УДК 517.955.8
DOI 10.17223/19988621/39/5

Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА С ОСОБЕННОСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. Предложена модификация метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям или уравнениям с точками поворота.

Ключевые слова: *асимптотическое разложение решения*, *бисингулярное возмущение*, *уравнение эллиптического типа*, *задача Дирихле*, *малый параметр*, *обобщенный метод пограничных функций*, *пограничные функции*, *модифицированные функции Бесселя*.

Постановка задачи

Исследуем задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения эллиптического типа в кольце, т.е.

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon) - (\rho-a)^n u(\rho,\varphi,\varepsilon) = f(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D; \tag{1}$$

$$u(a,\varphi,\varepsilon) = \psi_1(\varphi,\varepsilon), \quad u(b,\varphi,\varepsilon) = \psi_2(\varphi,\varepsilon), \tag{2}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа, $D = \{(\rho,\varphi)|\ a < \rho < b,\ 0 < \varphi \le 2\pi\}$, $0 < a < b$ – const, $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, $n\in\mathbf{N}$, $\psi_j(\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\psi_{j,k}(\varphi)$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $\psi_{j,k}(\varphi), f_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}(D\cup\Gamma)$, Γ – граница области D.

Решение задачи Дирихле (1), (2) существует и единственно, при $0 < \varepsilon$ – const, [1]. Нами исследуется задача построения равномерного асимптотического разложения решения задачи (1), (2) при $\varepsilon\to 0$.

Задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовались многими авторами, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна [2–9].

Задачи с двойной сингулярностью, т.е. сингулярно возмущенные уравнения с точками поворота, по терминологии А.М. Ильина [8], будем называть бисингулярно возмущенными. В бисингулярно возмущенных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая –

с негладкостью членов асимптотики. Авторами [8, 9] методом сращивания построены асимптотические разложения решения бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений.

В данной работе для построения асимптотического разложения решения задачи (1), (2) будем применять обобщенный метод погранфункции. Этот метод впервые был применен для бисингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений профессором, членом-корреспондентом НАН КР Келдибай Алымкуловым [10, 11]. С помощью этого метода [12–14] построены асимптотические разложения решений бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в круге.

Уравнение (1) по терминологии А.М. Ильина является бисингулярно возмущенным. Действительно, первая сингулярность очевидна, предельное уравнение не является дифференциальным:

$$-(\rho-a)^n u(\rho,\varphi,0) = f_0(\rho,\varphi),$$

и его решение не может удовлетворять граничному условию (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), (2), которое ищем в виде

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho,\varphi), \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-(\rho-a)^n u_0(\rho,\varphi) = f_0(\rho,\varphi),$$

$$-(\rho-a)^n u_\mathrm{k}(\rho,\varphi) = f_k(\rho,\varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho,\varphi),\ \ k\in\mathbf{N}.$$

Здесь можно определить все $u_k(\rho,\varphi)$:

$$u_0(\rho,\varphi) = -f_0(\rho,\varphi)/(\rho-a)^n,$$

$$u_\mathrm{k}(\rho,\varphi) = -(f_k(\rho,\varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho,\varphi))/(\rho-a)^n,\ \ k\in\mathbf{N}.$$

Если $f_0(a,\varphi) \neq 0$, то $u_k(\rho,\varphi) \in C^{(\infty)}\left(\bar{D} \ \backslash\{(a,\varphi)\}\right)$, т.е. в части границы области D все эти функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности вида

$$u_k(\rho,\varphi) = O\left(\frac{1}{(\rho-a)^{n+(n+2)k}}\right),\ \ k = 0,\ 1,\ 2,...,\ \text{при } \rho\to a.$$

Внешнее решение имеет вид

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon) = \frac{1}{(\rho-a)^n}\left(F_0(\rho,\varphi) + \frac{\varepsilon}{(\rho-a)^{n+2}}F_1(\rho,\varphi) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{(\rho-a)^{n+2}}\right)^k F_k(\rho,\varphi) + \ldots\right),$$

$$\text{при } \varepsilon\to 0, \tag{4}$$

где $F_k(\rho,\varphi) \in C^{(\infty)}\left(\bar{D}\right)$, $k = 0,\ 1, \ldots$.

