

УДК 1:51+ 004.8

Л.Б. Султанова

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНТЕЛЛЕКТ
В КОГНИТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Рассматривается вопрос о роли и значении структур математического интеллекта в когнитивных исследованиях. При этом под математическим интеллектом понимаются такие структуры мышления, посредством деятельности которых осуществляется математическое познание: одними из них являются основания математики.

Ключевые слова: когнитивные исследования, математический интеллект, математическое познание, структура мышления.

Представляется, что существенным недостатком когнитивных исследований как одного из ведущих современных научных направлений является отсутствие взаимосвязей с выводами философии математики. А между тем философия математики ещё со времён бурного обсуждения программ обоснования математики и далее результатов их развития, т.е. примерно со второй трети двадцатого столетия, является хорошо разработанной областью эпистемологии и философии науки, где получены такие важнейшие результаты, как, например, теорема К. Гёделя. Её рассматривают не просто как некий значительный, но тем не менее частный результат философии математики, но как положение общенаучного характера, которое невозможно игнорировать. Поэтому опора современных когнитивных исследований на результаты философии математики представляется не только возможной или желательной, но, на мой взгляд, даже необходимой.

Понятно, что искомые взаимосвязи когнитивных исследований и философии математики могут выстраиваться в различных направлениях. Одним из важнейших направлений в этом отношении сегодня являются исследования в области искусственного интеллекта. Очевидно, что эти исследования требуют серьёзной теоретической базы в виде развёрнутой концепции естественного интеллекта. Как известно, такие исследования в XX в. проводились многими учёными и философами, в частности Ж. Пиаже [1]. Но в настоящее время, как представляется, уже можно не ограничиваться общим концептуально-философским пониманием естественного интеллекта как особого состояния операционального равновесия мышления, когда добавление новых элементов не нарушает его операциональной целостности [1. С. 56–57]: можно попытаться выявить его структуру, чтобы понять, из каких элементов, в принципе, может складываться естественный интеллект и какие из этих элементов поддаются моделированию и конструированию, а какие – нет. Это важно, поскольку понятно, что и сама человеческая деятельность, и её результаты далеко не во всём объёме и далеко не во всех своих аспектах могут быть подвергнуты рационализации и алгоритмизации и последующему моделированию. Сегодня не вызывает сомнений тот факт, что при этом

всегда будет оставаться некий значимый нерационализируемый остаток, который при этом будет качественно влиять на искомую рационализацию или алгоритмизацию, или, скажем, на формализацию, что ясно видно из результатов программы формализации математики Д. Гильберта, которые, как известно, ограничены уже упомянутой теоремой К. Гёделя [3].

Итак, необходимо выяснить, какие же структурные элементы можно выделить в рамках сложнейшего синергического субстрата, который называют естественным интеллектом. Эта задача, разумеется, существенно превышает формат данной статьи. Однако с точки зрения философии математики представляется, что прежде всего в структуре естественного интеллекта усматриваются фундаментальные элементы интеллекта математического, а также интеллекта логического. Наибольший интерес, на мой взгляд, вызывает интеллект математический – вследствие своей сложности и значительности, а также тесной связи с математической интуицией как со специфической функцией мышления.

Таким образом, здесь поставлены следующие вопросы: что такое математический интеллект? Каким образом он связан с когнитивными исследованиями? Какую роль в них выполняет?

Начнём с важнейших определений. Итак, под математическим интеллектом здесь следует понимать структуру мышления, посредством функциональной деятельности которой осуществляется математическое познание. Понятно, что структура математического интеллекта представляет собой комплекс взаимосвязанных элементов. Выясним, какие же конкретные элементы включает в себя математический интеллект. Этот вопрос представляется крайне важным, поскольку за истинность научной теории в значительной мере «отвечает» именно математика, и поэтому именно математический интеллект является основой научного познания. Это означает, что только получив адекватное представление о генезисе и устройстве математического интеллекта, можно составить более или менее реальное представление о том, что же собой представляет естественный интеллект, т.е. интеллект, связанный с человеческим мышлением.

Понятно, что базовый элемент математического интеллекта – это его основания, которые непременно должны включать в себя *базовые, т.е. исходные, основания математики*. Традиционно к ним причисляют основные понятия и аксиомы геометрии, а также числовую ось. Может показаться, что основания математического интеллекта полностью совпадают с основаниями математики, но это не так. Для выяснения вопроса о том, какие же ещё элементы должны быть включены в состав оснований математического интеллекта, необходимо рассмотреть вопрос о формировании оснований математики на индивидуально-личностном уровне, т.е. выяснить, каким образом это происходит в мышлении конкретного субъекта познания.

