так как переходит в нее при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. ■

Далее, найдем полную систему двухточечных инвариантов псевдогельмгольцевой плоскости. Запишем функциональное уравнение (4) для группы преобразований (10):

$$f(ax_i + by_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j + by_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (20)$$

Теорема 2. Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (21)$$

где $(a^2 - b^2) \exp(2\beta \ar(c) \operatorname{th} \frac{b}{a}) = 1$, β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией псевдогельмгольцевой плоскости и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство теоремы 2 в общих чертах повторяет доказательство теоремы 1. После дифференцирования уравнения (20) по параметрам c , d и b с учетом связи $(a^2 - b^2) \exp(2\beta \ar(c) \operatorname{th} \frac{b}{a}) = 1$ получается система функционально-дифференциальных соотношений, подобная системе (15) для плоскости Гельмгольца, из которой при переходе к тождественному преобразованию получается система трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} (-\beta x_i + y_i) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - \beta y_i) + \\ + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} (-\beta x_j + y_j) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - \beta y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Решением системы (22) является множество всех двухточечных инвариантов

$$f(i, j) = \chi[((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp(2\beta \ar(c) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j})], \quad (23)$$

которые, очевидно, эквивалентны метрической функции псевдогельмгольцевой плоскости (6). ■

Далее, запишем функциональное уравнение (4) для группы преобразований (11):

$$f(ax_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (24)$$

Теорема 3. Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (25)$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$

с метрической функцией дуальногелъмгольцевой плоскости и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теорем 1 и 2. После дифференцирования уравнения (24) по параметрам c , d и b с учетом связи

$$a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1 \text{ получается система функционально-дифференциальных соотношений,}$$

из которой при переходе к тождественному преобразованию получается система трех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ -x_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - y_i) - \\ -x_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Решением системы (26) является множество невырожденных двухточечных инвариантов

$$f(i, j) = \chi[(x_i - x_j)^2] \exp(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \quad (27)$$

эквивалентных метрической функции дуальногелъмгольцевой плоскости (7). ■

Запишем, наконец, функциональное уравнение (4) для группы преобразований (12):

$$f(ax_i + c, by_i + d, ax_j + c, by_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (28)$$

Теорема 4. Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \quad (29)$$

где $a^m b^n = 1$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией симплицальной плоскости и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство теоремы 4 подобно доказательствам изложенных выше трех теорем. После дифференцирования уравнения (28) по параметрам c , d и b с учетом связи $a^m b^n = 1$ получается система функционально-дифференциальных соотношений, из которой при переходе к тождественному преобразованию получается система трех дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{n}{m} x_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{n}{m} x_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Решением системы (30) является множество невырожденных двухточечных инвариантов

$$f(i, j) = \chi[(x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n], \quad (31)$$

которые эквивалентны метрической функции симплицальной плоскости (8), так как переходят в нее при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданова Р.А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 12–22.
2. Богданова Р.А. Группа движений симплицальной плоскости как решение функционального уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 5–13.
3. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.
4. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул: Изд-во Барнаульского государственного педагогического университета, 2004.
5. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.
6. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 5. С. 985–987.
7. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 366–388.

Статья поступила 08.12.2015 г.

Bogdanova R.A. TWO-POINT INVARIANTS OF GROUPS OF MOTIONS IN SOME PHENOMENOLOGICALLY SYMMETRIC TWO-DIMENSIONAL GEOMETRIES

DOI 10.17223/19988621/39/1

In G.G. Mikhaylichenko's classification, along with the well-known geometries, such as the Euclidean plane, Minkowsky plane, two-dimensional sphere, and others, there are two-dimensional Helmholtz type geometries in which the circle does not have the usual pattern, as evidenced by Helmholtz in his work "On the Facts Underlying Geometry," as well as the simplicial plane. All these geometries are endowed by group and phenomenological symmetries. The essence of the phenomenological symmetry is in the link between all the mutual distances for a finite number of points.

The paper describes a complete system of non-degenerate two-point invariants of groups of motions for some phenomenologically symmetric two-dimensional geometries (Helmholtz plane, pseudo-Helmholtz plane, dual-Helmholtz plane, and simplicial plane) as a solution of corresponding functional equations for a set of two-point invariants of transformation groups.

The paper found that every two-point invariant of motion groups of the aforementioned geometries coincides with the metric function of the corresponding plane up to a smooth transformation $\psi(f) \rightarrow f$.

Keywords: phenomenologically symmetric two-dimensional geometry, local group of motions, two-point invariant, functional equation.

BOGDANOVA Rada Alexandrovna (Gorno-Altai State University,
Gorno-Altai, Russian Federation)
E-mail: bog-rada@yandex.ru

REFERENCES

1. Bogdanova R.A. Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak reshenie funktsional'nogo uravneniya. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 12–22. (in Russian)
2. Bogdanova R.A. Gruppy dvizheniy simplitsial'noy ploskosti kak reshenie funktsional'nogo uravneniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 5–13. (in Russian)
3. Michailichenko G.G. On group and phenomenological 2simmetries in geometry. *Soviet Math. Dokl.*, 1983, vol. 27, no. 2, pp. 325–326.
4. Mikhaylichenko G.G. *Dvumernye geometrii*. Barnaul, Izd-vo Barnaul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2004. (in Russian)
5. Kulakov Yu.I. *Teoriya fizicheskikh struktur*. Moscow, Dominiko Publ., 2004. (in Russian)
6. Kulakov Yu.I. Geometriya prostranstv postoyannoy krivizny kak chastnyy sluchay teorii fizicheskikh struktur. *Dokl. AN SSSR*, 1970, vol. 193, no. 5, pp. 985–987. (in Russian)
7. Gel'mgol'ts G. O faktakh, lezhashchikh v osnovanii geometrii. *Ob osnovaniyakh geometrii*. Moscow, 1956, pp. 366–388. (in Russian)

УДК 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/39/2

М.С. Бухтяк, А.В. Соломина

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСКРОЮ СЕТЕПОЛОТНА

Исследуется раскрой сетеполотна для формирования осесимметричного параболического рефлектора при отождествлении раскроя с взаимно-однозначным отображением части плоскости на часть параболоида вращения. Указанная трактовка раскроя есть сильная, но неизбежная идеализация. Представляется важным вопрос о критерии сравнения двух схем раскроя. При более общем подходе речь идет о критерии отображения поверхности на поверхность. Предложенный авторами критерий, названный дефектом отображения, неидеален – как и всякий критерий, но позволяет ответить на вопрос: в каком смысле одно отображение предпочтительнее другого. Приведены примеры применения критерия.

Ключевые слова: параболический рефлектор, сетеполотно, отображение поверхностей, дефект отображения поверхности на поверхность, аппроксимация.

1. Дефект отображения поверхности на поверхность

Данная работа продолжает исследование, начатое в [1–3]. Его содержание – вычисление искажений локальных длин при отображении части плоскости на часть параболоида вращения. В общем, можно говорить об исследовании отношения метрических форм двух поверхностей Σ_1 и Σ_2 , находящихся в точечном соответствии (аналогично рассмотрению, проведенному в [4]). В дифференциальной геометрии объект, состоящий из двух поверхностей, при точечном соответствии между ними, принято называть парой поверхностей (например, [5, 6]). Пара поверхностей допускает параметризацию вида

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v) \in C^1, \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v) \in C^1, \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Точки $\mathbf{A} = \mathbf{r}_1(u, v)$ и $\mathbf{A}' = \mathbf{r}_2(u, v)$ являются соответствующими. Локальная метрика каждой из поверхностей определяется конкретным метрическим тензором. Матрицы этих тензоров составлены из коэффициентов первых квадратичных форм:

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Первые квадратичные формы [4] имеют (в обозначениях К. Гаусса) вид

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Мерой локального искажения длин (точнее, их квадратов) является величина [4]

$$\lambda = ds_2^2 / ds_1^2.$$

Экстремальные значения λ суть совместные инварианты матриц M_1 и M_2 , равные корням уравнения

$$m \equiv \det(M_2 - \lambda M_1) = E_2 G_2 - F_2^2 + \lambda(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + \lambda^2(E_1 G_1 - F_1^2) = 0. \quad (1.1)$$

Положительная определенность симметричных матриц M_1 и M_2 гарантирует вещественность корней уравнения (1.1). Из коэффициентов этого уравнения [1]

$$a = E_1 G_1 - F_1^2, \quad b = 2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1, \quad c = E_2 G_2 - F_2^2$$

составлен лагранжиан, функционал от которого минимизирует отклонение обоих корней уравнения (1.1) от единицы. На этом пути удается характеризовать избранную для анализа схему раскроя сетеполотна в локальном смысле: строится поле наибольших значений корня уравнения (1.1) и поле наименьших значений.

Представляется естественным сопоставить паре поверхностей инвариант, характеризующий качество раскроя сетеполотна «в целом», как единственный скаляр.

Для уравнения (1.1), записанного в приведенном виде, вместо лагранжиана, построенного в [1], получаем лагранжиан

$$\begin{aligned} L\left(r_1(u, v), r_2(u, v), \frac{\partial r_1(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial r_1(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial r_2(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial r_2(u, v)}{\partial v}\right) = \\ = \left(1 - \frac{E_2 G_2 - F_2^2}{E_1 G_1 - F_1^2}\right)^2 + \left(2 + \frac{-E_2 G_1 - E_1 G_2 + 2F_2 F_1}{E_1 G_1 - F_1^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Его преимущество в том, что теперь мы имеем дело с безразмерными величинами. Левая часть равенства есть функция шести аргументов – пока мы рассматриваем $r_1(u, v), r_2(u, v)$ как переменные вектор-функции. Пусть на место переменных вектор-функций подставлены фиксированные вектор-функции $r_1(u, v), r_2(u, v)$. Тем самым задано отображение их годографов:

$$f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2.$$

Лагранжиан L становится функцией от аргументов u, v . Именно,

$$\begin{aligned} \Lambda(u, v) = \left(1 - \frac{E_2(u, v)G_2(u, v) - F_2(u, v)^2}{E_1(u, v)G_1(u, v) - F_1(u, v)^2}\right)^2 + \\ + \left(2 + \frac{-E_2(u, v)G_1(u, v) - E_1(u, v)G_2(u, v) + 2F_2(u, v)F_1(u, v)}{E_1(u, v)G_1(u, v) - F_1(u, v)^2}\right)^2. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Определение 1. Функцию (1.2) будем называть *основной функцией*.

Пусть поверхность Σ_2 имеет конечную площадь равную S_2 .

Определение 2. Дефектом отображения f будем называть величину, равную

$$K(f) \triangleq \frac{\iint \Lambda \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} dudv}{S_2}^{(D)}. \quad (1.3)$$

Пример 1. Пусть поверхности, первая и вторая, принадлежат (каждая – своему) 1-семейству годографов вектор-функций

$$R_1 = \{u \cos v, \mu u \sin v, 0\}, \quad (1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi),$$

$$R_2 = \{\mu^2 u \cos v, u \sin v, 0\}, \quad (1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Здесь μ – вещественный параметр,

$$\mu > 0.$$

Например, при $\mu = 2$ мы имеем дело с двумя плоскими областями, изображенными на рис. 1.

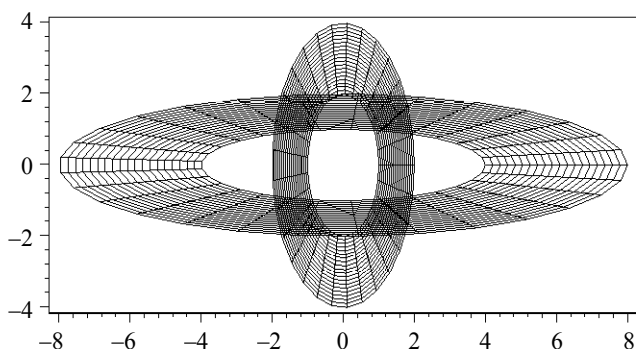


Рис. 1. Кольцо, вытянутое по вертикали, – первая поверхность при $\mu = 2$; вытянутое по горизонтали, – вторая поверхность при том же значении параметра

Имеется в виду отображение первой поверхности на вторую. Матрицы первых квадратичных форм запишутся как

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 v + \mu^2 \sin^2 v & u(\mu^2 - 1) \cos v \sin v \\ u(\mu^2 - 1) \cos v \sin v & u^2 (\sin^2 v + \mu^2 \cos^2 v) \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \mu^4 \cos^2 v + \sin^2 v & u(1 - \mu^4) \cos v \sin v \\ u(1 - \mu^4) \cos v \sin v & u^2 (\mu^4 \sin^2 v + \cos^2 v) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (1.1) принимает вид

$$u^2 [\lambda^2 \mu^2 - (1 + \mu^6) \lambda + \mu^4] = 0.$$

Его корни

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu^2}, \lambda_2 = \mu^4$$

суть квадраты экстремальных значений локальных искажений длин. Сами же локальные искажения длин выражаются функциями параметра μ :

$$k_1(\mu) = \frac{1}{\mu}, k_2(\mu) = \mu^2.$$

Площадь второй поверхности

$$S_2 = 3\pi\mu^2.$$

Основная функция (1.2) принимает вид

$$\Lambda = \frac{(\mu^8 + 2\mu^6 - 2\mu^2 + 1)(\mu^4 - 1)}{\mu^4}.$$

При этом

$$\sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} = u\mu^2.$$

Значение дефекта отображения, согласно (1.3),

$$K(\mu) = \frac{\mu^2}{S_2} \int_1^2 u du \int_0^{2\pi} dv \Lambda = \frac{(\mu^8 + 2\mu^6 - 2\mu^2 + 1)(\mu^4 - 1)}{\mu^4}.$$

Рис. 2 иллюстрирует следующий, вполне очевидный факт, имеющий место в общем случае. Дефект отображения $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ равен нулю тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия.

1. Поверхности Σ_1 и Σ_2 изометричны [4].
2. Отображение f есть изометрия [4].

Для рассматриваемого примера оба условия выполнены при $\mu = 1$ и только в этом случае.

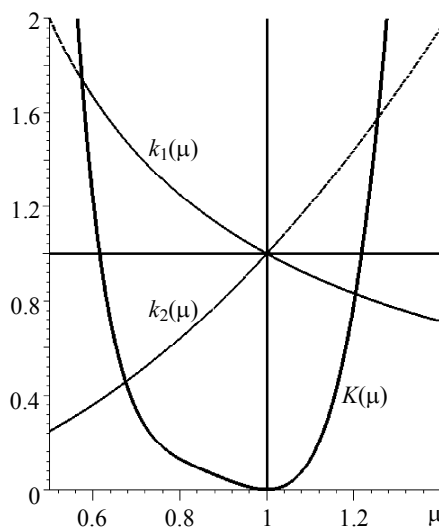


Рис. 2. Графики функций $k_1(\mu)$, $k_2(\mu)$, $K(\mu)$ для примера 1

2. Дефект раскроя параболоида плоским листом

Проанализируем схему раскроя, построенную в [1]. Удобнее сначала привести матрицу метрического тензора куска параболоида, рассматриваемого как «вторая поверхность» Σ_2 . Тогда

$$R_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad (0 \leq u \leq R, 0 \leq v < 2\pi), \quad (2.1)$$

где F – фокальный параметр параболоида. Константа R есть радиус вырезающего цилиндра для осесимметричного рефлектора. Практика конструирования свидетельствует, что с высокой долей уверенности можно полагаться на неравенство

$$R \leq F,$$

то есть рассматривать F как верхнюю оценку величины R .

Матрица метрического тензора

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{4F^2 + u^2}{4F^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} = \frac{u}{2F} \sqrt{1 + \left(\frac{u}{2F}\right)^2} = \frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3} + O\left(\left(\frac{u}{2F}\right)^5\right).$$

Элемент площади второй поверхности (там, где это упрощает вычисление функционала) приблизим выражением

$$\left(\frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3}\right) du dv.$$

Точное значение площади данной поверхности

$$S_2 = \frac{\left((4F^2 + R^2)^{3/2} - 8F^3\right)\pi}{3F}.$$

Верхнюю оценку площади получим при $R = F$. Тогда

$$S_2^{\max} = \frac{F^2 (5\sqrt{5} - 8)\pi}{3} \approx 3.330444 \cdot F^2.$$

В качестве первой поверхности применяем годограф вектор-функции, определенной в [1]. Именно,

$$\mathbf{R}_1 = \{u \cdot g(u) \cos v, u \cdot g(u) \sin(v), 0\}, \quad 0 \leq u \leq R, \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

где

$$g(u) = 1 + \frac{u^2}{32F^2} - \frac{0.001941 \cdot u^3}{F^3}.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$E_1 = F^{-6} \cdot 0.16 \cdot 10^{-12} \left(0.25 \cdot 10^7 \cdot F^3 + 234375 \cdot F \cdot u^2 - 19412 \cdot u^3\right)^2,$$

$$F_1 = 0,$$

$$G_1 = F^{-6} \cdot 0.16 \cdot 10^{-12} \cdot u^2 \cdot \left(0.25 \cdot 10^7 \cdot F^3 + 78125 \cdot F \cdot u^2 - 4853 \cdot u^3\right)^2.$$

Основную функцию представим в виде

$$\Lambda = \left[1 - \frac{0.1024 \cdot 10^{-24} (A^2 B^2)}{F^{10} (4F^2 + u^2)}\right]^2 + \left[2 - \frac{4(C + E)F^2}{u^2 (4F^2 + u^2)}\right]^2.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
 A &= 2500000.0 \cdot F^3 + 234375.0u^2F - 19412.0u^3, \\
 B &= 2500000.0F^3 + 78125.0u^2F - 4853.0u^3, \\
 C &= 1.6 \times 10^{-5} \frac{(2500000.0F^3 + 234375.0u^2F - 19412.0u^3)^2 u^2}{F^6}, \\
 E &= 4.0 \times 10^{-5} \frac{(4F^2 + u^2)u^2 (2500000.0F^3 + 78125.0u^2F - 4853.0u^3)^2}{F^8}.
 \end{aligned}$$

Аппроксимация основной функции отрезком ряда Тейлора до степени 32 приводит к полиному

$$\Lambda s = \frac{u^6}{F^{31}} \sum_{i=0}^{25} p_i u^i F^{25-i}.$$

Список коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_{25}$:

$$\begin{aligned}
 &0.000754, -0.001820, 0.000595, 0.000595, -0.000448, -0.000200, 0.000167, \\
 &0.000062, -0.000056, -0.000019, 0.000017, 0.543941 \cdot 10^{-5}, -0.518774 \cdot 10^{-5}, \\
 &-0.155383 \cdot 10^{-5}, 0.151156 \cdot 10^{-5}, 0.436453 \cdot 10^{-6}, -0.431547 \cdot 10^{-6}, -0.121175 \cdot 10^{-6}, \\
 &0.121301 \cdot 10^{-6}, 0.333089 \cdot 10^{-7}, -0.336788 \cdot 10^{-7}, -0.908106 \cdot 10^{-8}, \\
 &0.925809 \cdot 10^{-8}, 0.245872 \cdot 10^{-8}, -0.252412 \cdot 10^{-8}, -0.661785 \cdot 10^{-9}.
 \end{aligned}$$

Для оценки качества полиномиального приближения определим функцию

$$W(F, u, v) = \frac{\Lambda - \Lambda s}{\Lambda}$$

и изобразим серию графиков $W(i, u, v)$ при $i = 4, \dots, 16$; $u = 4, \dots, i$; $\left(-\frac{\pi}{8} \leq v \leq \frac{\pi}{8}\right)$.

Использование фиктивно входящей переменной v делает график более обозримым. Получаем рис. 3.

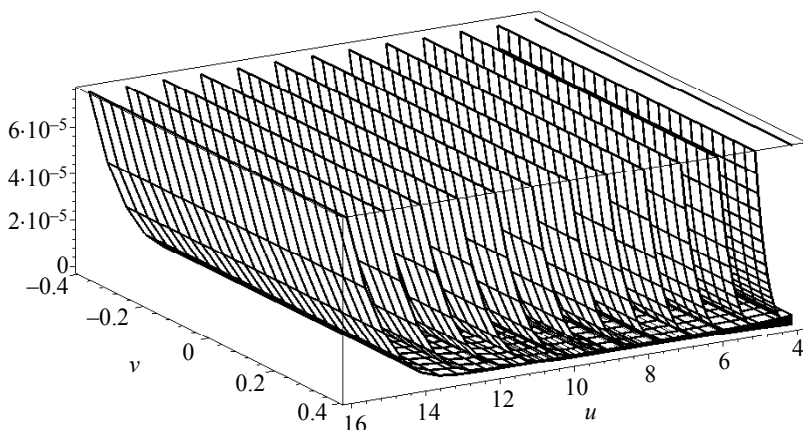


Рис. 3. Относительные отклонения полиномиального приближения основной функции от точного значения для различных значений параметра F и переменной u

Полагаем, что полиномиальное приближение удовлетворительно. Вычислим значение функционала на всем рефлекторе:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^F \Lambda s \left(\frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3} \right) du \approx 0.480982 \cdot 10^{-5} F.$$

Дефект отображения равен приближенно

$$\frac{\Phi}{S_2} \approx \frac{0.14442}{F} \cdot 10^{-5}. \quad (2.2)$$

Полученный результат согласуется с тем, что гауссова кривизна параболоида вращения

$$K = \frac{4F^2}{(4F^2 + u^2)^2}.$$

Ясно, что

$$\lim_{F \rightarrow \infty} K = 0.$$

В этом смысле, чем дальше область параболоида от вершины, тем менее она отличается (локально!) от плоской области. Тогда и дефект отображения (при должном выборе отображения) должен стремиться к нулю при $F \rightarrow \infty$, что и видно из (2.2).

Следует отметить, что в основе модели лежит допущение о том, что выкроенный лист сетеполотна каждой своей точкой прикреплен к соответствующей точке параболоида. Прочие обстоятельства данной моделью не учитываются.

3. Дефект раскроя параболоида лепестками с закругленными краями

Речь пойдет о схеме раскроя, рассмотренной в [2]. Рефлектор разделен на n равных секторов плоскостями, проведенными через его ось. Вторая поверхность, таким образом, задается вектор-функцией

$$\mathbf{R}_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad 0 \leq u \leq R, -\frac{\pi}{n} \leq v < \frac{\pi}{n}.$$

Первая поверхность (часть плоскости) согласно [2] есть гогограф вектор-функции

$$\mathbf{R}_1 = \{ s \cos(\alpha), s \sin(\alpha), 0 \}, \quad 0 \leq u \leq R, -\frac{\pi}{n} \leq v < \frac{\pi}{n},$$

где

$$s = \frac{1}{4F} \left(-4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln(F) + u \sqrt{4F^2 + u^2} + 4F^2 \ln \left(u + \sqrt{4F^2 + u^2} \right) \right), \quad \alpha = \frac{uv}{s}.$$

Мы не приводим матрицу метрического тензора ввиду крайней громоздкости. По тем же причинам опускаем запись основной функции. Заметим, что применяя аппроксимацию отрезком ряда Тейлора до степени 32, принимаем для основной функции приближенное представление

$$\Lambda \approx \tilde{\Lambda} = v^4 u^{12} F^{-26} \sum_{i=1}^{12} K_i F^{2i-2} u^{24-2i}.$$

Список коэффициентов $K_1, \dots, K_{12}$ таков:

$$\begin{aligned} &-0.184630 \cdot 10^{-8}, 0.626208 \cdot 10^{-8}, -0.208315 \cdot 10^{-7}, 0.676934 \cdot 10^{-7}, \\ &-0.213701 \cdot 10^{-6}, 0.650357 \cdot 10^{-6}, -0.188674 \cdot 10^{-5}, 0.512967 \cdot 10^{-5}, \\ &-0.000013, 0.000027, -0.000047, 0.000048. \end{aligned}$$

Для оценки качества полиномиального приближения определим функцию

$$W(F, u, v) = \frac{\Lambda - \tilde{\Lambda}}{\Lambda}.$$

Изобразим серию графиков $W(i, u, v)$ при $i = 4, \dots, 16$; $u = 4, \dots, i$; $\left(-\frac{\pi}{8} \leq v \leq \frac{\pi}{8}\right)$.

Использование фиктивно входящей переменной v делает график более обзорным. Получаем рис. 4.

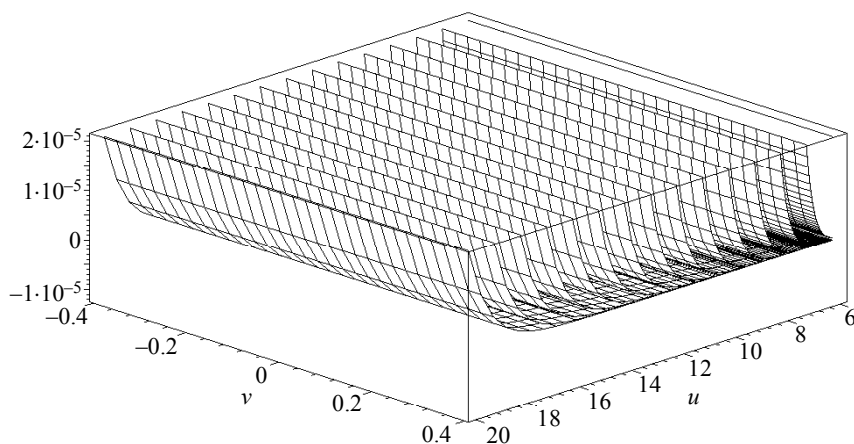


Рис. 4. Относительные отклонения полиномиального приближения основной функции от точного значения для различных значений параметра F и переменной u

Полагаем, что полиномиальное приближение удовлетворительно. Вычислим значение функционала на всем рефлекторе:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^F \tilde{\Lambda} \left(\frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3} \right) du \approx \frac{0.000156 \cdot F}{n^4}.$$

Дефект отображения равен (приблизленно)

$$\frac{\Phi}{S_2} \approx \frac{0.000047}{F \cdot n^4}. \quad (3.1)$$

Как и выше, отмечаем, что в основе модели лежит допущение о том, что выкроенный лист сетеполотна каждой своей точкой прикреплен к соответствующей точке параболоида. Прочие обстоятельства данной моделью не учитываются. Не учтен и так называемый «матрасный эффект»[7] – прогиб сетеполотна между двумя параболическими ребрами жесткости. Этот вопрос отложен до следующей публикации.

Для сопоставления дефектов (2.2 и (3.1) достаточно сравнить коэффициенты при F^{-1} . Обозначим их соответственно H_1 и H_2 . Обе величины считаем функциями от n . Тогда, откладывая n на оси абсцисс, получаем рис. 5, приведенный ниже.

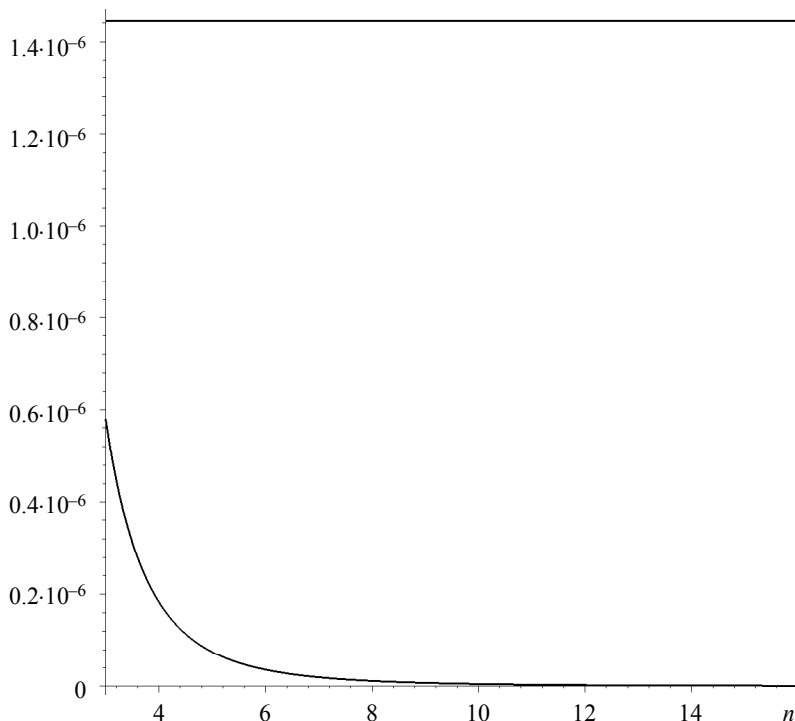


Рис. 5. Значения $H_1(n)$ (верхняя линия) и $H_2(n)$ (нижняя линия)

4. Дефект выкраивания путем центрального проецирования

Кусок параболоида задан, как и прежде, вектор-функцией (2.1). Кусок плоскости – круг в плоскости $z = 0$ с центром в вершине параболоида. Отображение одной поверхности на другую совершается путем проецирования из центра C , расположенного на оси параболоида. Достаточно ясно, что центр следует поместить на положительной полуоси Oz . Желая иметь дело с безразмерными величинами, полагаем, что центр есть точка

$$C(0, 0, kF), \quad k > 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что текущей точке параболоида с радиус-вектором

$$\mathbf{R}_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad 0 \leq u \leq R, \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

соответствует точка плоскости, радиус-вектор которой

$$\mathbf{R}_1 = \left\{ \frac{4F^2 k u \cos v}{4F^2 k - u^2}, \frac{4F^2 k u \sin v}{4F^2 k - u^2}, 0 \right\}. \quad (4.1)$$

Матрица метрического тензора для (4.1) имеет вид

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{16F^4 k^2 (u^2 + 4F^2 k)^2}{(4F^2 k - u^2)^4} & 0 \\ 0 & \frac{16F^4 k^2 u^2}{(4F^2 k - u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Наконец, основная функция выражается формулой

$$\Lambda = \left(1 - \frac{1024F^{10}k^4 (u^2 + 4F^2 k)^2}{(4F^2 k - u^2)^6 (4F^2 + u^2)} \right)^2 + \left(2 - 4 \left(\frac{16F^4 k^2 (u^2 + 4F^2 k)^2 u^2}{(4F^2 k - u^2)^4} + \frac{4(4F^2 + u^2)F^2 k^2 u^2}{(4F^2 k - u^2)^2} \right) F^2 (4F^2 + u^2)^{-1} u^{-2} \right)^2.$$

Как и прежде, строится полиномиальное приближение $\tilde{\Lambda}$ для основной функции. Его мы не приводим ввиду крайней громоздкости, но приводим рис. 6, отображающий относительную погрешность аппроксимации при значениях $F \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Полагаем, что аппроксимация вполне удовлетворительна.

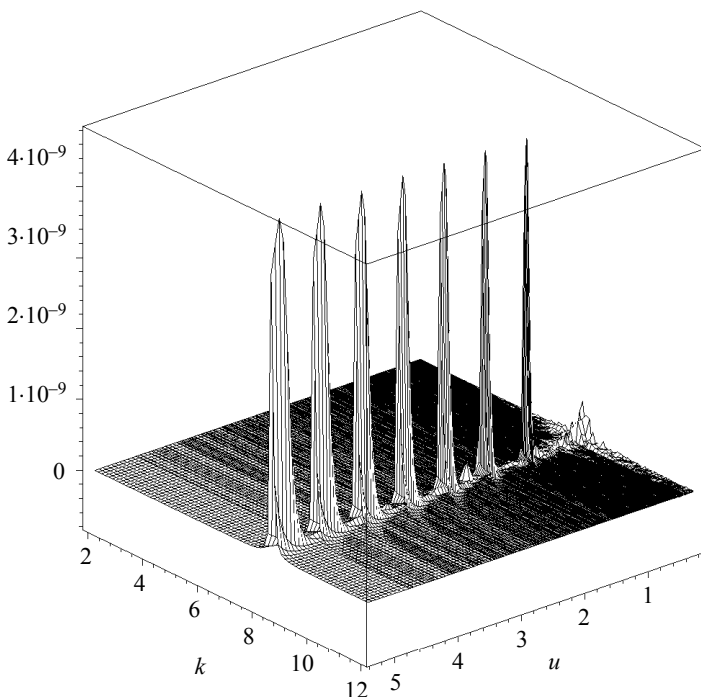


Рис. 6. Относительная погрешность аппроксимации при значениях $F \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Дефект отображения равен (приближенно)

$$W \approx 0.3002603 \cdot 10^{-12} \cdot k^{-15} \cdot \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot k^i.$$

Массив коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{15}$ в указанном порядке имеет вид

$$\begin{aligned} &0.129674 \cdot 10^{11}, 0.778043 \cdot 10^{10}, 0.414956 \cdot 10^{11}, 0.752108 \cdot 10^{11}, \\ &0.171169 \cdot 10^{12}, 0.344932 \cdot 10^{12}, 0.687271 \cdot 10^{12}, 0.128636 \cdot 10^{13}, \\ &0.227811 \cdot 10^{13}, 0.374264 \cdot 10^{13}, 0.560891 \cdot 10^{13}, 0.741947 \cdot 10^{13}, \\ &0.807421 \cdot 10^{13}, 0.574284 \cdot 10^{13}, -0.166120 \cdot 10^{13}, 0.101486 \cdot 10^{12}. \end{aligned}$$

Естественный вопрос: при каком значении k достигается минимум дефекта? Ответ несложен, если учесть, что $k > 0$ и, кроме того, $W(k) > 0$. Приводим последовательность знаков коэффициентов производной полинома W :

$$\{+, +, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -\}.$$

Ясно, что производная имеет единственный вещественный корень k_0 . Без труда вычисляем

$$k_0 \approx 8.82321.$$

Далее,

$$\lim_{k \rightarrow +0} W = +\infty, \quad W(k_0) \approx 0.000021, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} W(k) \approx 0.030472.$$

Таким образом, приняв указанную схему раскроя, можем понизить дефект отображения только лишь до 0.000021.

5. Заключение

Напомним, что под раскроем мы подразумеваем отображение куска плоскости (лист сетеполотна) на некоторую область параболоида. Это само по себе идеализирующее допущение, но оно не единственное. Как только в рассмотрение войдет тот факт, что сетеполотно прикрепляется не к гипотетическому параболоиду, а к несущим конструкциям того или иного типа, объект моделирования станет заметно иным. Рассмотрение идеализированной (то есть на практике не встречающейся) конструкции полезно хотя бы для осознания, от чего отклоняется реальная конструкция. Впрочем, предложенный в данной работе числовой параметр, названный **дефектом отображения**, индифферентен тому, какая поверхность на какую отображается. В этом смысле представляет интерес применение данного понятия к поверхности сетеполотна, подверженной «матрасному эффекту» [7], что ощутимо приблизило бы его к анализу реальных конструкций. Препятствием (не единственным) является размер статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 5–14.

3. Бухтяк М.С. Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 5–14.
4. Кэган В.Ф. Основы теории поверхностей. М.; Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 407 с.
5. Лучинин А.А. О парах m -поверхностей в n -мерном проективном пространстве // Геом. сб. Вып. 9. Томск: Изд-во ТГУ, 1972. С. 21–29.
6. Чешкова М.А. О паре поверхностей в евклидовом пространстве // Математические заметки. 2004. Т. 75. Вып. 3. С. 474–475.
7. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.

Статья поступила 22.10.2015 г.

Bukhtyak M.S., Solomina A.V. ON AN INVARIANT OF SURFACE MAPPING AS APPLIED TO METALLIC MESH TAILORING

DOI 10.17223/19988621/39/2

As in previous publications, the authors establish a goal to study tailoring of a metallic mesh to form an axially symmetric parabolic reflector. The tailoring is identified with a one-to-one mapping of a plane onto a part of a paraboloid of revolution. This representation of tailoring has a strong but inevitable idealization. The issue of a comparison criterion for two tailoring schemes is deemed important. In general terms this refers to a criterion of mapping a surface to surface. The mapping defect criterion proposed by the authors is not perfect – like any other criterion. In any case, it makes it possible to answer the question: in what sense one mapping is preferable to another. The article gives examples of the criterion's application.

Keywords: parabolic reflector, metallic mesh, mapping of surfaces, defect of surface-to-surface mapping, approximation.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: bukhtyakm@mail.ru

SOLOMINA Anna Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: annavladimirovna483@mail.ru

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 2(34), pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1 (in Russian)
2. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 4(36), pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1 (in Russian)
3. Bukhtyak M.S. Normal'naya kongruentsiya paraboloida. Demikvadriki. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 5(37), pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/37/1 (in Russian)
4. Kagan V.F. *Osnovy teorii poverkhnostey*. Moscow, Leningrad, OGIЗ GITTL Publ., 1948. 407 p. (in Russian)
5. Luchinin A.A. O parakh m -poverkhnostey v n -mernom proektivnom prostranstve. *Geom. sb.*, no. 9. Tomsk, Izd-vo TGU, 1972, pp. 21–29. (in Russian)
6. Cheshkova M.A. O pare poverkhnostey v evklidovom prostranstve. *Matematicheskie zametki*, 2004, vol. 75, no. 3, pp. 474–475. (in Russian)
7. Gryanik M.V., Loman V.I. *Razvertyvaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa*. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1987. 72 p. (in Russian)

УДК 517.54
DOI 10.17223/19988621/39/3

В.М. Радыгин, И.С. Полянский

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НАПЕРЕД ЗАДАННЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Разработан метод решения обратной задачи Кристоффеля – Шварца – конформное отображение наперед заданной многоугольной области на каноническую область – единичный круг. В основе метода лежит применение обобщенной функции Жуковского для решения модельных задач отображения на верхнюю полуплоскость луночки, в общем случае заданной сектором произвольной области с гладкой границей в расширенной плоскости комплексного переменного. Работоспособность решения проверена на конкретных примерах.

Ключевые слова: конформное отображение, многоугольная область, единичный круг, обратная задача Кристоффеля – Шварца.

Большое число работ [1–4 и др.] рассматривают решение задачи конформного отображения канонической области, например полуплоскости или единичного круга, на односвязную область расширенной комплексной плоскости, ограниченную ломаной, – многоугольную область. При этом наибольший практический интерес широкого класса прикладных задач вызывает решение обратной задачи (конформное отображение наперед заданной многоугольной области). Поскольку дополнение методов прямого отображения (интеграл Кристоффеля – Шварца [4]) обратными [5] существенно расширяет эффективное применение конформного отображения при решении различных краевых задач физики и техники [1], например в постановке [6] барицентрического метода [7, 8]. Поэтому целью статьи является разработка метода конформного отображения наперед заданных многоугольных областей.

1. Постановка задачи

Определим последовательность неповторяющихся N точек $A_1, A_2, \dots, A_N$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которые являются вершинами N -угольной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с заданными значениями величины внутренних углов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, соответствующих по n -му индексу $(n = \overline{1, N})$ точкам A_n , и таких, что $0 < \alpha_n < \pi$,

$\sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\pi} = N - 2$. Геометрический центр области Ω совпадает с началом координат

комплексной плоскости. Нумерацию точек $A_n = r_n e^{i\varphi_n}$ определим в порядке положительного обхода области Ω : $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$. Известно, что для заданных точек b_n , расположенных на единичной окружности $G \subset \mathbb{C}$ и являющихся про-

образами вершин A_n , конформное отображение единичного круга $|t| < 1$ на область Ω определяется известным интегралом Кристоффеля – Шварца [3]:

$$z = f(t) = C_0 \int_0^t \left[\prod_{n=1}^N (1 - \tau/b_n)^{\alpha_n/\pi-1} \right] d\tau + C_1, \quad (1)$$

где $z \in \Omega$; $C_0 \neq 0$ и C_1 – комплексные константы.

С учетом использованных соотношений найдем обратное отображение области Ω на единичный круг $|t| < 1$, т. е. функцию $t = f^{-1}(z)$ для заданного интеграла Кристоффеля – Шварца (1).

2. Построение обратного отображения

Известно [2, 3 и др.], что прямое $\omega = (z-i)/(z+i)$ и обратное $z = i(1+\omega)/(1-\omega)$ преобразования Кэли переводят любую прямую в дугу единичной окружности и обратно. Используя дробно-линейное преобразование

$$\zeta = i(R+z)/(R-z), \quad (2)$$

где R – минимальный радиус окружности Ω' , содержащей в себе все вершины A_n многоугольника, отобразим многоугольную область $z \in \Omega$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ с вырезанными круговыми двуугольниками (круговые луночки) [2]. При этом вершины, расположенные на границе окружности Ω' , будут отображаться в точки действительной оси $a_n = -\sin(\varphi_n)/(1 - \cos(\varphi_n))$ полуплоскости. Вершины, расположенные внутри окружности Ω' , будут отображаться в точки a_n , отступающие от действительной оси на величину $(R^2 - |A_n|^2)/(|A_n|^2 + R^2 - 2|A_n|\cos(\varphi_n))$, а от мнимой оси соответственно на величину $-2R|A_n|\sin(\varphi_n)/(|A_n|^2 + R^2 - 2|A_n|\cos(\varphi_n))$. На рис. 1 приведен пример отображения семиугольника на верхнюю полуплоскость дробно-линейным отображением (2).

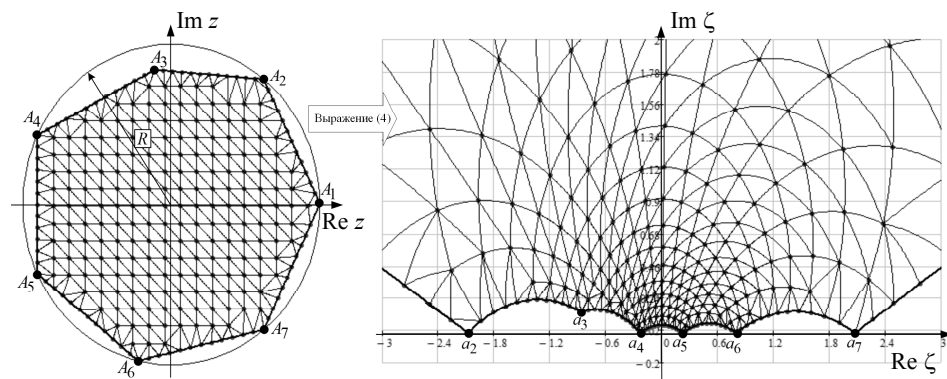


Рис. 1. Пример отображения семиугольника на верхнюю полуплоскость дробно-линейным отображением (2)

Для последующего отображения полученной области с вырезанными круговыми двугульниками (см., например, рис. 1) на верхнюю полуплоскость применим последовательность отображений. Подобный метод с учетом рассмотренного обобщения в [1] принято называть методом последовательных конформных отображений (метод исчерпывания). Для реализации указанного метода рассмотрим решение трех модельных задач (обратных отображений).