Поэтому задача (1), (2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в границе при $\rho = a$. Ряд (4) теряет асимптотический характер при $|\rho-a| < \varepsilon^{1/(n+2)}$.

Отметим, что ранее различные задачи для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений изучались различными авторами в основном методом сращивания. Преимуществом метода сращивания является то, что его можно применять к широкому классу сингулярно возмущенных задач с различными особенностями, а недостатками являются сложность обоснования формального асимптотического разложения решения и сравнительно громоздкие вычисления.

Построение формального асимптотического разложения

Как отмечалось выше, для построения формального асимптотического разложения (ФАР) решения задачи (1), (2) применяем обобщенный (модифицированный) метод погранфункций [10–14].

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = V(\rho,\varphi,\varepsilon) + W(\tau,\varphi,\mu) + Q(\eta,\varphi,\lambda), \tag{5}$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$ – регулярное внешнее решение;

$W(\tau,\varphi,\mu)=\sum_{k=-n}^{\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$ – обобщенная пограничная функция в окрестности $\rho = a$, $\tau = (\rho-a)/\mu$, $\varepsilon = \mu^{n+2}$;

$Q(\eta,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$ – классическая пограничная функция в окрестности $\rho = b$, $\eta = (b-\rho)/\lambda$, $\varepsilon = \lambda^2$.

Классическая пограничная функция удовлетворяет граничному условию и экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а обобщенная погранфункция, удовлетворяя граничному условию, убывает по степеням.

Учитывая граничное условие (2), имеем

$$W(0,\varphi,\mu) = \psi_1(\varphi,\mu^{n+2}) - V(a,\varphi,\mu^{n+2}),\ \ W(\tau,\varphi,\mu)\to 0,\ \text{ при } \tau\to+\infty; \tag{6}$$

$$Q(0,\varphi,\lambda) = \psi_2(\varphi,\lambda^2) - V(b,\varphi,\lambda^2),\ \ Q(\eta,\varphi,\lambda)\to 0,\ \text{ при } \eta\to+\infty. \tag{7}$$

Подставляя (5) в (1), получим

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon) - (\rho-a)^n V(\rho,\varphi,\varepsilon) = f(\rho,\varphi,\varepsilon) - h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D; \tag{8}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\mu\frac{\partial}{(a+\tau\mu)\partial\tau}+\mu^2\frac{\partial^2}{(a+\tau\mu)^2\,\partial\varphi^2}\right)W(\tau,\varphi,\mu)-\tau^n\mu^n W(\tau,\varphi,\mu)=h\left(\tau\mu,\varphi,\mu^{n+2}\right),$$
$$(\tau,\varphi)\in D_1; \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\lambda\frac{\partial}{(b-\eta\lambda)\partial\eta}+\lambda^2\frac{\partial^2}{(b-\eta\lambda)^2\,\partial\varphi^2}\right)Q(\eta,\varphi,\lambda)-(b-a-\eta\lambda)^n Q(\eta,\varphi,\lambda)=0,$$
$$(\eta,\varphi)\in D_2, \tag{10}$$

где
$$D_1 = \{(\tau,\varphi)|\ 0<\tau<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\},$$
$$D_2 = \{(\eta,\varphi)|\ 0<\eta<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\}.$$

По идее метода, в правую часть последнего равенства прибавили и убавили одну и ту же функцию $h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$, которую определим ниже, при построении регулярного внешнего решения.