Все концепции, выдвигаемые в современной философии математики по этому вопросу, в целом сводятся к традиционно противостоящим друг другу *эмпиризму* и *априоризму*. Как известно, эмпиризм в решении вопроса о природе математических оснований стремится так или иначе вывести основания математики из опыта. К эмпиризму фактически сводятся все разновидности

социокультурной философии математики, которая связывает развитие математики с конкретными социокультурными особенностями той или иной конкретной цивилизации [4]. При этом сторонники такого подхода, как правило, руководствуются лозунгом «Сколько культур – столько и математик». Однако не следует забывать о том, что основания математики у всех народов во все времена идентичны, т.е. социокультурно инвариантны, что, как представляется, позволяет настаивать на априорности таковых, и, по крайней мере, позволяет аргументированно критиковать радикальные варианты эмпиризма [5. С. 63–93].

Вместе с тем необходимо учитывать, что теоретические основания математики не являются первичными структурами математического интеллекта и формируются на базе уже сложившегося определённого комплекса онтогносеологических предпосылок мышления субъекта познания – назовём его *априорным математическим комплексом* [5]. В свою очередь, *априорный математический комплекс* конкретного субъекта познания формируется, точнее конституируется, как крупный структурный элемент общего комплекса онтогносеологических предпосылок этого субъекта познания. Основой для этого конституирования служат такие онтогносеологические предпосылки, как представления о пространстве и времени, а также определённые интуиции, потенциально присущие мышлению.

Следует учесть, что *априорные предпосылки* математики носят гносеологически *двойственный* характер вследствие того, что они реально применяются субъектом познания не только в рамках математического, но и в рамках метафизического контекста [5. С. 63–93]. Действительно, невозможно рассматривать, например, представление о *непрерывности* исключительно как априорную предпосылку математики, поскольку таковое необходимо субъекту познания и в рамках общего метафизического контекста, где представление о *непрерывности* формируется изначально.

Например, для формирования онтогносеологической предпосылки математического понятия числа мышлению необходимы в наличии интуиция *сравнения* и интуиция *количества*. Условием возможности такого конституирования является актуализация определённых онтогносеологических предпосылок мышления, в результате которой из них формируется *априорный математический комплекс*. Актуализация при этом понимается как пробуждение функциональности мышления в результате внешнего на него воздействия, порождающего только впечатления. Никакой речи о математике здесь *пока* ещё не ведётся. После осуществившегося примерно по такой схеме конституирования априорных предпосылок математики в мышлении субъекта познания будут сформированы интуитивные представления о числе, бесконечности, количестве, непрерывности, дискретности, точке, расстоянии и т.д. При этом конкретный социокультурный контекст не имеет значения, важны только наличие и адекватность такового. Адекватность в данном случае означает, что все эти представления в социокультурном контексте должны присутствовать, т.е. контекст, в котором у субъекта формируются впечатления, должен быть именно социокультурным, т.е. предполагать наличие традиции. Но социокультурным инвариантно, что реально име-

ет место, поскольку в различных культурах основания математики идентичны – различны только обозначения, например римские и арабские цифры. Это с одной стороны.

С другой стороны, очевидно, что актуализация механизмов конституирования любых элементов мышления возможна при условии того, что мышление обладает врождённой, потенциальной способностью к актуализации своих структур под воздействием каких-либо (неважно каких) впечатлений. При этом независимость от опыта предпосылок математики, уже сформированных в мышлении субъекта, может обеспечиваться только особой спецификой указанной актуализации, а именно тем, что таковая осуществляется на *нерациональном, т.е. интуитивном уровне*. По этой причине априорные основания математики формируются именно как *интерсубъективные*, т.е. общезначимые для всех субъектов познания, и, следовательно, как таковые, представляют собой утверждения, очевидно истинные для всех. Понятно, что только на таких условиях априорные основания могут быть положены в основу математической науки и всего познания в целом. Выполнение этого условия необходимо для математики, поскольку только в этом случае математика может быть общезначимой и, значит, применимой на практике.

Таким образом, можно заключить, что *основания математического интеллекта необходимым образом включают в себя не только базовые теоретические основания математики, но и априорный математический комплекс, который составляет с ними единое гносеологическое целое, и именно как таковой и функционирует в процессе научного познания, являясь основой естественного интеллекта*.

Отсюда мы заключаем, что каких бы успехов не достигла математическая наука в теоретическом обосновании своих базовых принципов, субъект математического познания всегда будет интуитивно опираться на *априорные предпосылки* математики. Более того, представляется, что само теоретическое обоснование базовых принципов и оснований математики было бы невозможно при отсутствии в мышлении математиков априорных представлений, а освоение формально-теоретического контекста в математике вообще возможно только на базе этих *априорных предпосылок*. Само обучение математике, исключая, разумеется, уровень сложившегося учёного-математика, находится вне рамок формально-теоретического контекста, что практически не оставляет никаких альтернатив признанию *априорных предпосылок* математики как необходимого условия возможности математического познания на уровне отдельного субъекта или математического сообщества в целом.

