ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 1(39)

УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/39/4

Н.Н. Трофименко

О ЛИНЕЙНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА «ДЛИННЫХ ПРЯМЫХ»

Доказывается, что для начального регулярного несчетного ординала τ и произвольных начальных ординалов α, β, $\alpha<\beta\le\tau$, пространства непрерывных функций $C_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right)$ и $C_p\left(L_{\tau\cdot\beta}\right)$, заданные на «длинных прямых» $L_{\tau\cdot\alpha}$ и $L_{\tau\cdot\beta}$, не являются линейно гомеоморфными.

Ключевые слова: *«длинные прямые», линейные гомеоморфизмы, сопряженное пространство, ординалы, начальный ординал, регулярный ординал, топология поточечной сходимости, компактность.*

Рассматриваются пространства непрерывных функций $C\left(L_\alpha\right)$, заданные на «длинных прямых» L_α, где α – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций $C\left(L_\alpha\right)$ наделяются топологией поточечной сходимости и обозначаются $C_p\left(L_\alpha\right)$. «Длинные прямые» – это частный случай линейно упорядоченных топологических пространств. Пространства непрерывных функций, заданные на линейно упорядоченных топологических пространствах, и их изоморфная классификация рассматривались во многих работах, например в [2–6].

Определение 1 . Пусть α – произвольный ординал. Рассмотрим линейное упорядочение $<$ на множестве $L_\alpha=[1,\alpha]\times[0,1)$, определенное так: $\left(\mu_1,t_1\right)<\left(\mu_2,t_2\right)$, если $\mu_1<\mu_2$ или $\mu_1=\mu_2$ и $t_1<t_2$. Будем называть «длинной прямой» множество L_α с топологией, порожденной линейным упорядочением $<$.

Заметим, что топологическое пространство L_α является компактным.

Будем говорить, что точка $x=(\xi,t)\in L_\alpha$ конфинальна ординалу η, если в интервале $((1,0),(\xi,t))$ существует конфинальное подмножество, подобное отрезку ординалов $[0,\eta)$.

Напомним, что ординал α называется начальным, если α – наименьший среди всех ординалов λ, таких, что $|\lambda|=|\alpha|$. Начальный ординал α называется регулярным, если не существует $\lambda<\alpha$, конфинального α.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть τ – регулярный начальный несчетный ординал и α, β начальные ординалы, такие, что $\alpha<\beta\le\tau$. Тогда пространства $C_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right)$ и $C_p\left(L_{\tau\cdot\beta}\right)$ не являются линейно гомеоморфными.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 1. Пусть $\alpha \le \tau$. Если точка $x \in L_{\tau\cdot\alpha}$ конфинальна τ, то $x = (\tau\cdot(\gamma+1),0)$, $0 \le \gamma < \alpha$, или $x = (\tau\cdot\tau,0)$, если $\alpha = \tau$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \tau$ и $x = (\xi,t)$. Если $0 < t < 1$ или $t = 0$, а ξ – непредельный ординал, то точка x конфинальна ω. Рассмотрим точки вида $x = (\xi,0)$, где ξ – предельный ординал. Согласно [8], ординал ξ можно представить в виде $\xi = \tau\cdot\eta+\rho$, где $0 \le \rho < \tau$, $0 \le \eta < \alpha$ или $\xi = \tau\cdot\alpha$. Если $\rho > 0$, то ординал ξ конфинален ординалу $\rho < \tau$ и, следовательно, x конфинально ординалу ρ. Если $\rho = 0$ и $\xi = \tau\cdot\eta$, где η – предельный ординал, то ξ конфинален η, где $\eta \le \alpha < \tau$. Если η – непредельный ординал, т.е. $\eta = \gamma+1$, то точка $x = (\tau\cdot\gamma+\tau,0)$ конфинальна τ. Итак, множество точек, конфинальных τ, это в точности все точки вида $(\tau\cdot(\gamma+1),0)$, $0 \le \gamma < \alpha$.