3. Модельные задачи обратного отображения

Первой является задача на построение отображения полуплоскости с выброшенным сегментом круга на полуплоскость [3]. В ней указанное отображение производится для ребра $e_n = \{A_n, A_{n+1}\}$ исходного многоугольника, заданного парой соседних вершин A_n и A_{n+1} , расположенных на границе окружности Ω' . Решение задачи отображения полуплоскости с выброшенным сегментом круга на полуплоскость без вырезов известно [1 – 3] и производится обобщенной функцией Жуковского. Параметры удаляемого n -го сегмента: радиус R_n и положение центра координат круга m_n определяются по трем точкам, принадлежащим ребру e_n . При этом добавление произвольного кругового сегмента в полуплоскость обобщенной функцией Жуковского приведет к изменению остальных круговых двугульников.

Лемма 1. Применение обобщенной функцией Жуковского $\varpi(\zeta) = S_3(S_2(S_1(\zeta)))$, где $S_1(\zeta) = (\zeta - a)/(\zeta + a)$; $S_2(\zeta) = \zeta^\gamma$; $S_3(\zeta) = a\gamma(1 + \zeta)/(1 - \zeta)$ при $\gamma \in \mathbb{R}_+$, для добавления n -го ($n = \overline{1, N}$) кругового сегмента в верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ с N выброшенными круговыми сегментами приводит к отображению исходной области на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \varpi > 0$ с $N - 1$ выброшенными эллиптическими сегментами.

Доказательство. Известно [9], что применение любого дробно-линейного преобразования к окружности приводит к ее отображению на другую окружность, при этом под термином «окружность» понимается не только окружность в собственном смысле слова, но и прямая. С учетом этого следует рассматривать влияние степенного отображения $S_2(\zeta) = \zeta^\gamma$ на форму $N - 1$ выброшенных сегментов круга из верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ при решении задачи отображения n -й ($n = \overline{1, N}$) круговой луночки.

Пусть функция $S_2(\zeta)$ задана степенным рядом

$$S_2(\zeta) = \zeta^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n; \quad c_n = a_n + ib_n. \quad (3)$$

Тогда, представив степенную функцию равенством $\zeta^\gamma = e^{\gamma \ln(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma \ln(\zeta))^n / n!$,

где $\zeta = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, найдем коэффициенты a_n и b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= (\gamma/r)^n \cos(n \arctg[(\varphi \cos \varphi - \ln r \sin \varphi)/(\ln r \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)]) (\ln^2 r + \varphi^2)^{n/2} / n!; \\ b_n &= (\gamma/r)^n \sin(n \arctg[(\varphi \cos \varphi - \ln r \sin \varphi)/(\ln r \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)]) (\ln^2 r + \varphi^2)^{n/2} / n!. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом полученных соотношений (5) ряд (4) будет иметь вид

$$S_2(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma^n \rho_n(r, \varphi) (\cos(\phi_n(r, \varphi)) + i \sin(\phi_n(r, \varphi))) \right];$$

$$\rho_n(r, \varphi) = (\ln^2 r + \varphi^2)^{n/2} / n!;$$
(5)

$$\phi_n(r, \varphi) = n [\arctg((\varphi \cos \varphi - \ln r \sin \varphi) / (\ln r \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)) + \varphi].$$

Известно [10], что применение степенного преобразования к кривой второго порядка не приводит к повышению порядка кривой. Пусть на границе произвольного k -го ($k, n = \overline{1, N}$, $\operatorname{Re} m_k < \operatorname{Re} m_n$, $k \neq n$) кругового сегмента с центром в m_k исходной полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ задано пять точек $h_j = r_j e^{i\varphi_j + 2l\pi}$ ($\forall l = 0, 1, 2, \dots; j = \overline{1, 5}$) при условии, что точки h_1 и h_5 расположены на противоположных концах выбранной k -й дуги, т. е. $\varphi_1 = \varphi_5 = 0$. Тогда коэффициенты уравнения кривой второго порядка в декартовой системе

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 1$$
(6)

задаются равенствами

$$a_{11} = |\mathbf{H}_1|/|\mathbf{M}|; \quad a_{12} = 0,5|\mathbf{H}_2|/|\mathbf{M}|; \quad a_{22} = |\mathbf{H}_3|/|\mathbf{M}|;$$

$$a_{13} = 0,5|\mathbf{H}_4|/|\mathbf{M}|; \quad a_{23} = 0,5|\mathbf{H}_5|/|\mathbf{M}|,$$
(7)

где $\mathbf{M} = (M_{j,i})_{5 \times 5}$ – матрица, элементы которой определяются j -ми точками кривой для $l = 0$ с учетом выражения (5) в виде

$$M_{j,1} = \left(\sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \cos \phi_{j,n} \right)^2; \quad M_{j,3} = \left(\sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \sin \phi_{j,n} \right)^2;$$

$$M_{j,4} = \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \cos \phi_{j,n}; \quad M_{j,5} = \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \sin \phi_{j,n};$$
(8)

$$M_{j,2} = \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \cos \phi_{j,n} \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \sin \phi_{j,n}, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

$\mathbf{H}_k = (H_{j,i}^k)_{5 \times 5}$ – матрица, формируемая матрицей $\mathbf{M}$ при замене ее k -го столбца вектором $\mathbf{e} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$; $\rho_{j,n} = \rho_n(r_j, \varphi_j)$; $\phi_{j,n} = \phi_n(r_j, \varphi_j)$.

Из (8) следует, что при фиксированном N в матрице $\mathbf{M}$ элементы 1-го и 3-го столбца можно представить суммой из $N + \binom{N}{2}$ слагаемых, элементы 2-го столбца – суммой из N^2 слагаемых, элементы 4-го и 5-го столбцов – суммой из N слагаемых. Поскольку в указанном случае элементы j -х столбцов – суть суммы равного числа слагаемых, то определитель матрицы $\mathbf{M}$ можно представить в виде

суммы из $N' = 2^{10N+2} \binom{N}{2} + N^2 - 14$ определителей. В этих определителях элементы соответствующих строк заменяются отдельными слагаемыми, представленными

произведением γ^{2n} или γ^n и $\rho_{j,n}^2 \cos^2 \phi_{j,n}$ или $\rho_{j,n}^2 \sin^2 \phi_{j,n}$, или $2\rho_{j,n}^2 \sin \phi_{j,n} \cos \phi_{j,n}$, или $2\rho_{j_1,n_1} \rho_{j_2,n_2} \sin \phi_{j_1,n_1} \cos \phi_{j_2,n_2}$, или $\rho_{j,n} \cos \phi_{j,n}$, или $\rho_{j,n} \sin \phi_{j,n}$ множителей. При этом все элементы отдельного слагаемого определителя произвольного столбца матрицы содержат общий множитель γ^{2n} или γ^n , который с учетом свойств определителя можно вынести за его знак. Аналогичным образом представляются определители матриц $H_1, H_2, \dots, H_5$ в виде суммы из $2^{10N + \binom{N}{2} + N^2 - 13}$, $2^{10N + 2\binom{N}{2} - 12}$, $2^{10N + \binom{N}{2} + N^2 - 13}$, $2^{5N + 2\binom{N}{2} + N^2 - 9}$, $2^{5N + 2\binom{N}{2} + N^2 - 9}$ слагаемых соответственно с вынесенными множителями, кратными γ^n .

Поскольку исходно кривая (6) в области ζ является окружностью при $\gamma = 1$ в выражении (8), то $a_{11} = a_{22}$ и $a_{12} = 0$, а инварианты кривой

$$I_1 = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2; \quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2; \quad I_3 = a_{11} + a_{22} \quad (9)$$

удовлетворяют условиям $I_2 > 0$; $I_1 \cdot I_3 < 0$; $I_3^2 = 4I_2$ [10].

С учетом указанного вида определителей матриц M и $H_1, H_2, \dots, H_5$ при условии $M_{1,2} = M_{5,2} = M_{1,3} = M_{5,3} = M_{1,5} = M_{5,5} = 0$, задающих коэффициенты (7) уравнения кривой второго порядка (6) и, как следствие, вид инвариантов (9): условия $I_2 > 0$ и $I_1 \cdot I_3 < 0$ для инвариантов кривой (6), останутся неизменными. Следовательно, кривые при преобразовании $S_2(\zeta)$ будут эллипсами. ■

Указанное изменение остальных круговых двуугольников определяет постановку второй модельной задачи: отображение полуплоскости с выброшенным сегментом эллипса (эллиптической луночки) на полуплоскость. Решение данной задачи базируется на следующем утверждении.

Теорема 1. Конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным сегментом, образованным пересечением полуплоскости с произвольной односвязной областью Θ с гладкой границей Γ расширенной плоскости комплексного переменного, на верхнюю полуплоскость при условии $\exists a(\varphi), b(\varphi)$ для $\forall \varphi \in [0; \pi]$ осуществляется обобщенной функцией Жуковского вида $\varpi(\zeta) = S_3(S_2(S_1(\zeta)))$ при

$$S_1(\zeta) = [\zeta - a(\varphi)][\zeta - b(\varphi)]^{-1}; \quad S_2(\zeta) = \zeta^{\gamma(\varphi)};$$

$$S_3(\zeta) = 0,5\gamma(\varphi)[a(\varphi) - b(\varphi)](1 + \zeta)/(1 - \zeta)$$

$$\text{и нормировке } \varpi(\infty) = \infty; \quad \varpi'(\infty) = 1, \quad (10)$$

где $\varphi = \arg(\zeta)$; $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ – точки пересечения действительной оси с соприкасающейся окружностью; $\gamma(\varphi) = \pi/(\pi - \beta(\varphi))$; $\beta(\varphi)$ – угол, образованный соприкасающейся окружностью в точке ее пересечения $a(\varphi)$ с действительной осью.

При этом соприкасающаяся окружность формируется границей выброшенного из полуплоскости сегмента односвязной области в окрестности точки $\tau \in \Gamma$ при $\arg(\tau) = \varphi$.

Доказательство. Пусть граница Γ области Θ в верхней полуплоскости определена кривой, заданной уравнением $\tau(\varphi) = u(\varphi) + iv(\varphi)$ с параметризацией по $0 \leq \varphi \leq \pi$. Для произвольной точки кривой Γ определим соприкасающуюся окружность (рис. 2). Данная окружность имеет радиус ρ , соответствующий радиусу кривизны кривой в окрестности τ , и центр, расположенный в $z_0 = x_0 + iy_0$.

Введем обозначения

$$\mu(\zeta) = \wp e^{i\vartheta} = \xi + i\eta = (\zeta - a)/(\zeta - b), \quad (11)$$

где $\vartheta = \arg[(\zeta - a)/(\zeta - b)]$ – угол, под которым из заданной точки ζ исходной верхней полуплоскости с выброшенным сегментом при $\arg(\zeta) = \varphi$ видны точки a и b ; $\wp = |(\zeta - a)/(\zeta - b)|$ – отношение расстояний от точки ζ до точек a и b . Так как $\zeta = x + iy$, то преобразование (12) приведем к виду

$$\xi + i\eta = \left(1 - (x - b)(a - b)/[(x - b)^2 + y^2]\right) + i\left(y(a - b)/[(x - b)^2 + y^2]\right). \quad (12)$$

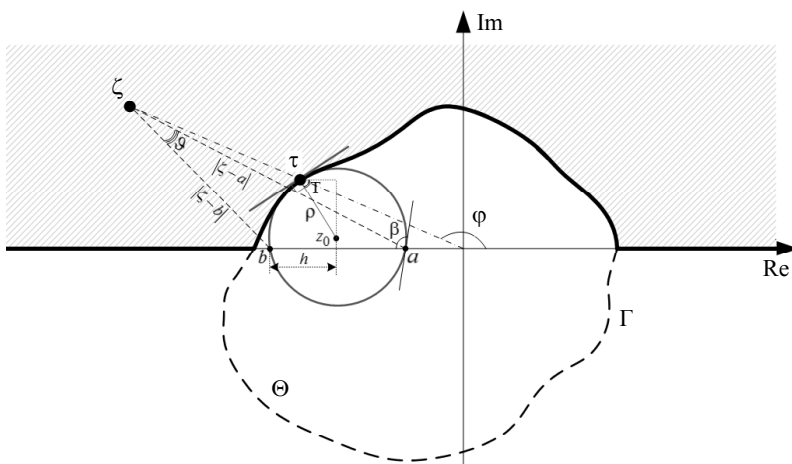


Рис. 2. Геометрическое представление задачи отображения полуплоскости с выброшенным сегментом

С учетом (12) параметры $\wp$ и ϑ могут быть определены через соответствующие выражения:

$$\begin{aligned} \wp^2 &= 1 - (a - b)(2x - b - a)/[(x - b)^2 + y^2]; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= y(a - b)/[x^2 + y^2 - x(a + b) + ab]. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что обобщенная функция $\varpi(\zeta)$ Жуковского вида (10) отображает кривую τ на действительную ось. Тогда для $\mu(\tau) = S_2(S_1(\tau))$ справедливо равенство

$$\operatorname{Im}(\mu(\tau)) = 0. \quad (14)$$

При подстановке (11) в (14) получим

$$\operatorname{Im}(\mu(\tau)) = \wp^\gamma \sin \gamma \vartheta = 0, \text{ или } \sin(\pi \vartheta/(\pi - \beta)) = 0. \quad (15)$$

Условие (15) выполняется при равенстве аргумента под знаком синуса πk для $k = 0, 1, 2, \dots$, следовательно:

$$\vartheta = \pi - \beta. \quad (16)$$

Подставляя в равенство (16) определение угла ϑ из (13) и угла $\beta = \arctg((a - x_0)/|y_0|)$ (см. рис. 2), получим тождество

$$y_0 y (a - b) = (a - x_0)(x^2 + y^2 - x(a + b) + ab). \quad (17)$$

Принимая во внимание равенства:

$$a = x_0 + h; \quad b = x_0 - h; \quad h = \sqrt{\rho^2 - y_0^2}; \quad x - x_0 = \rho \cos T; \quad y - y_0 = \rho \sin T, \quad (18)$$

приведем (17) преобразованиями

$$\begin{aligned} y_0 y 2h &= h(x^2 + y^2 - 2xx_0 + x_0^2 - h^2); \\ 2y_0 y &= (x - x_0)^2 + y^2 - h^2; \end{aligned} \quad (19)$$

$$2y_0 y = \rho^2 \cos^2 T + y^2 - \rho^2 + y_0^2$$

$$(y - y_0)^2 = \rho^2 \sin^2 T, \quad (20)$$

которое соответствует соотношениям (18). Следовательно, исходное предположение и равенство (14) верны.

Поскольку при отображении $\mu(\zeta)$ точка $\zeta = \infty$ переходит в точку $\mu(\infty) = 1$, то для выполнения условий нормировки (10) при конформном отображении на верхнюю полуплоскость ϖ применим дополнительное преобразование

$$\varpi(\zeta) = k(1 + \mu(\zeta))(1 - \mu(\zeta))^{-1}$$

$$\text{или} \quad \varpi(\zeta) = k \frac{1 + (\zeta - a)^\gamma (\zeta - b)^{-\gamma}}{1 - (\zeta - a)^\gamma (\zeta - b)^{-\gamma}} = k \frac{(1 - b/\zeta)^\gamma + (1 - a/\zeta)^\gamma}{(1 - b/\zeta)^\gamma - (1 - a/\zeta)^\gamma}, \quad (21)$$

где k – некоторая комплексная константа.

Найдя производную функции $\varpi(\zeta)$:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \zeta} = \frac{2k \left\{ \gamma [a(1 - \partial b / \partial \zeta) - b(1 - \partial a / \partial \zeta) - \zeta(\partial a / \partial \zeta - \partial b / \partial \zeta)] / \zeta^2 + \right.}{\left. + (1 - a/\zeta)(1 - b/\zeta) [\ln(1 - a/\zeta) - \ln(1 - b/\zeta)] \partial \gamma / \partial \zeta \right\}}{\left[(1 - a/\zeta)^\gamma - (1 - b/\zeta)^\gamma \right]^2 (1 - a/\zeta)^{1-\gamma} (1 - b/\zeta)^{1-\gamma}}, \quad (22)$$

путем разложения в биномиальный ряд по степеням $(1 - a/\zeta)^\gamma, (1 - b/\zeta)^\gamma$ знаменателя, получим для больших $|\zeta|$ выражение

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \zeta} \approx \frac{2k(1 - a/\zeta)^{\gamma-1} (1 - b/\zeta)^{\gamma-1} \left\{ \gamma [a(1 - \partial b / \partial \zeta) - b(1 - \partial a / \partial \zeta) - \zeta(\partial a / \partial \zeta - \partial b / \partial \zeta)] + \right.}{\gamma^2 (a - b)^2} \left. + \zeta^2 (1 - a/\zeta)(1 - b/\zeta) [\ln(1 - a/\zeta) - \ln(1 - b/\zeta)] \partial \gamma / \partial \zeta \right\}}{\gamma^2 (a - b)^2}. \quad (23)$$

Применяя в (23) к $\partial a / \partial \zeta$ и $\partial b / \partial \zeta$ правило дифференцирования параметрически заданных функций и учитывая, что

$$\partial \varphi / \partial \zeta = -\operatorname{Im}(\zeta) |\zeta|^{-2} = -r i \sin \varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi) / r^2 = -\sin \varphi (\sin \varphi - i \cos \varphi) / r,$$

при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем

$$\varpi'(\infty) = 2k(\gamma(a-b))^{-1} \text{ или } k = 0,5\gamma(a-b). \quad (24)$$

Подставляя теперь константу k в (21), получим искомое отображение (10). ■

С учетом теоремы 1 определим зависимость переменных $\gamma(\varphi), a(\varphi), b(\varphi)$ в выражении (10) от угла φ в полуплоскости с эллиптической луночкой, заданной эллипсом с полуосями a_0 и b_0 , центром в $z_0 = x_0 + iy_0$ и углом α наклона к действительной оси. При этом зависимость угла $\beta = \arccos(|y_0|/\rho)$ для эллиптической луночки от φ определяется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} y_0 &= y - \rho \sin T; \quad \rho = (a_0^2 \sin^2 \alpha + b_0^2 \cos^2 \alpha)^{3/2} / a_0 b_0; \quad T = \pm 2 \arctg \left[\left(\sqrt{k_n^2 + 1} \mp 1 \right) / k_n \right] \geq 0; \\ k_n &= - \frac{a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi}{\cos \phi \sin \phi (a_0^2 - b_0^2) - (u - x_0) a_0 b_0 (a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi - (u - x_0)^2)^{-1/2}}; \\ \tau &= u + iv = e^{i\phi} (a_0 \cos \alpha + b_0 \sin \alpha) + z_0; \quad \alpha = \begin{cases} \arccos(\alpha_1) & \text{if } |\varphi - \phi| < 0,5\pi; \\ \arccos(\alpha_2) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (25) \\ \alpha_{1,2} &= \left(a_0 (\sin \phi - \operatorname{tg} \varphi \cos \phi) G \pm |b_0 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)| \sqrt{D - G^2} \right) / D; \end{aligned}$$

$$G = (x_0 \operatorname{tg} \varphi - y_0); \quad D = a_0^2 (\sin \phi - \operatorname{tg} \varphi \cos \phi)^2 + b_0^2 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)^2.$$

Параметры отображения (10) $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ находятся по соответствующим тождествам (18) с использованием соотношений (25).

Построение обратного отображения с применением рассматриваемых модельных задач осуществляется с использованием леммы 1 для случая, когда все вершины исходной многоугольной области Ω располагаются на границе окружности Ω' . В случае же, когда вокруг исходной многоугольной области Ω невозможно описать такой окружности, возникает ситуация, приводящая к необходимости отображения полуплоскости с выброшенным сегментом с кусочно-гладкой границей Γ (см., например рис. 1, граница между точками a_2, a_4) на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$. В этом случае отображение выполняется с применением обобщенной функции Жуковского вида (10) для каждого гладкого участка границы Γ — отдельного эллипса или круга. При этом добавление в полуплоскость кругового или эллиптического сегмента согласно лемме 1 не означает, что все границы оставшихся луночек будут являться границами окружностей или эллипсов. В такой ситуации возможен случай формирования выброшенного сегмента, образованного пересечением верхней полуплоскости с гиперболической луночкой.

С учетом теоремы 1 определим решение третьей модельной задачи. Она заключается в нахождении отображения полуплоскости с гиперболической луночкой на полуплоскость обобщенной функцией Жуковского вида (10). Граница луночки задана ветвью гиперболы с полуосями a_0 и b_0 , центром в $z_0 = x_0 + iy_0$ и углом наклона α к действительной оси.

Зависимость угла $\beta = \arccos(|y_0|/\rho)$ для гиперболической луночки от φ и параметров $a(\varphi)$, $b(\varphi)$ задается с помощью соотношений

$$y_0 = y - \rho \sin T; \quad \rho = \frac{(a_0^2 \operatorname{sh}^2 \alpha + b_0^2 \operatorname{ch}^2 \alpha)^{3/2}}{(a_0 b_0 |\operatorname{sh}^2 \alpha - \operatorname{ch}^2 \alpha|)}; \quad T = \pm 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{k_h^2 + 1} \mp 1}{k_h} \right] \geq 0;$$

$$k_h = - \frac{a_0^2 \cos^2 \phi - b_0^2 \sin^2 \phi}{\cos \phi \sin \phi (a_0^2 + b_0^2) - (u - x_0) a_0^2 b_0^2 (a_0^2 b_0^2 (u - x_0)^2 - a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}};$$

$$\tau = u + iv = e^{i\phi} (a_0 \operatorname{ch} \alpha + b_0 \operatorname{sh} \alpha) + z_0; \quad \alpha = \begin{cases} \operatorname{arcsch}(\alpha_1) & \text{if } |\phi + 0,5\pi| \geq \varphi; \\ \operatorname{arcsch}(\alpha_2) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (26)$$

$$\alpha_{1,2} = - \left(b_0 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi) G \pm |a_0 (\operatorname{tg} \varphi \cos \phi - \sin \phi)| \sqrt{D + G^2} \right) / D;$$

$$G = (x_0 \operatorname{tg} \varphi - y_0); \quad D = a_0^2 (\operatorname{tg} \varphi \cos \phi - \sin \phi)^2 - b_0^2 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)^2.$$

Параметры кривых второго порядка, соответствующих при обратном отображении ребрам $e_n = \{A_n, A_{n+1}\}$ исходной многоугольной области Ω , могут быть получены по заданным пяти точкам $h_j = r_j e^{i\varphi_j}$ ($j = \overline{1,5}$) с учетом выражения (7). Примеры обратного отображения наперед заданных многоугольных областей представлены на рис. 3.

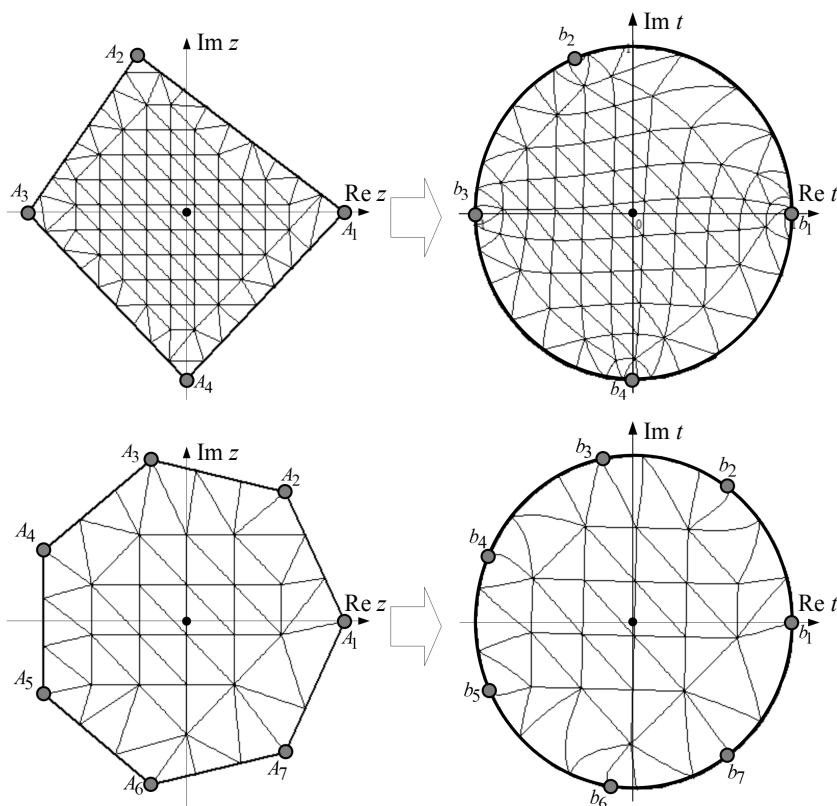


Рис. 3. Примеры обратного отображения наперед заданной четырехугольной и семиугольной областей на единичный круг

Заключение

Таким образом, полученные результаты позволяют за конечное число конформных отображений, равных числу вершин N многоугольника, выполнить конформное отображение заданной односвязной многоугольной области на единичный круг. В случае, если сегмент, формирующий луночку в верхней полуплоскости, на границе содержит точки, для которых не существует $a(\varphi), b(\varphi)$, то добавление выброшенного сегмента в полуплоскость выполняется последовательностью конформных отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 1. При алгоритмической реализации сформированного метода на этапах добавления n -го сегмента в верхнюю полуплоскость, соответствующего n -му ребру $e_n = \{A_n, A_{n+1}\}$ исходного многоугольника, рекомендуется предварительно выполнять поворот многоугольной области в расширенной комплексной плоскости на угол ψ таким образом, чтобы точка, являющаяся серединой ребра e_n , располагалась на отрицательной части действительной оси. В целом, полученные результаты расширяют применимость обобщенной функции Жуковского, заданной в виде (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. Справочное руководство. Киев: Наукова думка, 1964. 536 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Иванов В.И., Попов Ю.В. Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 374 с.
4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz – Christoffel mapping. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002. 132 p.
5. Канторович Л.В. Эффективные методы в теории конформных отображений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1937. Т. 1. Вып. 1. С. 79–90.
6. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1(212). С. 32–40.
7. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 30–36.
8. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 36–42.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Изд. 9. М.: Наука, 1974. 672 с.
10. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: ИФМЛ, 2002. 472 с.

Статья поступила 08.10.2015 г.

Radygin V.M., Polyanskii I.S. MODIFIED METHOD OF SUCCESSIVE CONFORMAL MAPPINGS OF POLYGONAL DOMAINS

DOI 10.17223/19988621/39/3

The method for solving the inverse Schwarz – Christoffel problem – conformal mapping of a given polygonal area on the canonical domain, the unit circle – is developed in the paper. The method is based on the use of a sequence of conformal mappings related to the mapping of the polygon onto the upper half with discarded segments by a Cayley linear fractional transformation

followed by sequential addition of the discarded segments to the upper half-plane. Model problems consider conformal mappings of circular, elliptical, and hyperbolic lunes to the upper half-plane. The solution of the presented model problems is based on the generalized Zhukovsky function; the obtained results expand the applicability of the Zhukovsky function as compared to existing methods of its application in the implementation of conformal mappings. The working ability of the solution was tested by specific examples in solving the problem of conformal mapping of quadrilateral and heptagonal domains to the unit circle. Recommendations for the algorithmic implementation of the method are presented.

Keywords: conformal mapping, polygonal domain, unit circle, inverse Schwarz–Christoffel problem.

RADYGIN Vladimir Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Academy of the Federal Security Service Russia, Orel, Russian Federation)

E-mail: van341@mail.ru

POLANSKY Ivan Sergeyevich (Candidate of Technical Sciences, Academy of the Federal Security Service Russia, Orel, Russian Federation)

E-mail: van341@mail.ru

REFERENCES

1. Fil'chakov P.F. *Priblizhennyye metody konformnykh otobrazheniy. Spravochnoe rukovodstvo*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1964. 536 p. (in Russian)
2. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p. (in Russian)
3. Ivanov V.I., Popov Yu.V. *Konformnye otobrazheniya i ikh prilozheniya*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2002. 374 p. (in Russian)
4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. *Schwarz – Christoffel mapping*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2002. 132 p.
5. Kantorovich L.V. Effektivnye metody v teorii konformnykh otobrazheniy. *Izv. AN SSSR. Ser. matem.*, 1937, vol. 1, no. 1, pp. 79–90. (in Russian)
6. Arkhipov N.S., Polyanskiy I.S., Stepanov D.E. Baritsentricheskii metod v zadachakh analiza polya v regul'yarnom volnovode s proizvol'nym poperechnym secheniem. *Antenny*, 2015, no. 1(212), pp. 32–40. (in Russian)
7. Polyanskiy I.S. Baritsentricheskie koordinaty Puassona dlya mnogomernoy approksimatsii skalyarnogo potentsiala vnutri proizvol'noy oblasti (Chast' 1). *Vestnik SGTU*, 2015, no. 1(78), pp. 30–36. (in Russian)
8. Polyanskiy I.S. Baritsentricheskie koordinaty Puassona dlya mnogomernoy approksimatsii skalyarnogo potentsiala vnutri proizvol'noy oblasti (Chast' 2). *Vestnik SGTU*, 2015, no. 1(78), pp. 36–42. (in Russian)
9. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki, vol. 3, part. 2*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 672 p. (in Russian)
10. Golovanov N.N. *Geometricheskoe modelirovanie*. Moscow, IFML Publ., 2002. 472 p. (in Russian)

УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/39/4

Н.Н. Трофименко

О ЛИНЕЙНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА «ДЛИННЫХ ПРЯМЫХ»

Доказывается, что для начального регулярного несчетного ординала τ и произвольных начальных ординалов $\alpha, \beta, \alpha < \beta \leq \tau$, пространства непрерывных функций $C_p(L_{\tau-\alpha})$ и $C_p(L_{\tau-\beta})$, заданные на «длинных прямых» $L_{\tau-\alpha}$ и $L_{\tau-\beta}$, не являются линейно гомеоморфными.

Ключевые слова: «длинные прямые», линейные гомеоморфизмы, сопряженное пространство, ординалы, начальный ординал, регулярный ординал, топология поточечной сходимости, компактность.

Рассматриваются пространства непрерывных функций $C(L_\alpha)$, заданные на «длинных прямых» L_α , где α – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций $C(L_\alpha)$ наделяются топологией поточечной сходимости и обозначаются $C_p(L_\alpha)$. «Длинные прямые» – это частный случай линейно упорядоченных топологических пространств. Пространства непрерывных функций, заданные на линейно упорядоченных топологических пространствах, и их изоморфная классификация рассматривались во многих работах, например в [2–6].

Определение 1. Пусть α – произвольный ординал. Рассмотрим линейное упорядочение $<$ на множестве $L_\alpha = [1, \alpha] \times [0, 1)$, определенное так: $(\mu_1, t_1) < (\mu_2, t_2)$, если $\mu_1 < \mu_2$ или $\mu_1 = \mu_2$ и $t_1 < t_2$. Будем называть «длинной прямой» множество L_α с топологией, порожденной линейным упорядочением $<$.

Заметим, что топологическое пространство L_α является компактным.

Будем говорить, что точка $x = (\xi, t) \in L_\alpha$ конфинальна ординалу η , если в интервале $((1, 0), (\xi, t))$ существует конфинальное подмножество, подобное отрезку ординалов $[0, \eta)$.

Напомним, что ординал α называется начальным, если α – наименьший среди всех ординалов λ , таких, что $|\lambda| = |\alpha|$. Начальный ординал α называется регулярным, если не существует $\lambda < \alpha$, конфинального α .

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть τ – регулярный начальный несчетный ординал и α, β начальные ординалы, такие, что $\alpha < \beta \leq \tau$. Тогда пространства $C_p(L_{\tau-\alpha})$ и $C_p(L_{\tau-\beta})$ не являются линейно гомеоморфными.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 1. Пусть $\alpha \leq \tau$. Если точка $x \in L_{\tau-\alpha}$ конфинальна τ , то $x = (\tau \cdot (\gamma + 1), 0)$, $0 \leq \gamma < \alpha$, или $x = (\tau \cdot \tau, 0)$, если $\alpha = \tau$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \tau$ и $x = (\xi, t)$. Если $0 < t < 1$ или $t = 0$, а ξ – предельный ординал, то точка x конфинальна ω . Рассмотрим точки вида $x = (\xi, 0)$, где ξ – предельный ординал. Согласно [8], ординал ξ можно представить в виде $\xi = \tau \cdot \eta + \rho$, где $0 \leq \rho < \tau$, $0 \leq \eta < \alpha$ или $\xi = \tau \cdot \alpha$. Если $\rho > 0$, то ординал ξ конфинален ординалу $\rho < \tau$ и, следовательно, x конфинально ординалу ρ . Если $\rho = 0$ и $\xi = \tau \cdot \eta$, где η – предельный ординал, то ξ конфинален η , где $\eta \leq \alpha < \tau$. Если η – неперделый ординал, т.е. $\eta = \gamma + 1$, то точка $x = (\tau \cdot \gamma + \tau, 0)$ конфинальна τ . Итак, множество точек, конфинальных τ , это в точности все точки вида $(\tau \cdot (\gamma + 1), 0)$, $0 \leq \gamma < \alpha$.

Пусть теперь $\alpha = \tau$. Аналогично доказывается, что если точка $x < (\tau \cdot \tau, 0)$ и конфинальна τ , то $x = (\tau \cdot (\gamma + 1), 0)$. Но в этом случае точка $x = (\tau \cdot \tau, 0)$ также конфинальна τ . ■

Положим

$$\Gamma_\alpha = \{(\tau \cdot (\gamma + 1), 0), \gamma \in [0, \alpha)\}, \text{ если } \alpha < \tau, \quad \Gamma_\tau = \{(\tau \cdot (\gamma + 1), 0), \gamma \in [0, \tau)\} \cup \{(\tau \cdot \tau, 0)\},$$

$$\text{и} \quad c_0(\Gamma_\alpha) = \{x \in C_p(\Gamma_\alpha) : \{t \in \Gamma_\alpha, \text{ таких, что } |x(t)| \geq \varepsilon\} \text{ конечно } \forall \varepsilon > 0\}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{L_{\tau-\alpha}}$ рассмотрим линейное подпространство

$$M_{\tau-\alpha} = \{y \in \mathbb{R}^{L_{\tau-\alpha}} : \forall \{f_i\}_{i \in I} \in L_p(L_{\tau-\alpha}), \text{ такого, что } |I| < |\tau|,$$

$$\exists x \in C_p(L_{\tau-\alpha}) \text{ такой, что } f_i(x) = f_i(y) \quad \forall i \in I\}.$$

Очевидно, что все непрерывные функции на $L_{\tau-\alpha}$ принадлежат $M_{\tau-\alpha}$. Кроме того, пространству $M_{\tau-\alpha}$ принадлежат те разрывные функции y , для которых любого семейства функционалов мощности меньшей $|\tau|$ недостаточно для разделения y и точек пространства $C_p(L_{\tau-\alpha})$. Далее покажем, что пространство $M_{\tau-\alpha}$ – это прямая сумма пространства $C_p(L_{\tau-\alpha})$ и некоторого подпространства в $\mathbb{R}^{L_{\tau-\alpha}}$, линейно гомеоморфного пространству $c_0(\Gamma_\alpha)$, т.е. верно следующее утверждение.

Предложение 2. Пространство $M_{\tau-\alpha}$ линейно гомеоморфно пространству $C_p(L_{\tau-\alpha}) \times c_0(\Gamma_\alpha)$.

Доказательство. Определим отображение $T : C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{L_{\tau-\alpha}}$ по формуле $T(x, y) = x + \tilde{y}$, где

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t \in \Gamma_\alpha; \\ 0, & \text{если } t \in L_{\tau-\alpha} \setminus \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Докажем, что отображение T является инъективным. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha)$. Предположим, что

$$T(x_1, y_1) = x_1 + \tilde{y}_1 = x_2 + \tilde{y}_2 = T(x_2, y_2),$$

т.е. $x_1 - x_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$. Поскольку $(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)|_{L_{\tau\alpha} \setminus \Gamma_\alpha} = 0$, то $(x_1 - x_2)|_{L_{\tau\alpha} \setminus \Gamma_\alpha} = 0$. Так как функция $x_1 - x_2$ является непрерывной, а множество $L_{\tau\alpha} \setminus \Gamma_\alpha$ является всюду плотным в $L_{\tau\alpha}$, то $x_1 - x_2 \equiv 0$. Следовательно, $\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 \equiv 0$, т.е. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Докажем, что $T(C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha)) = M_{\omega_\tau, \omega_\alpha}$. Пусть $(x, y) \in C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha)$. Рассмотрим множество функционалов $\{f_i\}_{i \in I} \in L_p(L_{\tau\alpha})$, для которого $|I| < |\tau|$.

Так как для любого $i \in I$ $|\text{supp } f_i| < \aleph_0$, то $\left| \bigcup_{i \in I} \text{supp } f_i \right| < |\tau|$. Поскольку ординал τ неконфинален никакому ординалу, меньшему чем τ , то для каждого $\gamma < \alpha$ существует ординал δ_γ , $\tau \cdot \gamma < \delta_\gamma < \tau \cdot (\gamma + 1)$, такой, что

$$((\delta_\gamma, 0), (\tau \cdot (\gamma + 1), 0)) \cap \left(\bigcup_{i \in I} \text{supp } f_i \right) = \emptyset.$$

Рассмотрим функцию

$$z(t) = \begin{cases} y(\tau \cdot (\gamma + 1), 0), & \text{если } t \in ((\delta_\gamma, 0), (\tau \cdot (\gamma + 1), 0)]; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция z , а значит, и $x + z$ являются непрерывными на $L_{\tau\alpha}$. Поскольку функции $x + z$ и $x + \tilde{y}$ отличаются только на множестве

$\bigcup_{\gamma \in [0, \omega_\alpha]} (\delta_\gamma, 0, (\tau \cdot (\gamma + 1), 0))$, то $f_i(x + z) = f_i(x + \tilde{y})$ для любого $i \in I$. Следовательно,

но, $T(x, y) = x + \tilde{y} \in M_{\tau\alpha}$.

Пусть теперь $z \in M_{\tau\alpha}$. Покажем, что функция z может иметь разрыв только в точках из множества Γ_α . Действительно, если точка разрыва $t_0 \notin \Gamma_\alpha$, то существует множество A , $|A| < |\tau|$, такое, что $\sup_{\mu \in A} \mu = t_0$. Рассмотрим множество функ-

ционалов $\{\delta_\mu - \delta_{t_0}\}_{\mu \in A}$. Если функция z имеет разрыв в точке t_0 , то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любой окрестности U_{t_0} найдется $\mu \in A \cap U_{t_0}$, для которого $|z(\mu) - z(t_0)| \geq \varepsilon_0$, то есть $|(\delta_\mu - \delta_{t_0})(z)| \geq \varepsilon_0$. Если же функция $x \in C_p(L_{\tau\alpha})$, то существует окрестность V_{t_0} , такая, что для любого $\mu \in V_{t_0}$

$$|x(\mu) - x(t_0)| = |(\delta_\mu - \delta_{t_0})(x)| < \varepsilon_0.$$

Это противоречит тому, что $z \in M_{\tau\alpha}$. Таким образом, любая функция $z \in M_{\tau\alpha}$ непрерывна на множестве $L_{\tau\alpha} \setminus \Gamma_\alpha$.

Рассмотрим функцию $z|_{((\tau\gamma, 0), (\tau(\gamma+1), 0))}$. Поскольку точка $(\tau(\gamma+1), 0)$ не конфинальна ω , то существует ординал $\eta_\gamma \in (\tau\gamma, \tau(\gamma+1))$, такой, что $z|_{((\eta_\gamma, 0), (\tau(\gamma+1), 0))} \equiv z((\eta_\gamma, 0))$. Определим функцию

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z(t), & \text{если } t \notin \Gamma_\alpha; \\ z(\eta_\gamma), & \text{если } t = \tau \cdot (\gamma + 1). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $\tilde{z}$ непрерывна на $L_{\tau\alpha}$ и $z - \tilde{z}|_{L_{\tau\alpha} \setminus \Gamma_\alpha} \equiv 0$. Покажем, что $(z - \tilde{z})|_{\Gamma_\alpha} \in c_0(\Gamma_\alpha)$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{(\tau \cdot (\gamma_n + 1), 0)\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma_\alpha$ такая, что

$$|(z - \tilde{z})((\tau \cdot (\gamma_n + 1), 0))| \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Поскольку множество $L_{\tau\alpha}$ является компактным, то для множества $\{(\tau \cdot (\gamma_n + 1), 0)\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma_\alpha$ существует предельная точка $x = (\xi, t)$. Так как множество Γ_α дискретное, то $x = (\xi, t) \notin \Gamma_\alpha$ и, значит, $(z - \tilde{z})(x) = 0$. Так как точка $x = (\xi, t)$ является предельной для $\{(\tau \cdot (\gamma_n + 1), 0)\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma_\alpha$, то в силу неравенства (3) получаем, что функция $z - \tilde{z}$ является разрывной в точке x , что противоречит тому, что функции z и $\tilde{z}$ непрерывны во всех точках $x \notin \Gamma_\alpha$. Следовательно,

$$z = z + (z - \tilde{z}) = T(\tilde{z}, (z - \tilde{z})|_{\Gamma_\alpha}) \in C_p(L_{\tau\alpha}) \times c_0(\Gamma_\alpha).$$

Таким образом, $T(C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha)) = M_{\tau\alpha}$. Легко проверить, что отображения T и T^{-1} являются непрерывными. Заключаем, что пространства $M_{\tau\alpha}$ и $C_p(L_{\tau\alpha}) \times c_0(\Gamma_\alpha)$ являются линейно гомеоморфными. ■

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что существует линейный гомеоморфизм Φ пространства $C_p(L_{\tau\beta})$ на пространство $C_p(L_{\tau\alpha})$.