Регулярное внешнее решение

Учитывая $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, из (6) для функции $v_k(\rho,\varphi)$ имеем

$$-(\rho-a)^n v_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi)-h_0(\rho,\varphi),$$

$$-(\rho-a)^n v_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-h_\mathrm{k}(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi),\ k\in\mathbf{N}.$$

Отсюда определяем $v_k(\rho,\varphi)$:

$$v_0(\rho,\varphi)=-(f_0(\rho,\varphi)-h_0(\rho,\varphi))/(\rho-a)^n,$$

$$v_k(\rho,\varphi)=-(f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi))/(\rho-a)^n,\ k\in\mathbf{N}.$$

Пусть

$$g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi),\ k=0,1,\ldots,\ v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0,$$

тогда

$$v_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}(\bar{D}),\ k=0,1,\ldots,$$

при

$$h_k(\rho,\varphi)=\sum_{j=0}^{n-1}g_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j,\ g_{k,j}(\varphi)=\frac{\partial^j g_k(\rho,\varphi)}{j!\partial\rho^j}\Big|_{\rho=a},\ k=0,1,\ldots\ .$$

Следовательно,

$$v_k(\rho,\varphi)=-\sum_{j=n}^{\infty}g_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^{j-1},\ g_{k,j}(\varphi)=\frac{\partial^j g_k(\rho,\varphi)}{j!\partial\rho^j}\Big|_{\rho=a},\ k=0,1,\ldots .$$

Таким образом, мы построили регулярное внешнее решение

$$V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)\ \text{ в области } (D\cup\Gamma).$$

Классическая пограничная функция

Из уравнения (10) и условия (7) при $Q(\eta,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$ для функции $q_k(\eta,\varphi)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(\frac{\partial^2 q_k(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-(b-a)q_k(\eta,\varphi)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{k+1}\frac{\partial q_k(\eta,\varphi)}{\partial\eta}{}_1-\lambda^{k+2}\frac{\partial^2 q_k(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\sum_{j=0}^{k}C_n^j(-1)^j\eta^j(b-a)^{n-j}q_{k-j}(\eta,\varphi)+$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda^k\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^j\eta^j(b-a)^{n-j}q_{k-j}(\eta,\varphi),\quad\left(\frac{\lambda}{b-\eta\lambda}\sim\lambda\right);$$

$$q_{2\mathrm{k}}(0,\varphi)=\psi_{2,k}(\varphi)-v_k(b,\varphi),\ q_{2\mathrm{k}+1}(0,\varphi)=0,\ q_k(\eta,\varphi)\to 0,\ \text{при } \eta\to+\infty,\ k=0,1,2,\ldots .$$

Отсюда

$$lq_0\equiv\frac{\partial^2 q_0(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-(b-a)q_0(\eta,\varphi)=0,$$

$$q_0(0,\varphi)=\psi_{2,0}(\varphi)-v_0(b,\varphi),\ q_0(\eta,\varphi)\to 0,\ \text{ при } \eta\to+\infty; \tag{11}$$

$$lq_1 = -\eta n(b-a)^{n-1} q_0(\eta,\varphi) + \frac{\partial q_0(\eta,\varphi)}{\partial\eta},$$

$$q_1(0,\varphi) = 0,\ q_1(\eta,\varphi)\to 0, \text{ при } \eta\to+\infty; \tag{12}$$

$$lq_k = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \eta^j C_n^j (b-a)^{n-j} q_{k-j}(\eta,\varphi) + \frac{\partial q_{k-1}(\eta,\varphi)}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2},\ 1<k\le n;$$

$$lq_k = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \eta^j C_n^j (b-a)^{n-j} q_{k-j}(\eta,\varphi) + \frac{\partial q_{k-1}(\eta,\varphi)}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2},\ k>n,$$

$$q_k(0,\varphi) = \begin{cases}\psi_{2,m}(\varphi) - v_m(b,\varphi), \text{ при } k = 2m\\ 0, \text{ при } k = 2m+1, n\in \mathrm{N}\end{cases},$$

$$q_k(\eta,\varphi)\to 0, \text{ при } \eta\to+\infty,\ k = 2, 3, \ldots . \tag{13}$$