Пусть теперь $\alpha = \tau$. Аналогично доказывается, что если точка $x < (\tau\cdot\tau,0)$ и конфинальна τ, то $x = (\tau\cdot(\gamma+1),0)$. Но в этом случае точка $x = (\tau\cdot\tau,0)$ также конфинальна τ. ■

Положим

$\Gamma_\alpha = \{(\tau\cdot(\gamma+1),0), \gamma \in [0,\alpha)\}$, если $\alpha < \tau$, $\Gamma_\tau = \{(\tau\cdot(\gamma+1),0), \gamma \in [0,\tau)\} \cup \{(\tau\cdot\tau,0)\}$,

и $$c_0(\Gamma_\alpha) = \left\{x \in C_p(\Gamma_\alpha) : \{t \in \Gamma_\alpha, \text{ таких, что} |x(t)| \ge \varepsilon\} \text{ конечно } \forall\varepsilon > 0\right\}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ рассмотрим линейное подпространство

$$M_{\tau\cdot\alpha} = \Big\{y \in \mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}} : \forall\{f_i\}_{i\in I} \in L_p(L_{\tau\cdot\alpha}), \text{ такого, что } |I| < |\tau|,$$
$$\exists\, x \in C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) \text{ такой, что } f_i(x) = f_i(y)\ \forall i \in I\Big\}.$$

Очевидно, что все непрерывные функции на $L_{\tau\cdot\alpha}$ принадлежат $M_{\tau\cdot\alpha}$. Кроме того, пространству $M_{\tau\cdot\alpha}$ принадлежат те разрывные функции y, для которых любого семейства функционалов мощности меньшей $|\tau|$ недостаточно для разделения y и точек пространства $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$. Далее покажем, что пространство $M_{\tau\cdot\alpha}$ – это прямая сумма пространства $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и некоторого подпространства в $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$, линейно гомеоморфного пространству $c_0(\Gamma_\alpha)$, т.е. верно следующее утверждение.

Предложение 2. Пространство $M_{\tau\cdot\alpha}$ линейно гомеоморфно пространству $C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) \times c_0(\Gamma_\alpha)$.

Доказательство. Определим отображение $T : C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha) \to \mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ по формуле $T(x,y) = x+\tilde{y}$, где

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), \text{ если } t \in \Gamma_\alpha; \\ 0, \text{ если } t \in L_{\tau\cdot\alpha} \setminus \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Докажем, что отображение T является инъективным. Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in C_p(L) \times c_0(\Gamma_\alpha)$. Предположим, что

$$T(x_1,y_1) = x_1+\tilde{y}_1 = x_2+\tilde{y}_2 = T(x_2,y_2),$$

т.е. $x_1 - x_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$. Поскольку $(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)\big|_{L_{\tau\cdot\alpha}\setminus\Gamma_\alpha} = 0$, то $(x_1 - x_2)\big|_{L_{\tau\cdot\alpha}\setminus\Gamma_\alpha} = 0$. Так как функция $x_1 - x_2$ является непрерывной, а множество $L_{\tau\cdot\alpha}\setminus\Gamma_\alpha$ является всюду плотным в $L_{\tau\cdot\alpha}$, то $x_1 - x_2 \equiv 0$. Следовательно, $\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 \equiv 0$, т.е. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Докажем, что $T\left(C_p(L)\times c_0(\Gamma_\alpha)\right) = M_{\omega_\tau\cdot\omega_\alpha}$. Пусть $(x, y) \in C_p(L)\times c_0(\Gamma_\alpha)$. Рассмотрим множество функционалов $\{f_i\}_{i\in I} \in L_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, для которого $|I| < |\tau|$. Так как для любого $i \in I$ $|\operatorname{supp} f_i| < \aleph_0$, то $\left|\bigcup_{i\in I}\operatorname{supp} f_i\right| < |\tau|$. Поскольку ординал τ неконфинален никакому ординалу, меньшему чем τ, то для каждого $\gamma < \alpha$ существует ординал δ_γ, $\tau\cdot\gamma < \delta_\gamma < \tau\cdot(\gamma+1)$, такой, что

$$\left((\delta_\gamma, 0), (\tau\cdot(\gamma+1), 0)\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I}\operatorname{supp} f_i\right) = \varnothing.$$

