МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:514.1:514.7
DOI 10.17223/19988621/39/1

Р.А. Богданова

ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Находится множество всех невырожденных двухточечных инвариантов групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплициальной плоскостей). Для решения соответствующих функциональных уравнений применяется аналитический метод.

Ключевые слова: *феноменологически симметричная двумерная геометрия, локальная группа движений, двухточечный инвариант, функциональное уравнение.*

В работах [1, 2] для четырех феноменологически симметричных двумерных геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплициальной плоскостей), т.е. геометрий максимальной подвижности [3] решением соответствующих функциональных уравнений на множество движений найдены трехпараметрические группы движений.

Целью данной работы является нахождение полной системы невырожденных двухточечных инвариантов групп движений упомянутых выше четырех геометрий как решение соответствующих функциональных уравнений на множество двухточечных инвариантов групп преобразований.

Феноменологически симметричные двумерные геометрии строятся на гладком двумерном многообразии M_2 [4]. Сущность феноменологической симметрии состоит в наличии связи между всеми взаимными расстояниями для некоторого конечного числа точек [5, 6]. Точки многообразия M_2 удобно, в целях сокращения записи, обозначать строчными буквами латинского алфавита: i, j, k и т.д. Текущая точка $i \in M_2$ задается локальными координатами x_i, y_i. Основу построения двумерной геометрии составляет гладкое класса C^2 отображение $f : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}$, где $\mathfrak{S}_f \in M_2 \times M_2$, сопоставляющее паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ действительное число $f(i, j) \in \mathbb{R}$ [4], называемое метрической функцией. Ее координатное представление для двумерных геометрий имеет следующий вид:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \tag{1}$$

Эта функция, в отличие от обычной метрики, удовлетворяет только естественным математическим требованиям гладкости класса C^2, невырожденности и определенности почти всюду в $M_2 \times M_2$ [4].

Все основные определения и соответствующие аксиомы, относящиеся к феноменологически симметричным ранга 4 двумерным геометриям представлены в работах Г.Г. Михайличенко [4] и автора [2].

Определение. Гладкое класса C^2 локальное взаимно однозначное (обратимое) отображение

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \tag{2}$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0, \tag{3}$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию

$$f\left(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)\right) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{4}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$.

Равенство (4) есть также функциональное уравнение на множество двухточечных инвариантов группы преобразований двумерного многообразия как функций четырех переменных – координат точек i и j.

Наряду с хорошо известными геометриями, такими, как плоскость Евклида, плоскость Минковского, двумерная сфера и другие, в классификации [4], построенной Г.Г. Михайличенко, присутствуют двумерные геометрии гельмгольцевого типа, в которых окружность не имеет привычного образа, о чем говорит Гельмгольц в своей работе [7], а также симплициальная плоскость.

Для трех гельмгольцевых и симплициальной двумерных геометрий запишем координатное представление задающих их метрических функций:

1) плоскость Гельмгольца

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)\exp\left(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{5}$$

где $\gamma > 0$ – параметр семейства;

2) псевдогельмгольцева плоскость

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2)\exp\left(2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{6}$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметр семейства;

3) дуальногельмгольцева плоскость

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right); \tag{7}$$

4) симплициальная плоскость

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \tag{8}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$.

Следуя работам автора (см. [1, 2]), для этих геометрий запишем группы преобразований двумерного многообразия M_2:

1) трехпараметрическая группа движений плоскости Гельмгольца

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{9}$$

где $(a^2 + b^2)\exp(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{b}{a}) = 1$;

2) трехпараметрическая группа движений псевдогельмгольцевой плоскости

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{10}$$

где $(a^2 - b^2)\exp(2\beta \operatorname{ar(c)th}\frac{b}{a}) = 1$;

3) трехпараметрическая группа движений дуальногельмгольцевой плоскости

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{11}$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$;

4) трехпараметрическая группа движений симплициальной плоскости

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \tag{12}$$

где $a^m b^n = 1$.

В настоящей работе для трех гельмгольцевых и симплициальной геометрий находятся все невырожденные двухточечные инварианты групп (9) – (12) преобразований двумерного многообразия M_2 как решение функционального уравнения (4). Заметим, что условие гладкости и обратимости (3) преобразований (2) совершенно естественно. В процессе решения функционального уравнения (4) устанавливается, что каждый такой инвариант с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ совпадает с метрической функцией соответствующей плоскости.

Сначала рассмотрим плоскость Гельмгольца.