Так как уравнение $y''(x) - k^2 y = F(x)$, $0<x<\infty$, с краевыми условиями $y(0) = y^0$, $y(+\infty) = 0$ имеет единственное решение

$$y(x) = y^0 e^{-kx} + \frac{1}{2k}\left(\int_{+\infty}^{x} e^{k(x-s)} F(s)\,ds - \int_0^x e^{k(s-x)} F(s)\,ds + \int_0^{+\infty} e^{-k(x+s)} F(s)\,ds\right),$$

то задачи (11) – (13) тоже имеют единственные решения. При $\eta\to+\infty$ для решения задач (11) – (13) имеем

$$q_0(\eta,\varphi) = \left(\psi_{2,0}(\varphi) - v_0(b,\varphi)\right) e^{-\eta\sqrt{b-a}},$$

$$q_1(\eta,\varphi) = \left(\eta^2 q_{1,2}(\varphi) + \eta q_{1,1}(\varphi)\right) e^{-\eta\sqrt{b-a}},$$

$$q_{2k}(\eta,\varphi) = \left(\psi_{2,k}(\varphi) - v_k(b,\varphi)\right) e^{-\eta\sqrt{b-a}} + e^{-\eta\sqrt{b-a}} \sum_{j=1}^{4k} \eta^j q_{2k,j}(\varphi),$$

$$q_{2k+1}(\eta,\varphi) = e^{-\eta\sqrt{b-a}} \sum_{j=1}^{4k+2} \eta^j q_{2k+1,j}(\varphi),$$

где $q_{k,j}(\varphi)$ – ограниченные гладкие функции.

Следовательно,

$$Q(\eta,\varphi,\lambda) = e^{-\eta\sqrt{b-a}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}\left(\psi_{2,k}(\varphi) - v_k(b,\varphi) + P_{2k}(\eta,\varphi)\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k+1} P_{2k+1}(\eta,\varphi)\right),$$

где $P_{2k}(\eta,\varphi) = \sum_{j=1}^{4k}\eta^j q_{2k,j}(\varphi)$, $P_{2k+1}(\eta,\varphi) = \sum_{j=1}^{4k+2}\eta^j q_{2k+1,j}(\varphi)$.

Обобщенная пограничная функция

Из (6) и (9) для функции $w_k(\tau,\varphi)$ имеем

$$\sum_{k=-n}^{\infty}\mu^{k+n}\left(\frac{\partial^2 w_k(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2} - \tau^n w_n(\tau,\varphi)\right) =$$

$$= -\sum_{k=-n}^{\infty}\mu^{k+n}\left(\mu\frac{\partial w_k(\tau,\varphi)}{\partial\tau} + \mu^2\frac{\partial^2 w_k(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} g_{k,j}(\varphi)\tau^j \mu^{j+(n+2)k},$$

$w_{k(n+2)+2+j}(0,\varphi)=0$, $w_{k(n+2)+1}(0,\varphi)=0$, $w_{k(n+2)}(0,\varphi)=\psi_{1,k}(\varphi)-v_k(a,\varphi)$, $w_k(\tau,\varphi)\to 0$,

при $\tau\to+\infty$, $j=0,1,\dots,n-1$; $k=0,1,\dots$

Отсюда получаем

$$Lw_{-n}\equiv\frac{\partial^2 w_{-n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^n w_{-n}(\tau,\varphi)=g_{0,0}(\varphi),\quad w_{-n}(0,\varphi)=0,\ w_{-n}(\tau,\varphi)\to 0,$$

при $\tau\to+\infty$.

$$Lw_{-n+1}=g_{0,1}(\varphi)\tau-\frac{\partial w_{-n}(\tau,\varphi)}{\partial\tau},\ w_{-n+1}(0,\varphi)=0,\ w_{-n+1}(\tau,\varphi)\to 0,$$

при $\tau\to+\infty$.