Поскольку пространства $C_p(L_{\tau\alpha})$ и $C_p(L_{\tau\beta})$ всюду плотны в пространствах $\mathbb{R}^{L_{\tau\alpha}}$ и $\mathbb{R}^{L_{\tau\beta}}$ соответственно, то линейный гомеоморфизм Φ может быть продолжен до линейного гомеоморфизма $\tilde{\Phi}$ пространства $\mathbb{R}^{L_{\tau\beta}}$ на пространство $\mathbb{R}^{L_{\tau\alpha}}$ [1, с. 654].

Известно [1], что сопряженным к пространствам $C_p(L_{\tau\alpha})$ и $\mathbb{R}^{L_{\tau\alpha}}$ является пространство $L_p(L_{\tau\alpha})$, состоящее из функционалов вида

$$f = p_1 \cdot \delta_{t_1} + p_2 \cdot \delta_{t_2} + \dots + p_n \cdot \delta_{t_n},$$

где $p_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\delta_{t_k}(x) = x(t_k)$ для любого $x \in C_p(L_{\tau\alpha})$, $k = 1, \dots, n$. Множество точек $\{t_1, \dots, t_n\} \subset L_{\tau\alpha}$ называется носителем функционала f и обозначается $\text{supp } f$.

Покажем, что

$$\tilde{\Phi}(M_{\tau\beta}) = M_{\tau\alpha}. \quad (2)$$

Пусть функция $y \in M_{\tau\beta}$. Рассмотрим произвольное семейство функционалов $\{g_i\}_{i \in I} \in L_p(L_{\tau\alpha})$, где $|I| < |\tau|$. По определению множества $M_{\tau\beta}$ для семейства функционалов $\{f_i\}_{i \in I} = \{\tilde{\Phi} * g_i\}_{i \in I} \in L_p(L_{\tau\beta})$ существует непрерывная функция

$x \in C_p(L_{\tau\beta})$, такая, что

$$(\tilde{\Phi} * g_i)(x) = (\tilde{\Phi} * g_i)(y)$$

для любого $i \in I$. Отсюда, по определению отображения $\tilde{\Phi}^*: L_p(L_{\tau\alpha}) \rightarrow L_p(L_{\tau\beta})$ получаем, что

$$g_i(\tilde{\Phi}x) = g_i(\tilde{\Phi}y)$$

для любого $i \in I$. Поскольку функция $\tilde{\Phi}x \in C_p(L_{\tau\alpha})$, то функция $\tilde{\Phi}y \in M_{\tau\alpha}$. Таким образом, $\tilde{\Phi}(M_{\tau\beta}) \subset M_{\tau\alpha}$. Аналогично доказывается обратное включение, если в доказательстве вместо отображения $\tilde{\Phi}^*$ рассмотреть отображение

$$(\tilde{\Phi}^*)^{-1}: \mathbb{R}^{L_{\tau\beta}} \rightarrow \mathbb{R}^{L_{\tau\alpha}}.$$

Из предложения 1 получаем, что

$$\begin{aligned} M_{\tau\alpha} &= \tilde{\Phi}(M_{\tau\beta}) \sim \tilde{\Phi}(C_p(L_{\tau\beta}) \times c_0(\Gamma_\beta)) \sim \\ &\sim \tilde{\Phi}(C_p(L_{\tau\beta})) \times \tilde{\Phi}(c_0(\Gamma_\beta)) \sim C_p(L_{\tau\alpha}) \times \tilde{\Phi}(c_0(\Gamma_\beta)). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$M_{\tau\alpha} \sim C_p(L_{\tau\alpha}) \times c_0(\Gamma_\alpha).$$

Отсюда, учитывая, что все дополнения к пространству $C_p(L_{\tau\alpha})$ в пространстве $M_{\tau\alpha}$ являются линейно гомеоморфными, заключаем, что

$$c_0(\Gamma_\alpha) \sim \tilde{\Phi}(c_0(\Gamma_\beta)) \sim c_0(\Gamma_\beta).$$

Но это невозможно [7], поскольку $|\alpha| < |\beta|$, а значит,

$$w(c_0(\Gamma_\alpha)) = |\Gamma_\alpha| = |\omega_\alpha| < |\omega_\beta| = |\Gamma_\beta| = w(c_0(\Gamma_\beta)). \blacksquare$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986, 752 с.
2. *Bessaga C., Pelczynski C.* On isomorphic classification of spaces of continuous functions // *Studia Math.* 1960. V. 19. P. 53–62.
3. *Semadeni Z.* Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian product // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Ser. Math. Stron. et Phys.* 1960. V. 8. P. 81–84.
4. *Гулько С.П., Оськин А.В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах // *Функциональный анализ и его приложения.* 1975. Т. 9. № 1. С. 61–61.
5. *Кисляков С.В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // *Сиб. мат. жур.* 1975. Т. 16. С. 293–300.
6. *Kalenda O.* Note on Markushevich bases in subspaces and quotients of Banach spaces // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics.* 2002. V. 50. No. 2. P. 117–126.
7. *Архангельский А.В.* О линейных гомеоморфизмах пространств функций // *ДАН СССР.* 1982. Т. 264. № 6. С. 1289–1292.
8. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Статья поступила 25.01.2015 г.

Trofimenko N.N. ON LINEAR HOMEOMORPHISMS OF SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON «LONG LINES»

DOI 10.17223/19988621/39/4

In this paper, we prove that for the elementary regular ordinal and arbitrary ordinals α , β , $\alpha < \beta \leq \tau$, the spaces of continuous functions $C_p(L_{\tau-\alpha})$ and $C_p(L_{\tau-\beta})$, defined on the "long lines" $L_{\tau-\alpha}$ and $L_{\tau-\beta}$, are not linearly homeomorphic.

Keywords: «long lines», linear homeomorphisms, dual space, ordinals, initial ordinal, regular ordinal, topology of pointwise convergence, compactness.

TROFIMENKO Nadezhda Nikolaevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: trofimenko@sibmail.com

REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moscow, Mir Publ., 1986, 752 p. (in Russian)
2. Bessaga C., Pelczynski S. On isomorphic classification of spaces of continuous functions. *Studia Math.*, 1960, vol. 19, pp. 53–62.
3. Semadeni Z. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian product. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Ser. Math. Stron. et Phys.*, 1960, vol. 8, pp. 81–84.
4. Gul'ko S.P. Os'kin A.V. Izomorfnyaya klassifikatsiya prostranstv nepreryvnykh funktsiy na vpolne uporyadochennykh bikompaktakh. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya*, 1975, vol. 9, no. 1, pp. 61–61. (in Russian)
5. Kislyakov S.V. Izomorfnyaya klassifikatsiya prostranstv nepreryvnykh funktsiy na ordinalakh. *Sib. mat. zhurn.*, 1975, vol. 16, pp. 293–300. (in Russian)
6. Kalenda O. Note on Markushevich bases in subspaces and quotients of Banach spaces. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 2002, vol. 50, no. 2, pp. 117–126.
7. Arkhangel'skiy A.V. O lineynykh gomeomorfizмах prostranstv funktsiy. *DAN SSSR*, 1982, vol. 264, no. 6, pp. 1289–1292. (in Russian)
8. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv*. Moscow, Mir Publ., 1970. 416 c. (in Russian)

Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА С ОСОБЕННОСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. Предложена модификация метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюизо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям или уравнениям с точками поворота.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения, бисингулярное возмущение, уравнение эллиптического типа, задача Дирихле, малый параметр, обобщенный метод пограничных функций, пограничные функции, модифицированные функции Бесселя.

Постановка задачи

Исследуем задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения эллиптического типа в кольце, т.е.

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - a)^n u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), (\rho, \varphi) \in D; \quad (1)$$

$$u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi, \varepsilon), \quad u(b, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi, \varepsilon), \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа, $D = \{(\rho, \varphi) | a < \rho < b, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$,

$0 < a < b - \text{const}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $n \in \mathbb{N}$, $\psi_j(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{j,k}(\varphi)$,

$f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\rho, \varphi)$, $\psi_{j,k}(\varphi), f_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(D \cup \Gamma)$, Γ – граница области D .

Решение задачи Дирихле (1), (2) существует и единственно, при $0 < \varepsilon - \text{const}$, [1]. Нами исследуется задача построения равномерного асимптотического разложения решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовались многими авторами, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна [2–9].

Задачи с двойной сингулярностью, т.е. сингулярно возмущенные уравнения с точками поворота, по терминологии А.М. Ильина [8], будем называть бисингулярно возмущенными. В бисингулярно возмущенных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая –

с негладкостью членов асимптотики. Авторами [8, 9] методом сращивания построены асимптотические разложения решения бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений.

В данной работе для построения асимптотического разложения решения задачи (1), (2) будем применять обобщенный метод погранфункции. Этот метод впервые был применен для бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений профессором, членом-корреспондентом НАН КР Келдибай Алымкуловым [10, 11]. С помощью этого метода [12–14] построены асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в круге.

Уравнение (1) по терминологии А.М. Ильина является бисингулярно возмущенным. Действительно, первая сингулярность очевидна, предельное уравнение не является дифференциальным:

$$-(\rho-a)^n u(\rho, \varphi, 0) = f_0(\rho, \varphi),$$

и его решение не может удовлетворять граничному условию (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), (2), которое ищем в виде

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi), \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-(\rho-a)^n u_0(\rho, \varphi) = f_0(\rho, \varphi),$$

$$-(\rho-a)^n u_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho, \varphi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Здесь можно определить все $u_k(\rho, \varphi)$:

$$u_0(\rho, \varphi) = -f_0(\rho, \varphi)/(\rho-a)^n,$$

$$u_k(\rho, \varphi) = -(f_k(\rho, \varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho, \varphi))/(\rho-a)^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если $f_0(a, \varphi) \neq 0$, то $u_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D} \setminus \{(a, \varphi)\})$, т.е. в части границы области D все эти функции $u_k(\rho, \varphi)$ имеют нарастающие особенности вида

$$u_k(\rho, \varphi) = O\left(\frac{1}{(\rho-a)^{n+(n+2)k}}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ при } \rho \rightarrow a.$$

Внешнее решение имеет вид

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{(\rho-a)^n} \left(F_0(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon}{(\rho-a)^{n+2}} F_1(\rho, \varphi) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{(\rho-a)^{n+2}} \right)^k F_k(\rho, \varphi) + \dots \right),$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, (4)

где $F_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k = 0, 1, \dots$.

Поэтому задача (1), (2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в границе при $\rho = a$. Ряд (4) теряет асимптотический характер при $|\rho-a| < \varepsilon^{1/(n+2)}$.

Отметим, что ранее различные задачи для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений изучались различными авторами в основном методом сращения. Преимуществом метода сращения является то, что его можно применять к широкому классу сингулярно возмущенных задач с различными особенностями, а недостатками являются сложность обоснования формального асимптотического разложения решения и сравнительно громоздкие вычисления.

Построение формального асимптотического разложения

Как отмечалось выше, для построения формального асимптотического разложения (ФАР) решения задачи (1), (2) применяем обобщенный (модифицированный) метод погранфункций [10–14].

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + W(\tau, \varphi, \mu) + Q(\eta, \varphi, \lambda), \quad (5)$$

где $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$ – регулярное внешнее решение;

$W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-n}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$ – обобщенная пограничная функция в окрестности $\rho = a$, $\tau = (\rho - a)/\mu$, $\varepsilon = \mu^{n+2}$,

$Q(\eta, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k q_k(\eta, \varphi)$ – классическая пограничная функция в окрестности $\rho = b$, $\eta = (b - \rho)/\lambda$, $\varepsilon = \lambda^2$.

Классическая пограничная функция удовлетворяет граничному условию и экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а обобщенная погранфункция, удовлетворяя граничному условию, убывает по степеням.

Учитывая граничное условие (2), имеем

$$W(0, \varphi, \mu) = \psi_1(\varphi, \mu^{n+2}) - V(a, \varphi, \mu^{n+2}), \quad W(\tau, \varphi, \mu) \rightarrow 0, \quad \text{при } \tau \rightarrow +\infty; \quad (6)$$

$$Q(0, \varphi, \lambda) = \psi_2(\varphi, \lambda^2) - V(b, \varphi, \lambda^2), \quad Q(\eta, \varphi, \lambda) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (1), получим

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - a)^n V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D; \quad (8)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu \frac{\partial}{(a + \tau \mu) \partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial^2}{(a + \tau \mu)^2 \partial \varphi^2} \right) W(\tau, \varphi, \mu) - \tau^n \mu^n W(\tau, \varphi, \mu) = h(\tau \mu, \varphi, \mu^{n+2}), \quad (\tau, \varphi) \in D_1; \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \lambda \frac{\partial}{(b - \eta \lambda) \partial \eta} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{(b - \eta \lambda)^2 \partial \varphi^2} \right) Q(\eta, \varphi, \lambda) - (b - a - \eta \lambda)^n Q(\eta, \varphi, \lambda) = 0, \quad (\eta, \varphi) \in D_2, \quad (10)$$

где

$$D_1 = \{(\tau, \varphi) | 0 < \tau < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\},$$

$$D_2 = \{(\eta, \varphi) | 0 < \eta < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\}.$$

По идее метода, в правую часть последнего равенства прибавили и убавили одну и ту же функцию $h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi)$, которую определим ниже, при построении регулярного внешнего решения.

Регулярное внешнее решение

Учитывая $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$, из (6) для функции $v_k(\rho, \varphi)$ имеем

$$-(\rho-a)^n v_0(\rho, \varphi) = f_0(\rho, \varphi) - h_0(\rho, \varphi),$$

$$-(\rho-a)^n v_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - h_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда определяем $v_k(\rho, \varphi)$:

$$v_0(\rho, \varphi) = -(f_0(\rho, \varphi) - h_0(\rho, \varphi))/(\rho-a)^n,$$

$$v_k(\rho, \varphi) = -(f_k(\rho, \varphi) - h_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi))/(\rho-a)^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть

$$g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi), \quad k = 0, 1, \dots, \quad v_{-1}(\rho, \varphi) \equiv 0,$$

тогда

$$v_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

при
$$h_k(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} g_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j, \quad g_{k,j}(\varphi) = \frac{\partial^j g_k(\rho, \varphi)}{j! \partial \rho^j} \Big|_{\rho=a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно,

$$v_k(\rho, \varphi) = - \sum_{j=n}^{\infty} g_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^{j-1}, \quad g_{k,j}(\varphi) = \frac{\partial^j g_k(\rho, \varphi)}{j! \partial \rho^j} \Big|_{\rho=a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, мы построили регулярное внешнее решение

$$V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) \quad \text{в области } (D \cup \Gamma).$$

Классическая пограничная функция

Из уравнения (10) и условия (7) при $Q(\eta, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k q_k(\eta, \varphi)$ для функции

$q_k(\eta, \varphi)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{\partial^2 q_k(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - (b-a) q_k(\eta, \varphi) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda^{k+1} \frac{\partial q_k(\eta, \varphi)}{\partial \eta} - \lambda^{k+2} \frac{\partial^2 q_k(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^n \lambda^k \sum_{j=0}^k C_n^j (-1)^j \eta^j (b-a)^{n-j} q_{k-j}(\eta, \varphi) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^j \eta^j (b-a)^{n-j} q_{k-j}(\eta, \varphi), \quad \left(\frac{\lambda}{b-\eta\lambda} \sim \lambda \right); \end{aligned}$$

$$q_{2k}(0, \varphi) = \psi_{2,k}(\varphi) - v_k(b, \varphi), \quad q_{2k+1}(0, \varphi) = 0, \quad q_k(\eta, \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$\begin{aligned} l q_0 &\equiv \frac{\partial^2 q_0(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - (b-a) q_0(\eta, \varphi) = 0, \\ q_0(0, \varphi) &= \psi_{2,0}(\varphi) - v_0(b, \varphi), \quad q_0(\eta, \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
lq_1 &= -\eta n(b-a)^{n-1} q_0(\eta, \varphi) + \frac{\partial q_0(\eta, \varphi)}{\partial \eta}, \\
q_1(0, \varphi) &= 0, \quad q_1(\eta, \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty; \\
lq_k &= \sum_{j=1}^k (-1)^j \eta^j C_n^j (b-a)^{n-j} q_{k-j}(\eta, \varphi) + \frac{\partial q_{k-1}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad 1 < k \leq n; \\
lq_k &= \sum_{j=1}^n (-1)^j \eta^j C_n^j (b-a)^{n-j} q_{k-j}(\eta, \varphi) + \frac{\partial q_{k-1}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad k > n, \\
q_k(0, \varphi) &= \begin{cases} \Psi_{2,m}(\varphi) - v_m(b, \varphi), & \text{при } k = 2m \\ 0, & \text{при } k = 2m+1, n \in \mathbb{N} \end{cases}, \\
q_k(\eta, \varphi) &\rightarrow 0, \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty, \quad k = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

Так как уравнение $y''(x) - k^2 y = F(x)$, $0 < x < \infty$, с краевыми условиями $y(0) = y^0$, $y(+\infty) = 0$ имеет единственное решение

$$y(x) = y^0 e^{-kx} + \frac{1}{2k} \left(\int_{+\infty}^x e^{k(x-s)} F(s) ds - \int_0^x e^{k(s-x)} F(s) ds + \int_0^{+\infty} e^{-k(x+s)} F(s) ds \right),$$

то задачи (11) – (13) тоже имеют единственные решения. При $\eta \rightarrow +\infty$ для решения задач (11) – (13) имеем

$$\begin{aligned}
q_0(\eta, \varphi) &= (\Psi_{2,0}(\varphi) - v_0(b, \varphi)) e^{-\eta \sqrt{b-a}}, \\
q_1(\eta, \varphi) &= (\eta^2 q_{1,2}(\varphi) + \eta q_{1,1}(\varphi)) e^{-\eta \sqrt{b-a}}, \\
q_{2k}(\eta, \varphi) &= (\Psi_{2,k}(\varphi) - v_k(b, \varphi)) e^{-\eta \sqrt{b-a}} + e^{-\eta \sqrt{b-a}} \sum_{j=1}^{4k} \eta^j q_{2k,j}(\varphi), \\
q_{2k+1}(\eta, \varphi) &= e^{-\eta \sqrt{b-a}} \sum_{j=1}^{4k+2} \eta^j q_{2k+1,j}(\varphi),
\end{aligned}$$

где $q_{k,j}(\varphi)$ – ограниченные гладкие функции.

Следовательно,

$$Q(\eta, \varphi, \lambda) = e^{-\eta \sqrt{b-a}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (\Psi_{2,k}(\varphi) - v_k(b, \varphi) + P_{2k}(\eta, \varphi)) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k+1} P_{2k+1}(\eta, \varphi) \right),$$

где $P_{2k}(\eta, \varphi) = \sum_{j=1}^{4k} \eta^j q_{2k,j}(\varphi)$, $P_{2k+1}(\eta, \varphi) = \sum_{j=1}^{4k+2} \eta^j q_{2k+1,j}(\varphi)$.

Обобщенная пограничная функция

Из (6) и (9) для функции $w_k(\tau, \varphi)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-n}^{\infty} \mu^{k+n} \left(\frac{\partial^2 w_k(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n w_n(\tau, \varphi) \right) = \\
&= - \sum_{k=-n}^{\infty} \mu^{k+n} \left(\mu \frac{\partial w_k(\tau, \varphi)}{\partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial^2 w_k(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} g_{k,j}(\varphi) \tau^j \mu^{j+(n+2)k},
\end{aligned}$$

$$w_{k(n+2)+2+j}(0, \varphi) = 0, \quad w_{k(n+2)+1}(0, \varphi) = 0, \quad w_{k(n+2)}(0, \varphi) = \psi_{1,k}(\varphi) - \nu_k(a, \varphi), \quad w_k(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow +\infty, \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда получаем

$$Lw_{-n} \equiv \frac{\partial^2 w_{-n}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n w_{-n}(\tau, \varphi) = g_{0,0}(\varphi), \quad w_{-n}(0, \varphi) = 0, \quad w_{-n}(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow +\infty.$$

$$Lw_{-n+1} = g_{0,1}(\varphi) \tau - \frac{\partial w_{-n}(\tau, \varphi)}{\partial \tau}, \quad w_{-n+1}(0, \varphi) = 0, \quad w_{-n+1}(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow +\infty.$$

$$Lw_{-n+j} = g_{0,j}(\varphi) \tau^j - \Phi_{-n+j}(\tau, \varphi), \quad w_{-n+j}(0, \varphi) = 0, \quad w_{-n+j}(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow +\infty, \quad j = 2, 3, \dots, n-1.$$

$$Lw_{k(n+2)} = -\Phi_{k(n+2)}(\tau, \varphi), \quad w_{k(n+2)}(0, \varphi) = \psi_{1,k}(\varphi) - \nu_k(a, \varphi), \quad w_{k(n+2)}(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow +\infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$Lw_{k(n+2)+1} = -\Phi_{k(n+2)+1}(\tau, \varphi), \quad w_{k(n+2)+1}(0, \varphi) = 0, \quad w_{k(n+2)+1}(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow +\infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$Lw_{k(n+2)+2+j} = g_{k+1,j}(\varphi) \tau^j - \Phi_{k(n+2)+2+j}(\tau, \varphi), \quad w_{k(n+2)+2+j}(0, \varphi) = 0, \\ w_{k(n+2)+2+j}(\tau, \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{при } \tau \rightarrow +\infty, \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\text{где } \Phi_s(\tau, \varphi) = \frac{\partial w_{s-1}(\tau, \varphi)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w_{s-2}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2}.$$

Все эти задачи имеют единственные решения, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Действительно, как нам известно, уравнение $z'' - \tau^n z = 0$ имеет два независимых решения: $z_1(\tau) = \sqrt{\tau} I_{1/2q} \left(\frac{1}{q} \tau^q \right)$, $z_2(\tau) = \sqrt{\tau} K_{1/2q} \left(\frac{1}{q} \tau^q \right)$, где $q = (n+2)/2$, $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$ – модифицированные функции Бесселя. Отметим важные свойства функций $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$, при $0 < \nu < 1$. $I_\nu(s)$ – экспоненциально возрастает, а $K_\nu(s)$ – экспоненциально убывает при $s \rightarrow \infty$. $I_\nu(0) = 0$, $K_\nu(s) = O(s^{-\nu})$ при $s \rightarrow 0$. Вронскиан $W(I_\nu(s), K_\nu(s)) = -1/s$.

Отсюда

$$W(z_1, z_2) = z_1 z_2' - z_2 z_1' = \tau^{n/2}, \quad z_1(\tau) = O(e^\tau), \quad z_2(\tau) = O(e^{-\tau}), \\ \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad z_1(0) = 0, \quad z_2(\tau) = O(1) \quad \text{при } \tau \rightarrow 0.$$

Поэтому можем записать решения вышеуказанных задач в виде

$$w_{-n}(\tau, \varphi) = -g_{0,0}(\varphi) \left(z_2(\tau) \int_0^\tau z_1(s) s^{-n/2} ds - z_1(\tau) \int_\tau^\infty z_2(s) s^{-n/2} ds \right), \\ w_{-n+1}(\tau, \varphi) = z_2(\tau) \int_0^\tau \left(\frac{\partial w_{-n}(s, \varphi)}{\partial \tau} - g_{0,1}(\varphi) s \right) z_1(s) s^{-n/2} ds - \\ - z_1(\tau) \int_\tau^{+\infty} \left(\frac{\partial w_{-n}(s, \varphi)}{\partial \tau} - g_{0,1}(\varphi) s \right) z_2(s) s^{-n/2} ds,$$

$$\begin{aligned}
w_{-n+j}(\tau, \varphi) &= z_2(\tau) \int_0^\tau (\Phi_{-n+j}(s, \varphi) - g_{0,j}(\varphi) \tau^j) z_1(s) s^{-n/2} ds - \\
&- z_1(\tau) \int_\tau^\infty (\Phi_{-n+j}(s, \varphi) - g_{0,j}(\varphi) \tau^j) z_2(s) s^{-n/2} ds, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \\
w_{k(n+2)}(\tau, \varphi) &= z_2(\tau) \int_0^\tau \Phi_{k(n+2)}(s, \varphi) z_1(s) s^{-n/2} ds - \\
&- z_1(\tau) \int_\tau^\infty \Phi_{k(n+2)}(s, \varphi) z_2(s) s^{-n/2} ds + \frac{\Psi_{1,k}(\varphi) - v_k(a, \varphi)}{z_2(0)} z_2(\tau), \quad k = 0, 1, \dots; \\
w_{k(n+2)+1}(\tau, \varphi) &= z_2(\tau) \int_0^\tau \Phi_{k(n+2)+1}(s, \varphi) z_1(s) s^{-n/2} ds - \\
&- z_1(\tau) \int_\tau^\infty \Phi_{k(n+2)+1}(s, \varphi) z_2(s) s^{-n/2} ds; \\
w_{k(n+2)+2+j}(\tau, \varphi) &= z_2(\tau) \int_0^\tau \Phi_{k(n+2)+2+j}(s, \varphi) z_1(s) s^{-n/2} ds - \\
&- z_1(\tau) \int_\tau^\infty \Phi_{k(n+2)+2+j}(s, \varphi) z_2(s) s^{-n/2} ds, \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Лемма. Решение уравнения

$$y''(x) - x^n y(x) = x^k, \quad n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}, \quad (14)$$

при $0 \leq x \leq +\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$y(x) = x^{k-n} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^{-(n+2)j}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (15)$$

при этом ряд (15) можно многократно почленно дифференцировать и он является ФАР уравнения (14).

Доказательство. Пусть ФАР решения (14) имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x^{-j}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (16)$$

где β_i – пока неизвестные коэффициенты.

Подставляя (16) в (14), получим рекуррентную алгебраическую систему для β_i . И здесь однозначно определяем все значения β_i :

$$\beta_{n-k} = -1, \quad \beta_{n-k+n+2} = -(n-k)(n-k+1),$$

$$\beta_{n-k+(n+2)j} = (n-k+(n+2)(j-1))(n-k+(n+2)(j-1)+1) \beta_{n-k+(n+2)(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots,$$

остальные коэффициенты β_i равны нулю.

Отсюда получим, что

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = -(n-k)(n-k+1),$$

$$\alpha_j = (n-k+(n+2)(j-1))(n-k+(n+2)(j-1)+1) \alpha_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Оценим теперь остаточный член ряда (15). Пусть $r(x) = y(x) - y_m(x)$, где

$$y_m(x) = x^{k-n} \sum_{j=0}^m \alpha_j x^{-(n+2)j}.$$

Тогда для $r(x)$ получим уравнение

$$r'' - x^n r = O(x^{k-n-(n+2)m+2}). \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет двухпараметрическое семейство решений $r(x, C_1, C_2)$. Из этих решений выберем то, которое удовлетворяет условиям: $r(0) = r^0$, $r(+\infty) = 0$:

$$r(x) = z_2(x) \int_0^x O(s^{-N-n/2}) z_1(s) ds - z_1(x) \int_x^{+\infty} O(s^{-N-n/2}) z_2(s) ds + \frac{r^0}{z_2(0)} z_2(x),$$

где $N = n - k + ((n+2)m+2)$,

То есть $r(x) = O(x^{-N-K})$, при $x \rightarrow +\infty$, $0 < K = \text{const}$.

Применяя эту лемму при $\tau \rightarrow +\infty$ мы для функции $w_j(\tau, \varphi)$ можем написать

$$w_{k(n+2)+2+j}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-n+j}), j = 0, 1, \dots, n-1, k = -1, 0, \dots;$$

$$w_{k(n+2)}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-(n+2)}), k = 0, 1, \dots;$$

$$w_{k(n+2)+1}(\tau, \varphi) = O(\tau^{-(n+1)}), k = 0, 1, \dots,$$

т.е. $\forall k, w_k(\tau, \varphi) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$, $k = -1, 0, \dots$

Обоснование ФАР решения задачи (1), (2)

Пусть

$$R(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) - u_s(\rho, \varphi, \varepsilon),$$

где $u_s(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^s \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{2s+1} \lambda^k q_k(\eta, \varphi) + \sum_{k=-n}^{(n+2)s+n+1} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$, $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – остаточный член.

Тогда для $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (\rho - a)^n R = O(\varepsilon^{s+1}), (\rho, \varphi) \in D,$$

$$R(a, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{s+1}), R(b, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{s+1}).$$

Из принципа максимума следует справедливость оценки $R = O(\varepsilon^{s+1})$, в области $D \cup \Gamma$.

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $f(a, \varphi, 0) \neq 0$, то для решения задачи (1), (2) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} q_k\left(\frac{b-\rho}{\sqrt{\varepsilon}}, \varphi\right) + \sum_{k=-n}^{\infty} \varepsilon^{k/(n+2)} w_k\left(\frac{\rho-a}{\sqrt[n+2]{\varepsilon}}, \varphi\right) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заключение

Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми перемен-

ными в кольце. В рассмотренном уравнении предельное уравнение имеет особенность. Для этого случая доказана применимость метода пограничных функций. Методом сращивания также можно построить разложение решения, но данный подход значительно сокращает вычисления. Полученный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюизо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, которое свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям или уравнениям с точками поворота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε // Ann. of Math. 1950. V. 51. P. 428–445.
3. Eckhaus W. Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems // SIAM Review. 1972. V. 14. No. 2. P. 225–270.
4. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem // SIAM J. Math. Anal. 1987. V. 18. No. 5. P. 1467–1511.
5. Бутузов В.Ф., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в нелинейных эллиптических задачах, содержащих производные первого порядка // Модел. и анализ информационных систем. 2014. Т. 21. № 1. С. 7–31.
6. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1427–1447.
7. Белошапко В.А., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 8. С. 1291–1301.
8. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
9. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром при части старших производных // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 170–178.
10. Alymkulov K. Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point // Universal J. Appl. Math. 2014. V. 2. No. 3. P. 119–124.
11. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 3. С. 483–487.
12. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 37–44.
13. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
14. Tursunov D.A., Belekov K.J. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries // Proc. of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bishkek, 5–7 June, 2014) / Edited by Academician Altay Borubaev. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. P. 143–147.

Статья поступила 03.02.2015 г.

Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A RING WITH A SINGULARITY ON THE BOUNDARY

DOI 10.17223/19988621/39/5

Owing to the large number and variety of applications, the Dirichlet problem for elliptic equations with a small parameter at highest derivatives occupies a unique place in mathematics. The main problem of flow around in hydrodynamics, the problem of torsion and bending in the elasticity theory, determination of temperature inside a plate according to its known values on the contour in physics, the potential of the steady flow of an incompressible fluid, electromagnetic and magnetic potentials, and the determination of the temperature of the thermal field or electrostatic field potential in a certain region at a given temperature or potential on the boundary can be reduced to this problem. It is also closely related to main problems of statistical theory of elasticity and others. The explicit solution of these problems can be constructed in the general case only using different asymptotic and numerical methods. When the corresponding unperturbed equation has a smooth solution, these problems are called bisingular in A.M. Il'in's terminology. The method of matching was applied before to construct the asymptotic of bisingularly perturbed problems but the method of boundary functions was not used directly. The authors propose to modify the method of boundary functions by use of which it is possible to construct asymptotic solutions of the Dirichlet problem for a bisingularly perturbed second order elliptic equation with two independent variables in a ring domain. The aim of the study is to develop the asymptotic method of boundary functions for bisingularly perturbed problems. The constructed asymptotic series is a series of Puiseux. The principal term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional power in the small parameter, which is inherent to bisingular perturbed equations or equations with turning points.

Keywords: Asymptotic expansion of a solution, bisingular perturbation, elliptic type equation, Dirichlet problem, small parameter, generalized method of boundary functions, boundary functions, modification Bessel functions.

TURSUNOV Dilmurat A. (Dr. Sci., Ural State Pedagogical University, Yekaterinburg, Russian Federation)

E-mail: d_osh@rambler.ru

ERKEBAEV Ulukbek Z. (Osh State University, Osh, Kyrgyzstan)

E-mail: uluk3188@mail.ru

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p. (in Russian)
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε . *Ann. of Math.*, 1950, vol. 51, pp. 428–445.
3. Eckhaus W. Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems. *SIAM Review*, 1972, vol. 14, no. 2, pp. 225–270.
4. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 1987, vol. 18, no. 5, pp. 1467–1511.
5. Butuzov V.F., Denisov I.V. Uglovoy pogranchnyy sloj v nelineynykh ellipticheskikh zadachakh, soderzhashchikh proizvodnye pervogo poryadka. *Model. i analiz informatsionnykh sistem*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 7–31. (in Russian)
6. Butuzov V.F., Levashova N.T., Mel'nikova A.A. Kontrastnaya struktura tipa stupen'ki v singulyarno vozmushchennoy sisteme ellipticheskikh uravneniy. *ZhVM i MF*, 2013, vol. 53, no. 9, pp. 1427–1447. (in Russian)
7. Beloshapko V.A., Butuzov V.F. Singulyarno vozmushchennaya ellipticheskaya zadacha v sluchae kratnogo kornya vyrozhdenogo uravneniya. *ZhVM i MF*, 2013, vol. 53, no. 8, pp. 1291–1301. (in Russian)

8. Il'in A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 334 p. (in Russian)
9. Lelikova E.F. Ob asimptotike resheniya odnogo uravneniya s malym parametrom pri chasti starshikh proizvodnykh. *Tr. IMM UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 170–178. (in Russian)
10. Alymkulov K. Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point. *Universal J. Appl. Math.*, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 119–124.
11. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Obobshchenie metoda pogrannfunktsiy dlya resheniya kraevoy zadachi dlya bisingulyarno vozmushchennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka. *Matematicheskie zametki*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 483–487. (in Russian)
12. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 6(26), pp. 37–44. (in Russian)
13. Tursunov D.A. Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Sluchay osoboy tochki na granitse. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 31–35. (in Russian)
14. Tursunov D.A., Belekov K.J. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries. *Proc. of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5–7 June, 2014)*, ed. by Academician Altay Borubaev. Bishkek, Kyrgyz Mathematical Society, 2014, pp. 143–147.

УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/39/6

Т.Е. Хмылёва

О ГОМЕОМОРФИЗМЕ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ S_Q

Доказывается негомеоморфность двух топологических пространств, а именно, прямой Зоргенфрея S и ее модификации S_Q , где Q – множество рациональных чисел на прямой. При доказательстве используется монотонность гомеоморфизма $\varphi: S \rightarrow S$ на некотором интервале $(a, b) \subset S$. Этот факт установил Е. К. Van Douwen. Вопросы о гомеоморфизме прямой Зоргенфрея и ее модификаций рассматривались в работе V.A. Chatyrko, Y. Nattory, где топология «стрелки» на некотором множестве A заменена на евклидову топологию, а также в работе Е.С. Сухачевой, Т.Е. Хмылевой, где доказывается гомеоморфность пространств S и S_A , если A – это подмножество счетного замкнутого множества на прямой $\mathbb{R}$ и пространство S_A определяется аналогично пространству S_Q .

Ключевые слова: стрелка Зоргенфрея, гомеоморфизм, бэровское пространство, множество первой категории.

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; $Q \subset \mathbb{R}$ – подмножество рациональных чисел; $J \subset \mathbb{R}$ – подмножество иррациональных чисел; S – прямая Зоргенфрея (или «стрелка») с топологией, порожденной базой $\{(a, b]: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Если множество $A \subset \mathbb{R}$, то через S_A обозначается множество вещественных чисел, наделенное топологией, в которой база окрестностей определяется следующим образом:

если $x \in A$, то $B_x = \{[x, a): a \in \mathbb{R}, x < a\}$;

если $x \in \mathbb{R} \setminus A$, то $B_x = \{(a, x]: a \in \mathbb{R}, a < x\}$.

Если промежуток $(a, b) \subset S_A$, то пишем $(a, b)_A$.

Определение 1 Топологическое пространство X называется бэровским, если пересечение любой последовательности открытых всюду плотных в X подмножеств является всюду плотным.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пространства S и S_Q не являются гомеоморфными.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие факты.

Предложение 1. Пространство S является бэровским.

Доказательство. Пусть $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность открытых всюду плотных подмножеств в S . Каждое множество G_n есть объединение непересекающихся интервалов вида $(a, b]$ или (c, d) . Заменяя интервалы вида $(a, b]$ на интервалы

(a, b) , получим множество G_n' , которое будет открыто на прямой $\mathbb{R}$ и всюду плотно в $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{R}$ – бэровское пространство, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n'$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, а следовательно, всюду плотно в S .

Поскольку плотные G_δ -множества в бэровском пространстве являются бэровскими (Ткачук [4]), получаем следующее следствие.

Следствие 1. Подмножество иррациональных точек $J \subset S_Q$ является бэровским пространством.

Предложение 2. Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A является бэровским.

Доказательство аналогично предложению 1 с тем отличием, что открытое множество $G \subset S_A$ есть объединение непересекающихся интервалов вида интервалов вида (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ или $[a, b]$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: S_Q \rightarrow S$. Тогда $\varphi|_J$ является гомеоморфизмом пространства J на некоторое подмножество S . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$F_n = \left\{ x \in J : x - \frac{1}{n} < y < x \text{ и } y \in J \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(x) \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $F_1 \subset F_2 \subset \dots$. Так как отображение φ непрерывно, то для каждой точки $x \in J$ найдется окрестность $(x - \varepsilon, x]$, такая, что $\varphi(y) < \varphi(x)$ для любого $y \in (x - \varepsilon, x]$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = J$.

Покажем, что множества F_n замкнуты в J . Пусть точка $x_0 \in J$ является предельной для множества F_n . Тогда существует возрастающая последовательность $x_k \in F_n$, такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. Для точки $y \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0\right) \cap J$ найдется x_{k_0} , для которой $y < x_{k_0} < x_0$. Следовательно, при всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство $y < x_k < x_0$. Так как $x_k \in F_n$, а $y \in \left(x_k - \frac{1}{n}, x_k\right]$, то $\varphi(y) < \varphi(x_k)$ и в силу непрерывности функции φ выполняется неравенство $\varphi(y) \leq \varphi(x_0)$. Поскольку φ является гомеоморфизмом и $y \neq x_0$, то $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ и по определению F_n получаем, что $x_0 \in F_n$.

По предложению 1 множество J является бэровским пространством и, значит, существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $\text{int}_J F_{n_0} \neq \emptyset$. Следовательно, существует интервал (p, q) , такой, что $(p, q) \cap J \subset F_{n_0}$. Не нарушая общности, можно считать, что $q - p < \frac{1}{n_0}$. Для любых двух точек $x, y \in (p, q) \cap J$ выполняется нера-

венство $\varphi(x) < \varphi(y)$, поскольку $y \in F_{n_0}$ и $y - \frac{1}{n_0} < x < y$, т.е. функция φ на интервале $(p, q) \cap J$ является строго возрастающей.

Рассмотрим теперь рациональную точку $r \in (p, q) \subset S_Q$ и последовательность иррациональных точек $x_k \in (p, q)$, такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r$ и $x_1 > x_2 > \dots$. В силу возрастания функции φ на интервале $(p, q) \cap T$ последовательность $\varphi(x_k)$ является убывающей на «стрелке» S , что противоречит условию $\lim \varphi(x_k) = \varphi(r)$, которое должно быть выполнено в силу непрерывности функции φ .

Теорема 2. Если подмножество $T \subset S$ гомеоморфно S , а D счетное всюду плотное в T подмножество, то пространства S_D и S не являются гомеоморфными.

Доказательство. Поскольку T гомеоморфно S , то по предложению 1 пространство T является бэровским. Следовательно, $T \setminus D$ также бэровское, так как является плотным G_δ -подмножеством в T [4]. Кроме того, из гомеоморфности T и S следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t \in T$ множество $(t - \varepsilon, t] \cap (T \setminus D)$ является несчетным. Это означает, что для любой точки $d \in D \subset T$ найдется последовательность $y_n \in T \setminus D$, которая сходится к точке d , возрастая, и, значит, в пространстве S_D последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ не имеет предельных точек.

Предположим теперь, что существует гомеоморфизм $\varphi: S_D \rightarrow S$. Так же, как и в теореме 1, доказываем существование интервала (p, q) , такого, что функция $\varphi|_{(p, q) \cap (T \setminus D)}$ является возрастающей. Рассмотрим точки $d_1, d_2 \in (p, q) \cap D$, $d_1 < d_2$ и последовательности точек $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ из множества $T \setminus D$, которые, возрастая, сходятся к точкам d_1 и d_2 соответственно, но не имеют предельных точек в S_D . Отсюда следует, что

$$\varphi(y_1) < \dots < \varphi(y_n) < \dots < \varphi(z_1) < \dots < \varphi(z_n) < \dots$$

и, следовательно, возрастающая последовательность $\varphi(y_n)$ является ограниченной, а значит, сходящейся в пространстве S . Получаем противоречие с предположением о непрерывности отображения φ^{-1} .

Следствие 2. Пусть $F \subset S$ замкнутое подпространство без изолированных точек и $D \subset F$ счетное всюду плотное в F подмножество. Тогда пространства S_D и S не являются гомеоморфными.

Для доказательства достаточно заметить что в этом случае подпространство F гомеоморфно S . Доказательство этого факта можно найти в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Douwen E.K. Retracts of the Sorgenfrey line // *Compositio Mathematica*. 1979. Т. 38. No. 2. P. 155–161.
2. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers // *Comment. Math. Univ. Carolin.* 2013. V. 54. No. 2. P. 189–196.

3. Хмылева Т.Е., Сухачева Е.С. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5.
4. Tkachuk V.V. *Cp-theory Problem Book. Topological and functional analysis*. Springer, 2015.
5. Burke D.K., Moore J.T. Subspaces of the Sorgenfrey line // *Topology and its Applications*. 1998. V. 90. No. 1. P. 57–68.

Статья поступила 11.01. 2016 г.

Khmyleva T.E. ON THE HOMEOMORPHISM OF THE SORGENFREY LINE AND ITS MODIFICATIONS S_Q

DOI 10.17223/19988621/39/6

Khmyleva T.E. ON THE HOMEOMORPHISM OF THE SORGENFREY LINE AND ITS MODIFICATIONS S_Q .

In this paper, it is proved that two topological spaces, namely, the Sorgenfrey line S and its modifications S_Q , where Q is the set of rational numbers on the real line, are nonhomeomorphic. Topology of the space S_Q is defined as follows: if $x \in Q \subset S$, then the base of neighborhoods of the point x is the family of semiintervals $\{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, and if $x \in S \setminus Q$, then the base of the neighborhood is a family of semiintervals $\{(x - \varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}$. The proof of this fact uses monotonicity of the homeomorphism $\varphi : S \rightarrow S$ on some interval $(a, b) \subset S$ (E.K. Van Douwen, 1979).