Запишем функциональное уравнение (4) на множество двухточечных инвариантов группы преобразований (9) двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i - by_i + c,\ bx_i + ay_i + d,\ ax_j - by_j + c,\ bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \tag{13}$$

Теорема 1. Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d\ , \tag{14}$$

где $(a^2 + b^2)\exp(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{b}{a}) = 1$, γ – положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией плоскости Гельмгольца и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство. Дифференцируя функциональное уравнение (13) по параметрам c, d и b с учетом того, что параметр a зависит от b, поскольку между ними существует связь $(a^2+b^2)\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{b}{a})=1$, из которой следует $(a-\gamma b)\frac{da}{db}=-(b+\gamma a)$, получим систему функционально-дифференциальных соотношений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f(i',j')}{\partial x_i'}+\frac{\partial f(i',j')}{\partial x_j'}=0,\quad \frac{\partial f(i',j')}{\partial y_i'}+\frac{\partial f(i',j')}{\partial y_j'}=0,\\&\frac{\partial f(i',j')}{\partial x_i'}(-x_i\frac{b+\gamma a}{a-\gamma b}-y_i)+\frac{\partial f(i',j')}{\partial y_i'}(x_i-\frac{b+\gamma a}{a-\gamma b}y_i)+\\&+\frac{\partial f(i',j')}{\partial x_j'}(-x_j\frac{b+\gamma a}{a-\gamma b}-y_j)+\frac{\partial f(i',j')}{\partial y_j'}(x_j-\frac{b+\gamma a}{a-\gamma b}y_j)=0,\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

где, например, $\frac{\partial f(i',j')}{\partial x_i'}=\frac{\partial f(x_i',y_i',x_j',y_j')}{\partial x_i'}$. В системе (15) параметрам a, b, c, d придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a=1, b=0, c=0, d=0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}=0,\\&\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}(-\gamma x_i-y_i)+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}(x_i-\gamma y_i)+\\&+\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}(-\gamma x_j-y_j)+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}(x_j-\gamma y_j)=0.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Общее решение $\Theta(u,v)=\Theta(x_i-x_j,y_i-y_j)$ первого и второго уравнений системы (16) подставим в третье уравнение:

$$-(\gamma u+v)\frac{\partial\Theta}{\partial u}+(u-\gamma v)\frac{\partial\Theta}{\partial v}=0,\tag{17}$$

где, напомним, $u=x_i-x_j$, $v=y_i-y_j$. Общее решение уравнения (17) находится методом характеристик:

$$\Theta(u,v)=\chi((u^2+v^2)\exp(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{v}{u})),\tag{18}$$

где χ – функция одной переменной с отличной от нуля производной класса C^2. По (18) и (15) находим множество двухточечных инвариантов:

$$f(i,j)=\chi\left[((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2)\exp\left(2\gamma arctg\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right)\right],\tag{19}$$

каждый из которых эквивалентен метрической функции плоскости Гельмгольца (5), так как переходит в нее при гладком преобразовании $\psi(f)\to f$, где $\psi=\chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. ■

Далее, найдем полную систему двухточечных инвариантов псевдогельмгольцевой плоскости. Запишем функциональное уравнение (4) для группы преобразований (10):

$$f(ax_i + by_i + c,\ bx_i + ay_i + d,\ ax_j + by_j + c,\ bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (20)$$

Теорема 2. Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (21)$$

где $(a^2 - b^2)\exp(2\beta\,\mathrm{ar(c)\,th}\frac{b}{a}) = 1$, β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией псевдогельмгольцевой плоскости и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство теоремы 2 в общих чертах повторяет доказательство теоремы 1. После дифференцирования уравнения (20) по параметрам c, d и b с учетом связи $(a^2 - b^2)\exp(2\beta\,\mathrm{ar(c)\,th}\frac{b}{a}) = 1$ получается система функционально-дифференциальных соотношений, подобная системе (15) для плоскости Гельмгольца, из которой при переходе к тождественному преобразованию получается система трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial x_j} = 0, \quad \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial y_i} + \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial y_j} = 0, \\
\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}(-\beta x_i + y_i) + \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}(x_i - \beta y_i) + \\
+\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}(-\beta x_j + y_j) + \dfrac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}(x_j - \beta y_j) = 0.
\end{array}\right\} \quad (22)$$

Решением системы (22) является множество всех двухточечных инвариантов

$$f(i,j) = \chi[((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2)\exp(2\beta\,\mathrm{ar(c)\,th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j})], \quad (23)$$

которые, очевидно, эквивалентны метрической функции псевдогельмгольцевой плоскости (6). ■

Далее, запишем функциональное уравнение (4) для группы преобразований (11):

$$f(ax_i + c,\ \ bx_i + ay_i + d,\ \ ax_j + c,\ \ bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (24)$$

Теорема 3. Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2 \subset R^2$

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (25)$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$

с метрической функцией дуальногельмгольцевой плоскости и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теорем 1 и 2. После дифференцирования уравнения (24) по параметрам c, d и b с учетом связи $a^2\exp(2\frac{b}{a})=1$ получается система функционально-дифференциальных соотношений, из которой при переходе к тождественному преобразованию получается система трех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}=0,\\ &-x_i\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}(x_i-y_i)-\\ &-x_j\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}(x_j-y_j)=0.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Решением системы (26) является множество невырожденных двухточечных инвариантов

$$f(i,j)=\chi[((x_i-x_j)^2)\exp(2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j})],\tag{27}$$