Рассмотрим функцию

$$z(t) = \begin{cases} y(\tau\cdot(\gamma+1), 0), & \text{если } t \in \left((\delta_\gamma, 0), (\tau\cdot(\gamma+1), 0)\right]; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция z, а значит, и $x + z$ являются непрерывными на $L_{\tau\cdot\alpha}$. Поскольку функции $x + z$ и $x + \tilde{y}$ отличаются только на множестве $\bigcup_{\gamma\in[0,\omega_\alpha]}\left(\delta_\gamma, 0, (\tau\cdot(\gamma+1), 0)\right)$, то $f_i(x+z) = f_i(x+\tilde{y})$ для любого $i \in I$. Следовательно, $T(x, y) = x + \tilde{y} \in M_{\tau\cdot\alpha}$.

Пусть теперь $z \in M_{\tau\cdot\alpha}$. Покажем, что функция z может иметь разрыв только в точках из множества Γ_α. Действительно, если точка разрыва $t_0 \notin \Gamma_\alpha$, то существует множество A, $|A| < |\tau|$, такое, что $\sup_{\mu\in A}\mu = t_0$. Рассмотрим множество функционалов $\left\{\delta_\mu - \delta_{t_0}\right\}_{\mu\in A}$. Если функция z имеет разрыв в точке t_0, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любой окрестности U_{t_0} найдется $\mu \in A \cap U_{t_0}$, для которого $|z(\mu) - z(t_0)| \geq \varepsilon_0$, то есть $\left|\left(\delta_\mu - \delta_{t_0}\right)(z)\right| \geq \varepsilon_0$. Если же функция $x \in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, то существует окрестность V_{t_0}, такая, что для любого $\mu \in V_{t_0}$

$$|x(\mu) - x(t_0)| = \left|\left(\delta_\mu - \delta_{t_0}\right)(x)\right| < \varepsilon_0.$$

Это противоречит тому, что $z \in M_{\tau\cdot\alpha}$. Таким образом, любая функция $z \in M_{\tau\cdot\alpha}$ непрерывна на множестве $L_{\tau\cdot\alpha}\setminus\Gamma_\alpha$.

Рассмотрим функцию $z\big|_{((\tau\cdot\gamma,0),(\tau\cdot(\gamma+1),0))}$. Поскольку точка $(\tau\cdot(\gamma+1),0)$ не конфинальна ω, то существует ординал $\eta_\gamma \in (\tau\cdot\gamma, \tau\cdot(\gamma+1))$, такой, что $z\big|_{((\eta_\gamma,0),(\tau\cdot(\gamma+1),0))} \equiv z((\eta_\gamma, 0))$. Определим функцию

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z(t), & \text{если } t \notin \Gamma_\alpha; \\ z(\eta_\gamma), & \text{если } t = \tau\cdot(\gamma+1). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $\tilde{z}$ непрерывна на $L_{\tau\cdot\alpha}$ и $z-\tilde{z}\big|_{L_{\tau\cdot\alpha}\setminus\Gamma_\alpha}\equiv 0$. Покажем, что $(z-\tilde{z})\big|_{\Gamma_\alpha}\in c_0(\Gamma_\alpha)$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$ существует последовательность $\{(\tau\cdot(\gamma_n+1),0)\}_{n=1}^{\infty}\subset\Gamma_\alpha$ такая, что

$$\left|(z-\tilde{z})((\tau\cdot(\gamma_n+1),0))\right|\geq\varepsilon. \tag{3}$$

Поскольку множество $L_{\tau\cdot\alpha}$ является компактным, то для множества $\{(\tau\cdot(\gamma_n+1),0)\}_{n=1}^{\infty}\subset\Gamma_\alpha$ существует предельная точка $x=(\xi,t)$. Так как множество Γ_α дискретное, то $x=(\xi,t)\notin\Gamma_\alpha$ и, значит, $(z-\tilde{z})(x)=0$. Так как точка $x=(\xi,t)$ является предельной для $\{(\tau\cdot(\gamma_n+1),0)\}_{n=1}^{\infty}\subset\Gamma_\alpha$, то в силу неравенства (3) получаем, что функция $z-\tilde{z}$ является разрывной в точке x, что противоречит тому, что функции z и $\tilde{z}$ непрерывны во всех точках $x\notin\Gamma_\alpha$. Следовательно,

$$z=z+(z-\tilde{z})=T\left(\tilde{z},(z-\tilde{z})\big|_{\Gamma_\alpha}\right)\in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})\times c_0(\Gamma_\alpha).$$