В ранний, доевклидовский период развития математики, когда никто ещё не задумывался о законах математического мышления и об основаниях математического знания, аксиоматические утверждения математики на *неявно-интуитивном* уровне всё равно применялись на практике, поскольку при любом социокультурном контексте развития математической науки какие-то внеопытные основания мышления необходимы в математическом познании независимо от того, осознаваемы они субъектом или нет.

Также следует учесть, что *априорные предпосылки* математики носят гносеологически *двойственный* характер, и происходит это вследствие того,

что они реально применяются субъектом познания не только в рамках математического, но и в рамках метафизического контекста. Действительно, невозможно рассматривать, например, представление *о непрерывности* исключительно как априорную предпосылку математики, поскольку представление *о непрерывности* необходимо субъекту познания и в рамках общего метафизического контекста, в которых таковое, собственно говоря, и формируется изначально. Это значит, что априорное представление *о непрерывности* является *двойственным* в том смысле, что рассматривается как метафизическая и в то же самое время как математическая предпосылка. Кроме того, согласно историко-математическим исследованиям, в докартезианские времена основания математики выступали как *очевидные*, но их значение и роль в математическом познании были ещё далеко не осознаны. Роль оснований в математике была ещё не определена должным образом, т.е. была методологически *неявной*. После того как Р. Декарт обосновал свою концепцию о необходимости *врождённых идей* как безусловных базовых оснований мышления, в том числе и математического, он, по сути, методологически эксплицировал основания математики.

Точно так же дело обстоит со всеми онтогносеологическими предпосылками математики, которые нельзя «вырвать» из общего метафизического контекста и «включить» только в рамки контекста специфически математического, поскольку, как это показано выше, специфически математический контекст генетически *конституируется* из метафизического. Причём это *конституирование* осуществляется на интуитивном уровне, что фактически приводит к формированию жёстких ментальных связей, не доступных рациональной экспликации. Это значит, что невозможно в полном объёме осуществить непротиворечивую экспликацию *априорных предпосылок* математики в рамках формально-математического контекста. Эта особенность оснований математики также «роднит» их с неявным знанием, которое, как известно, далеко не всегда поддаётся какой-либо рационализации или даже простейшей вербализации. Таким образом, можно заключить, что *априорные предпосылки* математики имеют не только математический аспект, но и аспект метафизический. Необходимо учесть, что эти аспекты невозможно развести посредством экспликативного выделения специфически математических элементов. Подобная *двойственность* онтогносеологических предпосылок метафизики не характерна для кантовского априоризма, где метафизика и математика строго разделены и все «идеальные» и «априорные» конструкции как формы мышления строго изолированы друг от друга. Однако на рационально-логическом уровне осознаётся *только* сам факт этого различия, и только в определённых пределах.

В целом представляется, что специальных *априорных* форм мышления для базовых понятий математики, как это дано у И. Канта, не существует, что таковые имеют место только в метафизике, а все специфически математические структуры мышления конституируются на этой онтогносеологической базе под влиянием наличия опыта, но независимо от этого опыта, каким бы он ни был. В дальнейшем в результате рассмотренных выше процессов конституирования у субъекта формируются единственно воз-

возможные базовые предпосылки математики, имеющие *интерсубъективный* характер. Это означает, что в процессе математического познания *интуитивное* математическое мышление, по сути, вынуждено обращаться к *метафизическим* предпосылкам (число, количество, больше, меньше, бесконечность и т.д.), что, разумеется, создаёт серьёзные сложности как при формально-теоретической экспликации математических утверждений, так и при обосновании математики посредством специальных процедур, что фактически и происходило при реализации программы математического формализма Д. Гильбертом в начале XX в.

В самой математической практике эта *двойственность* практически не учитывается. Дело в том, что при решении задач или при проведении математических доказательств математики оперируют не формально-теоретическими понятиями, а интуитивными представлениями. Очевидно, что формально-теоретические выкладки возможны только на бумаге. Отсюда и возникает задача строгого обоснования в математике, т.е. задача экспликации интуитивно полученных шагов математического рассуждения. Даже если принять, что математик действует в рамках некоторого неосознаваемого алгоритма, идея возможности чего высказывается в современной научной литературе [6. С. 204–344], это ничего не меняет, поскольку факт неосознаваемости, влекущий за собой отсутствие возможности адекватной рационализации, налично.