$$Lw_{-n+j}=g_{0,j}(\varphi)\tau^j-\Phi_{-n+j}(\tau,\varphi),\ w_{-n+j}(0,\varphi)=0,\ w_{-n+j}(\tau,\varphi)\to 0,$$

при $\tau\to+\infty$, $j=2,3,\dots,n-1$.

$$Lw_{k(n+2)}=-\Phi_{k(n+2)}(\tau,\varphi),\quad w_{k(n+2)}(0,\varphi)=\psi_{1,k}(\varphi)-v_k(a,\varphi),\ w_{k(n+2)}(\tau,\varphi)\to 0,$$

при $\tau\to+\infty$, $k=0,1,\dots$

$$Lw_{k(n+2)+1}=-\Phi_{k(n+2)+1}(\tau,\varphi),\ w_{k(n+2)+1}(0,\varphi)=0,\ w_{k(n+2)+1}(\tau,\varphi)\to 0,$$

при $\tau\to+\infty$, $k=0,1,\dots$

$$Lw_{k(n+2)+2+j}=g_{k+1,j}(\varphi)\tau^j-\Phi_{k(n+2)+2+j}(\tau,\varphi),\quad w_{k(n+2)+2+j}(0,\varphi)=0,$$

$w_{k(n+2)+2+j}(\tau,\varphi)\to 0$, при $\tau\to+\infty$, $j=0,1,\dots,n-1$; $k=0,1,\dots$,

где $\Phi_s(\tau,\varphi)=\dfrac{\partial w_{s-1}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+\dfrac{\partial^2 w_{s-2}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}$.

Все эти задачи имеют единственные решения, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Действительно, как нам известно, уравнение $z''-\tau^n z=0$ имеет два независимых решения: $z_1(\tau)=\sqrt{\tau}I_{1/2q}\left(\frac{1}{q}\tau^q\right)$, $z_2(\tau)=\sqrt{\tau}K_{1/2q}\left(\frac{1}{q}\tau^q\right)$, где $q=(n+2)/2$, $I_v(s)$, $K_v(s)$ – модифицированные функции Бесселя. Отметим важные свойства функций $I_v(s)$, $K_v(s)$, при $0<v<1$. $I_v(s)$ – экспоненциально возрастает, а $K_v(s)$ – экспоненциально убывает при $s\to\infty$. $I_v(0)=0$, $K_v(s)=O(s^{-v})$ при $s\to 0$. Вронскиан $W(I_v(s),K_v(s))=-1/s$.

Отсюда

$$W(z_1,z_2)=z_1z'_2-z_2z'_1=\tau^{n/2},\ z_1(\tau)=O(e^{\tau}),\ z_2(\tau)=O(e^{-\tau}),$$

при $\tau\to\infty$ $z_1(0)=0$, $z_2(\tau)=O(1)$ при $\tau\to 0$.

Поэтому можем записать решения вышеуказанных задач в виде

$$w_{-n}(\tau,\varphi)=-g_{0,0}(\varphi)\left(z_2(\tau)\int_0^{\tau}z_1(s)s^{-n/2}ds-z_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty}z_2(s)s^{-n/2}ds\right),$$

$$w_{-n+1}(\tau,\varphi)=z_2(\tau)\int_0^{\tau}\left(\frac{\partial w_{-n}(s,\varphi)}{\partial\tau}-g_{0,1}(\varphi)s\right)z_1(s)s^{-n/2}ds-$$

$$-z_1(\tau)\int_{\tau}^{+\infty}\left(\frac{\partial w_{-n}(s,\varphi)}{\partial\tau}-g_{0,1}(\varphi)s\right)z_2(s)s^{-n/2}ds,$$

$$w_{-n+j}(\tau,\varphi)=z_2(\tau)\int_0^{\tau}\left(\Phi_{-n+j}(s,\varphi)-g_{0,j}(\varphi)\tau^j\right)z_1(s)s^{-n/2}ds-$$

$$-z_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty}\left(\Phi_{-n+j}(s,\varphi)-g_{0,j}(\varphi)\tau^j\right)z_2(s)s^{-n/2}ds,\ \ j=2,3,...,n-1;$$