Keywords: Sorgenfrey line, Baire space, homeomorphism, first category set.

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: TEX2150@yandex.ru.

REFERENCES

1. Van Douwen E.K. Retracts of the Sorgenfrey line. *Compositio Mathematica*, 1979, vol. 38, no. 2, pp. 155–161.
2. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 189–196.
3. Khmyleva T.E., Sukhacheva E.S. O nekotorykh lineyno uporyadochennykh topologicheskikh prostranstvakh, gomeomorfnykh pryamoy Zorgenfrey. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 5.
4. Tkachuk V.V. *Cp-theory Problem Book. Topological and functional analysis*. Springer, 2015.
5. Burke D.K., Moore J.T. Subspaces of the Sorgenfrey line. *Topology and its Applications*, 1998, vol. 90, no. 1, pp. 57–68.

МЕХАНИКА

УДК 536.46:662.3:551.46
DOI 10.17223/19988621/39/7

В.Д. Барсуков, С.В. Голдаев, С.А. Басалаев, Н.А. Бабушкин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДЪЕМА ЗАТОНУВШИХ ПРЕДМЕТОВ
ПРИ ПРОДУВКЕ ПОНТОНА УПРАВЛЯЕМЫМ ОТКРЫТЫМ
ТВЁРДОТОПЛИВНЫМ ГАЗОГЕНЕРАТОРОМ¹**

Разработана математическая модель подъема затонувших предметов понтоном, продувка которого осуществляется управляемым открытым твердотопливным газогенератором. Проведен параметрический анализ влияния многократных выключений и запусков источника рабочего тела на стадиях вытеснения балласта, всплытия понтона с грузом.

Ключевые слова: *жидкая среда, гидростатическое давление, твердое топливо, поверхность горения, масса топлива, газогенератор, барботаж, теплообмен, понтон, сила Архимеда, скорость всплытия.*

Для повышения эффективности проведения аварийно-спасательных и подводно-технических операций используются устройства, в состав которых входят газогенераторы на двухосновном твердом топливе (ДТТ) [1, 2]. Однако такие источники рабочего тела не позволяли прекращать их функционирование в случае какой-либо нештатной ситуации, например при неудачном креплении поднимаемого груза [2].

Находящийся на дне затонувший объект часто заглублен в илистые отложения, и при отрыве его от грунта возникает необходимость создавать избыточную подъемную силу понтоном (П). Согласно данным работы [3], под влиянием эффекта присоса грунта фактическое превышение силы отрыва над весом объекта может достигать 40 %. В случае продувки П газогенераторами происходит повышенный расход ДТТ, поскольку не удастся прекратить подачу от него газов. Необходимость обеспечения подъема с малой скоростью, а в предельном случае – остановка этого процесса из-за возникшей нештатной ситуации, требует совершенствования стадии вытеснения воды из П за счет реализации дискретной подачи продуктов сгорания. В таких случаях целесообразно использовать открытые управляемые твердотопливные газогенераторы [4], работоспособность которых подтверждена в лабораторных исследованиях [5]. Такой газогенератор содержит топливную шашку, на верхней части которой установлен подвижный локализатор зоны газообразования (ПЛЗГ) в виде термостойкого стакана (ТС) в перевернутом положении. Донная часть ТС нагревается спиралью накаливания (СН) до температуры, превышающей температуру воспламенения $T_{\text{вс}}$ ДТТ. В результате обеспечивается выкипание прилегающей жидкости и последующее зажигание топлива.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-10014).

По мере выгорания топлива, ПЛЗГ с отрицательной плавучестью «следит» за фронтом горения, осуществляя непрерывную локализацию зоны газообразования в динамическом режиме. За счет самопроизвольного движения ТС вниз осуществляется поддержание горения, а гашение ДТТ достигается путём остановки ТС или отвода его вверх.

Возможность регулирования подачи продуктов сгорания в П связана с прекращением горения ДТТ и повторным его воспламенением.

Процесс вытеснения воды из П вместимостью 0.2 м^3 , находящегося на глубине 50 м, открытым твёрдотопливным газогенератором (ОТГ) с однократным и многократным запуском обсуждался в работах [6, 7]. Однако всплытие модели понтона с грузом не исследовалось. Эффект использования клапана в П, который включался, когда скорость всплытия системы «понтон + груз» («П+Г») превышала допустимое значение, равное 1 м/с, рассмотрен в монографии [1]. Принцип работы клапана заключался в открытии дополнительного отверстия в стенке П, что сопровождалось сбросом определенной массы продуктов сгорания в окружающую среду. Наличие подвижного элемента – клапана, представляющего подпружиненную чашу на стержне, усложняло конструкцию П и снижало безотказность функционирования.

В реальном устройстве с грузоподъемностью несколько тонн при глубине погружения в сотни метров используются шашки, имеющие на порядок большие массогабаритные характеристики. Поэтому важно иметь представление о влиянии перечисленных эффектов на процесс вытеснения балласта и процедуру подъема. Принимая во внимание высокие затраты на экспериментальную отработку таких устройств, целесообразно воспользоваться опытом математического моделирования, использованного при разработке и испытаниях глубоководного подъемного устройства (ГПУ) с эластичной оболочкой, наполняемой продуктами сгорания [1].

Физико-математическая постановка задачи

На рис. 1 схематично изображен понтон 1, имеющий цилиндрическую форму, который при всплытии обтекается поперечным потоком воды. В стенке имеется несколько люков 2 для размещения и крепления открытых твёрдотопливных газогенераторов 4, а также горловина 3 для соединения внутреннего пространства П с окружающей водой. В качестве клапанов для снижения давления внутри П при нерасчетном режиме могут использоваться крышки люков.

Понтон с грузом находится на глубине h_0 . Стадия выхода на режим ОТГ в настоящей работе не рассматривается. Процесс вытеснения воды из П происходит в поршневом режиме, что подтверждено визуализацией функционирования ОТГ в прозрачной модели П [1]. Объемный расход вытесняемой из П жидкости в окружающую среду вычислялся по уравнению Бернулли [8]. Теплообмен продуктов сгорания с водой и стенками П принимался в форме Ньютона [9], эффекты испарения и конденсации воды при взаимодействии с газами не учитывались; снижение температуры продуктов сгорания при их барботаже через слой воды в П максимальное, соответствующее равновесной глубине, малы потери рабочего тела, обусловленные растворимостью некоторых компонентов продуктов сгорания при всплытии в слое воды.

В рамках сформулированных допущений рассматриваемая задача сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), представляющих собой балансовые соотношения для массы и энергии продуктов

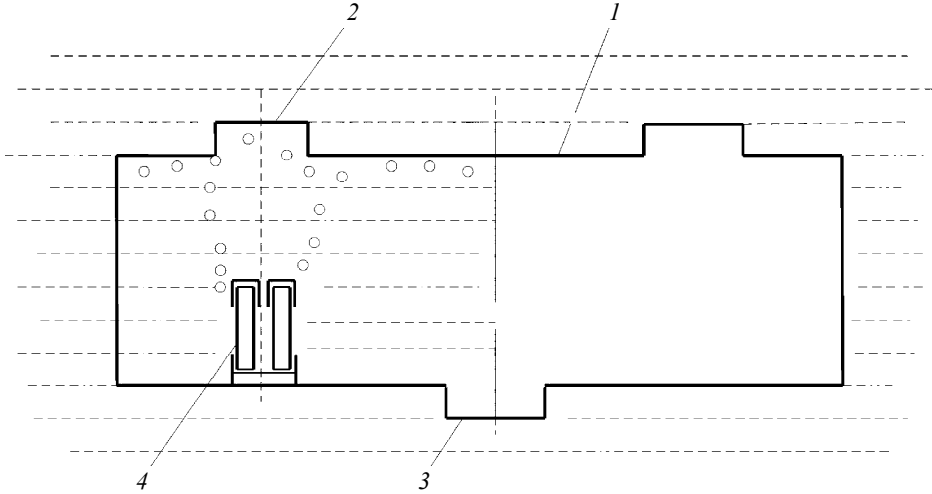


Рис. 1. Схема понтона с продувкой его с помощью ОТГ

сгорания, заполняющих переменный объем; уравнений, моделирующих степенной закон скорости горения ДТТ от давления, вытеснение воды из П в поршневом режиме, которые дополняются уравнением состояния идеального газа в дифференциальной форме, зависимостями внутренней баллистики установок на ДТТ [1], критериальным уравнением теплообмена свободной конвекции в ограниченном объеме [9]:

$$\frac{de_f}{dt} = a_f \left(\frac{p_g}{p_l} \right)^v; \quad (1)$$

$$\frac{dV_w}{dt} = \varphi_w S_G \sqrt{\frac{2(p_g - p_h)}{\rho_w}}; \quad (2)$$

$$\frac{dM_g}{dt} = G_f - G_r e_v; \quad (3)$$

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{(\chi c_p T_p - c_v T) G_f}{c_v M_g} - \frac{p_g}{c_v M_g} \frac{dV_w}{dt} (1 - e_v) - \frac{\alpha_s (T_g - T_w)(F_w + F_s)}{c_v M_g} - \frac{R_g T_g G_r e_v}{c_v M_g}; \quad (4)$$

$$\frac{dp_g}{dt} = \frac{R_g T_g}{V_g} \frac{dM_g}{dt} + \frac{R_g M_g}{V_g} \frac{dT_g}{dt} - \frac{p_g}{V_g} \frac{dV_g}{dt}. \quad (5)$$

Здесь e_f – толщина сгоревшего свода; T_g, R_g, k – температура, удельная газовая постоянная, показатель адиабаты продуктов сгорания; ρ_f, ρ_w – плотности ДТТ и воды; F_b, F_w – площади поверхностей, стенок П и воды, участвующие в теплообмене; φ_v – коэффициент расхода при истечении воды; p_l – атмосферное давление; a_f, v – коэффициенты аппроксимации; χ – коэффициент сохранения теплоты, учитывающий частичное охлаждение продуктов сгорания при их барботаже через слой воды, окружающей шашку; G_f, G_r – секундные массовый «приход» продук-

тов сгорания из ОТГ и расход при их истечении в окружающую среду; e_v – множитель, принимающий значение 0, когда продувка понтона не закончилась, и 1 – когда из отсеков понтона начинает истекать газ.

При вычислении секундного массового прихода продуктов сгорания из ОТГ, работающего в докритическом режиме, применяется следующая формула [10]:

$$G_g = N_f \rho_f F_f u(e_f), \quad (6)$$

где F_f – площадь горячей поверхности топлива; N_f – количество шашек.

Расчет F_f проводился на основе геометрического закона скорости горения [10] для рассматриваемого варианта ОТГ [4]. Считалось, что в начальный момент времени F_f представляет торцевую часть цилиндра F_{fT} . Затем добавляется участок боковой поверхности цилиндра, освобожденный от контакта с водой. Для упрощения алгоритма принималось, что выгорание шашки осуществляется с постоянной поверхностью, равной торцевой поверхности шашки диаметром d_f , т.е.

$$F_{fT} = 0.25 \pi d_f^2.$$

Секундный массовый расход газа из понтона при докритическом режиме истечения вычислялся по термодинамической формуле [8]

$$G_r = \Phi_G p_g S_G \left\{ \frac{2k}{(k-1) R_g T_g} \left[\left(\frac{p_h}{p_g} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_h}{p_g} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

где S_G – площадь сечения горловины (кингстона); p_h – противодавление на глубине погружения; Φ_G – коэффициент расхода при истечении газа.

Изменение температуры стенки П описывается дифференциальным уравнением

$$c_s \rho_s \delta_s \frac{dT_s}{dt} = \alpha_s (T_g - T_s) - \alpha_w (T_s - T_w), \quad (8)$$

где c_s , ρ_s – соответственно удельная теплоемкость, плотность материала оболочки; δ_s – толщина стенки оболочки, α_s , α_w – коэффициенты теплоотдачи от газов к стенке П и от нее к окружающей воде. T_s – температура стенки П. Пренебрежение распределением температуры по толщине нагреваемого тела допустимо в тех случаях, когда критерий Био мал [9]. Предполагая $\alpha_s \approx 50\text{--}100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ [1], что соответствует теплообмену охлажденных продуктов сгорания со стенками оболочки свободной конвекцией в ограниченном объеме, и принимая $\delta_s = 3 \text{ мм}$, а $\lambda_s = 45 \text{ Вт}/\text{мК}$, получаем $Bi = \alpha_s \delta_s / \lambda_s \approx 0.003\text{--}0.006$, что показывает допустимость использования уравнения (8).

Коэффициент теплоотдачи от охлажденных продуктов сгорания вычислялся из критериального уравнения вида [9]

$$Nu_s = A Ra_s^m, \quad Nu_s = \alpha_s D_p / \lambda_g, \quad Ra_s = g D_p (1 - T_s / T) / (v_g a_g). \quad (9)$$

Здесь Nu_s , Ra_s – критерии Нуссельта и Рэлея соответственно; λ_g , v_g , a_g – коэффициенты теплопроводности, кинематической вязкости и температуропроводности продуктов сгорания; g – ускорение силы тяжести; A , m – коэффициенты аппроксимации, числовые значения их выбираются с учетом режима теплообмена; D_p – диаметр П.

Так, при ламинарном режиме (для $Ra_s < 500$) – $A = 1.18$, $m = 0.125$, при переходном ($500 < Ra_s < 2 \cdot 10^7$) – $A = 0.54$, $m = 0.25$, при турбулентном (для $Ra_s > 10^7$) – $A = 0.135$, $m = 0.333$.

Вычисление характеристик переноса продуктов сгорания осуществлялось по методике, используемой в инженерных расчетах внутрибаллистических параметров устройств на ДТТ [12].

Приняв значение динамической вязкости продуктов сгорания ДТТ равной $\mu_g = 6.68 \cdot 10^{-5}$ Н·м и определив по уравнению состояния идеального газа плотность, находим кинематическую вязкость $\nu_g = \mu_g / \rho_g$.

Теплопроводность газовой смеси увеличивается с повышением температуры и давления (при $p > 1$ МПа). В среднем λ_g , двухатомных газов при повышении температуры от 273 до 573 К возрастает на 80 % [12].

При известной динамической вязкости смеси, ее теплопроводность находилась по формуле Эйкена $\lambda_g = \mu_g (c_{pg} + 1.25 R_g)$.

Температуропроводность и критерий Прандтля для газов определялись обычным образом: $a_g = \lambda_g / (c_{pg} \cdot \rho_g)$, $Pr_g = \nu_g / a_g$.

Температура стенки понтона равна температуре воды, что подтверждается статистикой развития пожаров на судах, в которой отмечалось сохранение краски на бортах, находящихся ниже ватерлинии [11].

Текущие значения площадей поверхностей теплообмена между продуктами сгорания и стенками П и водой в процессе продувки вычислялись по формулам элементарной геометрии. Предполагалось, что пространство, занимаемое продуктами сгорания, представляет собой часть цилиндра, ограниченного дугой и плоской поверхностью. Использовались известные выражения для длины дуги, опирающейся на хорду, площади образованного таким образом сегмента [13].

Поскольку геометрические размеры П и поднимаемого груза сравнительно невелики, то рассматриваемая система «П+Г» заменялась материальной точкой [1, 5]. Расчет скорости ее всплытия (U_p) осуществлялся путем интегрирования уравнения неравномерного прямолинейного движения твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости, которое имело следующий вид [14]:

$$\frac{dU_p}{dt} = \frac{(\rho_w - \rho_g) g V_g}{M_c + M_p} - \frac{M_c (1 - k_c)(1 + k_p) g}{M_c + M_p} - k_w \frac{\rho_w U_p^2}{2(M_c + M_p)} F_{md}, \quad (10)$$

где M_c , – масса системы «П+Г»; M_p – присоединенная масса, F_{md} – площадь «миделева» сечения; k_w, k_p , – коэффициенты гидродинамической силы, присоса груза к грунту. Потеря силы веса в воде для стали учитывалась с помощью коэффициента, равного отношению плотности воды к плотности материала, из которого был изготовлен объект, в частности для стали $k_c = 0.13$ [15].

Последнее вычитаемое в правой части (10) моделирует силу сопротивления, оказываемую водой. В прикладных расчетах она представляется состоящей из двух гидродинамических сил – волновой и вязкостной [15].

Как отмечалось в [14], при движении тел в жидкости, происходящем с изменением их объема, присоединенные массы могут зависеть от времени. При этом инерционная сила, действующая со стороны воды, состоит из двух слагаемых, одно из которых пропорционально скорости движения, другое – ускорению. Однако учесть упомянутую общность в программе расчета затруднительно, так как вычисление «присоединенных» масс движущихся тел даже с фиксированным объе-

мом сложной формы представляет очень трудную задачу [14]. С другой стороны, динамическая стадия всплытия «П+Г», в течение которой появляются подобные эффекты, реализуется тогда, когда сила Архимеда по какой-либо причине существенно превысит вес поднимаемого объекта. Следует заметить, что в любом случае для рассматриваемой задачи динамическая стадия всплытия составляет малую часть от всего времени достижения поверхности воды. Поэтому пренебрежение одной из составляющих инерционной силы может привести к некоторому завышению скорости всплытия на данном этапе подъема [1].

Для определения глубины h , на которой находится в текущий момент времени система «П+Г», добавлено дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = U_p. \quad (11)$$

Таким образом, задача о расчете параметров вытеснения воды из П и всплытия его с грузом сведена к интегрированию выписанной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Начальные условия к ним имели следующий вид:

$$\begin{aligned} e_f = 0, \quad V = V_0 \cong 0.01 W_p, \quad M_g = 0.01 M_f, \quad p_g = 1.02 p_h, \\ T_g = 350 \dots 400 \text{ K}, \quad T_{s0} = 280 \text{ K}, \quad U_p = 0, \quad h_0 = 300 \text{ м}. \end{aligned} \quad (12)$$

Моделирование регулирования процесса продувки и связанного с этим изменения подъемной силы осуществлялось следующим образом. При превышении доли продутого объема определенного значения или скорости всплытия системы «П+Г», либо времени процесса «отключался» приход газа. Соответственно в уравнении сохранения массы (3) учитывалось прекращение поступления рабочего тела, а в уравнении сохранения энергии (4) – уменьшение поступления энтальпии продуктов сгорания, обусловленное отсутствием этого прихода.

Приближенный численный метод решения

Численное решение выписанной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлялось с помощью метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности [16]. Для удобства реализации математической модели и проведения параметрического анализа в исходной системе дифференциальных уравнений был осуществлен переход к безразмерным переменным, которые здесь не выписываются из-за своей громоздкости.

Расчеты проведены для понтона, имеющего диаметр 1.25 м, длину 4 м, вместимость 5 м³. Соответственно максимальная подъемная сила равна 50 кН, а сила веса на воздухе поднимаемого груза равна 40 кН. Собственный вес понтона (тонкостенная оболочка) составлял 4.5 кН. Диаметр горловины для истечения воды равен 0.2 м, коэффициенты расхода при вытеснении воды $\mu_1 = 0.6$, при истечении продуктов сгорания – $\mu_G = 0.85$. Коэффициент сопротивления со стороны воды при рассматриваемом варианте движения понтона и формы поднимаемого груза – цилиндра больших размеров, был выбран равным 0.85; коэффициент присоса груза к грунту – 0.2; коэффициенты аппроксимации в степенном законе скорости горения $a_f = 1.013 \cdot 10^{-3}$ м/с, $v = 0.54$; удельная газовая постоянная $R_g = 330$ Дж/(кг·К), показатель адиабаты продуктов сгорания $k = 1.25$; плотность ДТГ $\rho_f = 1600$ кг/м³ [14].

Требуемая масса ДТТ типа Н, равная 120.6 кг, находилась по уравнению состояния идеального газа, заполняющего пространство в П при гидростатическом

давлении на глубине нахождения затонувшего объекта 300 м. При этом температура газов принималась равной температуре кипения при этом давлении, близкой к температуре «мокрого термометра». Размеры одной шашки выбирались исходя из опыта создания ПГУ диаметром $d_f = 0,28$ м и длиной $l_f = 0,25$ м, а ее масса достигала 24,6 кг, общее число шашек равно 5.

Исследование стадии вытеснения воды из резервуаров ОТГ показало, что интенсивность этого процесса зависит от отношения площади поверхности горения ОТГ к площади сечения горловины S_G , уровня охлаждения продуктов сгорания при их барботаже [1].

Графики зависимостей от времени массы газа, находящейся в П, при различных режимах функционирования ОТГ представлены на рис. 2. В первом варианте ОТГ работал непрерывно, влияние присоса груза к грунту не учитывалось. Поскольку площадь поверхности горения принята постоянной, то осушение П происходит при квазистационарном давлении. Перепад между давлением в П, создаваемым продуктами сгорания и окружающим, составлял 0,132 МПа, время полного вытеснения воды из П достигало 16 с (рис. 3). Всплытие начиналось на 8-й секунде (рис. 3 – 5), а заканчивалось на 36-й. К моменту полной продувки было израсходовано 80 кг ДТГ, что составляет 66,7 %. На стадии всплытия ОТГ продолжал работать и продукты сгорания, попав в понтон, затем истекали в воду.

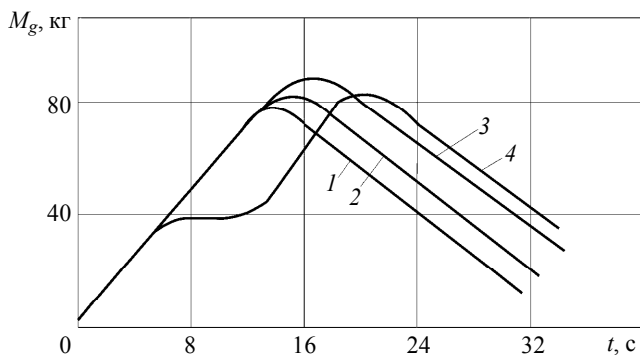


Рис. 2. Зависимость от времени массы газов, находящихся в отсеках П при различных режимах работы ОТГ

В варианте 2 габаритно-массовые характеристики ОТГ совпадали с вариантом 1, было учтено увеличение силы веса груза на 20 % за счет присоса его к грунту. Всплытие началось на 14-й секунде и происходило в динамическом режиме, так как превышение подъемной силы П над силой веса груза было больше, чем в первом варианте. В третьем варианте отключение ОТГ осуществлялось по достижению скорости всплытия системы, превышающей 0,1 м/с. При этом участок увеличения скорости ее всплытия сдвигался на 2–3 с вследствие прекращения подачи рабочего тела в понтон. В последнем варианте отключение ОТГ производилось в интервале времени от 6 до 12 с. На графических зависимостях массы газов и безразмерного объема от времени (рис. 2 и 3, кривые 4) видно последствие дискретной работы ОТГ – наличие «полочки» на упомянутых графиках. Отключение соответствовало объему, занимаемому газами (40 %). Прекращение подачи продуктов сгорания сопровождается быстрым снижением давления внутри П до окружающего, а истечение газов при полной продувке П вызывает падение

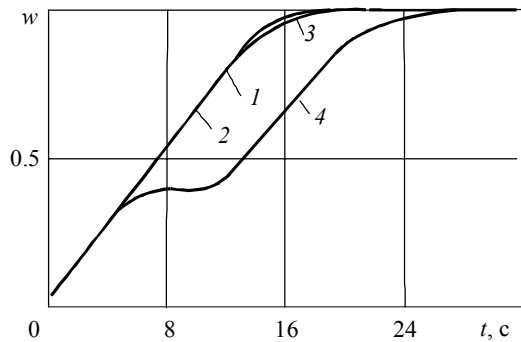


Рис. 3. Зависимость доли продутного объема от времени при различных режимах работы ОТГ

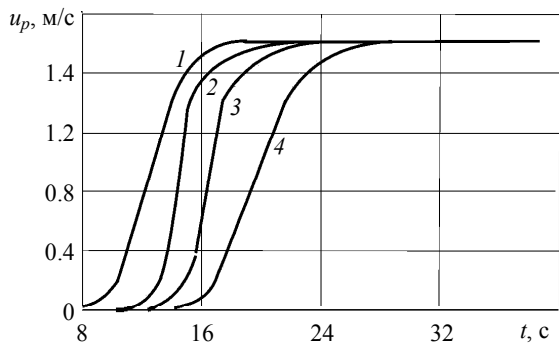


Рис. 4. Зависимость от времени скорости всплытия системы «П+Гз» при различных режимах работы ОТГ

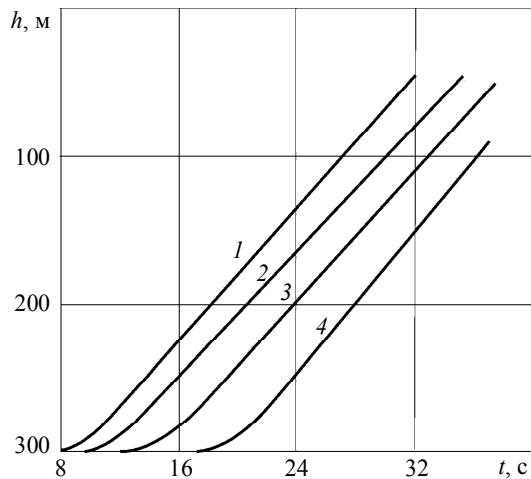


Рис. 5. Зависимость от времени текущей глубины системы «П+Гз» при различных режимах работы ОТГ

давления и возникновение некоторого разрежения внутри него. В модели и программе было предусмотрено поступление воды в цистерну в таких случаях.

Рассматриваемый прием дискретной продувки может быть использован для проверки качества крепления понтона к грузу. Уровень созданной подъемной силы к шестой секунде достаточен, чтобы понтон начал всплывать.

Интенсивность дальнейшего охлаждения продуктов сгорания, заполняющих создаваемую «подушку», мала, и потери сил Архимеда не являются существенными. Как отмечено в работе [6], при низкотемпературной продувке процесс снижения температуры газов до температуры воды составляет несколько минут.

В случае необходимости осуществления подъема груза с большей глубины можно только увеличить длины шашек.

Заключение

Разработана и реализована математическая модель ступенчатого подъема затонувших объектов при продувке понтона управляемым открытым твёрдотопливным газогенератором.

В ходе параметрического анализа установлено, что на стадии вытеснения воды из П можно выключать ОТГ многократно на несколько секунд. Добившись создания подъемной силы, необходимой для обеспечения начала всплытия системы «П + Г», можно отключить ОТГ. Предложенные мероприятия позволят сократить расход ДТТ на проведение операции.

Анализ полученных результатов показал, что после начала всплытия происходит самопродувка П, так как снижение внешнего (гидростатического) давления происходит быстрее, чем уменьшение давления газов в П из-за их охлаждения. С увеличением подъемной силы П интенсивность падения температуры уменьшается, поскольку коэффициент теплоотдачи за счет свободной конвекции обратно пропорционален диаметру П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барсуков В.Д., Голдаев С.В. Подводное зажигание и горение унитарных твердых топлив. Теория, эксперимент, технические приложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 352 с.
2. Марьяш В.И., Аксененко Д.Д. Автономные газогенераторы для средств подъема объектов с больших глубин // Изв. РАН. 2005. Вып. 1(42). С. 88–90.
3. Муру Н.П. Прикладные задачи плавучести и устойчивости судна. Л.: Судостроение, 1985. 212 с.
4. Патент 2357094 РФ Способ управления сжиганием унитарного твердого топлива в жидкой среде и газогенератор / Барсуков В.Д., Басалаев С.А., Голдаев С.В. и др. // Оpubл. в БИ. № 21 от 27.05.2009.
5. Барсуков В.Д., Басалаев С.А., Голдаев С.В. и др.. Способ управления подводным сжиганием УТГ с возможностью прерывания горения и повторного зажигания // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. С. 59–60.
6. Барсуков В.Д., Басалаев С.А., Голдаев С.В. Возможность обеспечения регулируемой продувки балластной цистерны понтона открытым газогенератором // Изв. вузов. Физика. 2008. № 12/2. С. 31–35.
7. Барсуков В.Д., Басалаев С.А., Голдаев С.В., Минькова Н.П. Открытый газогенератор с многократным запуском для продувки глубоководного понтона // Химическая физика и мезоскопия. 2012. Т. 14. № 3. С. 327–334.
8. Беляев Н.М., Уваров Е.И., Степанчук Ю.М. Пневмогидравлические системы. Расчет и проектирование. М.: Высш. шк., 1988. 271 с.

9. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидравлическое сопротивление: Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990. 367 с.
10. Райзберг Б.А., Ерохин Б.Т., Самсонов К.П. Основы теории рабочих процессов в реактивных системах на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1972. 384 с.
11. Борьба с пожарами на судах: Справочное пособие в 2 т. Т. 1. Пожарная опасность на судах / под ред. М.Г. Ставицкого. Л.: Судостроение, 1976. 136 с.
12. Орлов Б.В., Мазинг Г.Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1979. 392 с.
13. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 608 с.
14. Вейткунский Я.И., Фалеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1982. 456 с.
15. Справочник по расчетам при судоподъеме. М.: Военное изд-во, 2005. 480 с.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
17. Барсуков В.Д., Голдаев С.В., Минькова Н.П., Бабушкин Н.А. О закипания под водой двухосновного твердого топлива с термостойким стаканом спиралью накаливания средней мощности // Энергетика: эффективность, надежность, безопасность: Материалы Двадцатой Всероссийской научно-технической конференции: в 2 т. Т. 1. Томск: СПБ Графикс, 2014. С. 163–166.

Статья поступила: 02.12.2015 г.

Barsukov V., Goldaev S., Basalaev S., Babushkin N.A. SIMULATING THE RECOVERY OF SUNKEN OBJECTS BY BLOWING THE PONTOON BY A CONTROLLABLE SOLID FUEL GAS GENERATOR

DOI 10.17223/19988621/39/7

A mathematical model of raising sunken subjects using a pontoon blown by a controlled open gas generator (OG) with the possibility of temporary termination of its operation and the subsequent start is developed.

It is supposed that the pontoon has a cylindrical shape blown by a transverse water flow. Inside it, the OGs providing the blowing in the slugging regime are positioned. The volume flow from the tank into the environment was calculated by Bernoulli's equation. The heat exchange of combustion products with water and the tank wall was taken in the form of Newton. The task was reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations representing the energy balance relations for the mass and energy of combustion products filling the variable volume; equations modeling the layer-by-layer combustion of the solid fuel and the flow of water from the ballast tank; and the closing equation of state of an ideal gas and dependences of the internal ballistics of the gas generators. The dependence of the linear speed of burning on pressure was accepted in the form of a power law. The considered pontoon – cargo system was replaced by a material point. Calculating the speed of its ascent was carried out by integrating the equation of nonuniform rectilinear motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid.

In the course of the parametrical analysis, it was found that at the stage of water replacement from the ballast tank the OG can be stopped repeatedly for some seconds. After achieving the carrying power necessary to provide the beginning of emersion of the pontoon–cargo system, it is possible to disconnect the open gas generator. The proposed actions will allow one to reduce the solid fuel consumption for carrying out the operation.

Keywords: fluid, hydrostatic pressure, solid fuel, combustion area, the mass of fuel, sparging, gas generator, heat exchange, pontoon, Archimedes force, ascent rate.

BARSUKOV Vitaly Dementevich (Doctor of Technical Science, Prof., Tomsk State University, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics. Tomsk, Russian Federation)
E-mail: barsukov@niipmm.tsu.ru

GOLDAEV Sergey Vasilevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: svgoldaev@rambler.ru

BASALAEV Sergey Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

BABUSHKIN Nikita Aleksandrovich (Postgraduate, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: atikin89@tpu.ru

REFERENCES

1. Barsukov V.D., Goldaev S.V. *Podvodnoe zazhiganie i gorenie unitarnykh tverdykh topliv. Teoriya, eksperiment, tekhnicheskie prilozheniya*. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 2003. 352 p. (in Russian)
2. Mar'yash V.I., Aksenenko D.D. Avtonomnye gazogeneratory dlya sredstv pod"ema ob"ektov s bol'shikh glubin. *Izv. RARAN*, 2005, no. 1(42), pp. 88–90. (in Russian)
3. Muru N.P. *Prikladnye zadachi plavuchesti i ustoychivosti sudna*. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1985. 212 p. (in Russian)
4. Patent 2357094 RF *Sposob upravleniya szhiganiem unitarnogo tverdogo topliva v zhidkoy srede i gazogenerator* / Barsukov V.D., Basalaev S.A., Goldaev S.V. et al. Opubl. v BI, no. 21 ot 27.05.2009. (in Russian)
5. Barsukov V.D., Basalaev S.A., Goldaev S.V. et al. Sposob upravleniya podvodnym szhiganiem UTT s vozmozhnost'yu preryvaniya goreniya i povtornogo zazhiganiya. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki*. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 2008, pp. 59–60. (in Russian)
6. Barsukov V.D., Basalaev S.A., Goldaev S.V. Vozmozhnost' obespecheniya reguliruemoy produvki ballastnoy tsisterny pontona otkrytym gazogeneratorom. *Izv. vuzov. Fizika*, 2008, no. 12/2, pp. 31–35. (in Russian)
7. Barsukov V.D., Basalaev S.A., Goldaev S.V., Min'kova N.P. Otkrytyy gazogenerator s mnogokratnym zapuskom dlya produvki glubokovodnogo pontona. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya*, 2012, vol. 14, no. 3, pp. 327–334. (in Russian)
8. Belyaev N.M., Uvarov E.I., Stepanchuk Yu.M. *Pnevmogidravlicheskie sistemy. Raschet i proektirovanie*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988. 271 p. (in Russian)
9. Kutateladze S.S. *Teploperedacha i gidravlicheskie soprotivleniye*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1990. 367 p. (in Russian)
10. Rayzberg B.A., Erokhin B.T., Samsonov K.P. *Osnovy teorii rabochikh protsessov v reaktivnykh sistemakh na tverdom toplive*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 384 p. (in Russian)
11. *Bor'ba s pozharemi na sudakh, vol. 1. Pozharnaya opasnost' na sudakh* (ed. M.G. Stavitskiy). Leningrad, Sudostroenie Publ., 1976. 136 p. (in Russian)
12. Orlov B.V., Mazing G.Yu. *Termodinamicheskie i ballisticheskie osnovy proektirovaniya raketnykh dvigateley na tverdom toplive*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 392 p. (in Russian)
13. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 608 c. (in Russian)
14. Voytkunskiy Ya.I., Faleev Yu.I., Fedyavskiy K.K. *Gidromekhanika*. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1982. 456 p. (in Russian)
15. *Spravochnik po raschetam pri sudopod"eme*. Moscow, Voennoe izd-vo Publ., 2005. 480 p. (in Russian)
16. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 512 p. (in Russian)
17. Barsukov V.D., Goldaev S.V., Min'kova N.P., Babushkin N.A. O zazhiganiya pod vodoy dvukhosnovnogo tverdogo topliva s termostoykim stakanom spiral'yu nakalivaniya sredney moshchnosti. *Energetika: effektivnost', nadezhnost', bezopasnost': Materialy Dvadsatoy Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii, vol. 1*. Tomsk, SPB Grafiks Publ., 2014, pp. 163–166. (in Russian)

УДК 532.542.2

DOI 10.17223/19988621/39/8

Е.И. Борзенко, Е.И. Хегай

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ БАЛКЛИ – ГЕРШЕЛЯ В КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ¹

Исследуется установившееся течение неньютоновской жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Реологическое поведение среды описывается моделью Балкли – Гершеля. Для нахождения стационарных полей скорости и давления используется численный алгоритм, в основе которого лежат метод установления и процедура SIMPLE. С целью ускорения расчета применяется технология параллельных вычислений MPI. Приводятся распределения основных характеристик потока с выделением зоны двумерного течения в области скачка сечения. Показано влияние основных параметров задачи на картину распределения квазитвердых ядер в потоке жидкости.

Ключевые слова: течение жидкости, канал с внезапным расширением, численное моделирование, модель Балкли – Гершеля, квазитвердые ядра.

Течения реологически сложной жидкости в каналах с различными геометрическими особенностями реализуются в технологических процессах во многих отраслях промышленности. В частности, течения в каналах с внезапным расширением или сужением широко распространены в технологии формования полимерных изделий на этапах транспортировки. Сложное реологическое поведение многих полимерных композиций сильно осложняет математическое моделирование их течений.

За последнее десятилетие было выполнено множество теоретических [1–8] и экспериментальных [9–13] исследований течений неньютоновских жидкостей в каналах различной геометрии. Авторами [1–3] численно решались задачи о течении вязкопластичных жидкостей в различных системах. Исследование течений ньютоновских, степенных, вязкопластичных и вязкоупругих жидкостей в каналах с внезапным сужением/расширением проводилось в работах [4–8]. Обзор экспериментальных данных по исследованиям жидкостей с пределом текучести приведен в [9].

В данном случае исследуется ламинарное стационарное течение жидкости Балкли – Гершеля в канале с внезапным расширением. Сформулированная задача решается численно с помощью алгоритма SIMPLE, при этом для обеспечения устойчивого расчета в областях малых скоростей деформаций используется регуляризация реологической модели.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся ламинарное течение неньютоновской жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Жидкость считается несжимае-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-03935).

мой. Течение описывается системой, состоящей из уравнений движения и неразрывности, записанных в безразмерной форме

$$\text{Re} \left(\frac{\partial U U}{\partial x} + \frac{\partial V U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + B \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$\text{Re} \left(\frac{\partial U V}{\partial x} + \frac{\partial V V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + B \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Реологические свойства жидкости подчиняются закону Балкли – Гершеля, согласно которому выражение для эффективной вязкости B определяется формулой [14]

$$B = \frac{\text{Se} + A^k}{A}, \quad A = \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Здесь: U и V – поперечная и продольная проекции вектора скорости $\mathbf{u}$ на оси декартовой системы координат (x, y) , p – давление, k – степень нелинейности, A – безразмерная интенсивность тензора скоростей деформаций, $\text{Re} = \rho \frac{U_0^{2-k} l^k}{\mu}$ –

обобщенное число Рейнольдса, $\text{Se} = \frac{\tau_0 l^k}{\mu U_0^k}$ – безразмерный параметр вязкопла-

стичности, ρ – плотность жидкости, τ_0 – предел текучести, μ – константа реологического закона. В качестве масштабов длины, скорости и давления используются величины: l – полуширина входного сечения, U_0 – среднерасходная скорость во входном сечении, комплекс $\mu \left(\frac{U_0}{l} \right)^k$ соответственно.

Область течения схематично показана на рис. 1, отношение поперечных размеров входного и выходного каналов равняется 2. Жидкость подается через входное сечение Γ_2 с постоянным расходом, при этом профиль скорости совпадает с профилем, характерным для установившегося течения рассматриваемой жидкости в плоском бесконечном канале. В выходном сечении Γ_3 используются «мягкие» граничные условия для продольной скорости и равенство нулю поперечной скорости. На твердых границах Γ_4 выполняются условия прилипания, на плоскости симметрии – условия симметрии. Входная и выходная границы находятся на достаточном удалении от уступа во избежание влияния последнего на характер течения в окрестностях этих границ.

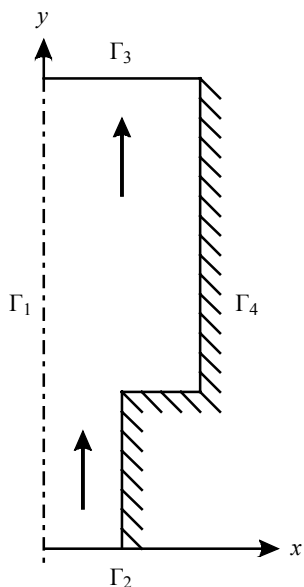


Рис. 1. Область течения

Согласно такой постановке задачи, граничные условия записываются в виде

$$\Gamma_1: \frac{\partial V}{\partial x} = 0, U = 0; \quad (5)$$

$$\Gamma_2: V = V_1(x), U = 0; \quad (6)$$

$$\Gamma_3: \frac{\partial V}{\partial y} = 0, U = 0; \quad (7)$$

$$\Gamma_4: V = 0, U = 0. \quad (8)$$

Профиль скорости во входном сечении $V_1(x)$ находится из решения одномерной задачи об установившемся течении жидкости Балкли – Гершеля в плоском бесконечном канале с заданным постоянным расходом и имеет вид

$$V_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{C} \frac{k}{k+1} (-C - Se)^{\frac{k+1}{k}} & \text{при } x \leq x_1; \\ \frac{1}{C} \frac{k}{k+1} \left[(-Cx - Se)^{\frac{k+1}{k}} - (-C - Se)^{\frac{k+1}{k}} \right] & \text{при } x > x_1, \end{cases} \quad (9)$$

где $x_1 = -Se / C$ – уравнение плоскости, разделяющей области квазитвердого и сдвигового течений; $C < 0$ находится из решения алгебраического уравнения

$$k(-C - Se)^{\frac{k+1}{k}} [k Se - (k+1)C] - C^2(k+1)(2k+1) = 0.$$

Распределения скорости во входном сечении для значений $Se = 0$ и $Se = 1$ в зависимости от степени нелинейности представлены на рис. 2.

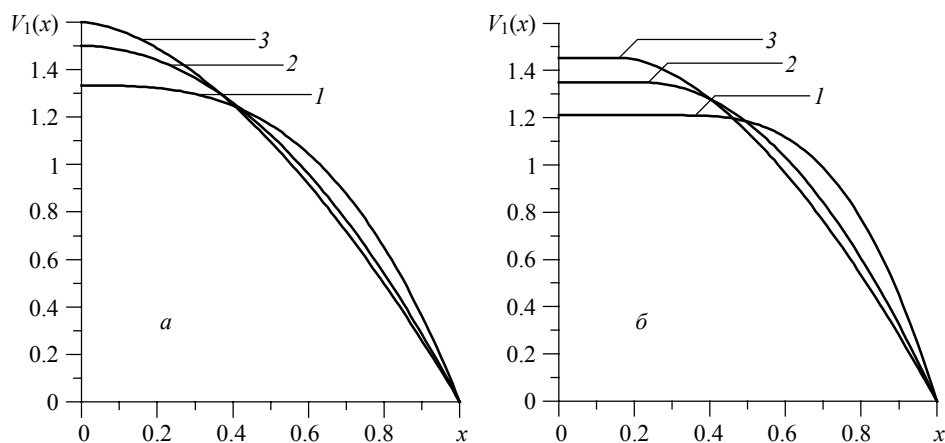


Рис. 2. Профили скорости $V_1(x)$ при $Se = 0$ (а) и $Se = 1$ (б).
1 – $k = 0.5$, 2 – $k = 1$, 3 – $k = 1.5$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к отысканию стационарных полей скорости и давления, удовлетворяющих системе уравнений (1) – (4) и граничным условиям (5) – (9), а также линий тока, иллюстрирующих картину течения.