эквивалентных метрической функции дуальногельмгольцевой плоскости (7). ■

Запишем, наконец, функциональное уравнение (4) для группы преобразований (12):

$$f(ax_i+c,\quad by_i+d,\quad ax_j+c,\quad by_j+d)=f(x_i,y_i,x_j,y_j).\tag{28}$$

Теорема 4. Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $M_2\subset R^2$

$$x'=ax+c,\quad y'=by+d,\tag{29}$$

где $a^mb^n=1$ $(m,n\in\mathbb{Z},\ m\neq 0,\ n\neq 0,\ m\neq n)$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f)\to f$ с метрической функцией симплициальной плоскости и задает на нем феноменологически симметричную ранга 4 двумерную геометрию.

Доказательство теоремы 4 подобно доказательствам изложенных выше трех теорем. После дифференцирования уравнения (28) по параметрам c, d и b с учетом связи $a^mb^n=1$ получается система функционально-дифференциальных соотношений, из которой при переходе к тождественному преобразованию получается система трех дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}+\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}=0,\\ &\frac{n}{m}x_i\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i}-y_i\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_i}+\frac{n}{m}x_j\frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j}-y_j\frac{\partial f(i,j)}{\partial y_j}=0.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

Решением системы (30) является множество невырожденных двухточечных инвариантов

$$f(i,j)=\chi[(x_i-x_j)^m(y_i-y_j)^n], \tag{31}$$

которые эквивалентны метрической функции симплициальной плоскости (8), так как переходят в нее при гладком преобразовании $\psi(f)\to f$, где $\psi=\chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданова Р.А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 12–22.
2. *Богданова Р.А.* Группа движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 5–13.
3. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.
4. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии. Барнаул: Изд-во Барнаульского государственного педагогического университета, 2004.
5. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.
6. *Кулаков Ю.И.* Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 5. С. 985–987.
7. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 366–388.

Статья поступила 08.12.2015 г.

Bogdanova R.A. TWO-POINT INVARIANTS OF GROUPS OF MOTIONS IN SOME PHENOMENOLOGICALLY SYMMETRIC TWO-DIMENSIONAL GEOMETRIES

DOI 10.17223/19988621/39/1

In G.G. Mikhaylichenko’s classification, along with the well-known geometries, such as the Euclidean plane, Minkowsky plane, two-dimensional sphere, and others, there are two-dimensional Helmholtz type geometries in which the circle does not have the usual pattern, as evidenced by Helmholtz in his work “On the Facts Underlying Geometry,” as well as the simplicial plane. All these geometries are endowed by group and phenomenological symmetries. The essence of the phenomenological symmetry is in the link between all the mutual distances for a finite number of points.

The paper describes a complete system of non-degenerate two-point invariants of groups of motions for some phenomenologically symmetric two-dimensional geometries (Helmholtz plane, pseudo-Helmholtz plane, dual-Helmholtz plane, and simplicial plane) as a solution of corresponding functional equations for a set of two-point invariants of transformation groups.

The paper found that every two-point invariant of motion groups of the aforementioned geometries coincides with the metric function of the corresponding plane up to a smooth transformation $\psi(f)\to f$.

Keywords: phenomenologically symmetric two-dimensional geometry, local group of motions, two-point invariant, functional equation.

BOGDANOVA Rada Alexandrovna (Gorno-Altaisk State University,
Gorno-Altaisk, Russian Federation)
E-mail: bog-rada@yandex.ru

REFERENCES

1. Bogdanova R.A. Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak reshenie funktsional'nogo uravneniya. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 12–22. (in Russian)
2. Bogdanova R.A. Gruppa dvizheniy simplitsial'noy ploskosti kak reshenie funktsional'nogo uravneniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 5–13. (in Russian)
3. Michailichenko G.G. On group and phenomenological 2simmetries in geometry. *Soviet Math. Dokl.*, 1983, vol. 27, no. 2, pp. 325–326.
4. Mikhaylichenko G.G. *Dvumernye geometrii*. Barnaul, Izd-vo Barnaul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2004. (in Russian)
5. Kulakov Yu.I. *Teoriya fizicheskikh struktur*. Moscow, Dominiko Publ., 2004. (in Russian)
6. Kulakov Yu.I. Geometriya prostranstv postoyannoy krivizny kak chastnyy sluchay teorii fizicheskikh struktur. *Dokl. AN SSSR*, 1970, vol. 193, no. 5, pp. 985–987. (in Russian)
7. Gel'mgol'ts G. O faktakh, lezhashchikh v osnovanii geometrii. *Ob osnovaniyakh geometrii*. Moscow, 1956, pp. 366–388. (in Russian)