ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (34)

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/34/5

А.А. Назаров, В.И. Бронер

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОБЪЕМОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Проводится исследование математической модели системы управления запасами с релейным управлением объемом накопленных запасов. Рассмотрен случай гиперэкспоненциального распределения объемов потребления ресурсов. Найдено явное выражение для стационарной плотности распределения значения запасов в системе. Приводятся результаты численного эксперимента.
Ключевые слова: управление запасами; релейное управление; гиперэкспоненциальное распределение; математическое моделирование.

В последние десятилетия к математическим моделям управления запасами проявляют большой интерес. В качестве таковых в работах [1–5] рассматриваются математические модели деятельности фонда социального страхования с релейным управлением капиталом фонда. В [1] исследуются основные характеристики деятельности фонда социального страхования в случае непрерывной скорости поступления денежных средств и экспоненциально распределённых страховых выплат. В [2, 5] рассматриваются и исследуются модели фонда социального страхования при релейном управлении (в [2] также рассмотрено релейно-гистерезисное управление) капиталом такого фонда, когда выплаты по страховым случаям и выплаты на финансирование социальных программ образуют пуассоновские потоки событий с постоянной и переменной интенсивностями соответственно, а величины выплат являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения.

В [3] построена и исследована математическая модель деятельности некоммерческого фонда в случае пуассоновского потока поступающих платежей постоянной интенсивности при экспоненциальном распределении страховых премий и релейного управления капиталом. А в [6] на основе диффузионного приближения исследуется аналогичная [3] модель.

В [7] находится выражение для функции скорости выделения средств на социальные программы в диффузионном приближении для процесса изменения капитала фонда в условиях математической модели [1].

В работах [8–11] рассматриваются различные математические модели управления запасами. Например, в [9] предполагается, что продавец приобретает ресурс в фиксированном объеме, который потребляется в течение торговой сессии. Так как спрос не определен, то целью исследования в аналогичных работах, как правило, ставится задача нахождения объема запасов, такого, чтобы спрос был удовлетворен и в конце торговой сессии не оставалось нереализованной продукции.

В данной работе исследуется модель, аналогичная [2, 5], в случае, когда объемы запроса на расходование имеют гиперэкспоненциальное распределение.

1. Математическая модель

В качестве математической модели управления запасами рассмотрим систему (рис. 1), на вход которой непрерывно поступают некоторые ресурсы с постоянной скоростью $\nu = 1$.

Обозначим через $s(t)$ объем накопленных ресурсов в системе к моменту времени t. Будем считать, что потребление ресурса осуществляется в случайные моменты времени партиями случайного объема.

Моменты потребления образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, зависящей от значений $s(t) = s$ величин накопленных запасов к моменту времени t поступления заявки на расходование ресурса, здесь

$$\lambda(s)=\begin{cases}\lambda_1,\ s<S,\\ \lambda_2,\ s\ge S,\end{cases} \tag{1}$$

где S – некоторое пороговое значение уровня запасов $s(t)$.

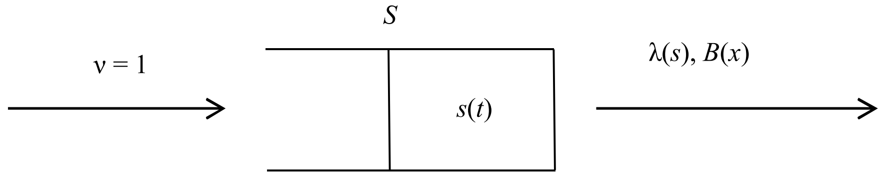

Рис. 1. Система управления запасами

Будем полагать, что объемы потребления ресурсов имеют гиперэкспоненциальную функцию распределения

$$B(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k\left(1-e^{-\mu_k x}\right) \tag{2}$$

n-го порядка с параметрами $\mu_k > 0$ и $b_k > 0$, причем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 1\,. \tag{3}$$

Заметим, что процесс $s(t)$ может принимать отрицательные значения $s(t) < 0$ и система продолжает функционировать, откладывая исполнение заявки на потребление ресурсов.

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеет вид

$$\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b\,, \tag{4}$$

где b – среднее значение объема одной партии на потребление ресурсов.

Таким образом, при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $s(t) < S$ объем ресурса в системе будет увеличиваться в среднем, а при достижении уровня S и его превышении, т.е. $s(t) \ge S$, в связи с возрастанием интенсивности потребления объем ресурса будет уменьшаться.

В силу (2) величина b может быть представлена следующим образом

$$b=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\mu_k}\,. \tag{5}$$

Из описания математической модели следует, что случайный процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством значений $-\infty < s < \infty$.

Обозначим его плотность распределения

$$P(s,t)=\frac{\partial P\{s(t)<s\}}{\partial s}$$

и запишем следующее равенство:

$$P(s+\Delta t,t+\Delta t)=P(s,t)(1-\lambda(s)\Delta t)+\Delta t\int_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x,t)dB(x)+o(\Delta t),$$

из которого для стационарного распределения $P(s)=\lim\limits_{t\to\infty}P(s,t)$ получим уравнение

$$P'(s)+\lambda(s)P(s)=\int_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)\,, \tag{6}$$

решение $P(s)$ которого удовлетворяет краевым условиям

$$P(-\infty)=P(\infty)=0\,. \tag{7}$$

Отметим, что уравнение (6) является основным при исследовании математических моделей систем управления запасами.