$$w_{k(n+2)}(\tau,\varphi)=z_2(\tau)\int_0^{\tau}\Phi_{k(n+2)}(s,\varphi)z_1(s)s^{-n/2}ds-$$

$$-z_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty}\Phi_{k(n+2)}(s,\varphi)z_2(s)s^{-n/2}ds+\frac{\psi_{1,k}(\varphi)-v_k(a,\varphi)}{z_2(0)}z_2(\tau),\ \ k=0,1,...;$$

$$w_{k(n+2)+1}(\tau,\varphi)=z_2(\tau)\int_0^{\tau}\Phi_{k(n+2)+1}(s,\varphi)z_1(s)s^{-n/2}ds-$$

$$-z_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty}\Phi_{k(n+2)+1}(s,\varphi)z_2(s)s^{-n/2}ds;$$

$$w_{k(n+2)+2+j}(\tau,\varphi)=z_2(\tau)\int_0^{\tau}\Phi_{k(n+2)+2+j}(s,\varphi)z_1(s)s^{-n/2}ds-$$

$$-z_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty}\Phi_{k(n+2)+2+j}(s,\varphi)z_2(s)s^{-n/2}ds,\ \ j=0,1,...,n-1;\ k=0,1,....$$

Лемма. Решение уравнения

$$y''(x)-x^n y(x)=x^k,\ \ n\in\mathbf{N},\ k\in\mathbf{Z}, \tag{14}$$

при $0\le x\le+\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$y(x)=x^{k-n}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j x^{-(n+2)j},\ x\to+\infty, \tag{15}$$

при этом ряд (15) можно многократно почленно дифференцировать и он является ФАР уравнения (14).

Доказательство. Пусть ФАР решения (14) имеет вид

$$y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j x^{-j},\ x\to+\infty, \tag{16}$$

где β_i – пока неизвестные коэффициенты.

Подставляя (16) в (14), получим рекуррентную алгебраическую систему для β_i. И здесь однозначно определяем все значения β_i:

$$\beta_{n-k}=-1,\ \ \beta_{n-k+n+2}=-(n-k)(n-k+1),$$

$$\beta_{n-k+(n+2)j}=(n-k+(n+2)(j-1))(n-k+(n+2)(j-1)+1)\beta_{n-k+(n+2)(j-1)},\ j=2,3,\ldots,$$

остальные коэффициенты β_i равны нулю.

Отсюда получим, что

$$\alpha_0=-1,\ \ \alpha_1=-(n-k)(n-k+1),$$

$$\alpha_j=(n-k+(n+2)(j-1))(n-k+(n+2)(j-1)+1)\alpha_{j-1},\ j=2,3,\ldots.$$

Оценим теперь остаточный член ряда (15). Пусть $r(x) = y(x) - y_m(x)$, где $y_m(x) = x^{k-n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_j x^{-(n+2)j}$.

Тогда для $r(x)$ получим уравнение

$$r'' - x^n r = O(x^{k-n-((n+2)m+2)}). \qquad (17)$$

Уравнение (17) имеет двухпараметрическое семейство решений $r(x,C_1,C_2)$. Из этих решений выберем то, которое удовлетворяет условиям: $r(0) = r^0$, $r(+\infty) = 0$:

$$r(x) = z_2(x)\int_0^x O\left(s^{-N-n/2}\right) z_1(s)\,ds - z_1(x)\int_x^{+\infty} O\left(s^{-N-n/2}\right) z_2(s)\,ds + \frac{r^0}{z_2(0)} z_2(x) \ ,$$

где $N = n-k+((n+2)m+2)$,

То есть $r(x) = O(x^{-N-K})$, при $x \to +\infty$, $0<K$ – const.