Сейчас отметим только, что по вышерассмотренным причинам при необходимости экспликации онтогносеологических предпосылок математики в рамках формально-теоретического контекста, что происходит, например, в математическом формализме Д. Гильберта или в теоретико-множественной концепции математики Г. Кантора, фактически возникает необходимость в обосновании в рамках *формально-математического контекста* некоторых идей *метафизики*, например представления об *актуальной бесконечности*. Это, как известно, исторически привело к выявлению парадоксов канторовской теории множеств, а также к фактической неудаче гильбертовского формализма.

Представляется, что процесс формирования оснований математического интеллекта, включающий в себя два рассмотренных ранее этапа, в том или ином виде характерен для каждого субъекта познания. Это значит, что этот процесс в целом носит характер *закономерности*. При этом именно математический интеллект необходимо рассматривать как первичную фундаментальную базовую структуру естественного интеллекта. Очевидно, что процесс его реального формирования именно как конституирования, предполагающего пробуждение функциональности в процессе актуализации его элементов под влиянием опыта, смоделировать невозможно. Однако для искусственного или, точнее, для *машинного интеллекта*, который в принципе можно признать в качестве реально существующей операциональной структуры, реализуется иная, программная, стратегия формирования базовых оснований математики – разумеется, со всеми присущими ей ограничениями.

Важнейшей спецификой математического интеллекта является то, что он отнюдь не исчерпывается процедурами вычислительного характе-

ра, т.е. не подлежит полной алгоритмизации. Этот вывод делается некоторыми современными исследователями на основе осмысления результатов программ обоснования математики (формализм, интуитивизм и логицизм) в математике и эпистемологии [6. С. 320–321]. Этот важнейший результат, полученный Р. Пенроузом, помимо всего прочего, ещё является и ярким примером плодотворного обращения к проблематике философии математики при осуществлении когнитивных исследований.

В заключение отметим, что, кроме математического интеллекта, человеческое мышление включает в себя также структуры логического интеллекта, обеспечивающие возможность логического вывода. Представляется, что логический интеллект, в отличие от математического, базирующегося непосредственно на априорных формах созерцания (пространство и время), опирается только на рассудок, и при этом структурно проще математического интеллекта. В логике не нужны никакие априорные предпосылки, всё строго по правилам, без отклонений, без неявно привлекаемых при математической дедукции предпосылок. Никакой «естественный свет разума», по выражению Декарта, не вносит в сухую, но зато однозначно определённую логическую цепь посторонние, интуитивные элементы, могущие создавать серьёзные проблемы при последующем обосновании.

При этом логический интеллект может функционировать автономно по отношению к математическому интеллекту и вполне допускает возможность компьютерного моделирования. Существенные противоречия между математическим и логическим интеллектом возникают только при необходимости работы с объектами, включающими актуально бесконечно большое число элементов. Как известно, в этой ситуации в математике не выполняется классический логический закон исключённого третьего. О неправомерности отождествления математики и логики в своё время предупреждал ещё Д. Гильберт, что, впрочем, не застраховало его от аналогичных проблем.

Понятно, что это важнейшее, и в когнитивных исследованиях решающее различие между структурами логического и математического интеллекта может быть выявлено только в рамках философии математики, поэтому на общенаучном уровне, даже в современной науке, нередко можно столкнуться с явным или неявным отождествлением логического и математического интеллекта, что приводит к отождествлению интеллекта естественного и искусственного. А это категорически неверно в любом случае, каким бы ни было наше представление об искусственном интеллекте. Очевидно, что этот результат философии математики также имеет первостепенное значение в когнитивных исследованиях, и особенно в исследованиях по искусственному интеллекту: он означает, что получить полный алгоритм работы математического интеллекта искусственным путём, т.е. путём прямого конструирования, невозможно.

Справедливости ради нужно отметить, что все тонкие теоретические разногласия между сторонниками и противниками возможности моделирования такого алгоритма, в принципе, сводятся к вопросу о соотношении понятий «осознание» и «понимание»: сторонники возможности моделирования искусственного интеллекта различают значения понятий «осознание» и «по-

нимание», а противники – нет. На это справедливо указывает тот же Р. Пенроуз [6. С. 69–75]. Представляется, что с ним необходимо согласиться: понимания без осознания не существует. А без понимания нет интеллекта.

Литература

1. *Пиаже Ж.* Психология интеллекта. СПб.: Питер, 2004. 192 с.
2. *Математическая энциклопедия.* М.: Сов. энциклопедия, 1977. Т. 1. С. 909–910.
3. *Вейль Г.* Математическое мышление. М.: Наука, 1989. С. 23.
4. *Барабашев А.Г.* Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования. М.: Изд-во МГУ, 1991. 157 с.
5. *Султанова Л.Б.* Неявное знание в развитии математики. Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. 260 с.
6. *Пенроуз Р.* Тени разума: в поисках науки о сознании. Ч. 1: Понимание разума и новая физика. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.