Метод решения

Задача решается численно с помощью конечно-разностного метода. Для нахождения стационарных полей скорости и давления в расчетных узлах разнесенной сетки используется метод установления [15], который подразумевает добавление производных искомых функций по времени в уравнения (1) и (2) соответственно, с последующей записью системы (1) – (4) в разностном виде и её решением с применением процедуры SIMPLE [16]. С целью ускорения расчета применяется технология параллельных вычислений MPI.

Рассматриваемая реологическая модель обладает особенностью «бесконечной» вязкости при стремлении к нулю второго инварианта тензора скоростей деформаций. С целью обеспечения сходимости методики расчета применяются различные способы регуляризации реологической модели [17]. Суть регуляризации состоит в том, что в реологический закон вводится малый параметр, который ограничивает рост вязкости в областях малых скоростей сдвига, слабо изменяя ее величину в остальной части потока, например:

1. $B = (Se + (A + \varepsilon)^k) / (A + \varepsilon)$ – простая регуляризация;

2. $B = (Se + (\sqrt{A^2 + \varepsilon^2})^k) / (\sqrt{A^2 + \varepsilon^2})$ – модель Беркавиер – Энглмэна (Bercovier – Engleman model).

Рис. 3 иллюстрирует влияние малого параметра на профиль вязкости, рассчитанный для случая установившегося течения жидкости в плоском бесконечном канале. Сплошная линия соответствует аналитическому решению, пунктирная – простая модель, штрих-пунктир – модель Беркавиер – Энглмэна. Предлагаемые модификации, допуская предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ к модели Балкли – Гершеля,

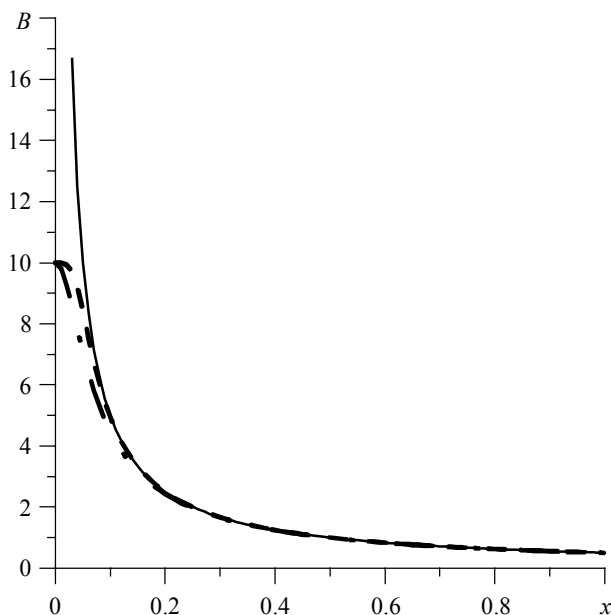


Рис. 3. Распределение вязкости при $Se = 0$, $k = 0.5$ и $\varepsilon = 10^{-2}$

обеспечивают возможность сквозного расчета течений с наличием квазитвердых ядер или застойных зон. Выбирая величину ε заведомо большей ошибок аппроксимации, но достаточно малой для того, чтобы не исказить характер течения, можно сгладить профили эффективной вязкости в областях малых скоростей деформаций и, в то же время, получить решения, близкие к решениям с использованием исходной модели. Параметрические исследования показали, что лучшую сходимость и скорость расчета обеспечивает модель Беркавиер – Энглмэна с использованием значения параметра $\varepsilon \sim 10^{-2}$. В качестве условия выделения зон квазитвердого движения вязкопластичных жидкостей используется неравенство $BA \leq Se$, которое является безразмерным аналогом условия $\tau \leq \tau_0$.

Решение рассматриваемой задачи подразумевает формирование профиля скорости в сечении Γ_3 , соответствующего решению одномерной задачи об установившемся течении жидкости в плоском бесконечном канале. В таблице представлены значения максимальной относительной ошибки рассчитанного профиля скорости в выходном сечении по сравнению с аналитическим решением для различных реологических параметров в зависимости от шага сетки h . Из таблицы видно, что наблюдается аппроксимационная сходимость численной методики. Все дальнейшие расчеты проводились на сетке с шагом $1/40$.

Максимальная ошибка по скорости в выходном сечении, %

h	1/10	1/20	1/40
$\Delta\varepsilon$ ($Se = 0, k = 0$) ньютоновская жидкость	0.18	0.12	0.11
$\Delta\varepsilon$ ($Se = 0, k = 0.8$) псевдопластичная жидкость	0.23	0.13	0.11
$\Delta\varepsilon$ ($Se = 1, k = 1$) вязкопластичная жидкость	39.86	7.44	2.85

Результаты

На рис. 4 показана типичная картина течения ньютоновской жидкости. Безразмерная вязкость в этом случае во всей области равна единице. По характеру распределения представленных характеристик поток можно условно разделить на три области: область одномерного движения вблизи входной границы, соответствующую течению в плоском бесконечном канале; область двумерного движения с образованием циркуляционной зоны в окрестности уступа; область одномерного движения в окрестности выходной границы. Длина области течений, представленных на рисунках, практически полностью охватывает двумерную зону, возмущенную за счет скачка сечения. Размеры этой зоны зависят от параметров задачи.

Расчеты показали, что при увеличении числа Рейнольдса продольный размер циркуляционной зоны L увеличивается (рис. 5), что объясняется усилением инерционных эффектов. При этом, как видно из графика на рис. 6, данная зависимость удовлетворительно аппроксимируется линейной функцией в рассматриваемом диапазоне изменения Re , как в случае ньютоновского поведения жидкости, так и в случае течения реологически сложной жидкости (псевдопластичной $k < 1$, дилатантной $k > 1$).

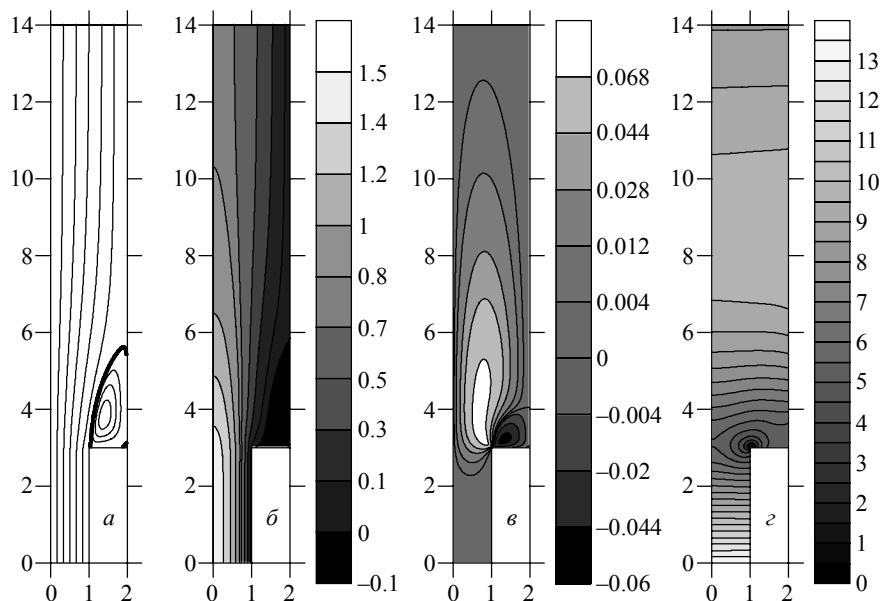


Рис. 4. Распределения характеристик течения при $Re = 20$, $k = 1$ и $Se = 0$: a – линии тока, b – поле продольной скорости, v – поле поперечной скорости, z – поле давления

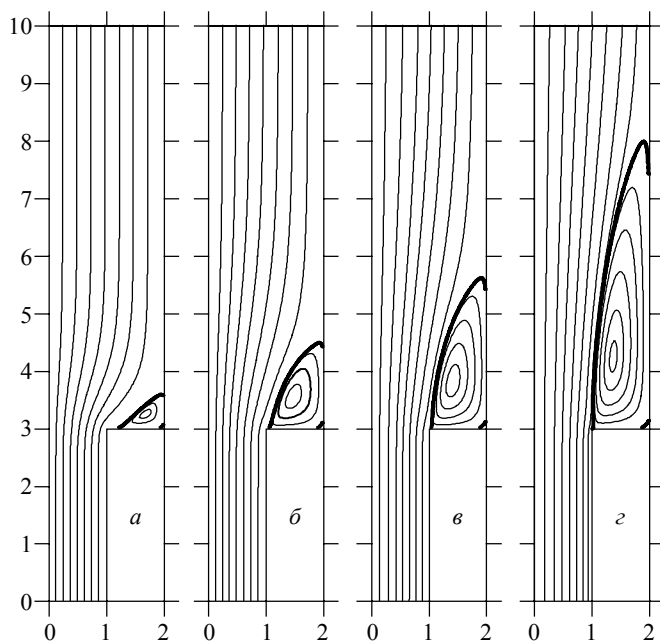


Рис. 5. Структура течения в окрестности циркуляционных зон при $Se = 0$ и $k = 1$: a – $Re = 1$, b – $Re = 10$, v – $Re = 20$, z – $Re = 40$

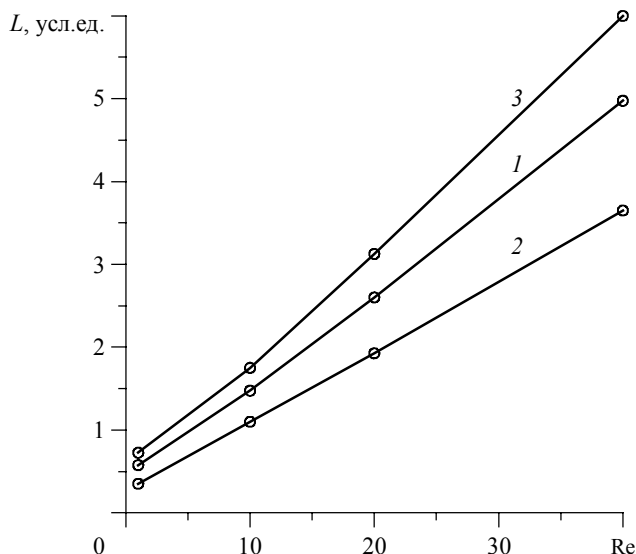


Рис. 6. Зависимость длины циркуляционной зоны от числа Рейнольдса при $Se = 1$: 1 – $k = 1$, 2 – $k = 0.6$, 3 – $k = 1.4$

На рис. 7 представлена картина течения для псевдопластичной жидкости, качественно совпадающая с таковой для ньютоновской жидкости. Видно, что в центре циркуляционной зоны и на плоскости симметрии (в областях одномерного течения) локализуются зоны повышенной вязкости. Кинематический характер течения качественно совпадает с ньютоновским случаем. Усиление псевдопластичных свойств приводит к росту интенсивности поперечного движения в области двумерного течения, наряду с ее увеличением.

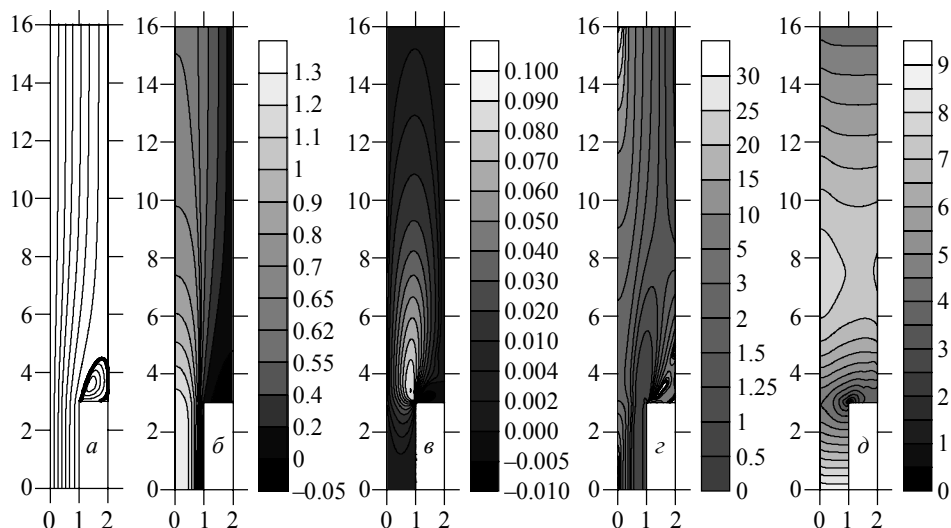


Рис. 7. Картина течения при $Re = 20$, $k = 0.4$ и $Se = 0$: а – линии тока, б – поле продольной скорости, в – поле поперечной скорости, г – поле вязкости, д – поле давления

Влияние степени нелинейности жидкости на структуру течения исследовалось в диапазоне значений $0.4 \leq k \leq 2$ и показано на рис. 8. На рис. 9 представлена аппроксимирующая кривая длины циркуляционной зоны L от степени нелинейности.

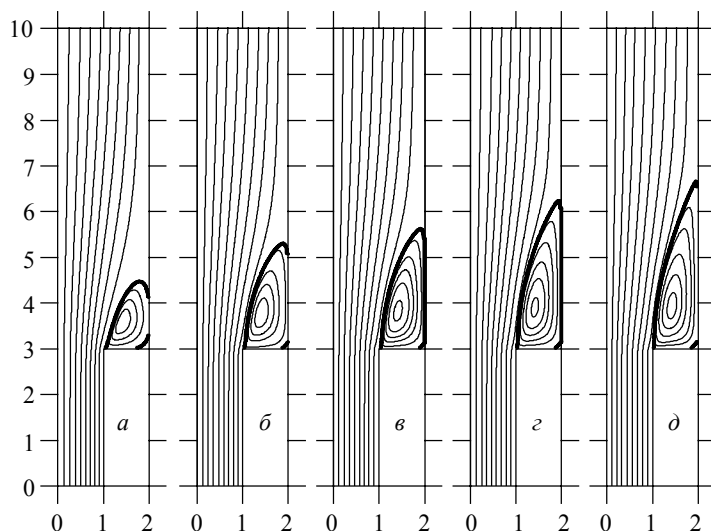


Рис. 8. Структура течения в области двумерного течения:
 $a - k = 0.4$, $б - k = 0.7$, $в - k = 1$, $г - k = 1.5$, $д - k = 2$

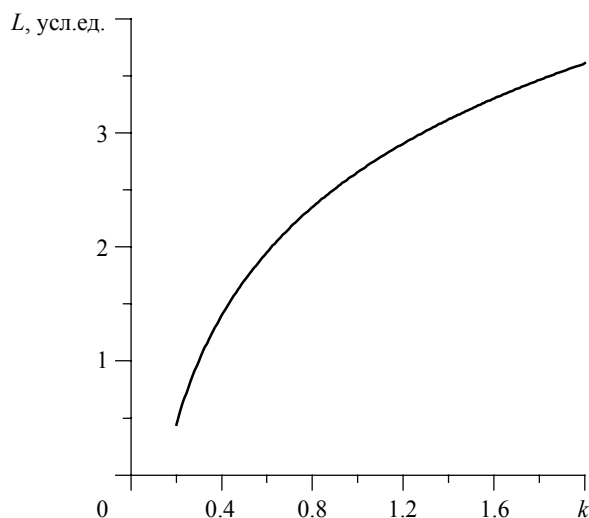


Рис. 9. Зависимость длины циркуляционной зоны от степени нелинейности при $Re = 20$ и $Se = 0$

На рис. 10 показаны распределения продольной скорости и вязкости в сечении канала, проходящем через центр циркуляционной зоны для различных степеней нелинейности. Для дилатантной жидкости с ростом k кинематика течения в об-

ласти двумерного течения меняется слабо. В случае течения псевдопластичной среды с уменьшением k в области расширения наблюдается значительный рост значений вязкости, наряду с уменьшением величины скорости. При $k = 0.4$ жидкость практически покоится. Зависимость длины циркуляционной зоны от k имеет нелинейный характер.

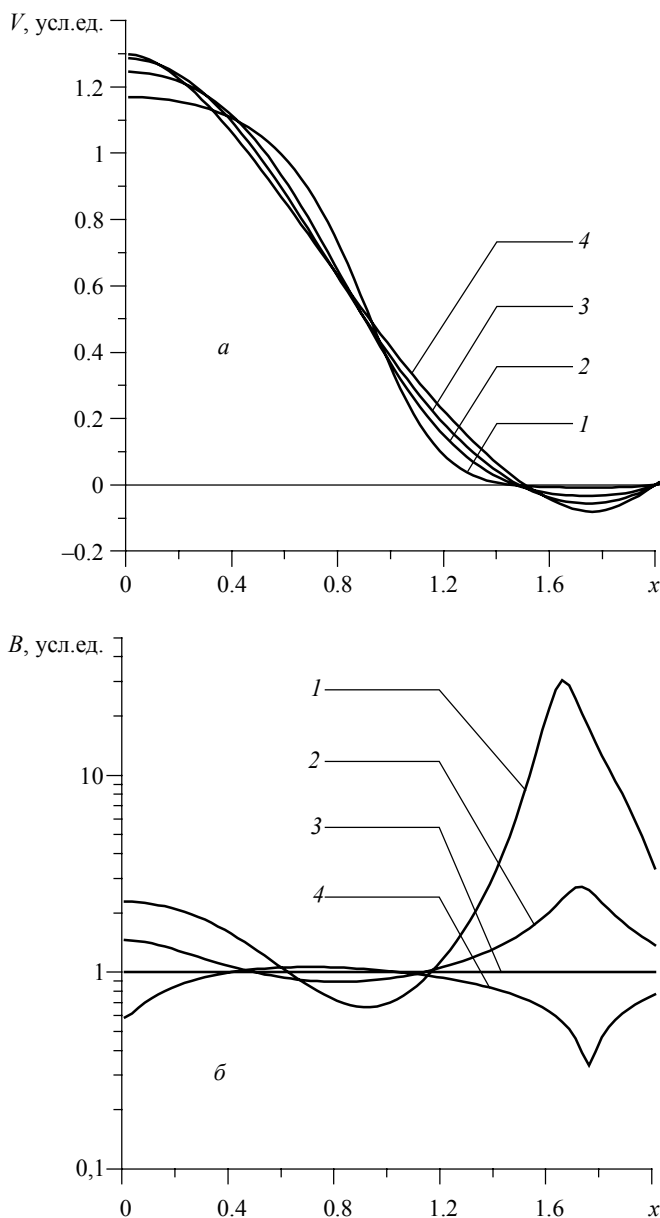


Рис. 10. Распределение скорости (а) и вязкости (б) в сечении, проходящем через центр циркуляционной зоны: 1 – $k = 0.4$, 2 – $k = 0.7$, 3 – $k = 1.0$, 4 – $k = 1.5$

Далее проводились исследования течений жидкости Шведова – Бингама, для которой характерно образование квазитвердых ядер в областях малых скоростей деформаций. На рис. 11 показаны квазитвердые ядра и линии тока для различных параметров вязкопластичности Se . Местоположение квазитвердых ядер соответствует разделению потока на зоны одномерного и двумерного течений. С увеличением Se наблюдаются формирование застойной зоны в окрестности скачка сечения и увеличение размеров квазитвердых ядер в областях одномерного течения, при этом продольные размеры зоны двумерного движения уменьшаются. При этом, начиная со значения $Se = 1$, дальнейшее его увеличение практически не влияет на размеры застойной зоны. Регуляризация реологической модели позволяет проводить расчеты без явного выделения границы ядер, что в данном случае приводит к формированию ненулевого поля скоростей в застойной зоне. Однако максимальное значение модуля скорости не превышает 0.002.

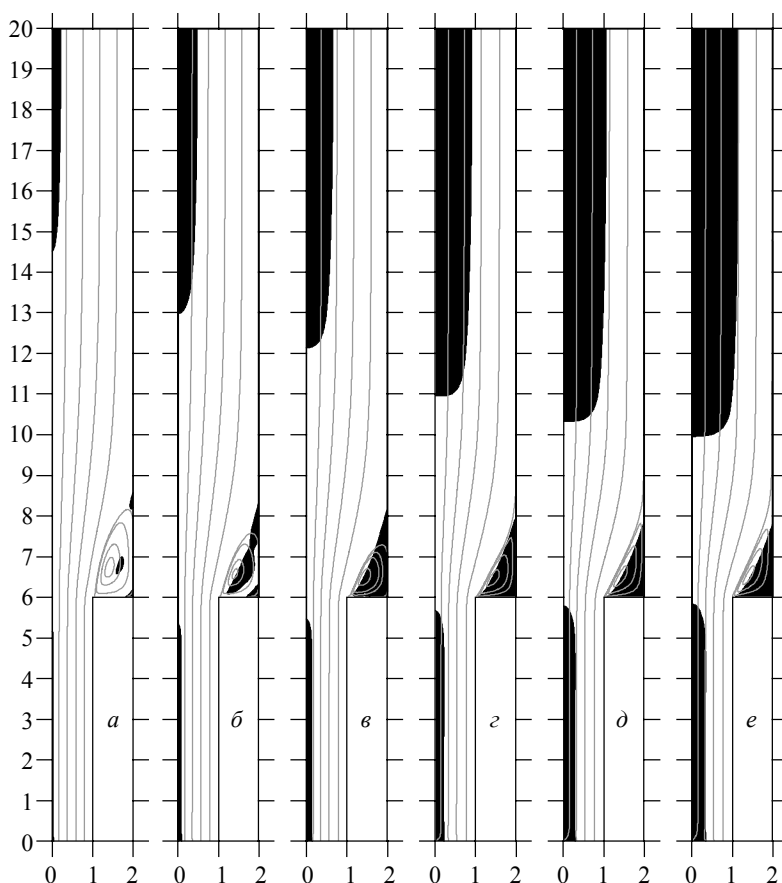


Рис. 11. Распределение линий тока и квазитвердых ядер при $Re = 20$ и $k = 1$:
 $a - Se = 0.1$, $b - Se = 0.3$, $c - Se = 0.5$, $d - Se = 1.0$, $e - Se = 2.0$

На рис. 12 показаны размеры и местоположение квазитвердых ядер для различных чисел Рейнольдса. Наблюдается увеличение зоны двумерного течения и продольных размеров застойной зоны при увеличении Re . Влияние параметра

нелинейности k в случае течения жидкости с пределом текучести показано на рис. 13.

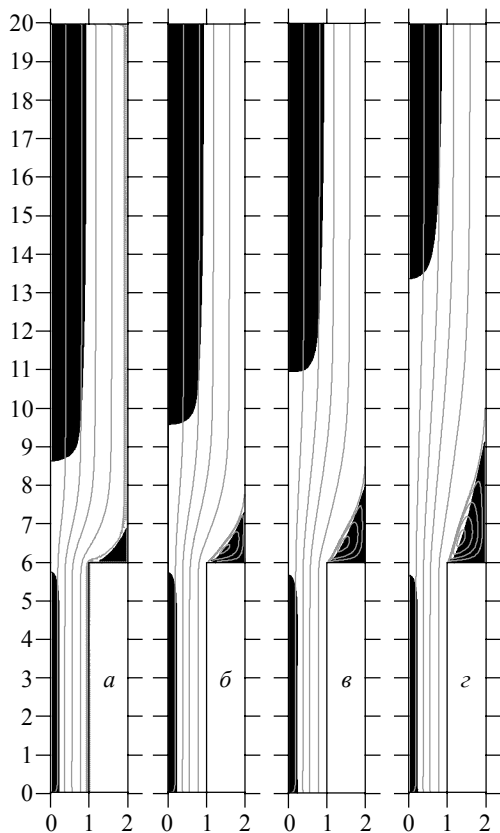


Рис. 12. Зависимость формы квазитвердых ядер от Re при $k = 1$ и $Se = 1$: $a - Re = 1$, $б - Re = 10$, $в - Re = 20$, $г - Re = 40$

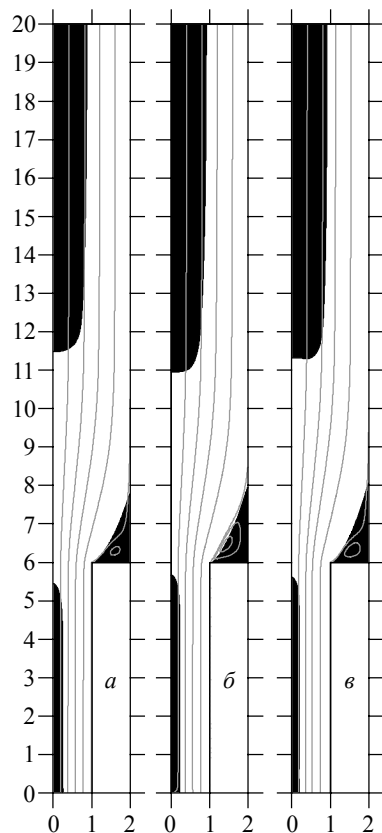


Рис. 13. Зависимость формы квазитвердых ядер от k при $Re = 20$ и $Se = 1$: $a - k = 0.8$, $б - k = 1$, $в - k = 1.2$

Заключение

Сформулирована математическая постановка задачи о стационарном течении неньютоновской жидкости в канале с внезапным расширением и предложена численная методика ее решения. Показано наличие в потоке трех зон: одномерного движения в окрестности входа; одномерного движения в окрестности выхода; двумерного движения в области скачка сечения, которое характеризуется наличием циркуляционной зоны. Продемонстрирована линейная зависимость продольных размеров последней в зависимости от числа Рейнольдса в диапазоне $1 \leq Re \leq 40$. В случае течения степенной жидкости зависимость $L(k)$ имеет нелинейный характер при изменении k в пределах от 0.4 до 2. Для течений жидкостей с пределом текучести показано наличие квазитвердых ядер вблизи плоскости симметрии в зонах одномерного движения и застойных участков в области скачка сечения. Исследовано влияние параметра вязкопластичности в диапазоне $0 \leq Se \leq 5$ на картину течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Patel S.A., Chhabra R.P. Steady flow of Bingham plastic fluids past an elliptical cylinder // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 202. P. 32–53.
2. Ying-Hsin Wua, Ko-Fei Liu. Start-up flow of a Bingham fluid between two coaxial cylinders under a constant wall shear stress // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 223. P. 116–121.
3. Yiolanda Damianou, Georgios C. Georgiou, Irene Moulitsas. Combined effects of compressibility and slip in flows of a Herschel – Bulkley fluid // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 193. P. 89–102.
4. Ferrás L.L., Afonso A.M., Alves M.A., Nóbrega J.M., Carneiro O.S., Pinho F.T. Slip flows of Newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2014. No. 214. P. 28–37.
5. Fernanda B. Link, Sérgio Frey, Roney L. Thompson, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Plane flow of thixotropic elasto-viscoplastic materials through a 1:4 sudden expansion // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 220. P. 162–174.
6. Primož Ternik. Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of purely viscous shear-thinning fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2009. No. 157. P. 15–25.
7. Dhinakaran S., Oliveira M.S.N., Pinho F.T., Alves M.A. Steady flow of power-law fluids in a 1:3 planar sudden expansion // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 198. P. 48–58.
8. Lober Hermany, Daniel Dall'Onder dos Santos, Sérgio Frey, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Flow of yield-stress liquids through an axisymmetric abrupt expansion-contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 201. P. 1–9.
9. Coussot P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2014. No. 211. P. 31–49.
10. Pérez-Camacho M., López-Aguilar J.E., Calderas F., Manero O., Webster M.F. Pressure-drop and kinematics of viscoelastic flow through an axisymmetric contraction – expansion geometry with various contraction-ratios // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 222. P. 260–271.
11. Stéphane Mossaz, Pascal Jay, Albert Magnin. Experimental study of stationary inertial flows of a yield-stress fluid around a cylinder // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2012. No. 189–190. P. 40–52.
12. Ovarlez G., Cohen-Addad S., Krishan K., Goyon J., Coussot P. On the existence of a simple yield stress fluid behavior // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. No. 193. P. 68–79.
13. Maillard M., Boujlel J., Coussot P. Flow characteristics around a plate withdrawn from a bath of yield stress fluid // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. No. 220. P. 33–43.
14. Смольский Б.М., Шульман З.П., Гориславец В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. Минск: Наука и техника, 1970.
15. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
16. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
17. Frigaard, C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2005. No. 127. P. 1–26.

Статья поступила 15.12.2015 г.

Borzenko E.I., Khagai E.I. NUMERICAL SIMULATION OF THE STEADY-STATE HERSCHEL-BULKLEY FLUID FLOW IN A CHANNEL WITH SUDDEN EXPANSION

DOI 10.17223/19988621/39/8

In this paper, the steady-state flow of a non-Newtonian fluid in a planar channel with sudden expansion is investigated. The rheological behavior of this media is described by the Herschel – Bulkley model. To determine the static velocity and pressure fields, a numerical algorithm based on the relaxation method and SIMPLE procedure are used. The MPI technique of parallel pro-

gramming is used to accelerate the computation. Regularization of the rheological model is used to provide algorithm stability and limit viscosity increase at low deformation rates.

The mathematical problem statement involves non-dimensional parameters: the Reynolds number, Bingham number (non-dimensional viscoplasticity parameter), and power-law index. We report results of numerical simulation in a range of $1 \leq \text{Re} \leq 40$ for the Reynolds number, $0 \leq \text{Se} \leq 2$ for the Bingham number, and $0.4 \leq k \leq 2$ for the power-law index (shear thinning and shear thickening fluids).

Main characteristic distribution of the fluid flow with a two-dimensional localization in the expansion zone is presented. The impact of main parameters of the problem on the dead zone distribution in the fluid flow is shown.

Keywords: fluid flow, channel with sudden expansion, numerical simulation, Herschel–Bulkley model, dead zone.

HEGAJ Efim Igorevich (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: efim_h@ftf.tsu.ru

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Patel S.A., Chhabra R.P. Steady flow of Bingham plastic fluids past an elliptical cylinder. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 202, pp. 32–53.
2. Ying-Hsin Wua, Ko-Fei Liu. Start-up flow of a Bingham fluid between two coaxial cylinders under a constant wall shear stress. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 223, pp. 116–121.
3. Yiolanda Damianou, Georgios C. Georgiou, Irene Moulitsas. Combined effects of compressibility and slip in flows of a Herschel – Bulkley fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 193, pp. 89–102.
4. Ferrás L.L., Afonso A.M., Alves M.A., Nóbrega J.M., Carneiro O.S., Pinho F.T. Slip flows of Newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, no. 214, pp. 28–37.
5. Fernanda B. Link, Sérgio Frey, Roney L. Thompson, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Plane flow of thixotropic elasto-viscoplastic materials through a 1:4 sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 220, pp. 162–174.
6. Primož Ternik. Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of purely viscous shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2009, no. 157, pp. 15–25.
7. Dhinakaran S., Oliveira M.S.N., Pinho F.T., Alves M.A. Steady flow of power-law fluids in a 1:3 planar sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 198, pp. 48–58.
8. Lober Hermany, Daniel Dall'Onder dos Santos, Sérgio Frey, Mônica F. Naccache, Paulo R. de Souza Mendes. Flow of yield-stress liquids through an axisymmetric abrupt expansion-contraction. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 201, pp. 1–9.
9. Coussot P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, no. 211, pp. 31–49.
10. Pérez-Camacho M., López-Aguilar J.E., Calderas F., Manero O., Webster M.F. Pressure-drop and kinematics of viscoelastic flow through an axisymmetric contraction – expansion geometry with various contraction-ratios. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 222, pp. 260–271.
11. Stéphane Mossaz, Pascal Jay, Albert Magnin. Experimental study of stationary inertial flows of a yield-stress fluid around a cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2012, no. 189–190, pp. 40–52.
12. Ovarlez G., Cohen-Addad S., Krishan K., Goyon J., Coussot P. On the existence of a simple yield stress fluid behavior. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, no. 193, pp. 68–79.

13. Maillard M., Boujlel J., Coussot P. Flow characteristics around a plate withdrawn from a bath of yield stress fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, no. 220, pp. 33–43.
14. Smol'skiy B.M., Shul'man Z.P., Gorislavets V.M. *Reodinamika i teploobmen nelineynyovyazkoplastichnykh materialov*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1970. (in Russian)
15. Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S. *Raznostnye skhemy*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 440 p. (in Russian)
16. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 152 p. (in Russian)
17. Frigaard, C. Nouar. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, no. 127, pp. 1–26.

УДК 678

DOI 10.17223/19988621/39/9

В.А. Мартынов, К.А. Пасечник, А.Ю. Власов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРОПИТКИ НИЗКОВЯЗКИМ ОРГАНИЧЕСКИМ СВЯЗУЮЩИМ УГЛЕРОДНОЙ АРМИРУЮЩЕЙ ТКАНИ САТИНОВОГО ПЛЕТЕНИЯ¹

Рассмотрен вопрос порообразования в процессе пропитки низковязким связующим армирующего слоя углеродной ткани четырехремизного сатинового плетения. Показаны параметры, влияющие на тип и размеры, образующихся пор. Проведена оценка капиллярных сил в зависимости от архитектурных параметров тканого наполнителя. Определен оптимальный интервал скоростей пропитки армирующего слоя при трансферном формовании изделия из полимерного композиционного материала, позволяющий минимизировать порообразование в структуре получаемого ламината.

Ключевые слова: космическая техника, полимерные композиционные материалы, трансферное формование, пористость, порообразование, капиллярное число.

При мелкосерийном производстве прецизионных изделий и элементов конструкций сложной формы из полимерных композиционных материалов для космической техники эффективен метод трансферного формования (Resin Transfer Molding – RTM). Для обеспечения надлежащего уровня качества выпускаемых изделий данным методом необходима разработка надежного технологического процесса. В первую очередь необходимо определить входные параметры процесса на основе используемых исходных материалов, границы допустимых изменений этих параметров для достижения определенного значения выбранного выходного параметра [1].

При выборе типа армирующего материала как одного из входных параметров руководствуются рядом требований, таких, как обеспечение необходимого уровня прочностных показателей детали, простота и минимальная трудоемкость переработки, возможность изготовления деталей сложной формы. Ввиду своей технологичности, обеспечивающей оптимальный баланс между стоимостью материала и простотой его переработки, в настоящее время для RTM-приложений часто применяются тканые волокнистые материалы. Повышенный интерес при изготовлении деталей сложной формы проявляется к армирующим тканям четырехремизного сатинового плетения, обусловленный их универсальностью и эффективностью решения многих задач, ввиду сохранения оптимального баланса между прочностными свойствами углеродных нитей и технологичностью переработки. Из-за пористой структуры тканей композиционный материал будет также обладать определенной величиной пористости. В современных работах [2, 3] принято классифицировать поры в ламинате в зависимости от их размера и принимать величину пористости за основной выходной параметр – параметр качества композиционной детали, поскольку увеличение содержания пор приводит к существенной деградации механи-

¹ Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, государственный контракт №2.G2531.0043.

ческих свойств конечного изделия [4]. Различают микропоры величиной от 10 до 50 мкм, образующиеся между элементарными волокнами нити, мезопоры величиной 0.5–1.0 мм, расположенные между сплетенными нитями и макропоры, вызванные глобальными нарушениями процесса пропитки, неправильным проектированием технологической оснастки или ее дефектами (рис. 1).



Рис. 1. Образование пор в ламинате при дефектах оснастки

Пористость может быть снижена путем оптимизации процесса пропитки с помощью модифицированного капиллярного числа [5, 6]. Практически вопрос решается проведением большого числа экспериментов и измерений, что сказывается на надежности получаемых результатов. Альтернативный путь – это применение аналитических моделей, связывающих тип плетения, структуру пористости, содержание волокна тканых материалов с их проницаемостью и объясняющих математически возможность формирования пор.

Современные коммерческие тканые материалы обладают существенными структурными отличиями, поэтому каждая ткань представляет собой набор собственных параметров, отличных от других тканей, таких, как пористость и проницаемость армирующего пакета. В этой связи целью данной работы являлось исследование ткани четырехремизного сатинового плетения и определение оптимальных скоростей процесса пропитки армирующего слоя, отвечающих минимальной пористости ламината, вычисленных через архитектурные параметры тканого наполнителя.

Теория образования пор в процессе пропитки армирующего слоя рассматривает ткань как совокупное множество элементарных ячеек, подразделяющихся на два типа доменов. К внутринитевому домену относится пространство внутри нити и пространство между нитью и поверхностью технологической оснастки; межнитевой домен образован пространством при переплетении нитей основы и утка. В течение процесса подачи связующего в полость технологической оснастки вязкие силы доминируют в мезопорах, в то время как капиллярные силы определяют взаимодействие ткани со связующим компонентом на микроуровне, поскольку капиллярное давление обратно пропорционально размеру пор. Скорости пропитки

внутринитевого и межнитевого доменов определяют тип образующихся пор. В случае превалирования скорости пропитки внутринитевого домена над межнитевой скоростью воздух захватывается между нитями ткани – образуются преимущественно мезопоры, в противоположном случае – при доминировании скорости пропитки межнитевого домена образуются микропоры [7]. Полученное с помощью оптического микроскопа изображение ламината (рис. 2) иллюстрируют образование мезопор в области переплетения нитей основы и утка.

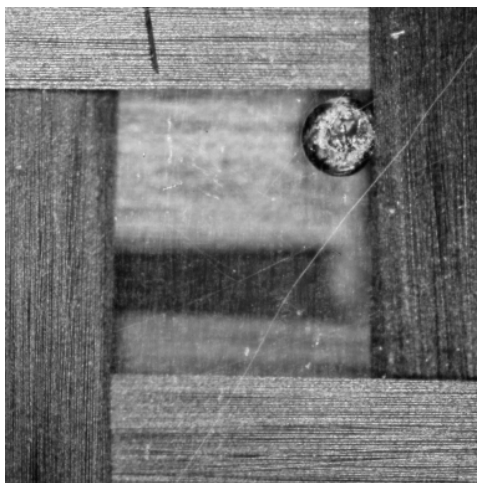


Рис. 2. Образование мезопоры в области переплетения нитей основы и утка

При выполнении вычислений принимают допущение о равномерной пористости домена. Скорость пропитки связующим вдоль внутринитевого u_L и межнитевого U доменов определяется уравнением Дарси с учетом капиллярного характера движения жидкости в пористой среде для внутринитевого домена:

$$u_L = -\frac{k_L}{\mu\Phi_L'} \left(\frac{dP}{dn} - \frac{P_{c,L}}{l_L} \right); \quad (1)$$

$$U = -\frac{K_L}{\mu\Phi_L} \left(\frac{dP}{dn} \right), \quad (2)$$

где l_L – длина домена вдоль направления пропитки, Φ_L' – пористость домена, $P_{c,L}$ – капиллярное давление, K_L – проницаемость межнитевого домена, Φ_L – пористость тканого материала, dP/dn – градиент давления.

Для оценки скорости импрегнирования доменов необходимо знать проницаемость каждого из них. При течении потока связующего вдоль внутринитевого домена k_L и перпендикулярно домену k_T проницаемость пористой среды соответствует уравнениям

$$k_T = \frac{(h_T k_{\text{axial}} + h_L k_{\text{cross}})}{H}, \quad k_L = \frac{(h_L k_{\text{axial}} + h_T k_{\text{cross}})}{H}, \quad (3)$$

где H – высота полости технологической оснастки для укладки армирующего пакета, h_L – толщина нити основы, h_T – толщина нити утка, k_{axial} , k_{cross} – проницаемо-

сти нити при движении фронта потока в направлении вдоль нити и перпендикулярно к ней соответственно.

Проницаемости нитей определяются исходя из модели Гебарта [8] как функции объемного содержания волокна, принимая форму упаковки элементарных волокон в нити как гексагональную

$$k_{\text{axial}} = \frac{8r^2}{C_{\text{axial}}} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad k_{\text{cross}} = C_{\text{cross}} r^2 \left(\sqrt{\frac{V_{f\text{max}}}{1-\phi}} - 1 \right)^{5/2}, \quad (4)$$

где $C_{\text{axial}} = 53$, $C_{\text{cross}} = \frac{16}{9\pi\sqrt{6}}$, $V_{f\text{max}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \phi$, ϕ – пористость нити, r – радиус волокна.

Пористость внутринитевого домена, необходимая для расчета скорости пропитки, определяется следующим образом:

$$\phi'_L = 1 - \frac{h_L}{H} (1 - \phi_L), \quad (5)$$

где ϕ_L – пористость нити основы, h_L – высота нити основы, H – высота полости оснастки.

Капиллярное давление ($P_{c,L}$), определяется из уравнения Юнга – Лапласа и записывается как

$$P_{c,L} = \frac{2\gamma \cos \theta}{r_{c,L}}, \quad (6)$$

где γ – поверхностное натяжение связующего, θ – контактный угол между связующим и волокном, $r_{c,L}$ – капиллярный радиус, определяемый как

$$r_{c,L} = \frac{\phi'_L}{(1-\phi'_L)} r.$$

Доля пор в ламинате, вызванная захватом воздуха в межнитевом домене, может быть определена из выражения, полученного авторами [7], исходя из представлений о доменной структуре ткани:

$$V_f = \left[1 - \frac{K_L}{\Phi_L} \left[\left(\frac{\phi'_L}{k_L} + \frac{\phi'_T}{k_L} \right) - \frac{K_L}{\mu \Phi_L U} \left\{ \frac{\phi'_L P_{c,L}}{k_L L_L} \ln \left(1 + \frac{\mu \Phi_L U L_L}{K_L P_{c,L}} \right) + \frac{\phi'_T P_{c,T}}{k_T (L_T/2)} \log \left(1 + \frac{\mu \Phi_L (L_T/2) U}{K_L P_{c,T}} \right) \right\} \right] \right] \Phi, \quad (7)$$

где Φ – доля межнитевого домена в структуре ткани.