Применяя эту лемму при $\tau \to +\infty$ мы для функции $w_j(\tau,\varphi)$ можем написать

$$w_{k(n+2)+2+j}(\tau,\varphi) = O(\tau^{-n+j}),\ j = 0, 1,\dots, n-1,\ k = -1,0,\dots;$$

$$w_{k(n+2)}(\tau,\varphi) = O(\tau^{-(n+2)}),\ k = 0, 1,\dots;$$

$$w_{k(n+2)+1}(\tau,\varphi) = O(\tau^{-(n+1)}),\ \ k = 0, 1,\dots,$$

т.е. $\forall k$, $w_k(\tau,\varphi) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, $k = -1,0,\dots$.

Обоснование ФАР решения задачи (1), (2)

Пусть

$$R(\rho,\varphi,\varepsilon) = u(\rho,\varphi,\varepsilon) - u_s(\rho,\varphi,\varepsilon),$$

где $u_s(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{s} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{2s+1} \lambda^k q_k(\eta,\varphi) + \sum_{k=-n}^{(n+2)s+n+1} \mu^k w_k(\tau,\varphi)$, $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – остаточный член.

Тогда для $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon\Delta R - (\rho-a)^n R = O(\varepsilon^{s+1}),\ (\rho,\varphi)\in D,$$

$$R(a,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{s+1}),\ R(b,\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{s+1}).$$

Из принципа максимума следует справедливость оценки $R = O(\varepsilon^{s+1})$, в области $D \cup \Gamma$.

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $f(a,\varphi,0)\neq 0$, то для решения задачи (1), (2) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} q_k\left(\frac{b-\rho}{\sqrt{\varepsilon}},\varphi\right) + \sum_{k=-n}^{\infty} \varepsilon^{k/(n+2)} w_k\left(\frac{\rho-a}{\sqrt[n+2]{\varepsilon}},\varphi\right) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Заключение

Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце. В рассмотренном уравнении предельное уравнение имеет особенность. Для этого случая доказана применимость метода пограничных функций. Методом сращивания также можно построить разложение решения, но данный подход значительно сокращает вычисления. Полученный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, которое свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям или уравнениям с точками поворота.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гилбарг Д.*, *Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
2. *Levinson N.* The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+Au_x+Bu_y+Cu=D$ for small ε // Ann. of Math. 1950. V. 51. P. 428–445.
3. *Eckhaus W.* Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems // SIAM Review. 1972. V. 14. No. 2. P. 225–270.
4. *Shagi-di Shih*, *Kellogg R.B.* Asymptotic analysis of a singular perturbation problem // SIAM J. Math. Anal. 1987. V. 18. No. 5. P. 1467–1511.
5. *Бутузов В.Ф.*, *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в нелинейных эллиптических задачах, содержащих производные первого порядка // Модел. и анализ информационных систем. 2014. Т. 21. № 1. С. 7–31.
6. *Бутузов В.Ф.*, *Левашова Н.Т.*, *Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1427–1447.
7. *Белошапко В.А.*, *Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 8. С. 1291–1301.
8. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
9. *Леликова Е.Ф.* Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром при части старших производных // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 170–178.
10. *Alymkulov K.* Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point // Universal J. Appl. Math. 2014. V. 2. No. 3. P. 119–124.
11. *Алымкулов К.*, *Асылбеков Т.Д.*, *Долбеева С.Ф.* Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 3. С. 483–487.
12. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 37–44.
13. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
14. *Tursunov D.A.*, *Belekov K.J.* Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries // Proc. of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5–7 June, 2014) / Edited by Academician Altay Borubaev. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. P. 143–147.

Статья поступила 03.02.2015 г.