Таким образом, $T\left(C_p(L)\times c_0(\Gamma_\alpha)\right)=M_{\tau\cdot\alpha}$. Легко проверить, что отображения T и T^{-1} являются непрерывными. Заключаем, что пространства $M_{\tau\cdot\alpha}$ и $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})\times c_0(\Gamma_\alpha)$ являются линейно гомеоморфными. ■

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что существует линейный гомеоморфизм Φ пространства $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ на пространство $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$.

Поскольку пространства $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ всюду плотны в пространствах $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ и $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\beta}}$ соответственно, то линейный гомеоморфизм Φ может быть продолжен до линейного гомеоморфизма $\tilde{\Phi}$ пространства $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\beta}}$ на пространство $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ [1, с. 654].

Известно [1], что сопряженным к пространствам $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ является пространство $L_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, состоящее из функционалов вида

$$f=p_1\cdot\delta_{t_1}+p_2\cdot\delta_{t_2}+\ldots+p_n\cdot\delta_{t_n},$$

где $p_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\delta_{t_k}(x)=x(t_k)$ для любого $x\in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, $k=1,\ldots,n$. Множество точек $\{t_1,\ldots,t_n\}\subset L_{\tau\cdot\alpha}$ называется носителем функционала f и обозначается $\operatorname{supp} f$.

Покажем, что

$$\tilde{\Phi}(M_{\tau\cdot\beta})=M_{\tau\cdot\alpha}. \tag{2}$$

Пусть функция $y\in M_{\tau\cdot\beta}$. Рассмотрим произвольное семейство функционалов $\{g_i\}_{i\in I}\in L_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, где $|I|<|\tau|$. По определению множества $M_{\tau\cdot\beta}$ для семейства функционалов $\{f_i\}_{i\in I}=\{\tilde{\Phi}^*g_i\}_{i\in I}\in L_p(L_{\tau\cdot\beta})$ существует непрерывная функция

$x \in C_p\left(L_{\tau\cdot\beta}\right)$, такая, что

$$\left(\tilde{\Phi}^* g_i\right)(x) = \left(\tilde{\Phi}^* g_i\right)(y)$$

для любого $i \in I$. Отсюда, по определению отображения $\tilde{\Phi}^* : L_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right) \to L_p\left(L_{\tau\cdot\beta}\right)$ получаем, что

$$g_i\left(\tilde{\Phi}x\right) = g_i\left(\tilde{\Phi}y\right)$$

для любого $i \in I$. Поскольку функция $\tilde{\Phi}x \in C_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right)$, то функция $\tilde{\Phi}y \in M_{\tau\cdot\alpha}$. Таким образом, $\tilde{\Phi}\left(M_{\tau\cdot\beta}\right) \subset M_{\tau\cdot\alpha}$. Аналогично доказывается обратное включение, если в доказательстве вместо отображения $\tilde{\Phi}^*$ рассмотреть отображение

$$\left(\tilde{\Phi}^*\right)^{-1} : \mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\beta}} \to \mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}.$$

Из предложения 1 получаем, что

$$M_{\tau\cdot\alpha} = \tilde{\Phi}\left(M_{\tau\cdot\beta}\right) \sim \tilde{\Phi}\left(C_p\left(L_{\tau\cdot\beta}\right) \times c_0\left(\Gamma_\beta\right)\right) \sim$$
$$\sim \tilde{\Phi}\left(C_p\left(L_{\tau\cdot\beta}\right)\right) \times \tilde{\Phi}\left(c_0\left(\Gamma_\beta\right)\right) \sim C_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right) \times \tilde{\Phi}\left(c_0\left(\Gamma_\beta\right)\right).$$