В качестве исследуемого материала в работе использовалась углеродная ткань артикула 3198 (Porcher Ind., Франция) с плетением 4HS – четырехремизный сатин, данные по геометрии ткани были получены с использованием оптического микроскопа. Расстояние между нитями и ширина нитей определялись на не менее 5 участках ткани, для расчетов использовались средние значения. На лицевой поверхности сатина преобладают уточные нити. В четырехремизном сатине каждая основная нить выходит только один раз на лицевую поверхность, затем уходит под три уточные нити. Каждая нить ткани состоит из 3000 штук элементарных волокон диаметром 7 мкм каждая.

Строение четырехремизного сатинового переплетения предусматривает наличие в каждой точке ткани в направлении толщины, за исключением областей между переплетениями, по две нити – основы и утка. При изготовлении детали толщиной 0.001 м^2 , состоящей из 5 слоев ткани, в направлении толщины расположено 10 нитей, поэтому на одну нить приходится 0.0001 м^2 пространства полости технологической оснастки.

Принимая, что элементарные волокна в нити упакованы в гексагональную структуру, рассчитана площадь элементарного волокна и нити с необходимым числом волокон. Минимальная площадь, которую может занимать нить ткани 3198, равна $1.27\cdot 10^{-7}\text{ м}^2$. Исходя из реальных размеров нити и допуская, что нить имеет прямоугольное сечение, определена реальная площадь нити равная $1.85\cdot 10^{-7}\text{ м}^2$. Все измеренные и расчетные параметры приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Измеренные геометрические параметры армирующей ткани

№ п/п	Измеренная величина	Значение
1	Ширина нити основы A , м	$1.88\cdot 10^{-3}$
2	Ширина нити утка B , м	$2.03\cdot 10^{-3}$
3	Диаметр волокна r_f , м	$7.00\cdot 10^{-6}$
4	Площадь всех волокон в нити S_f , м^2	$1.27\cdot 10^{-7}$

Таблица 2

Вычисленные геометрические параметры армирующей ткани

№ п/п	Вычисленная величина	Значение
1	Площадь волокна S_f , м^2	$3.85\cdot 10^{-11}$
2	Площадь нити основы S_{L_s} , м^2	$1.85\cdot 10^{-7}$
3	Площадь нити утка S_{T_s} , м^2	$2.02\cdot 10^{-7}$
4	Пористость нити основы ϕ_L	0.38
5	Пористость нити утка ϕ_T	0.43
6	Толщина нити основы h_{L_s} , м	0.0001
7	Толщина нити утка h_{T_s} , м	0.0001
8	Проницаемость нити основы при движении потока вдоль основы k_{axial} , м^2	$2.53\cdot 10^{-13}$
9	Проницаемость нити утка при движении потока вдоль утка k_{axial} , м^2	$4.56\cdot 10^{-13}$
10	Проницаемость нити основы при движении потока перпендикулярно основе k_{cross} , м^2	$3.50\cdot 10^{-12}$
11	Проницаемость нити утка при движении потока перпендикулярно утку k_{cross} , м^2	$4.34\cdot 10^{-12}$
12	Проницаемость домена при движении потока вдоль нити основы k_L , м^2	$1.76\cdot 10^{-13}$
13	Проницаемость домена при движении потока вдоль нити утка k_T , м^2	$2.56\cdot 10^{-13}$
14	Пористость внутринитевого домена; основа ϕ'_L и уток ϕ'_T	0.69 0.72
15	Капиллярный радиус; основа $r_{c,L}$ и уток $r_{c,T}$, м	$7.72\cdot 10^{-6}$ $8.80\cdot 10^{-6}$
16	Капиллярное давление; основа $P_{c,L}$ и $P_{c,T}$ уток, Па	$8.24\cdot 10^3$ $7.23\cdot 10^3$

Различие геометрических параметров нитей основы и утка ткани 3198 обусловлено особенностями процесса ткачества. Отклонение геометрических параметров ткани от теоретических, модельных представлений оказывает влияние на процесс пропитки материала и образование пор в структуре ламината. С целью получения оптимальной скорости пропитки ламината были изготовлены экспериментальные образцы материала с соотношением наполнитель – матрица 55.45 – 47.55 % и определена проницаемость армирующего материала, которая составила $6.51 \cdot 10^{-10}$ м. Определение проницаемости сводилось к регистрации времени и положения фронта связующего при пропитке армирующего материала вдоль нитей основы. При этом вязкость связующего не изменялась в течение времени пропитки и составляла 0.1 Па·с. Процесс пропитки проводился при градиентах давлений от $0.85 \cdot 10^5$ до $0.36 \cdot 10^5$ Па. По выражению (7) оценена теоретическая доля возможной пористости и построена зависимость скорости пропитки от содержаний пор в ламинате, показанная на рис. 3.

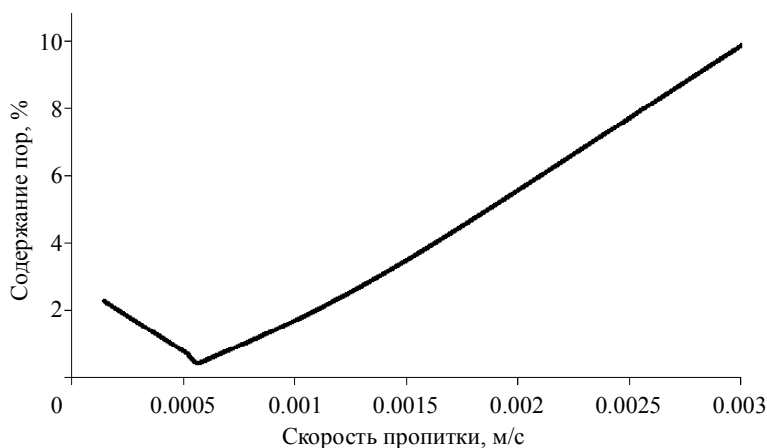


Рис. 3. Зависимость образования пористости в структуре ламината при различных скоростях пропитки

Таким образом, теоретически минимальную пористость возможно получить при поддержании скорости пропитки на уровне $5.7 \cdot 10^{-4}$ м/с, что соответствует ранее заявленным значениям для пропитки других материалов [9]. Изготовленный ранее образец, для которого справедлива данная скорость, также обладал минимальной пористостью. Из вышесказанного следует, что задача получения качественной пропитки материала сводится к обеспечению расчетных скоростей пропитки материала путем поддержания однородности укладки армирующего материала, то есть поддержаний однородной проницаемости по всей геометрии преформы, а также путем изготовления точных технологических оснасток, позволяющих проводить процесс пропитки без изменения их форм и размеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А.Ю., Пасечник К.А., Мартынов В.А. Определение диапазонов изменения ключевых параметров, обеспечивающих стабильность технологического процесса производства изделий сложной формы из полимерных композиционных материалов методом RTM // Вестник СибГАУ. 2014. № 4(56). С. 202–208.

2. Yanga B., Jina T., Bia F., et al. Influence of fabric shear and flow direction on void formation during resin transfer molding // *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2015. V. 68. P. 10–18.
3. Ravey C., Ruiz E., Trochu F. Determination of the optimal impregnation velocity in Resin Transfer Molding by capillary rise experiments and infrared thermography // *Composites. Science and Technology*. 2014. V. 99. P. 96–102.
4. Lee C.-L., Wei K.-H. Resin transfer molding (RTM) process of a high performance epoxy resin. II: Effects of process variables on the physical, static and dynamic mechanical behavior // *Polymer Engineering & Science*. 2000. V. 40. I. 4. P. 935–943.
5. Leclerc J.B., Ruiz E. Porosity reduction using optimized flow velocity in Resin Transfer Molding // *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2008. V. 39. I. 12. P. 1859–1868.
6. LeBel F., Fanaei A.E., Ruiz É., et al. Prediction of optimal flow front velocity to minimize void formation in dual scale fibrous reinforcements // *Intern. J. Material Forming*. 2014. V. 7. I. 1. P. 93–116.
7. Matsuzakia R., Setob D., Todorokib A., et al. Void formation in geometry–anisotropic woven fabrics in resin transfer molding // *Advanced Composite Materials*. 2014. V. 23. No. 2. P. 99–114.
8. Gebart BR. Permeability of unidirectional reinforcements for RTM // *J. Composite Materials*. 1992. No. 26(8). P. 1100–1133.
9. Park C.H., Lee W.I. Modeling Void Formation and Unsaturated Flow in Liquid Composite Molding Processes: a Survey and Review // *J. Reinforced Plastics and Composites*. 2011. V. 30. P. 957–977.

Статья поступила 25.12.2015 г.

Martinov V. A., Pasechnik K. A., Vlasov A. Yu. DETERMINING THE RATES OF IMPREGNATION BY A LOW-VISCOUS ORGANIC BINDER FOR A CARBON REINFORCING SATIN WEAVE FABRIC

DOI 10.17223/19988621/39/9

In this article, we consider the question about the pore formation during impregnation of a reinforcing layer of a carbon four-shaft satin weave fabric by a low-viscous organic binder. Parameters having an effect on the type and dimensions of the forming pores, such as material impregnation rate and quality of production accessories, are shown. The capillary forces arising in the process of impregnating the carbon fabric by an organic binder are estimated depending on architectural parameters of fabric threads. These parameters were measured by an optical microscope. To find the permeability of the carbon fiber based fabric filler, experiments establishing the impregnation time for a certain length of the reinforcing material at different pressures were carried out. The optimum range of the reinforcing layer impregnation rates during the transfer molding of products made of a polymer composition material has been determined. This interval of the impregnation rates allows minimizing the formation of pores in the structure of the resulting laminate. The optimum rates were determined using the well-known theory about the intra- and interthread domains and estimation of the optimum impregnation time proceeding from times of filling the intra- and interthread domains. The article is of interest for the development, design, and implementation of the technological process of manufacturing complex shape details of polymer composition materials by transfer molding with the use of such materials.

Keywords: space technology, polymer composites, transfer molding, porosity, evaporation, capillary number.

MARTINOV Vasily Aleksandrovich (Engineer; Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev).
E-mail: martynov.vasily@gmail.ru

PASECHNIK Kirill Arnol'dovich (Engineer; Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev).

E-mail: kir.nik@mail.ru.

VLASOV Anton Yur'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof.; Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev).

E-mail: vlasov.anton@gmail.com.

REFERENCES

1. Vlasov A.Yu., Pasechnik K.A., Martynov V.A. Opredelenie diapazonov izmeneniya klyuchevykh parametrov, obespechivayushchikh stabil'nost' tekhnologicheskogo protsessa proizvodstva izdeliy slozhnoy formy iz polimernykh kompozitsionnykh materialov metodom RTM. *Vestnik SibGAU*, 2014, no. 4(56), pp. 202–208. (in Russian)
2. Yanga B., Jina T., Bia F., et al. Influence of fabric shear and flow direction on void formation during resin transfer molding. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2015, vol. 68, pp. 10–18.
3. Ravey C., Ruiz E., Trochu F. Determination of the optimal impregnation velocity in Resin Transfer Molding by capillary rise experiments and infrared thermography. *Composites. Science and Technology*, 2014, vol. 99, pp. 96–102.
4. Lee C.-L., Wei K.-H. Resin transfer molding (RTM) process of a high performance epoxy resin. II: Effects of process variables on the physical, static and dynamic mechanical behavior. *Polymer Engineering & Science*, 2000, vol. 40. I. 4, pp. 935–943.
5. Leclerc J.B., Ruiz E. Porosity reduction using optimized flow velocity in Resin Transfer Molding. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2008, vol. 39. I. 12, pp. 1859–1868.
6. LeBel F., Fanaei A.E., Ruiz É., et al. Prediction of optimal flow front velocity to minimize void formation in dual scale fibrous reinforcements. *Intern. J. Material Forming*, 2014, vol. 7. I. 1, pp. 93–116.
7. Matsuzakia R., Setob D., Todorokib A., et al. Void formation in geometry–anisotropic woven fabrics in resin transfer molding. *Advanced Composite Materials*, 2014, vol. 23, no. 2, pp. 99–114.
8. Gebart BR. Permeability of unidirectional reinforcements for RTM. *J. Composite Materials*, 1992, no. 26(8), pp. 1100–1133.
9. Park C.H., Lee W.I. Modeling Void Formation and Unsaturated Flow in Liquid Composite Molding Processes: a Survey and Review. *J. Reinforced Plastics and Composites*, 2011, vol. 30, pp. 957–977.

УДК: 533.6.071.2, 629.7.035.7, 51-74
DOI 10.17223/19988621/39/10

Е.В. Пикущак, Л.Л. Миньков

МЕТОД РАСЧЕТА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ОСЕВОГО ВЕНТИЛЯТОРА¹

На основе численного моделирования с использованием вычислительного пакета Ansys-Fluent проводится оценка аэродинамического коэффициента полезного действия одноступенчатого осевого вентилятора, состоящего из ротора и спрямляющего аппарата. Показывается влияние скорости вращения ротора и положения рабочих лопаток ротора на объемный расход воздуха, перепад статического давления, коэффициент полезного действия вентилятора и на зависимость перепада давления от объемного расхода.

Ключевые слова: *осевой вентилятор, коэффициент полезного действия, численное моделирование, согласующие функции.*

В инженерных методиках, используемых для расчета осевых вентиляторов на стадии их проектирования, прибегают к определенным допущениям [1, 2], позволяющим, с одной стороны, упростить вычисления, а с другой – в целом правильно оценить основные характеристики вентилятора. Дальнейшее уточнение характеристик производится путем введения поправочных коэффициентов, получаемых из имеющейся экспериментальной базы данных [1, 3]. Для вновь создаваемых вентиляторов необходимо проведение серии экспериментов на специальных стендах по определению поправочных коэффициентов, в том числе и коэффициента полезного действия, а также по выявлению каких-либо недостатков, имеющих в конструкции создаваемого устройства.

С созданием современных вычислительных пакетов [4] появилась возможность проводить прямое численное моделирование (вычислительные эксперименты) уже имеющихся вентиляторов и адекватно предсказывать их характеристики, что ведет к существенному снижению материальных затрат [5].

Важной характеристикой осевого вентилятора является аэродинамический коэффициент полезного действия, представляющий собой отношение мощности потока воздуха, производимого вентилятором, к мощности момента сил действующего на лопатки рабочего колеса (ротора) вентилятора. Очевидно, что этот коэффициент будет зависеть от скорости вращения ротора, формы лопаток, их числа и угла расположения лопаток по отношению к направляющей вентилятора.

В настоящей работе демонстрируется метод расчета аэродинамического коэффициента полезного действия на примере одноступенчатого осевого вентилятора со спрямляющим аппаратом с использованием прямого численного моделирования на основе вычислительного пакета Ansys-Fluent.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ мол_нр № 15-38-50843.

Физическая модель осевого вентилятора

Рассматривается осевой вентилятор, рис. 1, состоящий из ротора 1, спрямляющего аппарата (СА) 2, направляющей втулки ротора 3, направляющей втулки СА 4 и корпуса 5. Направляющие втулки ротора и СА имеют одинаковый радиус R_1 . Внешний корпус представляет собой трубу радиуса R_2 . На роторе с постоянным шагом расположено N_r рабочих лопаток, высота которых равна $R_2 - R_1$. Угол между окружным направлением и хордой профиля лопатки ротора равен α . Длина хорды лопатки ротора равна b_r , рис. 2, а) На СА с постоянным шагом расположено N_s направляющих лопаток, хорды профилей которых длиной b_s параллельны образующей втулки СА, рис. 2, б).

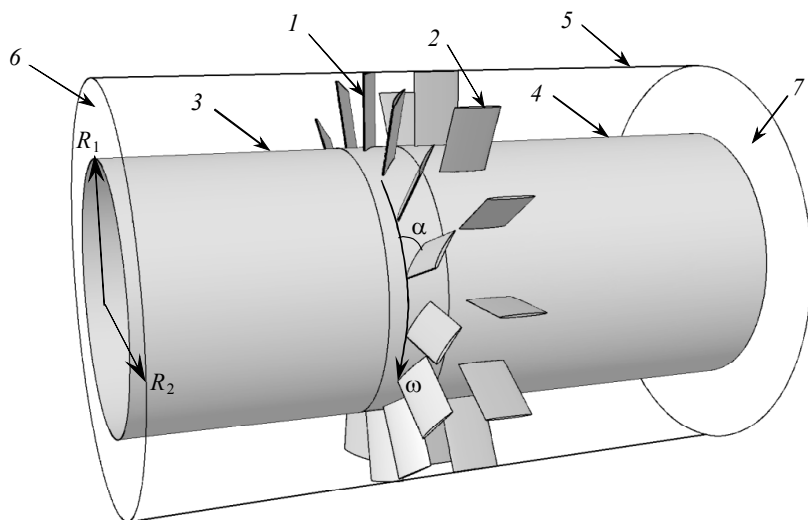


Рис. 1. Осевой вентилятор

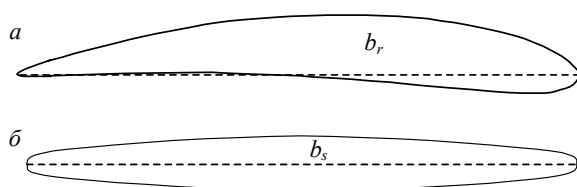


Рис. 2. Формы лопаток: а – рабочая лопатка ротора; б – направляющая лопатка СА

Лопатки ротора, вращаясь с угловой скоростью ω , обеспечивают перемещение воздуха в направлении параллельном образующей втулки (продольное направление), при этом происходит повышение полного давления воздуха. В роторе поток воздуха закручивается и перемещается в СА, где, благодаря направляющим лопаткам, происходит выравнивание направления движения воздуха, при этом повышается его статическое давление [3, 6, 7].

Размеры осевого вентилятора и скорости вращения ротора принимаются равными соответствующему шахтному вентилятору местного проветривания, поэто-

му, в силу низких значений числа Маха, пренебрегаем эффектом сжимаемости и полагаем течение изотермичным.

Математическая модель осевого вентилятора

Поскольку области ротора и СА, свободные для прохода воздуха, имеют периодически повторяющиеся участки (угол периодичности для ротора $2\pi/N_r$ и $2\pi/N_s$ для СА), то рассматривалась следующая геометрическая область, представленная на рис 3.

Для моделирования течения воздуха через осевой вентилятор решается следующая система уравнений вязкого несжимаемого газа, записанная в общем случае, во вращающейся системе координат.

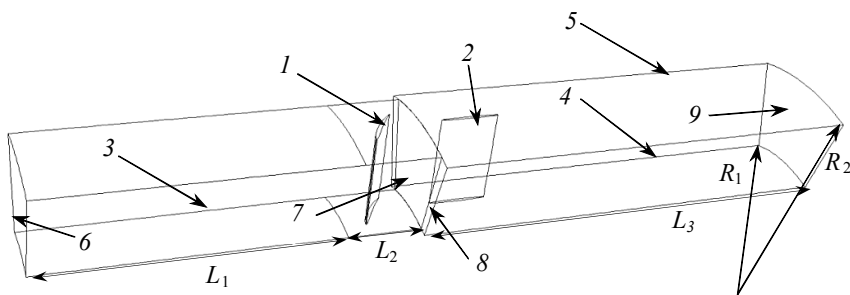


Рис. 3. Геометрическая область моделирования: 1 – лопатка ротора; 2 – лопатка СА; 3 – направляющая ротора; 4 – направляющая СА; 5 – корпус; 6 – входная поверхность ротора; 7 – выходная поверхность ротора; 8 – входная поверхность СА; 9 – выходная поверхность СА

Уравнение сохранения массы смеси

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_r) = 0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения количества движения смеси

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_r \mathbf{V}) + \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ – скорость вращения ротора; $\mathbf{r}$ – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки.

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии

$$\nabla \cdot (\rho k \mathbf{V}_r) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_{\text{turb}}}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k - \rho \varepsilon. \quad (3)$$

Уравнение переноса скорости диссипации турбулентной кинетической энергии

$$\nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{V}_r) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_{\text{turb}}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (4)$$

где $\bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}}$ – эффективный тензор напряжений, $\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\tau}}_{\text{turb}}$; $\bar{\bar{\tau}}_{\text{turb}}$ – турбулентный тензор напряжений, $\mu_{\text{turb}} \left(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \right) - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{U}$; $\bar{\bar{\tau}}$ – тензор вязких напряжений,

$\mu(\nabla V + \nabla V^T)$; μ – динамическая вязкость; μ_{turb} – турбулентная вязкость, $\rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$; G_k – производство турбулентной кинетической энергии вследствие сдвигового течения (действие градиентов скорости), $2\mu_{\text{turb}} S : S$; S – тензор деформаций, $\frac{1}{2}(\nabla V + \nabla V^T)$.

Параметры в системе уравнений (1) – (4) задавались следующими:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44; C_{2\varepsilon} = 1.92; C_\mu = 0.09; \sigma_k = 1.0; \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

Граничные условия для системы уравнений (1) – (4): на входе в область полагалось равенство полного давления газа атмосферному; на выходе из области полагалось равенство статического давления газа атмосферному. На стенках корпуса, ротора и СА задавались условия прилипания: $V_r = 0$. Турбулентные параметры потока на стенке и пристенной области определялись следующим образом:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0; \varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P}.$$

Здесь $\kappa = 0.4187$ – постоянная Кармана; индекс P – относится к центру пристенной ячейки разностной сетки.

Метод решения системы уравнений (1) – (4)

Для решения поставленной задачи привлекался вычислительный пакет Ansys Fluent. Система уравнений (1) – (4) решалась численно с использованием метода Патанкара. Конвективные члены уравнений аппроксимировались с помощью противопоточной схемы второго порядка точности. Согласование полей скорости и давления осуществлялось по алгоритму SIMPLE на сдвинутой сетке.

Для СА система уравнений (1) – (4) решалась в неподвижной системе координат ($\omega = 0$), а для ротора – во вращающейся с угловой скоростью ω относительно продольной оси системы координат. Пересчет параметров с выходной поверхности ротора на входную поверхность СА осуществлялось на основе концепции «поверхности смешения», реализованной в Ansys-Fluent. Согласно этой концепции, из области ротора в область СА передаются профили осредненных параметров полного давления, направляющих косинусов углов вектора скорости в радиальном, тангенциальном и осевом направлениях, турбулентной кинетической энергии и скорости турбулентной диссипации, которые затем используются как входные граничные условия для области СА.

Расчетная область разбивалась на 340 тысяч шестигранных ячеек. Точность расчета контролировалась балансом потоков массы. Число ячеек по высоте лопаток равняется 31. Число ячеек вдоль направляющей втулки статора – 120, вдоль направляющей ротора – 130. Количество ячеек в окружном направлении ротора – 46, в окружном направлении статора – 40. Сетка сгущалась вблизи лопаток статора и ротора.

Результаты численного моделирования работы осевого вентилятора

Расчеты параметров осевого вентилятора проводились при следующих значениях параметров: $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Па·с; $\rho = 1.225$ кг/м³; $R_1 = 225$ мм, $R_2 = 350$ мм, $b_r = 67$ мм; $b_s = 80$ мм; $L_1 = 400$ мм; $L_2 = 100$ мм; $L_3 = 600$ мм; $N_r = 15$, $N_s = 12$; Скорость вращения ротора варьировалась от 500 об/мин до 5000 об/мин.

Величина угла α , определяющего ориентацию рабочей лопатки ротора, варьировалась от 5 до 40° с шагом 5°.

На рис. 4 и 5 приведены результаты расчета перепада статического давления в зависимости от частоты вращения ротора и угла положения рабочей лопатки вентилятора.

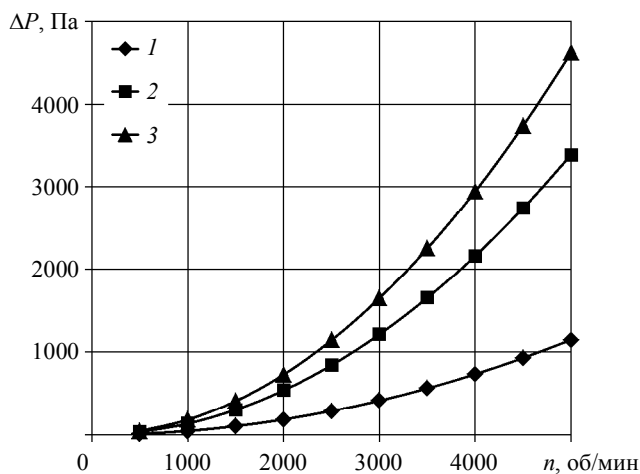


Рис. 4. Зависимость перепада давления от частоты вращения ротора:
1 – $\alpha=15^\circ$; 2 – 30° ; 3 – 40°

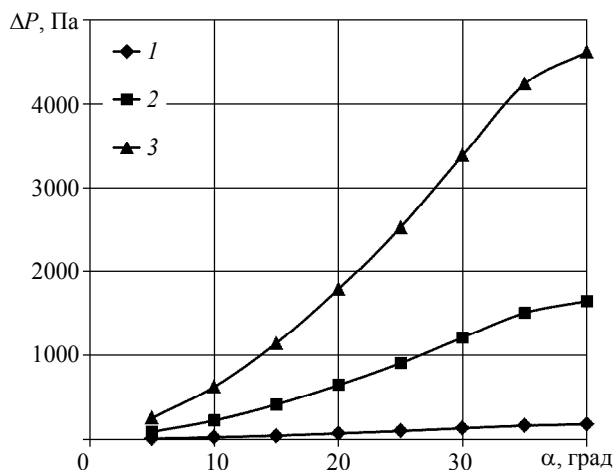


Рис. 5. Зависимость перепада давления от угла поворота лопатки ротора:
1 – $n = 1000$ об/мин; 2 – $n = 3000$ об/мин; 3 – $n = 5000$ об/мин

Видно, что увеличение частоты вращения ротора и увеличение угла поворота лопатки ведет к росту перепада статического давления. Аппроксимация результатов расчетов по методу наименьших квадратов показывает, что перепад давления пропорционален квадрату частоты вращения ротора, т.е. $\Delta P \sim n^2$.

Рост угла поворота рабочей лопатки ротора до величины 35° ведет к росту перепада давления по закону $\Delta P \sim \alpha^{1.46}$, после чего показатель степени становится меньше единицы, что говорит об уменьшении эффективности работы лопаток в качестве нагнетательных элементов вентилятора.

На рис. 6 и 7 приведены результаты расчета объемного расхода воздуха в зависимости от частоты вращения ротора и угла положения рабочей лопатки вентилятора.

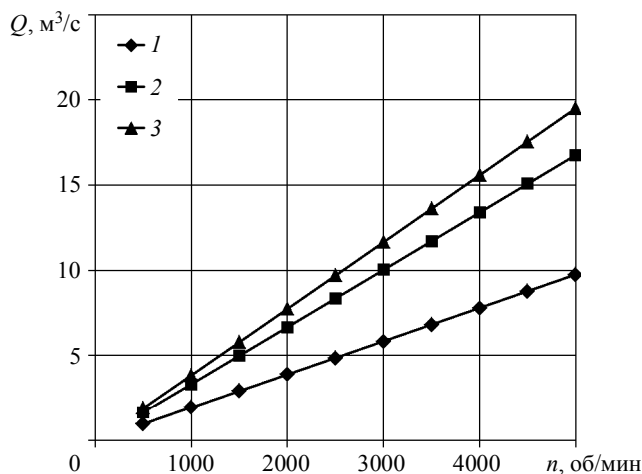


Рис. 6. Зависимость объемного расхода воздуха от частоты вращения ротора:
1 – $\alpha=15^\circ$; 2 – 30° ; 3 – 40°

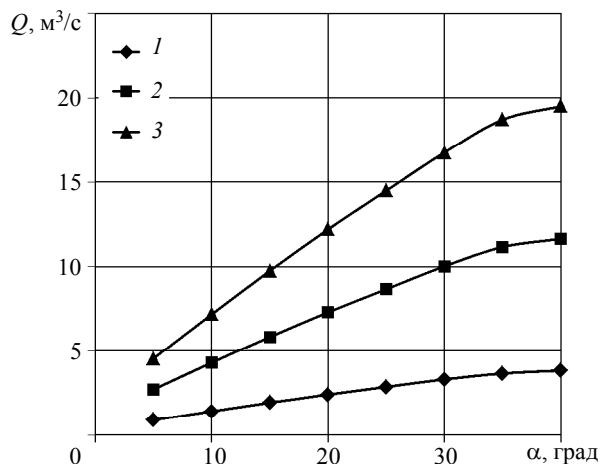


Рис. 7. Зависимость объемного расхода воздуха от угла поворота лопатки ротора:
1 – $n = 1000$ об/мин; 2 – $n = 3000$ об/мин; 3 – $n = 5000$ об/мин

Увеличение частоты вращения ротора ведет к линейному росту объемного расхода воздуха $Q \sim \omega$ (см. рис. 6). Увеличение угла поворота рабочих лопаток вентилятора в исследуемом диапазоне также увеличивает объемный расход воздуха, создаваемый вентилятором. Следует отметить, что интенсивность прироста объемного расхода воздуха снижается для угла поворота лопаток в 40° (см. рис. 7).

Одной из важных характеристик вентилятора является зависимость перепада давления от объемного расхода воздуха. Из рис. 8 видно, что на эту зависимость не влияет угол поворота рабочей лопатки вентилятора. Все множество расчетных данных аппроксимируются формулой $\Delta P = 12.117 Q^2$ со средней относительной погрешностью 0.6 %, причем локальная относительная погрешность не превышает 2 %. Данная зависимость близка к той, которая получается из уравнения Бернулли:

$$\Delta P = \frac{\rho}{2S^2} Q^2, \quad (5)$$

где ρ – плотность воздуха, а S – площадь проходного сечения вентилятора.

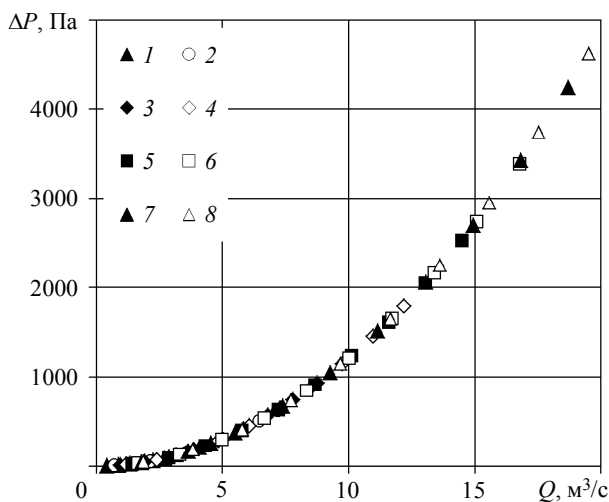


Рис. 8. Зависимость перепада давления, создаваемого в вентиляторе, от объемного расхода воздуха через вентилятор: 1 – $\alpha = 5^\circ$; 2 – $\alpha = 10^\circ$; 3 – $\alpha = 15^\circ$; 4 – $\alpha = 20^\circ$; 5 – $\alpha = 25^\circ$; 6 – $\alpha = 30^\circ$; 7 – $\alpha = 35^\circ$; 8 – $\alpha = 40^\circ$

Другой важной характеристикой вентилятора является мощность потока, создаваемая ротором. Ее величину можно определить как произведение объемного расхода воздуха на перепад давления: $N_p = Q \cdot \Delta P$. Из рис. 4 – 7 следует, что мощность потока воздуха увеличивается с ростом частоты вращения ротора и с ростом угла поворота рабочей лопатки.

При работе вентилятора на рабочие лопатки ротора действует сила сопротивления со стороны воздуха. При этом ротор относительно продольной оси испытывает момент сил. Расчеты показывают, что момент сил, действующий на рабочие лопатки ротора, увеличивается с увеличением частоты вращения и угла поворота рабочей лопатки. Причем момент сил, действующий на лопатки, пропорционален квадрату частоты вращения ротора: $M_1 \sim n^2$ и является функцией угла α , представляющей собой полином второй степени.

Зная полный момент сил, действующий на ротор, можно определить мощность сил сопротивления, которые испытывают лопадки ротора при обеспечении получаемых аэродинамических характеристик: $N_v = M_1 N_r 2\pi n / 60$. Поскольку $M_1 \sim n^2$, то мощность вентилятора пропорциональна кубу частоты вращения ротора.

Поскольку мощность сил сопротивления пропорциональна моменту сил, действующего на лопадки ротора, то зависимость мощности вентилятора от угла поворота рабочей лопадки будет такой же, как и для момента сил.

Отношение мощности потока воздуха, создаваемого вентилятором, к мощности вентилятора представляет собой эффективность (КПД) вентилятора, $\eta = (N_p / N_v) \cdot 100\%$ или аэродинамический коэффициент полезного действия.

На рис. 9 и 10 приведены результаты расчета КПД, выраженного в %. Видно, что

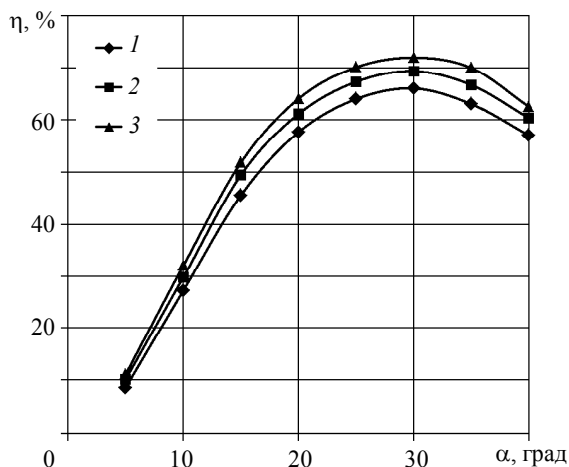


Рис. 9. Зависимость КПД вентилятора от угла поворота рабочей лопадки: 1 – $n = 500$ об/мин; 2 – $n = 1500$ об/мин; 3 – $n = 5000$ об/мин

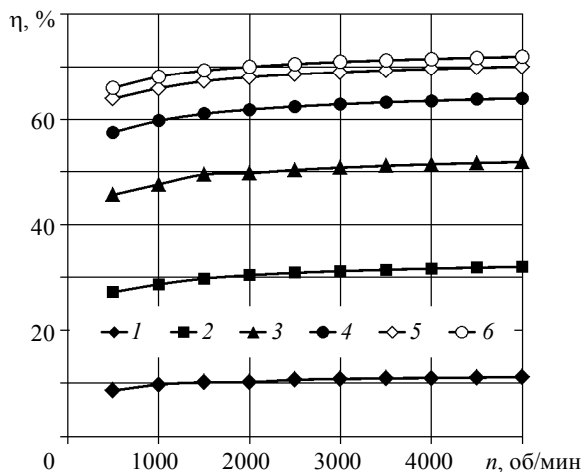


Рис. 10. Зависимость КПД вентилятора от скорости вращения ротора: 1 – $\alpha = 5^\circ$; 2 – $\alpha = 10^\circ$; 3 – $\alpha = 15^\circ$; 4 – $\alpha = 20^\circ$; 5 – $\alpha = 25^\circ$; 6 – $\alpha = 30^\circ$

с ростом угла поворота рабочей лопатки КПД вентилятора увеличивается и достигает своего максимального значения при значении угла поворота равного 30° . Дальнейшее увеличение угла поворота снижают КПД, рис. 9. Увеличение скорости вращения ротора также ведет к росту КПД вентилятора, рис. 10. Наиболее сильный его прирост происходит при возрастании скорости вращения ротора от нуля до 2000 об/мин. Дальнейшее увеличение скорости вращения ведет к незначительному изменению коэффициента полезного действия.

Сравнение результатов численного моделирования с результатами инженерной методики

На рис. 11 показана рабочая лопатка ротора, окружная скорость которой при вращении ротора вокруг оси равна $v = \omega R$. Воздух движется относительно лопатки со скоростью c , тогда абсолютная скорость движения воздуха есть w . Проекция этой скорости на продольную ось представляет собой среднерасходную скорость воздуха через вентилятор. В общем случае вектора скоростей w и u не совпадают. Различные варианты диаграммы скоростей для ротора осевого вентилятора приведены в работах [1, 7].

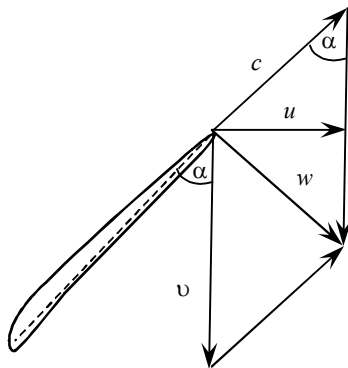


Рис. 11. Диаграмма скоростей воздуха на рабочей лопатке

Предположим, что скорость вращения ротора вентилятора и среднерасходная скорость воздуха такие, что $u = w$. В этом случае будет иметь место равенство $u = v \operatorname{tg}(\alpha)$. Тогда объемный расход воздуха через ротор можно вычислить следующим образом:

$$Q = \omega \cdot R \cdot S \cdot \operatorname{tg}(\alpha), \quad (6)$$

где ω – угловая скорость вращения ротора; R – средний радиус лопатки, равный $(R_{\text{вт}} + R_c)/2$; S – площадь, свободная для прохода газов через ротор, $\pi(R_c^2 - R_{\text{вт}}^2) - N(R_c - R_{\text{вт}})\delta/\cos(\alpha)$; δ – толщина лопатки равная 5 мм.

Для проверки используемого допущения $u = w$ на рис. 12 приведено сравнение зависимости расхода воздуха от угла поворота лопатки для скорости вращения ротора 3000 об/мин и 5000 об/мин, полученных с помощью численного моделирования и по формуле (6). Видно, что для углов поворота лопаток в диапазоне от 20 до 25° , формула (6) хорошо предсказывает значения объемного расхода. Для других значений углов поворота формула (6) дает как заниженные значения объемного расхода (при малых углах поворота лопатки), так и завышенные значения

(при больших углах поворота лопатки). Причем расхождение в объемных расходах может достигать 40 %. Расчеты показывают, что отношение объемного расхода, полученное по формуле (6) $Q_{и.ф.}$, к объемному расходу, полученному при численном моделировании $Q_{ч.м.}$, слабо зависит от скорости вращения ротора (отклонение не превышает 1%) и является только функцией угла поворота лопатки.

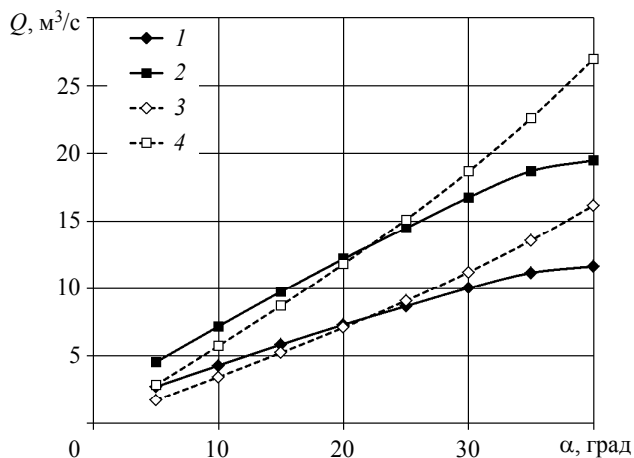


Рис. 12. Зависимость объемного расхода воздуха от угла поворота рабочей лопатки: 1, 2 – численное моделирование; 3, 4 – расчет по формуле (6); 1, 3 – $n = 3000$ об/мин; 2, 4 – $n = 5000$ об/мин

Используя средние значения для отношения объемных расходов $q = Q_{и.ф.}/Q_{ч.м.}$, полученных при разных скоростях вращения ротора и аппроксимируя это отношение полиномом третьей степени в зависимости от угла поворота лопатки α в диапазоне от 5 до 40°, получим

$$q(\alpha) = 2.9784 \cdot 10^{-05} \alpha^3 - 2.0001 \cdot 10^{-03} \alpha^2 + 5.7287 \cdot 10^{-02} \alpha + 3.9542 \cdot 10^{-01}. \quad (7)$$

Зависимость (7) является индивидуальной характеристикой лопаток ротора и для расчета реального объемного расхода воздуха через вентилятор можно рекомендовать формулу (6) с учетом поправочной функции (7):

$$Q = \omega \cdot R \cdot S \cdot \operatorname{tg}(\alpha) / q(\alpha). \quad (8)$$

Для определения перепада давления на роторе воспользуемся соотношением (5) и (6):

$$\Delta P = \frac{\rho \omega^2 R^2 \operatorname{tg}^2(\alpha)}{2}. \quad (8)$$

На рис. 13 показано изменение перепада давления в зависимости от угла поворота лопаток, полученное в результате численного моделирования (сплошные кривые) и по формуле (8) (штриховые кривые) для скорости вращения ротора 3000 об/мин и 5000 об/мин. Видно хорошее согласование результатов, полученных по формуле (8), и результатов численного моделирования для $\alpha = 15^\circ \div 20^\circ$. Для меньших углов поворота лопаток формула (8) дает заниженные значения перепада давления в два раза, а для больших углов – завышенные значения.