Tursunov D.A., *Erkebaev U.Z.* ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A RING WITH A SINGULARITY ON THE BOUNDARY

DOI 10.17223/19988621/39/5

Owing to the large number and variety of applications, the Dirichlet problem for elliptic equations with a small parameter at highest derivatives occupies a unique place in mathematics. The main problem of flow around in hydrodynamics, the problem of torsion and bending in the elasticity theory, determination of temperature inside a plate according to its known values on the contour in physics, the potential of the steady flow of an incompressible fluid, electromagnetic and magnetic potentials, and the determination of the temperature of the thermal field or electrostatic field potential in a certain region at a given temperature or potential on the boundary can be reduced to this problem. It is also closely related to main problems of statistical theory of elasticity and others. The explicit solution of these problems can be constructed in the general case only using different asymptotic and numerical methods. When the corresponding unperturbed equation has a smooth solution, these problems are called bisingular in A.M. Il'in's terminology. The method of matching was applied before to construct the asymptotic of bisingularly perturbed problems but the method of boundary functions was not used directly. The authors propose to modify the method of boundary functions by use of which it is possible to construct asymptotic solutions of the Dirichlet problem for a bisingularly perturbed second order elliptic equation with two independent variables in a ring domain. The aim of the study is to develop the asymptotic method of boundary functions for bisingularly perturbed problems. The constructed asymptotic series is a series of Puiseux. The principal term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional power in the small parameter, which is inherent to bisingular perturbed equations or equations with turning points.

Keywords: Asymptotic expansion of a solution, bisingular perturbation, elliptic type equation, Dirichlet problem, small parameter, generalized method of boundary functions, boundary functions, modification Bessel functions.

TURSUNOV Dilmurat A. (Dr. Sci., Ural State Pedagogical University, Yekaterinburg, Russian Federation)
E-mail: d_osh@rambler.ru

ERKEBAEV Ulukbek Z. (Osh State University, Osh, Kyrgyzstan)
E-mail: uluk3188@mail.ru

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p. (in Russian)
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+Au_x+Bu_y+Cu=D$ for small ε. *Ann. of Math.*, 1950, vol. 51, pp. 428–445.
3. Eckhaus W. Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems. *SIAM Review*, 1972, vol. 14, no. 2, pp. 225–270.
4. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 1987, vol. 18, no. 5, pp. 1467–1511.
5. Butuzov V.F., Denisov I.V. Uglovoy pogranichnyy sloy v nelineynykh ellipticheskikh zadachakh, soderzhashchikh proizvodnye pervogo poryadka. *Model. i analiz informatsionnykh sistem*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 7–31. (in Russian)
6. Butuzov V.F., Levashova N.T., Mel'nikova A.A. Kontrastnaya struktura tipa stupen'ki v singulyarno vozmushchennoy sisteme ellipticheskikh uravneniy. *ZhVM i MF*, 2013, vol. 53, no. 9, pp. 1427–1447. (in Russian)
7. Beloshapko V.A., Butuzov V.F. Singulyarno vozmushchennaya ellipticheskaya zadacha v sluchae kratnogo kornya vyrozhdennogo uravneniya. *ZhVM i MF*, 2013, vol. 53, no. 8, pp. 1291–1301. (in Russian)

8. Il'in A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 334 p. (in Russian)
9. Lelikova E.F. Ob asimptotike resheniya odnogo uravneniya s malym parametrom pri chasti starshikh proizvodnykh. *Tr. IMM UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 170–178. (in Russian)
10. Alymkulov K. Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point. *Universal J. Appl. Math*., 2014, vol. 2, no. 3, pp. 119–124.
11. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Obobshchenie metoda pogranfunktsiy dlya resheniya kraevoy zadachi dlya bisingulyarno vozmushchennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka. *Matematicheskie zametki*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 483–487. (in Russian)
12. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 6(26), pp. 37–44. (in Russian)
13. Tursunov D.A. Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Sluchay osoboy tochki na granitse. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 31–35. (in Russian)
14. Tursunov D.A., Belekov K.J. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for bisingular perturbed elliptic equations in domains with smooth boundaries. *Proc. of V Congress of the Turkic World Mathematicians* (*Kyrgyzstan*, *Bulan-Sogottu*, *5–7 June*, *2014*), ed. by Academician Altay Borubaev. Bishkek, Kyrgyz Mathematical Society, 2014, pp. 143–147.