ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Философия. Социология. Политология №1(2)

АРХИВ

УДК 1:001; 001.08

В.А. Суровцев

О ПРОСТОЙ ТЕОРИИ ТИПОВ Б. РАССЕЛА (предисловие к публикации)*

Перевод на русский язык Приложения В из книги Б. Рассела «Основания математики» (1903). В предисловии рассматривается парадокс Рассела, анализируется простая теория типов, предложенная для его решения. Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 07-06-00185-а.

Во второй половине XIX века возникновение символической логики, созданной трудами Г. Фреге, и развитие Г. Кантором теории множеств стимулировали интерес к исследованиям в области оснований математики, нацеленных прежде всего на прояснение её базовых понятий. Теоретико-множественное определение понятия числа через понятие равномощности или равночисленности множеств создавало прочный фундамент математики, опираясь на казавшееся интуитивно ясным понятие множества, которое, например, Г. Кантор определял как совокупность произвольных объектов, мыслимых как единое целое, а Г. Фреге – как объём произвольного понятия.

Однако казавшееся интуитивно ясным понятие множества оказалось противоречивым. И одним из первых эту противоречивость обнаружил Б. Рассел. Он следующим образом формулирует свой парадокс: «Среди предикатов большинство обычных примеров не могут предицироваться самим себе, хотя, если ввести отрицательные предикаты, обнаружится, что существует много примеров предикатов, которые предицируемы сами себе. По крайней мере один из них, а именно предицируемость или свойство быть предикатом, не является отрицательным; очевидно, что предицируемость предицируема, т.е. является предикатом самой себя. Но наиболее общие примеры являются отрицательными. Так, бесчеловечность является нечеловеком и т.п. Следовательно, предикаты, не предицируемые сами себе, суть лишь выборка из предикатов, и естественно предположить, что они образуют класс, обладающий определяющим предикатом. Но если это так, исследуем, принадлежит ли этот определяющий предикат данному классу или же нет. Если он принадлежит данному классу, то он не предицируем сам себе, ибо это является характеристическим свойством данного класса. Но если он не предицируем сам себе, то он не принадлежит данному классу, определяющим предикатом которого он является, что противоречит предположению. С другой стороны, если он не принадлежит классу, определяющим

* Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ № НШ-5887.2008.6.

предикатом которого он является, то он не предицируем сам себе, т.е. он является одним из тех предикатов, которые не предицируемы сами себе, и, следовательно, он принадлежит классу, определяющим предикатом которого он является, что снова противоречит предположению. Следовательно, из обоих предположений мы можем вывести то, что им противоречит» [1. С. 78]. В терминах классов это противоречие можно сформулировать иначе: «Пусть *w* – это класс всех тех классов, которые не являются элементами самих себя. Тогда, каким бы ни был класс *x*, ‘*x* является элементом *w*’ эквивалентно ‘*x* не является элементом *x*’. Поэтому, если *x* придать значение *w*, то ‘*w* является элементом *w*’ эквивалентно ‘*w* не является элементом *w*’» [2. С. 22].

Рассел же и предложил одно из первых решений данного противоречия, сформулировав так называемую простую теорию типов. В терминах классов простую теорию типов можно описать следующим образом. Типы образуют иерархическую систему логических элементов, в которой необходимо строго различать классы и то, что их образует. Элементы класса всегда относятся к типу, низшему, чем сам класс. Так, если α, β, γ относятся к типу *n*, то образованные из них классы $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и т.д. относятся к типу $n + 1$. Низшим типом логических элементов Рассел считает индивиды, понимаемые как единичные, самостоятельно существующие предметы. Следующий логический тип образуют классы, составленные из индивидов; затем идут классы, образованные из классов, составленных из индивидов, и т.д. Пусть *a*, *b*, *c* … – индивиды, относящиеся к типу 1, тогда классы $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ … образуют второй тип, классы $\{\{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c\}\}$ … – третий тип и т.д.

Рассел формулирует следующее ограничение на образования подобных объектов: в рамках одного типа нельзя образовывать классы, которые состоят из элементов, относящихся к разным типам. С этой точки зрения незаконными образованиями являются конструкции типа $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}\}$ и т.п. Данное ограничение действительно предотвращает источник парадокса, так как оно запрещает образовывать классы, являющиеся элементами самих себя.

Поскольку каждый класс задаётся с помощью функций (предикатов), это решение легко воспроизвести и на этом уровне. Индивиды, т.е. элементы первого типа, являются аргументами функций, относящихся ко второму типу; сами эти функции могут быть аргументами функций следующего типа и т.д. В данном случае ограничение касается запрета образовывать функции, аргументами которых являются функции того же самого типа. Следовательно, так же как класс не может быть своим собственным элементом, так и функция не может быть своим собственным аргументом, т.е. конструкции типа $f(f)$ являются незаконными.

Простая теория типов блокирует парадокс Рассела в различных его формулировках, рассматривая конструкции, на которых он основан, как бессмысленные образования. Более того, в рамках простой теории типов нельзя воспроизвести другие теоретико-множественные парадоксы (например, парадоксы Бурали-Форти и Кантора), поскольку каждый из них основан на допущении, что класс может быть своим собственным элементом. Казалось, математика, основанная на теории классов и далее на логике, при заданных ограничениях спасена. Но для Рассела простая теория типов действительно оказалась лишь черновым наброском.

Дело в том, что простая теория типов работала для теоретико-множественных парадоксов, поскольку была сформулирована как ограничение на построение множеств, но не затрагивала другие парадоксы, имеющие семантический характер, типичным примером которых является парадокс Лжеца. Пытаясь решить все парадоксы единообразно, Рассел разработал так называемую разветвлённую теорию типов, где, помимо области значимости пропозициональной функции, рассматривался способ её построения и, помимо деления функций на типы, вводилось их деление на порядки [2]. Разветвлённая теория типов оказалась более сильной, чем её простой вариант. Однако деление функций не только на типы, но и на порядки требовало дальнейших допущений несколько сомнительного характера, в частности аксиомы сводимости, которую многие математики отказывались принимать ввиду её явно эмпирического характера [3].

Однако, как показал Ф.П. Рамсей, разработавший собственную версию теории типов, для оснований математики достаточно простой теории типов [4]. Таким образом, теоретико-типовой подход сохраняет важное значение наряду с аксиоматическими теориями множеств [5]. Помимо собственно математических результатов, теория типов представляет значительный философский интерес, поскольку задаёт онтологию объектов, характеризуя структуру мира.

Ниже в русском переводе публикуется знаменитое *Приложение В* из книги Б. Рассела «Основания математики» (1903), в котором впервые была предложена простая теория типов и указаны затруднения, решение которых позже привело к формулировке разветвлённой теории типов. Однако, как указывалось выше, простая теория типов сохраняет собственное значение и может быть полезна всем интересующимся философией математики.

Литература

1. *Russell B.* Principles of Mathematics. London: Allen & Unwin LTD, 1974.

2. *Рассел Б.* Математическая логика, основанная на теории типов // Рассел Б. Введение в математическую философию. Новосибирск: Сибирское университетское изд-во, 2007.

3. *Суровцев В.А.* Аксиома сводимости, теория типов Ф.П. Рамсея и реализм в математике // Вестник Томского государственного университета. Серия: философия, социология, политология. 2007. № 1.

4. *Рамсей Ф.П.* Основания математики // Рамсей Ф.П. Философские работы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003.

5. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.