С другой стороны,

$$M_{\tau\cdot\alpha} \sim C_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right) \times c_0\left(\Gamma_\alpha\right).$$

Отсюда, учитывая, что все дополнения к пространству $C_p\left(L_{\tau\cdot\alpha}\right)$ в пространстве $M_{\tau\cdot\alpha}$ являются линейно гомеоморфными, заключаем, что

$$c_0\left(\Gamma_\alpha\right) \sim \tilde{\Phi}\left(c_0\left(\Gamma_\beta\right)\right) \sim c_0\left(\Gamma_\beta\right).$$

Но это невозможно [7], поскольку $|\alpha| < |\beta|$, а значит,

$$w\left(c_0\left(\Gamma_\alpha\right)\right) = \left|\Gamma_\alpha\right| = \left|\omega_\alpha\right| < \left|\omega_\beta\right| = \left|\Gamma_\beta\right| = w\left(c_0\left(\Gamma_\beta\right)\right). \blacksquare$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р*. Общая топология. М.: Мир, 1986, 752 с.
2. *Bessaga C*., *Pelczynski C*. On isomorphic classification of spaces of continuos functions // Studia Math. 1960. V. 19. P. 53–62.
3. *Semadeni Z*. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian product // Bulletin of the Polish Academy of Sciences Ser. Math. Stron. et Phys. 1960. V. 8. P. 81–84.
4. *Гулько С.П. Оськин А.В*. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9. № 1. С. 61–61.
5. *Кисляков С.В*. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // Сиб. мат. жур. 1975. Т. 16. С. 293–300.
6. *Kalenda O*. Note on Markushevich bases in subspaces and quotients of Banach spaces // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics. 2002. V. 50. No. 2. P. 117–126.
7. *Архангельский А.В*. О линейных гомеоморфизмах пространств функций // ДАН СССР. 1982. Т. 264. № 6. С. 1289–1292.
8. *Куратовский К*., *Мостовский А*. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Статья поступила 25.01.2015 г.

Trofimenko N.N. ON LINEAR HOMEOMORPHISMS OF SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON «LONG LINES»

DOI 10.17223/19988621/39/4

In this paper, we prove that for the elementary regular ordinal and arbitrary ordinals α, β, $\alpha < \beta \le \tau$, the spaces of continuous functions $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ and $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$, defined on the "long lines" $L_{\tau\cdot\alpha}$ and $L_{\tau\cdot\beta}$, are not linearly homeomorphic.

Keywords: «long lines», linear homeomorphisms, dual space, ordinals, initial ordinal, regular ordinal, topology of pointwise convergence, compactness.

TROFIMENKO Nadezhda Nikolaevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: trofimenko@sibmail.com

REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moscow, Mir Publ., 1986, 752 p. (in Russian)
2. Bessaga C., Pelczynski S. On isomorphic classification of spaces of continuos functions. *Studia Math*., 1960, vol. 19, pp. 53–62.
3. Semadeni Z. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian product. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Ser. Math. Stron. et Phys*., 1960, vol. 8, pp. 81–84.
4. Gul'ko S.P. Os'kin A.V. Izomorfnaya klassifikatsiya prostranstv nepreryvnykh funktsiy na vpolne uporyadochennykh bikompaktakh. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya*, 1975, vol. 9, no. 1, pp. 61–61. (in Russian)
5. Kislyakov S.V. Izomorfnaya klassifikatsiya prostranstv nepreryvnykh funktsiy na ordinalakh. *Sib. mat. zhurn*., 1975, vol. 16, pp. 293–300. (in Russian)
6. Kalenda O. Note on Markushevich bases in subspaces and quotients of Banach spaces. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 2002, vol. 50, no. 2, pp. 117–126.
7. Arkhangel'skiy A.V. O lineynykh gomeomorfizmakh prostranstv funktsiy. *DAN SSSR*, 1982, vol. 264, no. 6, pp. 1289–1292. (in Russian)
8. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv*. Moscow, Mir Publ., 1970. 416 c. (in Russian)