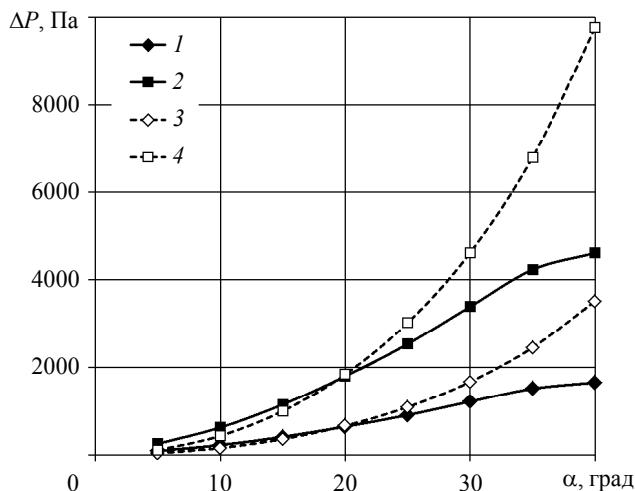


Рис. 13. Зависимость перепада давления от угла поворота рабочей лопатки: 1, 2 – численное моделирование; 3, 4 – расчет по формуле (8); 1, 3 – $n = 3000$ об/мин; 2, 4 – $n = 5000$ об/мин

Учитывая тот факт, что отношение перепада давления по формуле (8) $\Delta P_{и.ф.}$ к перепаду давления, полученному в результате численного моделирования $\Delta P_{ч.м.}$, слабо зависит от скорости вращения ротора (отклонение от среднего не превосходит 3 %) и является функцией угла поворота лопаток α , можно получить следующую аппроксимационную формулу для $p = \Delta P_{и.ф.} / \Delta P_{ч.м.}$, представляющую полином третьей степени от α :

$$p(\alpha) = 6.7832 \cdot 10^{-05} \alpha^3 - 4.0091 \cdot 10^{-03} \alpha^2 + 1.0557 \cdot 10^{-01} \alpha - 1.4261 \cdot 10^{-02}. \quad (9)$$

Для расчета реального перепада давления можно рекомендовать следующую формулу:

$$\Delta P = \frac{\rho \omega^2 R^2 \operatorname{tg}^2(\alpha)}{2p(\alpha)}. \quad (10)$$

Таким образом, на основе численного моделирования получены функции согласования $q(\alpha)$ и $p(\alpha)$ для формул зависимости перепада давления и объемного расхода воздуха для одноступенчатого осевого вентилятора от скорости вращения ротора и угла ориентации рабочих лопаток ротора. Предложено определение аэродинамического коэффициента полезного действия осевого вентилятора через отношение мощности создаваемого вентилятором потока воздуха к мощности силы сопротивления, действующей на рабочие лопатки ротора. Показано, что перепад давления в вентиляторе как функция объемного расхода воздуха не зависит от угла ориентации рабочей лопатки ротора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брусиловский И.В. Аэродинамический расчет осевых вентиляторов. М.: Машиностроение, 1986. 288 с.
2. Попов Н.А., Петров Н.Н. К вопросу расчета аэродинамической характеристики шахтного осевого вентилятора с поворотными на ходу лопатками рабочего колеса // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2002. № 2. С. 211–215.

3. Шерстюк А.Н. Насосы, вентиляторы, компрессоры. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1972. 344 с.
4. ANSYS FLUENT Tutorial Guide: Release 14.0. 2011. ANSYS Inc.
5. Гурина Е.И. Моделирование работы шахтного вентилятора встречного вращения с помощью программного комплекса Fluent // ИФЖ. 2010. Т. 83. № 5. С. 924–929.
6. Смирнов И.Н. Гидравлические турбины и насосы. М.: Высшая школа, 1969. 400 с.
7. Кривченко Г.И. Гидравлические машины: Турбины и насосы. Учебник для вузов. М.: Энергия, 1978. 320 с.

Статья поступила 22.01.2016 г.

Pikushchak E.V., Minkov L.L. METHOD OF CALCULATING THE AERODYNAMIC EFFICIENCY OF THE AXIAL FAN

DOI 10.17223/19988621/39/10

A definition of the aerodynamic efficiency of the axial flow fan as a ratio of the power of the air flow generated by the fan to the power of the drag force acting on the rotor blades is proposed. The aerodynamic efficiency of the single-stage axial flow fan consisting of a rotor and straightener is estimated based on numerical simulation using the ANSYS FLUENT computational package. The influence of the rotational speed of the rotor and the rotor blades orientation on the air flow rate, static pressure, efficiency of the fan, and pressure drop as a function of the flow rate is demonstrated. Matching functions for formulas describing a pressure drop and volume flow rate in dependence on the rotor speed and the orientation angle of rotor blades are obtained by numerical simulation for the single-stage axial fan. It is shown that the pressure drop in the fan as a function of the volume flow rate does not depend on the orientation angle of the rotor blade.

Keywords: axial fan, aerodynamic efficiency, numerical simulation, matching functions

PIKUSHCHAK Elizaveta Vladimirovna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: liza@ftf.tsu.ru

MINKOV Leonid Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Brusilovskiy I.V. *Aerodinamicheskiy raschet osevykh ventilyatorov*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 288 p. (in Russian)
2. Popov N.A., Petrov N.N. K voprosu rascheta aerodinamicheskoy kharakteristiki shakhtnogo oseвого ventilyatora s povorotnymi na khodu lopatkami rabocheго kolesa. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*, 2002, no. 2, pp. 211–215. (in Russian)
3. Sherstyuk A.N. *Nasosy, ventilyatory, kompressory*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1972. 344 p. (in Russian)
4. *ANSYS FLUENT Tutorial Guide: Release 14.0*. 2011. ANSYS Inc.
5. Gurina E.I. Modelirovanie raboty shakhtnogo ventilyatora vstrechnogo vrashcheniya s pomoshch'yu programmnoго kompleksa Fluent. *IFZh*, 2010, vol. 83, no. 5, pp. 924–929. (in Russian)
6. Smirnov I.N. *Gidravlicheskie turbiny i nasosy*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1969. 400 p. (in Russian)
7. Krivchenko G.I. *Gidravlicheskie mashiny: Turbiny i nasosy*. Moscow, Energiya Publ., 1978. 320 p. (in Russian)

УДК 532.546

DOI 10.17223/19988621/39/11

В.Ш. Шагапов, О.В Дударева

ПРОЯВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ФИЛЬТРАЦИИ В НИЗКОПРОНИЦАЕМЫХ КОЛЛЕКТОРАХ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕЖИМАХ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СКВАЖИНЫ¹

По предложенной ранее теоретической модели фильтрации с предельным градиентом давления изучены индикаторные зависимости при переменных режимах функционирования скважин. На основе численного моделирования эксплуатации скважины проанализирована возможность выявления нелинейных эффектов закона фильтрации в пластовых условиях.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, сверхнизкая проницаемость, предельный градиент давления, нефтеотдача пластов, метод конечных разностей.

В последнее время, в связи с уменьшением запасов углеводородного сырья, разрабатываются пласты со сверхнизкой проницаемостью. Примерами таких пластов могут служить песчаники, глиносодержащие песчаники, известняки с проницаемостью $k = 10^{-16} \dots 10^{-14} \text{ м}^2$. Из экспериментальных данных [1–3] известно, что в таких пластах наблюдаются необычные явления нелинейной фильтрации.

Изучению нарушения закона Дарси при малых скоростях фильтрации посвящено значительное число работ. Одной из причин нарушения линейного закона Дарси могут служить аномальные свойства нефти, характерные для неньютоновских жидкостей. Наряду с этим экспериментальные данные [4], проведенные в низкопроницаемой пористой среде, показывают, что при однофазной фильтрации воды, являющейся ньютоновской жидкостью, также возникают отклонения от линейного закона Дарси. Наиболее значительны отклонения от закона Дарси при фильтрации воды в глинах, но также наблюдаются при фильтрации в песчаниках не только воды, но и нефти.

Возникновение этого явления может происходить за счет поверхностного взаимодействия между флюидом и твердым скелетом породы, в результате чего изменяются свойства приповерхностных слоев жидкости и возникают дополнительные силы сопротивления движению. При таком взаимодействии образуются застойные зоны, уменьшающие сечения капилляров пористой среды или полностью перекрывающие поры. Возникновение этих зон приводит к снижению нефтеотдачи коллектора. Образование застойных зон происходит в областях пласта, где градиент давления меньше некоторого предельного значения q . Для преодоления (разрушения) застойных зон целесообразно приложить некоторый перепад давления.

Таким образом, фильтрация жидкости в низкопроницаемых пластах будет происходить при градиентах давления больше предельного значения q . Причем в

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №15-11-20022).

экспериментальных работах [3, 4] наблюдалось увеличение значения q при уменьшении абсолютной проницаемости пласта.

В работах [5, 6] предложена теоретическая модель применительно к наблюдаемым в опытах [7] зависимостям скорости фильтрации от градиента давления.

Обширное число работ [8–11] посвящено гидродинамическим методам исследования скважины при переходных режимах ее работы. В частности, проводились опыты с переменным дебитом скважины или депрессией на пласт. Такие опыты являются основой для определения фильтрационных свойств пластов. Представляется, что анализ кривых восстановления давления и перераспределения дебита также может позволить выявить отклонения закона фильтрации от линейного в низкопроницаемых пластах, а также судить о продуктивности скважины.

Решения модельных задач плоскорадиального фильтрационного потока упругой жидкости в скважине при переходных режимах ее работы, в рамках закона Дарси, были получены ранее в [10]. В данной статье рассматривается задача о перераспределении дебита скважины согласно предложенному в вышеотмеченных работах нелинейному закону фильтрации.

1. Модель нелинейной фильтрации с предельным градиентом давления

Как отмечено, в работах [5, 6] предложен обобщенный закон Дарси с учетом нелинейных эффектов фильтрации в виде

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \eta, \quad (1)$$

где η – безразмерный коэффициент, учитывающий фактор нелинейности:

$$\eta = 1 - \left(q / \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \right)^\gamma \quad \text{при} \quad \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \geq q, \quad (2)$$

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| < q.$$

Здесь q – предельный градиент давления, при достижении которого начинается движение жидкости, γ – показатель степени, определяющий темп выхода закона фильтрации к линейному закону Дарси с ростом величины градиента давления. Наиболее интересными для γ представляют значения $\gamma=1/2$, $\gamma=1$ и $\gamma=2$, характеризующие низкий и высокий темпы выхода к линейному закону фильтрации.

Сжимаемость флюида в процессе фильтрации будем учитывать в линейном приближении, и тогда для зависимости плотности от давления будем иметь

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha(p - p_0)). \quad (3)$$

Из уравнения неразрывности, записанного в пористой среде, с учетом предложенного нелинейного закона фильтрации и уравнения состояния (3) имеем основные уравнения для упругого режима фильтрации линейно-сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \left(1 - \left(q / \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \right)^\gamma \right) \right) \quad \text{при} \quad \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \geq q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \quad \text{при} \quad \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| < q, \quad \left(\chi = \frac{k}{m\mu\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь α – коэффициент сжимаемости жидкости, k – коэффициент проницаемости, m – пористость скелета, χ – коэффициент пьезопроводности.

При теоретическом описании фильтрационных течений уравнением вида (4) в области фильтрации возникает неизвестная граница $r = R(t)$, разделяющая зоны течения и покоя (где $u = 0$). Причем на этой границе $r = R(t)$ помимо непрерывности давления должно выполняться второе условие:

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| = q. \quad (5)$$

Отметим, что при (3) автоматически также выполняется условие, следующее из закона сохранения масс.

2. Влияние величины депрессии на нефтеотдачу пластов с учетом нелинейных эффектов фильтрации

Рассмотрим задачу нестационарной фильтрации, описывающую приток жидкости к скважине в низкопроницаемых пластах при переменных перепадах давления. Допустим, что пористая среда однородна, ее фильтрационные характеристики проницаемость и пористость одинаковы во всех областях. Предполагается, что жидкость поступает к скважине радиусом r_c , расположенной в центре пласта радиусом R_0 , по предложенному нелинейному закону фильтрации (1). Первоначально ($t < 0$) давление в пласте и на забое скважины всюду постоянно и равно p_0 . Тогда начальные условия в пласте запишутся в виде

$$t = 0, \quad r_c < r < R_0 : \quad p = p_0. \quad (6)$$

Пусть в момент времени $t = 0$ давление на забое скважины понижается до p_e и создается перепад давления $\Delta p_0 = p_0 - p_e$. В дальнейшем, в момент времени $t = t_1$ в течение промежутка t_* перепад давления изменяется от значения Δp_0 до Δp_1 . Тогда для закона изменения перепада давления можем записать

$$\Delta p = \begin{cases} \Delta p_0, & \text{при } 0 < t < t_1, \\ \Delta p_0 + \frac{(\Delta p_1 - \Delta p_0)(t - t_1)}{t_*}, & \text{при } t_1 \leq t \leq t_1 + t_*, \\ \Delta p_1, & \text{при } t > t_1 + t_*. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда граничное условие на скважине запишется как

$$t > 0, \quad r = r_c : \quad p = p_0 - \Delta p. \quad (8)$$

Граничное условие на контуре питания примем в виде

$$t > 0, \quad r = R_0 : \quad p = p_0. \quad (9)$$

Объемный расход жидкости, в соответствии с принятым нелинейным законом фильтрации, определяется из выражения

$$Q = 2\pi r_c h_c \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} \left(1 - \left(q \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_c} \right)^\gamma \right), \quad (10)$$

где h_c – протяженность открытого участка скважины.

Для получения численного решения по модели с предельным градиентом, используется регуляризация постановки задачи, согласно которой принято, что при низких градиентах давления ($|\partial p / \partial r| < q$) закон фильтрации имеет линейный вид

$$u = -\frac{\varepsilon k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (11)$$

с низким значением коэффициента проницаемости εk , где ε – малый безразмерный параметр ($\varepsilon \ll 1$). При некотором значении градиента давления $(\partial p / \partial r)_*$ из условия неразрывности, величины скорости фильтрации согласно нелинейному (1) и линейному (11) законам должны быть равны. Из такого «срачивания» получим условие для «сшивки» решений

$$\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_* \left(1 - \left(q / \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_* \right)^\gamma \right) = \frac{\varepsilon k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_*, \quad r = \tilde{R}(t), \quad (12)$$

где $\tilde{R}(t)$ граница «сшивки».

На рис. 1 схематично представлены зависимости скорости фильтрации от градиента давления при выполнении закона Дарси (сплошные линии) и закона фильтрации с предельным градиентом q (пунктирная линия). Точечная линия соответствует нелинейному закону в рамках принятой регуляризации.

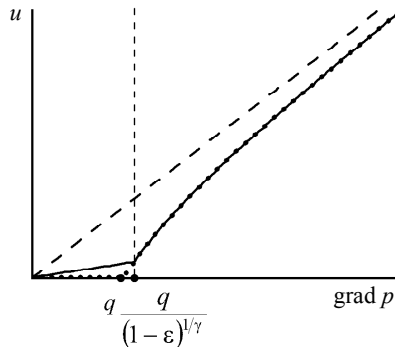


Рис. 1. Зависимость скорости фильтрации от градиента давления

Согласно принятой регуляризации, при описании процесса фильтрации в пласте необходимо ввести подвижную границу $r = \tilde{R}$, разделяющую всю область фильтрации на две зоны. Для градиента давления на этой границе из (12) следует условие

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_* = \frac{q}{(1-\varepsilon)^{1/\gamma}}, \quad r = \tilde{R}. \quad (13)$$

Тогда для закона фильтрации в ближней и дальней зонах можем записать

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left(1 - \left(q / \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \right)^\gamma \right) \quad \text{при } r_c \leq r \leq \tilde{R}, \quad |\partial p / \partial r| \geq q / (1-\varepsilon)^{1/\gamma}, \quad (14)$$

$$u = -\varepsilon \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{при } \tilde{R} \leq r \leq R_0, \quad |\partial p / \partial r| < q / (1-\varepsilon)^{1/\gamma}.$$

Принимая регуляризованный закон фильтрации в виде (14), основное уравнение для упругого режима фильтрации (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \left(1 - \left(q / \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \right)^\gamma \right) \right) \text{ при } r_c \leq r \leq \tilde{R}, \quad |\partial p / \partial r| \geq q / (1 - \varepsilon)^{1/\gamma}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\varepsilon \chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \text{ при } \tilde{R} \leq r \leq R_0, \quad |\partial p / \partial r| < q / (1 - \varepsilon)^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для численного решения основного уравнения фильтрации (15), с граничными условиями (6) – (9), используется метод конечных разностей, заключающийся в замене производных в уравнениях (6) – (9) и (15) их конечно-разностными аппроксимациями. При решении использовалась явная схема. Для обеспечения устойчивости метода расчетный шаг по времени Δt удовлетворяет условию

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2\chi},$$

где Δx – шаг сетки по пространственной координате.

Для параметров, определяющих физические свойства пласта и жидкости, приняты следующие величины: $m = 0.1$; $k = 10^{-15} \text{ м}^2$; $\rho = 860 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $C = 10^3 \text{ м/с}$. Для геометрических параметров скважины, пласта и параметра, отвечающего за регуляризацию задачи, приняты следующие величины: $h_c = 100 \text{ м}$, $r_c = 10^{-1} \text{ м}$, $R_0 = 100 \text{ м}$, $\varepsilon = 10^{-1}$. Для исходного пластового давления принято значение $p_0 = 20 \text{ МПа}$.

На рис. 2 иллюстрируется влияние значения предельного градиента давления q (рис. 2, б) и показателя степени γ (рис. 2, в) на динамику расхода для режима работы добывающей скважины согласно рис. 2, а. Числа на линиях соответствуют значениям предельного градиента давления q в МПа/м. Предполагается, что перепад давления $\Delta p_0 = 10 \text{ МПа}$ с момента времени $t_1 = 2 \text{ сут}$ повышается до значения $\Delta p_1 = 15 \text{ МПа}$ за период $t_* = 1 \text{ сут}$. Здесь и в дальнейшем сплошные линии соответствуют линейному закону Дарси ($q = 0$), пунктирные, штрихпунктирные и точечные линии соответствуют значениям $\gamma = 1/2$, 1 и 2 для $q = 0.1 \text{ МПа/м}$.

Проанализируем динамику дебита скважины при изменении забойного давления на примере, представленном на рис. 2, б. Данный процесс условно можно разделить на три этапа. На первом этапе ($t < t_1$) работы скважины при $\Delta p_0 = 10 \text{ МПа}$ происходит снижение объемного дебита скважины. На втором этапе ($t_1 \leq t \leq t_1 + t_*$), при повышении перепада давления в течение 1 сут от значения перепада давления $\Delta p_0 = 10 \text{ МПа}$ до $\Delta p_1 = 15 \text{ МПа}$, наблюдается резкое повышение объемного дебита. Так, для $q = 0.1 \text{ МПа/м}$ за $t_* = 1 \text{ сут}$ дебит возрастает от значения $Q = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$ до $Q = 8.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$. На третьем этапе ($t > t_1 + t_*$) работы скважины, при $\Delta p_0 = 15 \text{ МПа}$, происходит снижение объемного дебита скважины, аналогично первому этапу.

Из рис. 2, б видно, что при фильтрации жидкости, когда проявляются эффекты предельного градиента давления, наблюдается более интенсивное снижение деби-

та скважины по сравнению со случаем, когда выполняется закон Дарси ($q = 0$). Причем с ростом величины предельного градиента давления q наблюдается более сильное снижение темпа дебита. Так, из третьего этапа видно, что после смены режима функционирования скважины в промежутке времени с 3 до 10 сут для $q = 0.1$ МПа/м и $\gamma = 2$ объемный дебит понижается в 1.4 раза (от значения $Q = 8.5 \cdot 10^{-4}$ до $Q = 6 \cdot 10^{-4}$ м³/с), а для случая линейного закона Дарси в 1.1 раза (от значения $Q = 1 \cdot 10^{-3}$ до $Q \approx 8.5 \cdot 10^{-4}$ м³/с) и в дальнейшем слабо меняется.

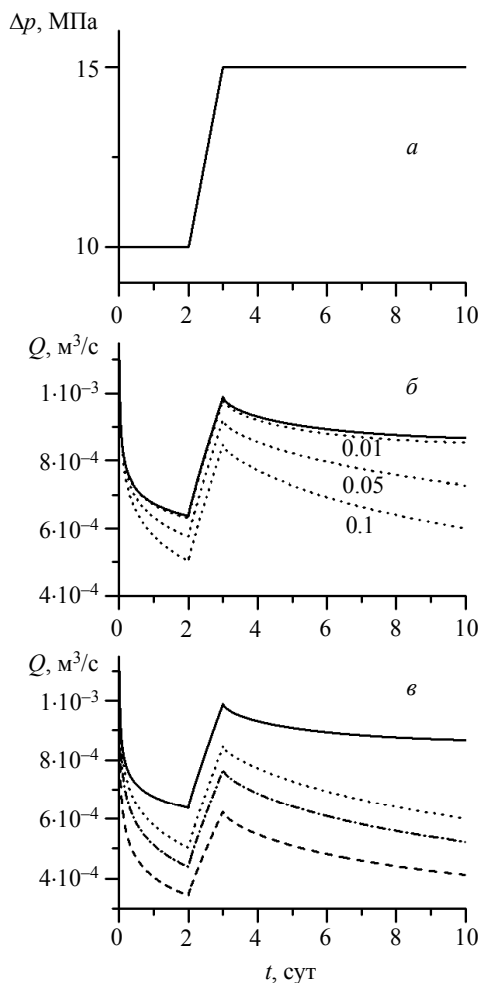


Рис. 2. Влияние значения предельного градиента давления q (б) и показателя степени γ (в) на процесс эволюции объемного дебита при повышении перепада давления Δp (а)

Из рис. 2, в также следует, что при уменьшении величины показателя степени γ происходит дополнительное снижение дебита скважины. Понижение забойного давления приводит к увеличению дебита. Например, для $\gamma = 2$ после 2 сут

функционирования скважины при $\Delta p_0 = 10$ МПа дебит достигает значения $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ м³/с, а при $\Delta p_0 = 15$ МПа дебит повышается до $Q = 7.5 \cdot 10^{-4}$ м³/с.

На рис. 3 показано влияние значения предельного градиента давления q (рис. 3, б) и показателя степени γ (рис. 3, в) на перераспределение расхода при изменении режима работы добывающей скважины согласно рис. 3, а. Числа на линиях соответствуют значениям предельного градиента давления q в МПа/м. Предполагается, что перепад давления $\Delta p_0 = 10$ МПа снижается до значения $\Delta p_1 = 5$ МПа с момента времени $t_1 = 2$ сут за период $t_* = 1$ сут.

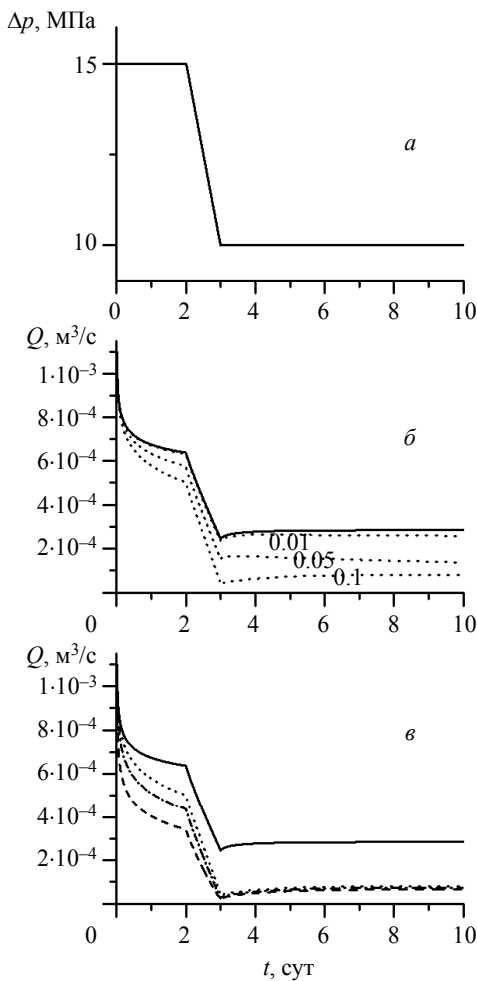


Рис. 3. Влияние значения предельного градиента давления q (б) и показателя степени γ (в) на процесс эволюции объемного дебита при понижении перепада давления Δp (а)

Отметим, что увеличение значения предельного градиента давления q приводит к снижению нефтеотдачи пласта. Так, для 10 сут функционирования скважины при увеличении предельного градиента давления в пять раз (от значения

$q = 0.01$ до 0.05 МПа/м) объемный дебит скважины понижается в два раза (от значения $Q = 2.6 \cdot 10^{-4}$ до $1.3 \cdot 10^{-4}$ м³/с).

Из рис. 3, в видно, что при работе скважины с перепадом давления $\Delta p_1 = 5$ МПа увеличение показателя степени γ также приводит к повышению притока нефти в скважину. Так, для $\gamma = 2$ МПа/м после 2 сут эксплуатации скважины при $\Delta p_0 = 10$ МПа дебит достигает значения $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ м³/с, а при $\Delta p_0 = 5$ МПа дебит понижается до $Q = 10^{-4}$ м³/с. Причем эта величина для всех принятых значений γ , на поздних этапах эксплуатации скважины, остается почти постоянной и равной $Q \approx 10^{-4}$ м³/с.

Необходимо отметить, что смена режима функционирования скважины влияет на характер перераспределения дебита. Так, при переходе скважины на режим работы с меньшим перепадом давления, на третьем этапе ее функционирования, наблюдается слабое повышение дебита. Например, для $\gamma = 2$ при переходе на режим с меньшим перепадом давления (рис. 3, в) с 3 до 4 сут происходит слабое повышение дебита от значения $Q \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$ до $0.8 \cdot 10^{-4}$ м³/с. При снижении перепада давления, в призабойной области пласта на третьем этапе с течением времени наблюдается слабое увеличение градиентов давления. Так, из рис. 6, в видно, что для $\gamma = 2$ на расстоянии 1 м от забоя скважины для 3.5 сут градиент давления составляет 0.3 МПа/м, а для 4.5 сут повышается до 0.4 МПа/м, в результате чего происходит слабое повышение дебита скважины.

Таким образом, результаты численных расчетов свидетельствуют о существовании влияния нелинейных эффектов фильтрации на дебит скважины. Следовательно, по результатам гидродинамических исследований скважины возможно выявлять проявление предельного градиента давления и количественно и качественно оценить его влияние на процесс фильтрации.

На рис. 4 представлено влияние продолжительности закрытия скважины на процесс перераспределения дебита при $q = 0.1$ МПа/м и $\gamma = 2$. Предполагается, что перепад давления $\Delta p_0 = 10$ МПа повышается до значения $\Delta p_1 = 15$ МПа (рис. 4, а) и снижается до значения $\Delta p_1 = 5$ МПа (рис. 4, б) в момент времени $t_1 = 2$ сут. Числа на линиях соответствуют моментам времени t_* . Видно, что чем протяженнее время t_* , за которое происходит смена режима работы скважины, тем значительнее происходит снижение дебита. Так, на рис. 4, а в случае $t_* = 1$ сут к третьему этапу дебит достигает значения $Q \approx 8.5 \cdot 10^{-4}$ м³/с, в случае $t_* = 3$ сут значения $Q \approx 7.5 \cdot 10^{-4}$ м³/с. В дальнейшем к 10 суткам для различных значений t_* дебит приобретает постоянное значение равное $Q \approx 6 \cdot 10^{-4}$ м³/с. На рис. 4, б в случае $t_* = 1$ сут к третьему этапу дебит достигает значения $Q \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$ м³/с, в случае $t_* = 3$ сут значения $Q \approx 0.2 \cdot 10^{-4}$ м³/с. В дальнейшем к 10 суткам дебит приобретает постоянное значение равное $Q \approx 1 \cdot 10^{-4}$ м³/с.

На рис. 5 в логарифмических координатах иллюстрируется влияние проницаемости на дебит скважины для $\gamma = 2$ и $q = 0.1$ при повышении перепада давления. Числа на линиях соответствуют значениям проницаемости пласта.

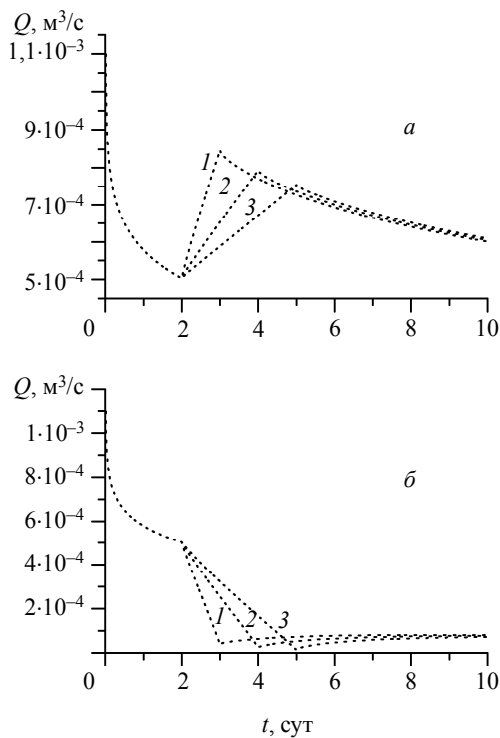


Рис. 4. Влияние продолжительности закрытия скважины на процесс перераспределения дебита при повышении перепада давления (а) и понижении перепада давления (б)

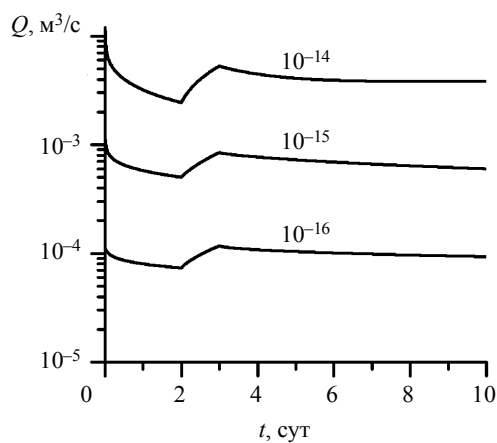


Рис. 5. Влияние проницаемости на дебит скважины

На рис. 6 представлены профили давления в пласте при переходе скважины на режим работы с пониженным забойным давлением для $q = 0.1$ МПа/м и $\gamma = 2$. Числа на линиях соответствуют моментам времени в сутках. Из увеличенных фрагментов рисунка видно, что для первого этапа функционирования скважины с

течением времени происходит снижение градиентов давления во всей области пласта. Отметим, что после понижения перепада давления на втором и третьем этапах в призабойной области пласта со временем происходит незначительное повышение градиентов давления. В дальней области пласта с течением времени происходит снижение градиентов давления.

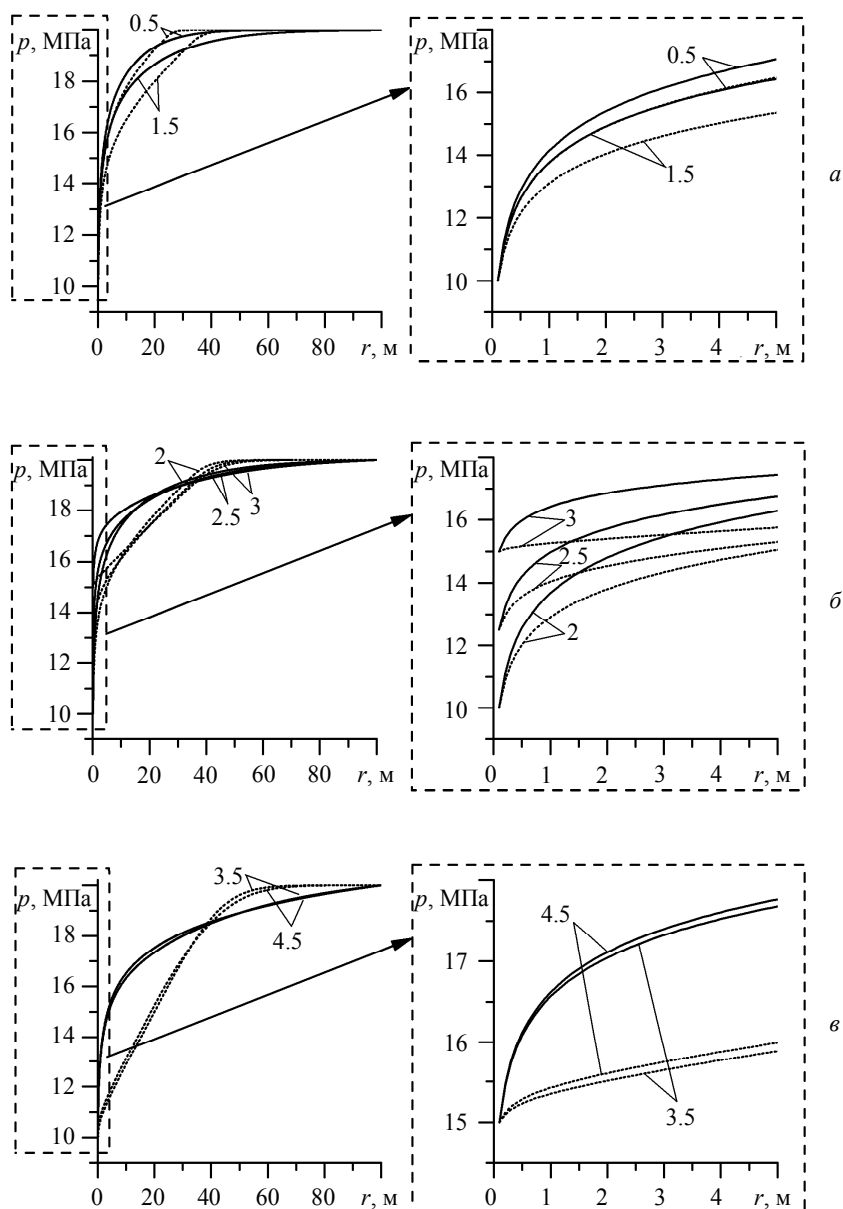


Рис. 6. Влияние показателя степени γ на профили распределения давления в пласте при режимах работы скважины с переменным забойным давлением: 10 МПа (а), при понижении от 10 до 5 МПа (б), 5 МПа (в)

Заключение

С учетом нелинейного закона фильтрации в низкопроницаемых пластах, численно решена задача о перераспределении объемного дебита скважины для переменного значения устьевое давления.

Установлено, что по индикаторным кривым перераспределения дебита скважины при переходных режимах ее работы (изменении забойного давления) возможно выявлять нелинейные эффекты фильтрации и качественно увидеть проявление предельного градиента давления q .

Из-за проявления нелинейных эффектов фильтрации наблюдается снижение темпов отбора жидкости из скважины по сравнению со случаем линейного закона Дарси. Установлено, что повышение нефтеотдачи пластов происходит с уменьшением значения предельного градиента давления q и с увеличением показателя степени γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Байков В.А., Галеев Р.Р., Колонских А.В., Макастров А.К., Политов М.Е., Телин А.Г., Якасов А.В. Нелинейная фильтрация в низкопроницаемых коллекторах. Анализ и интерпретация результатов лабораторных исследований керн Приобского месторождения // Вестник ОАО НК «Роснефть». 2013. Вып. 31. № 2. С. 8–12.
2. Xu J., Jiang R., Xie L., Yang M., Wang G., Liu J. Transient pressure behavior for dual porosity low permeability reservoir based on modified Darcy's equation // SPE 153480. 2012. P. 1–10.
3. Коробов К.Я., Антилин Ю.В. О нарушениях линейного закона фильтрации при низких градиентах давления // Нефтяное хозяйство. 1968. № 8. С. 26–28.
4. Байков В.А., Колонских А.В., Макастров А.К., Политов М.Е., Телин А.Г. Нелинейная фильтрация в низкопроницаемых коллекторах. Лабораторные фильтрационные исследования керн Приобского месторождения // Вестник ОАО НК «Роснефть». 2013. Вып. 31. № 2. С. 4–7.
5. Белова О.В., Шагапов В.Ш. Метод последовательной смены стационарных состояний для плоскоодномерной задачи фильтрации с предельным градиентом давления // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Механика. 2014. №7. С. 76–86.
6. Шагапов В.Ш., Белова О.В., Давлетбаев А.Я. Особенности фильтрации в низкопроницаемых коллекторах с проявлением предельного градиента // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 6. С. 1269–1281.
7. Shagapov V.Sh., Belova O.V., Davletbaev A.Ya. Features of filtration in low-permeability traps with a limiting gradient // J. Engineering Physics and Thermophysics. 2014. V. 87. No. 6, November. P. 1322–1334.
8. Байков В.А., Колонских А.В., Макастров А.К. Фильтрация в сверхнизкопроницаемых коллекторах // Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений: Материалы V науч.-практич. конф. ООО «РН-Уфа НИПИнефть». Уфа, 2012.
9. Мурзаджанзаде А.Х. Технология и техника добычи нефти. М.: Недра, 1986. 382 с.
10. Гиматулинов Ш.К. Разработка и эксплуатация нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1988. 312 с.
11. Шагиев Р.Г. Исследование скважин по КВД. М.: Наука, 1998. 304 с.
12. Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.

Статья поступила 15.11.2015 г.

Shagapov V.Sh., Dudareva O.V. MANIFESTATION OF NONLINEAR FILTRATION EFFECTS IN LOW PERMEABILITY RESERVOIRS AT VARIABLE MODES OF WELL FUNCTIONING

DOI 10.17223/19988621/39/11

According to the earlier theoretical model of filtration with a limiting gradient of pressure, indicator dependencies under variable modes of well-functioning are studied. On the basis of numerical simulation of the well operation, the possibility of revealing non-linear effects of the filtration law under the reservoir conditions is analyzed. For example, considering the curves of well production redistribution during transient conditions of the well operation, one can identify possible non-linear effects of filtration and see the manifestation of the limiting pressure gradient q . The presence of the limiting pressure gradient significantly affects the nature of the filtering process. The manifestation of the limiting pressure gradient q can be seen by the intensity of the well production rate decrease with time. When the filtration occurs by the linear law, the intensity of the flow rate decrease is insignificant and, to a due time, takes a constant value.

Due to the manifestation of nonlinear filtering effects, a decrease in the fluid production rate of the well is observed as compared to the case of the linear Darcy law. It is found that the enhanced oil recovery occurs with a decrease in the limiting pressure gradient q and with an increase in the power exponent.

Keywords: nonlinear filtration, ultralow permeability, limiting gradient of pressure, oil recovery of layers, finite difference method.

SHAGAPOV Vladislav Shaihulagzamovich (Academician of Academy of Sciences of RB, Doctor of Physics and Mathematics, Birsky branch «Bashkir State University», Birsk, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics, Kazan, Russian Federation).

E-mail: Shagapov@rambler.ru

DUDAREVA Olga Vladimirovna (Postgraduate, Birsky branch «Bashkir State University», Birsk, Russian Federation)

E-mail: BelovaOlgaV@mail.ru.

REFERENCES

1. Baykov V.A., Galeev R.R., Kolonskikh A.V., Makatrov A.K., Politov M.E., Telin A.G., Yakasov A.V. Nelineynaya fil'tratsiya v nizkopronitsaemykh kollektorakh. Analiz i interpretatsiya rezul'tatov laboratornykh issledovaniy kerna Priobskogo mestorozhdeniya. *Vestnik OAO NK «Rosneft'»*, 2013, no. 31, no. 2, pp. 8–12. (in Russian)
2. Xu J., Jiang R., Xie L., Yang M., Wang G., Liu J. Transient pressure behavior for dual porosity low permeability reservoir based on modified Darcy's equation. *SPE 153480*, 2012, pp. 1–10.
3. Korobov K.Ya., Antilin Yu.V. O narusheniyakh lineynogo zakona fil'tratsii pri nizkikh gradientakh davleniya. *Neftyanoe khozyaystvo*, 1968, no. 8, pp. 26–28. (in Russian)
4. Baykov V.A., Kolonskikh A.V., Makatrov A.K., Politov M.E., Telin A.G. Nelineynaya fil'tratsiya v nizkopronitsaemykh kollektorakh. Laboratornye fil'tratsionnye issledovaniya kerna Priobskogo mestorozhdeniya. *Vestnik OAO NK «Rosneft'»*, 2013, vol. 31, no. 2, pp. 4–7. (in Russian)
5. Belova O.V., Shagapov V.Sh. Metod posledovatel'noy smeny statsionarnykh sostoyaniy dlya ploskoodnomernoy zadachi fil'tratsii s predel'nym gradientom davleniya. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya. Mekhanika*, 2014, no. 7, pp. 76–86. (in Russian)
6. Shagapov V.Sh., Belova O.V., Davletbaev A.Ya. Osobennosti fil'tratsii v nizkopronitsaemykh kollektorakh s proyavleniem predel'nogo gradienta. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2014, vol. 87, no. 6, pp. 1269–1281. (in Russian)

7. Shagapov V.Sh., Belova O.V., Davletbaev A.Ya. Features of filtration in low-permeability traps with a limiting gradient. *J. Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 6, November, pp. 1322–1334.
8. Baykov V.A., Kolonskikh A.V., Makatrov A.K. Fil'tratsiya v sverkh nizkopronitsaemykh kollektorakh. *Matematicheskoe modelirovanie i komp'yuternye tekhnologii v protsessakh razrabotki mestorozhdeniy: Materialy V nauch.-praktich. konf. OOO «RN-UfaNIPIneft'»*. Ufa, 2012. (in Russian)
9. Mirzadzhanzade A.Kh. *Tekhnologiya i tekhnika dobychi nefii*. Moscow, Nedra Publ., 1986. 382 p. (in Russian)
10. Gimatudinov Sh.K. *Razrabotka i ekspluatatsiya neftyanykh, gazovykh i gazokondensatnykh mestorozhdeniy*. Moscow, Nedra Publ., 1988. 312 p. (in Russian)
11. Shagiev R.G. *Issledovanie skvazhin po KVD*. Moscow, Nauka Publ., 1998. 304 p. (in Russian)
12. Basniev K.S., Vlasov A.M., Kochina I.N., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidravlika*. Moscow, Nedra Publ., 1986. 303 p. (in Russian)

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

УДК 51(092)

DOI 10.17223/19988621/39/12

П.А. Крылов, А.Р. Чехлов

К 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ СЕРГЕЯ АНТОНОВИЧА ЧУНИХИНА

В 2015 г. исполнилось 110 лет со дня рождения выдающегося советского алгебраиста академика АН БССР Сергея Антоновича Чунихина (21.09.1905 – 29.10.1985), 12 лет своей плодотворной деятельности он отдал Томску. Представлена краткая биография ученого.

Ключевые слова: *С.А. Чунихин, теория конечных групп.*

21.09.2015 г. исполнилось 110 лет со дня рождения выдающегося советского алгебраиста академика АН БССР Сергея Антоновича Чунихина. Он родился в Харькове в семье сельского врача, проработавшего 51 год в районных больницах, мать – школьная учительница. В 1929 г. Сергей Антонович окончил Московский государственный университет, где слушал лекции О.Ю. Шмидта, Н.Н. Лузина, Д.Ф. Егорова, П.С. Александрова, А.Я. Хинчина, Э. Нётер и др. Интересно отметить, что академик О.Ю. Шмидт вышел из первой в России крупной алгебраической школы, созданной в Киеве профессором Д.А. Граве (1863–1939), ставшим в советское время почетным членом АН СССР (в 1929 г.). В свою очередь, Д.А. Граве – воспитанник петербургской математической школы, ученик ее основателя академика П.Л. Чебышева (1821–1894).



Свое первое приобщение к научным занятиям Сергей Антонович получил, участвуя в научном семинаре по теории чисел А.Я. Хинчина, и на лекциях О.Ю. Шмидта, впервые прочитавшего в те годы в МГУ курс теории групп. Посещение этих лекций, а в дальнейшем и алгебраического семинара, руководимого О.Ю. Шмидтом, оказало решающее влияние на формирование научных интересов любознательного студента. Приведем перечень прочитанных теоретических курсов в 1924–1929 гг. на математическом отделении физико-математического факультета МГУ по циклу «Математика», по специальности «Чистая математика», где и обучался Сергей Антонович: 1) Введение в анализ; 2) Дифференциальное

исчисление; 3) Аналитическая геометрия; 4) Высшая алгебра с теорией детерминантов; 5) Физика; 6) Общая астрономия; 7) Интегральное исчисление; 8) Дифференциальная геометрия; 9) Интегрирование дифференциальных уравнений; 10) Механика; 11) Начертательная геометрия; 12) Теория функций действительной переменной; 13) Теория притяжения и потенциал; 14) Гидромеханика; 15) Теория вероятностей; 16) Вариационное исчисление; 17) Теория аналитических функций; 18) Исчисление конечных разностей; 19) Теория чисел; 20) Аналитическая теория дифференциальных уравнений; 21) Теория групп; 22) Сферическая астрономия; 23) Теоретическая астрономия; 24) Политическая экономия; 25) История революционного движения; 26) Исторический материализм; 27) Введение в историю и философию естествознания.

Дипломная работа Сергея Антоновича по рекомендации его научного руководителя О.Ю. Шмидта была напечатана в журнале «Математический сборник», а он сам зачислен в аспирантуру к своему наставнику. Несмотря на громадную занятость делами государственной важности, О.Ю. Шмидт уделял тогда много внимания воспитанию молодых алгебраистов, Сергей Антонович являлся одним из первых его учеников. В своем учебнике «Высшая алгебра» для заочников МГУ О.Ю. Шмидт в предисловии упоминает о своих наиболее выдающихся учениках А.Г. Куроше и С.А. Чунихине. Известно, что работа Сергея Антоновича «О проблемах двух классов конечной группы» по рекомендации французского профессора Жана Адамара была напечатана в годовом отчете Французской академии наук. В том отчете, где сообщалось о крупнейшем открытии Ирен и Фредерика Жолио-Кюри искусственной радиоактивности.

В течение 12 лет московского периода жизни Сергей Антонович прошел ступени от ассистента до заведующего кафедрой, а в 1934 г. был удостоен звания профессора. 2 марта 1936 г. в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР С.А. Чунихин защитил докторскую диссертацию «О подгруппах, особенно инвариантных, конечной абстрактной группы», оппонентами были академик О.Ю. Шмидт и член-корреспондент Б.Н. Делоне [1, с. 291]. В том же 1936 г. в Научно-исследовательском институте математики при МГУ была защищена докторская диссертация А.Г. Куроша. В 1930–1931 гг. Сергей Антонович работал в Московском университете, в 1936–1938 гг. – в Математическом институте АН СССР. В 1933–1935 гг. – заведующим кафедрой высшей математики Тульского механического института, в 1935–1941 гг. – Московского вечернего металлургического института. С началом Великой Отечественной войны летом 1941 г. С.А. Чунихин был эвакуирован в Томск.

С 09.1941 г. до 09.1953 г. Сергей Антонович работает в Томске. Он заведует кафедрой высшей математики в Томском электромеханическом институте инженеров железнодорожного транспорта, который был образован в 1930 г. на базе железнодорожных специальностей Томского технологического института (нынешний Национальный исследовательский Томский политехнический университет) и носил название Сибирского института инженеров транспорта (СИИТ), преобразованный в 1932 году в ТЭМИИТ. Параллельно Сергей Антонович работает в Томском университете, где он был преемником такого известного ученого, как Ф.Э. Молин. В 1941 г. Сергея Антоновича постигла тяжелая утрата, погибла его жена – Ирина Чунихина, научный работник. Впоследствии Сергей Антонович женился на томском враче Нине Шаглиянц. В 1943 г. С.А. Чунихин вместе с профессорами Н.П. Романовым и П.К. Рашевским оппонировал докторскую диссертацию П.П. Куфарева. В 1946 г. Сергей Антонович был назначен заведующим ка-

федрой алгебры и теории чисел ТГУ, где в те годы помимо него работали доцент Н.Ф. Канунов и ассистент П.И. Трофимов, впоследствии профессор Пермского университета. Надо отметить, что только в 1960–1970-е гг. Томский университет стал одним из ведущих вузов страны, когда резко возросло число его студентов и сотрудников, открылись новые факультеты и произошла реорганизация существующих; а к началу, например, 1945/46 уч. года в ТГУ было всего 23 профессора и 49 доцентов. Сергей Антонович был руководителем И.Х. Беккера, защитившего в 1952 г. дипломную работу «О центроидах групп». Впоследствии Исаак Хаимович стал основателем томской алгебраической школы по абелевым группам, получившей признание у нас в стране и за рубежом.

В томский период Сергей Антонович получил важные результаты о π -свойствах конечных групп; во втором издании Большой Советской Энциклопедии в статье «Группы» (раздел VII. Развитие теории групп в Советском Союзе) эти результаты и теорема А.А. Кулакова 1931 г. о числе подгрупп p -группы были отмечены как наиболее существенные, относящиеся к конечным группам. После отъезда С.А. Чунихина в Томске данной тематикой продолжали заниматься его ученики – Б.В. Казачков и А.И. Копанев. В период работы в Томске Сергей Антонович избирался членом Томского областного комитета профсоюза высшей школы и научных учреждений. В 1945 г. С.А. Чунихин был награжден знаком «Почётному железнодорожнику» (приказом МПС от 22.04.2002 г. награда стала именоваться знаком «Почётный железнодорожник»), в 1946 г. – медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», а в 1952 г. – премией имени В.В. Куйбышева. Томский период работы Сергея Антоновича отражен в [2–4].

В середине 1950-х гг. в Белоруссии произошли крупные сдвиги в развитии естественных и технических наук. На первое место вышли физико-математические и физико-технические науки, существенно изменилась тематика биологических исследований. Это было обусловлено, во-первых, тем, что республика стала одним из мощных индустриальных центров СССР с высокоразвитой машиностроительной, автомобиле- и тракторостроительной, приборостроительной, радиотехнической и химической промышленностью. Во-вторых, вузы БССР, и в первую очередь БГУ, подготовили значительное количество молодых научных кадров в области физико-математических и технических дисциплин. Был организован Институт физики и математики (1955), из которого в 1959 г. выделился Институт математики с вычислительным центром АН БССР. В 1963 г. создан Институт физики твёрдого тела и полупроводников АН БССР. Помимо существовавшего уже Физико-технического института организован Институт энергетики (1953), впоследствии переименованный в Институт тепло- и массообмена, Институт ядерной энергетики АН БССР (1965) (с ядерным реактором, пущенным в 1962 г.) и Институт технической кибернетики (1965). В Академии наук работают также Лаборатория электроники, Отдел физики неразрушающего контроля и Отдел механики полимеров, реорганизованный в 1969 г. в Институт механики метало-полимерных систем (г. Гомель). Были созданы лаборатории при кафедрах ряда вузов, институты оснащены современным научным оборудованием. В 1940–1950-е гг. советская модель классической системы школьного математического образования достигла наиболее оптимального функционирования, о чем говорит хотя бы то, что одной из важнейших причин успехов советской науки и техники (апогей – начало космических проектов и создание новых типов вооружения) признана советская система образования, в которой ведущие позиции занимала математическая составляющая. Эта модель заимствована некоторыми странами и, как правило, дает хо-

рошие результаты. Как развитые страны (США, Япония, ЕС), так и страны, сейчас совершающие технологический рывок (КНР, Южная Корея, Индия), вкладывают существенные ресурсы в развитие математики и математического образования.

В 1953 г. в Гомеле был образован Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта, и О.Ю. Шмидт рекомендует своего талантливого ученика на должность заведующего кафедрой высшей математики БИИЖТа; в данной должности Сергей Антонович проработал до 1960 г. По воспоминаниям коллег, на посту заведующего кафедрой Сергей Антонович всегда стремился к высокому уровню математической подготовки студентов, позволяющему успешно овладевать общетехническими и специальными дисциплинами. Преподавание высшей математики велось на межпредметной основе, и методика такого изложения постоянно совершенствовалась. Образность и простота изложения, приближающие к слушателю самые абстрактные понятия, забота о расчленении научных рассуждений на фрагменты, доступные восприятию студента, строгая систематичность раскрытия учебного материала, глубокая убежденность во внутреннем единстве и неистощимости математических средств познания и живой философский интерес ко всему многообразию жизни – вот основные черты, характеризующие Сергея Антоновича как преподавателя и наставника. В 1960–1985 гг. С.А. Чунихин – заведующий лабораторией конечных групп Института математики (Гомельское отделение), одновременно в 1964–1969 гг. он работал заведующим кафедрой алгебры Гомельского педагогического института, а в 1978–1985 гг. – заместителем директора Института математики АН БССР по Гомельскому отделению. В 1956 г. С.А. Чунихин был избран членом-корреспондентом, а в 1966-м – академиком АН БССР. Он являлся единственным академиком Академии наук БССР, долгое время работавшим в Гомеле. В 1968 г. Сергей Антонович был удостоен звания «Заслуженный деятель науки БССР».

Гомельский период жизни и деятельности Сергея Антоновича был самым продолжительным и плодотворным. Он основал Гомельскую алгебраическую школу, широко известную не только в Белоруссии, но и далеко за ее пределами. На научном семинаре, руководимом Сергеем Антоновичем, много внимания уделялось не только обсуждению результатов исследований по алгебре, но и заслушивались доклады по методике и истории математики. В Гомеле С.А. Чунихин написал две трети своих научных работ, в том числе в 1964 г. монографию «Подгруппы конечных групп» [5], переведенную в 1969 г. за рубежом на английский язык. Интенсивную научную работу успешно сочетал с подготовкой специалистов высокой квалификации, среди его многочисленных учеников уроженец Гомеля – член-корреспондент Национальной академии наук Белоруссии Л.А. Шемятков; кроме Леонида Александровича еще четверо учеников Сергея Антоновича – В.А. Ведерников, Э.М. Пальчик, А.В. Романовский, С.А. Русаков стали докторами наук. Наконец, нельзя не отметить его научно-организационную и педагогическую деятельность: кроме кафедры математики в Белорусском институте инженеров железнодорожного транспорта он основал кафедру алгебры и геометрии в педагогическом институте, а затем в университете, создал академическое учреждение (гомельское отделение Института математики АН БССР) и в течение ряда лет был его руководителем. Дважды в Гомеле проходили Всесоюзные алгебраические коллоквиумы (в 1968 г. – IX, а в 1975 г. – XIII), председателем оргкомитета которых был С.А. Чунихин. О большом интересе к конечным группам, существующем в те годы, свидетельствует также проведение специально посвященных конечным

группам Международного коллоквиума 1957 г. в Тюбингене (Германия) и двух симпозиумов в США (1959 и 1960).

Новым двум важнейшим направлениям в развитии теории конечных групп посвящена статья [6]. Это, во-первых, проблемы факторизации конечных групп и, во-вторых, π -свойства (в частности, силовские свойства) конечных групп.

Под факторизацией конечной группы G понимается представление ее в виде произведения некоторых ее подгрупп (комплексы Фробениуса), взятых в определенном порядке: $G = G_1 \dots G_n$. Исследуются как способы факторизовать заданную группу, так и свойства групп, допускающих ту или иную заданную факторизацию (прямая и обратная задачи факторизации). Сущность одного из его факторизационных результатов состоит в следующем. Пусть K – последовательность индексов композиционного ряда произвольной конечной группы G . Два числа m и n из K называются *связанными*, если существует связывающая тип такая цепочка натуральных чисел из K , любые два соседних члена которой не взаимно просты. Последовательность K разбивается на классы связанных элементов $K_1, \dots, K_r$. Произведение всех элементов из K_i называется *композиционным блоком* группы G . Тогда оказывается, что группа G представима в виде произведения попарно перестановочных подгрупп, порядки которых являются ее композиционными блоками. Этот результат включает в себя классическую теорему Ф. Холла о факторизации конечных разрешимых групп. С.А. Чунихин получил и следующую весьма общую теорему. Любому разбиению последовательности индексов главного ряда конечной группы G на подмножества соответствует факторизация группы G с помощью попарно перестановочных подгрупп, порядки которых зависят от указанного разбиения. Эта теорема явилась завершающей в цепи исследований, начальным звеном которой была упомянутая выше теорема Ф. Холла.

Свойства конечной группы, связанные с некоторым определенным множеством простых чисел π , называются π -свойствами. Неявно π -свойства изучались уже давно, примером чего может служить хотя бы знаменитая теорема Силова (в случае этой теоремы π сводится к одному простому числу p), а также и понятие силовской π -подгруппы при произвольном π , рассмотренное еще в 1-м издании известной книги А. Г. Куроша «Теория групп» (1944). Однако вполне отчетливое введение понятия и самого термина « π -свойства конечных групп» и начало систематического его применения как самостоятельного приема изучения конечных групп было осуществлено лишь в 1946–1949 гг. в работах [7, 8] Сергея Антоновича (работа [8] вышла и в английском переводе [9]). Этот метод исследования позволяет для каждой теоремы теории групп, условия которой имеют арифметический характер, искать ей соответствующую более общую « π -теорему», сохраняя условия исходной теоремы лишь для элементов π . Эти и последующие работы Сергея Антоновича по π -свойствам конечных групп нашли довольно подробное освещение в книге «Математика в СССР за 40 лет», изданной издательством Физматгиз в 1959 г. Изучению π -свойств была посвящена капитальная работа «Теоремы, подобные силовской» известного английского алгебраиста Ф. Холла. Среди многих важных результатов в ней дано решение поставленной С.А. Чунихиным задачи о вложении подгрупп у π -отделимых групп (группа называется π -отделимой, если она обладает нормальным рядом, каждый индекс которого делится не более чем на одно простое число из π). π -свойствами занимались также Х. Виландт, Г. Цалпа, Н. Ито, М.И. Каргаполов, П.А. Гольберг, а также многочисленные ученики Сергея Антоновича. Этот метод был перенесен на бесконечные и топологические группы.

Помимо вышеупомянутых двух направлений значительную роль в развитии теории конечных групп сыграли направление по исследованию аналогов знаменитой теоремы Силова и направление по изучению характеристик конечных групп при помощи ее собственных подгрупп. Возникновение и развитие этих направлений неразрывно связано с научной деятельностью С.А. Чунихина, пополнившего теорию конечных групп рядом результатов непреходящего значения, вошедших в основной фонд этой теории.

В статье [6, с. 45] сделан вывод, «что советская школа конечных групп, хотя и немногочисленная по своему составу, занимает на ряде участков исследования ведущее положение в мировой алгебраической науке». Эта статья является изложением обзорного доклада Сергея Антоновича на 3-м Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре, проходившем в 1960 г. в Свердловске. Кратко в этой статье были затронуты и другие интересные направления и тенденции развития теории конечных групп за последние годы. В 1971 г. в ВИНТИ вышел обстоятельный обзор по конечным группам [10], подготовленный С.А. Чунихиным и Л.А. Шеметковым, он охватывает материалы, прореферированные в РЖ «Математика» в 1965–1969 гг. и включает в себя рецензии 824 статей и нескольких книг. Предыдущий обзор, написанный А.И. Кострикиным и опубликованный в 1966 г., охватывал материалы, прореферированные в РЖ «Математика» в 1962–1964 гг., и включал в себя рецензии 402 статей. Обзор, написанный В.Д. Мазуровым и опубликованный в 1966 г., охватывает материалы, прореферированные в РЖ «Математика» в 1970–1975 гг., и включает в себя рецензии 672 статей; автор отмечает, что наличие содержательного обзора Л.А. Шеметкова [11], касающегося результатов о разрешимых группах и их обобщениях, позволило автору не затрагивать эту тему. В обзоре Л.А. Шеметкова, включающего в себя ссылки на 85 статей, приводятся биографические сведения о Л. Силове (12.12.1832–07.09.1918), методом Х. Виландта доказывается теорема Силова, дается обзор важнейших обобщений теоремы Силова, полученных за 100 лет ее существования, перечисляются объекты теории формаций и формулируются результаты ее десятилетнего развития.

В своих научных исследованиях Сергей Антонович затронул многие разделы теории конечных групп, которая по его образному выражению «всегда была трамплином и творческой лабораторией для алгебры в целом». Теория конечных групп уже в начале нашего века была настолько богатой содержанием, что к 30-м годам казалась многим приблизившейся к завершению. Поэтому открытие в работах С.А. Чунихина новых общих закономерностей в теории конечных групп, таких, как универсальные методы факторизации конечных групп, объединение теорем Силова, Ф. Холла и Шура, мера разрешимости конечных групп и др., было большой неожиданностью и носило принципиальный характер, свидетельствуя в то же время о тонкой научной интуиции их автора.

Академик И.М. Виноградов и член-корреспондент АН СССР И.Р. Шафаревич высоко ценили научную деятельность Сергея Антоновича и, когда он избирался академиком АН БССР, они дали блестящие отзывы.

Говорить об оценке научной деятельности С.А. Чунихина лучше всего цитатами из высказываний выдающихся математиков. Академик И.М. Виноградов: «Им создан метод π -свойств конечных групп, впервые были найдены универсальные методы факторизации конечных групп. Новое направление составили также его исследования по теоремам типа Силова» [12, с. 24].

Академик В.М. Глушков, член-корреспондент АН УССР С.Н. Черников: «Его исследования в классической области алгебры во многом определились задачей определения условий, при выполнении которых делитель порядка группы является порядком ее подгруппы. Здесь ему принадлежат многие фундаментальные понятия и результаты» [12, с. 25].

Академик А.И. Мальцев: «В течение многолетней научной и педагогической деятельности С.А. Чунихин внес большой вклад в развитие советской алгебраической науки и в подготовку кадров специалистов высшей квалификации» [12, с. 22–23].

В [13] отмечается, что исследования С.А. Чунихина получили высокую оценку в докладе [14] известного немецкого математика Хельмута Виландта на Эдинбургском (Великобритания) математическом конгрессе в 1958 г. В [15, с. 761–762] приведена биографическая справка и некоторые труды Сергея Антоновича.

К 60-летию со дня рождения Сергея Антоновича о его научных достижениях вышла статья в журнале «Успехи математических наук» [16], а также статья Д.А. Супруненко, С.А. Русакова и С.А. Сафонова «К шестидесятилетию со дня рождения и тридцатилетию профессорской деятельности Сергея Антоновича Чунихина», опубликованная в сборнике [17]. Сергею Антоновичу посвящены и более поздние работы [18–23]. В [12] приведен список научных трудов Сергея Антоновича, литература о нем и отзывы о его научной деятельности. Научные результаты вошли в книги [24–25] и др.

Коллеги отзывались о Сергее Антоновиче как человеке энциклопедических знаний не только в области математики. Обладая философским складом ума и большой любознательностью, Сергей Антонович всегда жаждал познания в самом широком смысле этого слова. Эволюция Вселенной, вопросы общей истории, медицины и многое другое входили в круг его интересов. Он профессионально оценивал живопись, графику, работы скульпторов и архитекторов, был театралом; владел английским, немецким и французским языками. Эти качества, как уже отмечалось выше, он старался передать и своим ученикам. Л.А. Шемятков вспоминал: «Без Чунихина и нашего коллектива, я, наверное, не смог бы стать доктором наук. Влияние крупного ученого на учеников огромно. Мой учитель – человек широкой культуры, большой эрудит не только в математике, но и в искусстве. Для него характерно отсутствие мелочной опеки, он предоставляет ученикам полную самостоятельность. Ценит больше всего те идеи, которые возникают у учеников. Важно и то, что когда результаты получались, учитель уделял максимум внимания и заботы» [26].

Сергей Антонович неоднократно избирался депутатом Гомельского областного и городского Советов депутатов трудящихся, выступал в печати и перед студенческой аудиторией по вопросам развития науки и образования.

Заслуги С.А. Чунихина отмечены орденами Дружбы народов (1975), «Знак Почета» (1954, 1985), четырьмя медалями, пятью почетными грамотами Верховного Совета БССР.

29 октября 1985 г. С.А. Чунихин скончался.

В день рождения выдающегося ученого 21 сентября 1995 г. в Гомеле прошла Международная конференция «Алгебра и кибернетика», а в октябре 2005 г. – Международная конференция «Классы групп и алгебр» посвященные его памяти. Конференции собрали большое число участников из Беларуси, России, Украины, Польши и США. На здании, где работал Сергей Антонович, установлена и торжественно открыта мемориальная доска. В 2011 г. Музее истории Гомеля работала

выставка, посвященная 106-летию со дня рождения выдающегося ученого, блестящего педагога, академика Сергея Антоновича Чунихина. В настоящее время в Белорусском государственном университете транспорта в память профессора С.А. Чунихина учреждена именная стипендия, которая присуждается решением Совета университета студентам за отличные успехи в изучении физико-математических дисциплин и активное участие в научной и общественной жизни.

Память о Сергее Антоновиче Чунихине живет в делах и сердцах знавших его и работавших с ним.

Авторы выражают благодарность профессору Гомельского государственного университета им. Франциска Скорины Александру Николаевичу Скибе за любезное предоставление ряда ценных документов для этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математическая хроника* // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 289–291.
2. *Круликовский Н.Н.* Из истории развития математики в Томске. Томск, 2006.
3. *Гриншпон С.Я., Крылов П.А.* Заметки об истории кафедры алгебры Томского государственного университета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15). С. 127–138.
4. *Профессора* Томского университета: Биографический словарь (1945–1980) / под ред. С.Ф. Фоминых, С.А. Некрылова, Л.Л. Берцун, А.В. Литвинова, К.В. Петрова, К.В. Зленко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. Т. 3.
5. *Чунихин С.А.* Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.
6. *Чунихин С.А.* О некоторых направлениях в развитии теории конечных групп за последние годы // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 4. С. 31–50.
7. *Чунихин С.А.* О p -свойствах групп // ДАН. 1947. Т. 55. № 6. С. 481–484.
8. *Чунихин С.А.* О P -свойствах конечных групп // Матем. сб. 1949. Т. 25(67). № 3. С. 321–346.
9. *Čuniĭin S.A.* On P -properties of finite groups // Amer. Math. Soc. Translations. 1952. № 72. P. 32.
10. *Чунихин С.А., Шеметков Л.А.* Конечные группы // Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1969. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–70.
11. *Шеметков Л.А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30. № 2. С. 179–198.
12. *Монахов В.С.* Сергей Антонович Чунихин. Библиогр. указ. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. 50 с.
13. *Шеметков Л.А.* Обобщения теоремы Силова // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 6. С. 1425–1431.
14. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278. (Перевод на рус. яз.: Пути развития структурной теории конечных групп // Междунар. мат. конгресс. Обзор. докл. (Эдинбург, 1958 г.). М.: Физматгиз, 1962. С. 263–276).
15. *Математика* в СССР за сорок лет. М., 1959. Т. 2.
16. *Мальцев А.И., Сафонов С.А., Черников С.Н., Шеметков Л.А.* Сергей Антонович Чунихин (к 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. № 2(134). С. 189–197.
17. *Конечные группы* / под ред. Я.Г. Беркович, С.А. Русакова, С.А. Сафонова, В.И. Сергиенко, Л.А. Шеметкова. Сборник научных работ. Минск: Наука и техника, 1966. 192 с.
18. *Шеметков Л.А., Кохно А.П., Кравчук М.И., Поляков Л.Я., Русаков С.А.* Сергей Антонович Чунихин (к 70-летию со дня рождения) // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. № 5. С. 129–130.
19. *Конечные группы* / под ред. Русакова С.А. Сборник научных работ. Минск: Наука и техника, 1978.

20. Платонов В.П., Вольвачев Р.Т., Салук М.И., Романовский А.В. Сергей Антонович Чунихин (к 80-летию со дня рождения) // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. № 5. С. 115–116.
21. Платонов В.П., Супруненко Д.А., Вольвачев Р.Т., Залесский А.Е., Романовский А.В. Сергей Антонович Чунихин (некролог) // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 1. С. 122–123.
22. Шеметков Л.А. Сергей Антонович Чунихин (1905–1985) // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1996. № 3. С. 6–7.
23. Шеметков Л.А. Слово о Чунихине // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2006. № 3(36). С. 4–7.
24. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
25. Suzuki M. Group theory. Springer, 1982. V. I; 1986. V. II.
26. Сороковик И.А. Как рождаются открытия? Минск: Белорусская наука, 2013.

Статья поступила 24.01.2016 г.

Krylov P.A., Chekhlov A.R. TO THE 110TH ANNIVERSARY OF SERGEI ANTONOVICH CHUNIKHIN

DOI 10.17223/19988621/39/12

In 2015, the 110th anniversary of Sergei Antonovich Chunikhin (21.09.1905–29.10.1985), an outstanding Soviet algebraist, Academician of the Belarusian Academy of Sciences, is celebrated. Twelve years of his fruitful activity were given to Tomsk. A brief biography of the scientist is presented.

Keywords: S.A. Chunikhin, theory of finite groups.

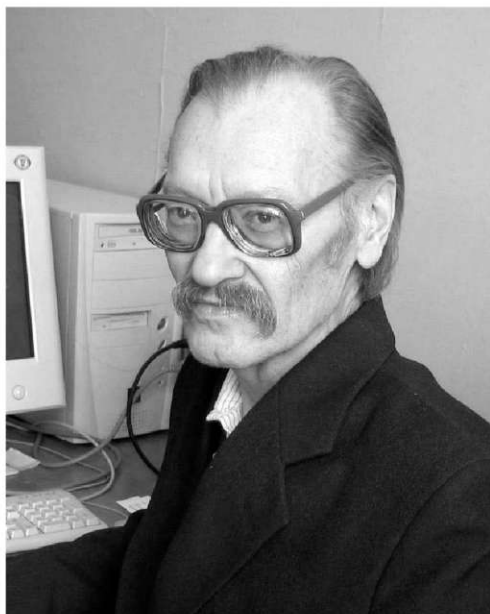
KRYLOV Petr Andreevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: krylov@math.tsu.ru

CHEKHOV Andrey Rostislavovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Matematicheskaya khronika. *Uspekhi mat. nauk*, 1936, no. 2, pp. 289–291. (in Russian)
2. Krulikovskiy N.N. *Iz istorii razvitiya matematiki v Tomske*. Tomsk, 2006. (in Russian)
3. Grinshpon S.Ya., Krylov P.A. Zametki ob istorii kafedry algebry Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 3(15), pp. 127–138. (in Russian)
4. *Professora Tomskogo universiteta: Biograficheskiy slovar' (1945–1980)* (eds. S.F. Fominykh, S.A. Nekrylova, L.L. Bertsun, A.V. Litvinova, K.V. Petrova, K.V. Zlenko). Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 2001, vol. 3. (in Russian)
5. Chunikhin S.A. *Podgruppy konechnykh grupp*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1964. 158 p. (in Russian)
6. Chunikhin S.A. O nekotorykh napravleniyakh v razvitiy teorii konechnykh grupp za poslednie gody. *Uspekhi mat. nauk*, 1961, vol. 16, no. 4, pp. 31–50. (in Russian)
7. Chunikhin S.A. O p-svoystvakh grupp. *DAN*, 1947, vol. 55, no. 6, pp. 481–484. (in Russian)
8. Chunikhin S.A. O P-svoystvakh konechnykh grupp. *Matem. sb.*, 1949, vol. 25(67), no. 3, pp. 321–346. (in Russian)
9. Čunihin S.A. On P-properties of finite groups. *Amer. Math. Soc. Translations*, 1952, no. 72, pp. 32.

10. Chunikhin S.A., Shemetkov L.A. Konechnye gruppy. *Itogi nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom.*, 1969. Moscow, VINITI Publ., 1971, pp. 7–70. (in Russian)
11. Shemetkov L.A. Dva napravleniya v razvitií teorii neprostykh konechnykh grupp. *Uspekhi mat. nauk*, 1975, vol. 30, no. 2, pp. 179–198. (in Russian)
12. Monakhov V.S. *Sergey Antonovich Chunikhin. Bibliogr. ukaz.* Gomel', Izd-vo Gomel'skogo un-ta, 1995. 50 p. (in Russian)
13. Shemetkov L.A. Obobshcheniya teoremy Silova. *Sib. matem. zhurn.*, 2003, vol. 44, no. 6, pp. 1425–1431. (in Russian)
14. Wielandt H. Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen. *Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958.* London, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 268–278.
15. *Matematika v SSSR za sorok let.* Moscow, 1959, vol. 2. (in Russian)
16. Mal'tsev A.I., Safonov S.A., Chernikov S.N., Shemetkov L.A. Sergey Antonovich Chunikhin (k 60-letiyu so dnya rozhdeniya). *Uspekhi mat. nauk*, 1967, vol. 22, no. 2(134), pp. 189–197. (in Russian)
17. *Konechnye gruppy. Sbornik nauchnykh rabot* (eds. Ya.G. Berkovich, S.A. Rusakova, S.A. Safonova, V.I. Sergienko, L.A. Shemetkova). Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1966. 192 p. (in Russian)
18. Shemetkov L.A., Kokhno A.P., Kravchuk M.I., Polyakov L.Ya., Rusakov S.A. Sergey Antonovich Chunikhin (k 70-letiyu so dnya rozhdeniya). *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1975, no. 5, pp. 129–130. (in Russian)
19. *Konechnye gruppy. Sbornik nauchnykh rabot* (ed. Rusakov S.A.) Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1978. (in Russian)
20. Platonov V.P., Vol'vachev R.T., Saluk M.I., Romanovskiy A.V. Sergey Antonovich Chunikhin (k 80-letiyu so dnya rozhdeniya). *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1985, no. 5, pp. 115–116. (in Russian)
21. Platonov V.P., Suprunenko D.A., Vol'vachev R.T., Zalesskiy A.E., Romanovskiy A.V. Sergey Antonovich Chunikhin (nekrolog). *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1986, no. 1, pp. 122–123. (in Russian)
22. Shemetkov L.A. Sergey Antonovich Chunikhin (1905–1985). *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1996, no. 3, pp. 6–7. (in Russian)
23. Shemetkov L.A. Slovo o Chunikhine. *Izvestiya GGU im. F. Skoriny*, 2006, no. 3(36), pp. 4–7. (in Russian)
24. Kurosh A.G. *Teoriya grupp.* Moscow, Nauka Publ., 1967. (in Russian)
25. Suzuki M. *Group theory.* Springer, 1982, vol. I; 1986, vol. II. (in Russian)
26. Sorokovik I.A. *Kak rozhdayutsya otkrytiya?* Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2013. (in Russian)



ГЕННАДИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ СИБИРЯКОВ (к 75-летию со дня рождения)

Геннадий Васильевич Сибиряков поступил на механико-математический факультет Томского госуниверситета в 1958 г., после окончания Богучанской средней школы в Красноярском крае. В 1963 г. он с отличием окончил университет и поступил в аспирантуру к профессору З.И. Клементьеву. Темой диссертации Геннадия Васильевича была теория обобщенных функций, где он рассматривал умножение обобщенных функций на характеристические функции [1–4]. Кандидатская диссертация [5] была защищена Г.В. Сибиряковым в 1967 г., а в 1968 г. Геннадий Васильевич был принят на должность доцента по кафедре вычислительной математики ТГУ.

Свою преподавательскую деятельность Геннадий Васильевич начал с курса программирования для студентов ММФ. В это время его увлекла задача создания компьютерных систем, которые могли бы работать с буквенными, а не с числовыми объектами. Вместе с Сибиряковым и под его руководством над этой проблемой стал работать Е.А. Арайс. Эта работа продолжалась в течение многих лет, её результатом стало создание автоматизированной системы «Автоаналитик» [6–11]. Евгений Александрович Арайс продолжил работу в этом направлении, защитив в 1983 г. докторскую диссертацию на тему «Численное и аналитическое моделирование неоднородных технических устройств».

В 1965–1966 гг. Геннадий Васильевич организовал кружок по изучению топологии и функционального анализа. Этот кружок привлек внимание любознательных студентов – как математиков, так и физиков. Среди них были студенты А.В. Оськин, И.К. Слепухин, Д. Белов и другие. В 1971 г. Геннадий Васильевич подготовил и прочитал курс «Функциональный анализ» на механико-математическом факультете ТГУ. Этот курс произвел большое впечатление на слушателей, поразил четкостью и ясностью изложения, продуманностью деталей и глубиной материала. Около десятка студентов (среди них С.П. Гулько, Т.Е. Хмылева, В.Ш. Хасанов) захотели специализироваться в области функционального анализа и топологии. Г.В. Сибиряков, а также И.К. Слепухин и А.В. Оськин прочитали студентам ряд спецкурсов, хотя специализаций на факультете еще не было. Научный семинар по топологии и функциональному анализу стал работать более продуктивно, на нем были доложены первые самостоятельные результаты. Среди них были и результаты самого Геннадия Васильевича [12–14], однако обращает на себя внимание тот факт, что большая часть результатов была получена его учениками. Этот период закончился защитой нескольких кандидатских диссертаций, руководителем которых был Г.В. Сибиряков – это были диссертации С.П. Гулько, Т.Е. Хмылевой, И.К. Слепухина. В 1991 году Сергей Порфирьевич Гулько защитил докторскую диссертацию «Сигма-произведения и проблемы классификации в топологической теории пространств функций» – еще один пример успешной работы, начатой под руководством Геннадия Васильевича Сибирякова.

Геннадий Васильевич продолжает заниматься исследовательской работой в различных областях функционального анализа [15–17], давая научную опору своим ученикам и коллегам. В 2000-е годы было защищено еще две кандидатские диссертации под его руководством: Е.Г. Лазаревой (2000-й год) и О.С. Осиповым (2009-й год).

В конце 70-х гг. 20-го века на кафедре математического анализа ТГУ активно работал семинар по теории моделей поверхностного слоя Луны, в котором Геннадий Васильевич принимал активное участие [18–20].

К важнейшим результатам профессиональной деятельности Г.В. Сибирякова необходимо также отнести все подготовленные и прочитанные им курсы лекций на ММФ ТГУ, а также изданные с его участием учебные пособия и монографии [21 – 24]. Кроме упомянутых выше лекций по программированию и функциональному анализу Геннадий Васильевич читал в разные годы курсы теории функций действительного переменного, топологии, гармонического анализа и большое число спецкурсов. На особом положении у Г.В. Сибирякова находится фундаментальный курс математического анализа, который он читает уже многие годы. С каждым новым потоком студентов Геннадий Васильевич заново перерабатывает содержание лекций, ставя перед собой сложнейшую задачу – научить студентов думать и рассуждать, используя логику, математический аппарат и те интеллектуальные возможности, которые заложены в каждом. И эту задачу ему удается решать, о чем свидетельствует большое число его учеников, добившихся успехов в различных областях математики.

Интересы Геннадия Васильевича не ограничиваются одной математикой. Он большой любитель природы, регулярно сплавляется на плоту по родной реке Ангара, хорошо знает и глубоко интересуется историей, у него большая, прекрасно систематизированная библиотека научной и художественной литературы.

Сейчас большую часть учебных курсов, прочитанных когда-то Геннадием Васильевичем, читают на ММФ ТГУ его ученики и даже ученики его учеников, но его деятельность и сегодня служит примером активной жизненной позиции, ответственного и критичного отношения к своему труду ученого и преподавателя университета.

Желаем Геннадию Васильевичу всех благ и дальнейшей успешной работы! Ждём его новых статей, учебных пособий и исследовательских идей!

Гулько С.П., Копанев С.А., Хмылева Т.Е., Лазарева Е.Г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сибиряков Г.В. О некоторых операторах в пространстве обобщенных функций // Труды Томского ун-та. 1966. Т. 179. С. 79–84.
2. Сибиряков Г.В. Сравнение обобщенных функций пространства K'_1 по А-оператору // Труды Томского ун-та. 1966. Т. 179. С. 85–91.
3. Сибиряков Г.В. Разностные операторы в пространстве K'_1 // Труды Томского ун-та. 1966. Т. 179. С. 92–107.
4. Сибиряков Г.В. А-оператор и значение обобщенных функций в нуле // Труды Томского ун-та. 1967. Т. 198. С. 42–49.
5. Сибиряков Г.В. Характеристические операторы и разностные уравнения в пространстве распределений: кандидатская диссертация. Томск, 1967. 135 с.
6. Сибиряков Г.В. Об одном способе формализации математического аппарата и применения вычислительных машин в математике // Труды Томского ун-та. Т. 198. 1967. С. 65–78.
7. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В., Шутенков А.В. Система интерпретации для решения больших задач // Вопросы программирования и автоматизации проектирования: сб. статей. 1971. С. 14–37.
8. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. Основы системы программирования Авто-Аналитик // Вопросы программирования и автоматизации проектирования. Томск: Изд-во ТГУ, 1971. Вып. 1. С. 166–181.
9. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. Некоторые операторы АвтоАналитика // Вопросы программирования и автоматизации проектирования. Томск: Изд-во ТГУ, 1971. Вып. 1. С. 182–190.
10. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. Система программирования Авто-Аналитик // Вычислительная математика и вычислительная техника: сб. / ФТИНТ АН УССР. Харьков, 1972. Вып. III. С. 26–27.
11. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. Авто-Аналитик. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973. 284 с.
12. Сибиряков Г.В. Нормированные пространства с максимальным перекосом // Труды Томского ун-та. 1974. Т. 253. Вопросы математики. Вып. 5. С. 23–38.
13. Сибиряков Г.В. О характеристических операторах // Труды Томского ун-та. 1975. Т. 220. С. 16–28.
14. Сибиряков Г.В., Гулимов А.В. О ретрактах в линейных топологических пространствах // Труды Томского ун-та. 1975. Т. 220. Вопросы математики. Вып. 3. С. 67–77.
15. Иванова Е.Г., Сибиряков Г.В. О делении перестановок $\pi_{p,q}$ пополам // Всесибирские чтения по матем. и механике: Избранные доклады Междунар. конф. Томск, 1997. Т. 1. С. 122–128.
16. Емельянова Т.В., Сибиряков Г.В. Безусловно интегрируемые функции // Вестн. Том. гос. ун-та. 2007. № 300(1). С. 120–123.
17. Сибиряков Г.В. Точки плотности меры Лебега // Всероссийская конференция по математике и механике: тез. докл. Томск, 2013. С. 46.
18. Поток вторичных частиц на поверхности Луны. (Отчет по научно-исследовательской работе. Руководитель темы Фаст В.Г.) Томск, 1978. Гл. 5. С. 63–86.

19. Поток вторичных частиц на поверхности Луны и в окололунном пространстве. (Отчет по научно-исследовательской работе. Руководитель темы Фаст В.Г.) Томск, 1979. Гл. 3, 4. С. 31–143 (соавторы Фаст В.Г., Пестов Г.Г., Кривякова Э.Н., Исаева Н.А.)
20. Фаст В.Г., Пестов Г.Г., Сибиряков Г.В. и др. Структура окололунного облака частиц, выбиваемых с поверхности Луны метеороидами // Метеорное вещество в межпланетном пространстве. М.; Казань, 1982. С. 41–44.
21. Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха: уч. пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. 80 с.
22. Копанев С.А., Кривякова Э.Н., Сибиряков Г.В. и др. Математический анализ: учеб. пособие для студентов первого курса. Томск: Том. гос. ун-т, 2001. 107 с.
23. Сибиряков Г.В. Аксиоматическая теория вещественного числа // Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ. Томск: Том. гос. ун-т, 2008. С. 58 – 122.
24. Сибиряков Г.В., Мартынов Ю.А. Метрические пространства: учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. 165 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАБУШКИН Никита Александрович – аспирант кафедры теоретической и промышленной теплотехники Энергетического института Томского политехнического университета. E-mail: atikin89@tpu.ru

БАРСУКОВ Виталий Дементьевич – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: barsukov@niipmm.tsu.ru

БАСАЛАЕВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

БОГДАНОВА Рада Александровна – старший преподаватель кафедры математики и информатики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: bog-rada@yandex.ru

БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ВЛАСОВ Антон Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. E-mail: vlasov.anton@gmail.com

ГОЛДАЕВ Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и промышленной теплотехники Томского политехнического университета. E-mail: svgoldaev@rambler.ru

ДУДАРЕВА Ольга Владимировна – аспирантка кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала ФГБОУ «Башкирский государственный университет». E-mail: BelovaOlgaV@mail.ru

КРЫЛОВ Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Томского государственного университета. E-mail: krylov@math.tsu.ru

МАРТЫНОВ Василий Александрович – инженер Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. E-mail: martynov.vasilyi@gmail.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

ПАСЕЧНИК Кирилл Арнольдович – инженер Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. E-mail: kir.nik@mail.ru

ПИКУЩАК Елизавета Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: liza@ftf.tsu.ru

ПОЛЯНСКИЙ Иван Сергеевич – кандидат технических наук. Сотрудник Академии ФСО России (г. Орел). E-mail: van341@mail.ru

РАДЫГИН Владимир Михайлович – доктор технических наук, профессор. Сотрудник Академии ФСО России (г. Орел). E-mail: van341@mail.ru

СОЛОМИНА Анна Владимировна – аспирантка кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: annavladimirovna483@mail.ru

ТРОФИМЕНКО Надежда Николаевна – аспирантка кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: Trofimenko@sibmail.com

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Уральского государственного педагогического университета. E-mail: d_osh@rambler.ru

ХЕГАЙ Ефим Игоревич – студент физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: efim_h@ftf.tsu.ru

ХМЫЛЕВА Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: TEX2150@yandex.ru

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

ШАГАПОВ Владислав Шайхулаязамович – академик Академии наук РБ, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала «Башкирский государственный университет», главный научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, главный научный сотрудник Института механики Уфимского научного центра РАН. E-mail: Shagapov@rambler.ru

ЭРКЕБАЕВ Улукбек Заирбекович – аспирант Ошского государственного университета (г. Ош, Кыргызстан) E-mail: uluk3188@mail.ru