Найдем решение $P(s)$ уравнения (6) в явном виде, взяв в качестве функции распределения $B(x)$ объемов партий потребления гиперэкспоненциальную функцию распределения.

Обозначив

$$P(s)=\begin{cases}P_1(s), & s<S,\\ P_2(s), & s>S,\end{cases}\tag{8}$$

можем записать уравнение (7) в виде двух уравнений

$$P_2'(s)+\lambda_2 P_2(s)=\lambda_2\int_0^\infty P_2(s+x)dB(x),\quad s>S\,,\tag{9}$$

$$P_1'(s)+\lambda_1 P_1(s)=\lambda_1\int_0^{S-s} P_1(s+x)dB(x)+\lambda_2\int_{S-s}^\infty P_2(s+x)dB(x),\quad s<S\,.\tag{10}$$

Найдем решения уравнений (9) и (10), удовлетворяющие краевым условиям

$$P_1(-\infty)=0,\ \ P_2(\infty)=0\,.\tag{11}$$

2. Решение уравнения для $P_2(s)$

Решение $P_2(s)$, $s > S$, уравнения (9) будем искать в виде

$$P_2(s)=Ce^{-\gamma(s-S)},\quad s>S\,.\tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), получим равенство

$$\lambda_2-\gamma=\lambda_2\int_0^\infty e^{-\gamma x}dB(x)\,,\tag{13}$$

которое является нелинейным уравнением относительно величины γ.

Очевидно, что уравнение (13) имеет нулевой корень $\gamma = 0$, но в силу краевого условия (11) $P_2(\infty) = 0$ он является посторонним в рассматриваемой задаче.

Нетрудно показать, что при выполнении условия (4) $\lambda_2 b > 1$ уравнение (13) кроме нулевого решения имеет единственный положительный корень $\gamma > 0$ для любой функции распределения $B(x)$, поэтому решением уравнения (9) является функция (12), определяемая с точностью до мультипликативной постоянной C, значение которой найдем ниже.

3. Решение уравнения для $P_1(s)$

В силу (12) представим уравнение (10) в виде

$$P_1'(s)+\lambda_1 P_1(s)=\lambda_1\int_0^{S-s} P_1(s+x)dB(x)+\lambda_2 Ce^{-\gamma(s-S)}\int_{S-s}^\infty e^{-\gamma x}dB(x)\,.\tag{14}$$

Принимая во внимание (2), получим

$$\int_{S-s}^\infty e^{-\gamma x}dB(x)=\int_{S-s}^\infty e^{-\gamma x}\sum_{k=1}^n b_k\mu_k e^{-\mu_k x}dx=\sum_{k=1}^n b_k\mu_k\int_{S-s}^\infty e^{-(\mu_k+\gamma)x}dx=\sum_{k=1}^n b_k\frac{\mu_k}{\mu_k+\gamma}e^{-(\mu_k+\gamma)(S-s)}\,,$$

поэтому (14) можем записать следующим образом:

$$P_1'(s)+\lambda_1 P_1(s)=\lambda_1\int_0^{S-s} P_1(s+x)dB(x)+\lambda_2 C\sum_{k=1}^n b_k\frac{\mu_k}{\mu_k+\gamma}e^{\mu_k(s-S)}\,.$$

Подставляя в это равенство выражение (2) для функции распределения $B(x)$, получим уравнение для $P_1(s)$

$$P_1'(s)+\lambda_1 P_1(s)=\sum_{k=1}^n b_k\mu_k\left\{\lambda_1\int_0^{S-s} P_1(s+x)e^{-\mu_k x}dx+Ce^{\mu_k s}\frac{\lambda_2}{\mu_k+\gamma}e^{-\mu_k S}\right\}.\tag{15}$$

Прежде чем сформулировать теорему о виде функции $P_1(s)$, рассмотрим уравнение

$$z+\lambda_1=\lambda_1\sum_{k=1}^n b_k\frac{\mu_k}{\mu_k-z}\,,\tag{16}$$

которое нетрудно преобразовать к алгебраическому уравнению степени $n + 1$, откуда следует, что уравнение (16) имеет $n + 1$ корней. Достаточно очевидно, что $z = 0$ является корнем этого уравнения.

Для остальных корней $z=z_\nu$, $\nu=\overline{1,n}$, уравнения (16) докажем следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении условия (4)

$$\lambda_1 b < 1$$

все корни $z = z_\nu,\ \nu = \overline{1,n},$ уравнения (16) действительные и положительные.

Доказательство. Будем полагать, что значения μ_k упорядочены по возрастанию, т.е. $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\mu_k}{\mu_k - z},$$

совпадающую с правой частью уравнения (16). Так как

$$f'(z) = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\mu_k}{(\mu_k - z)^2} > 0,$$

то в интервале $0 < z < \mu_1$ функция $f(z)$ непрерывна, монотонно возрастает и принимает значения $\lambda_1 < f(z) < \infty$. При выполнении условия $\lambda_1 b < 1$ на интервале $0 < z < \mu_1$ уравнение (16) имеет по крайней мере один корень $z_1 > 0$.

Далее рассмотрим функцию $f(z)$ на интервале $\mu_{\nu-1} < z < \mu_\nu$, где $f(z)$ непрерывна, монотонно возрастает и принимает значения $-\infty < f(z) < \infty$, поэтому уравнение (16) на интервале $\mu_{\nu-1} < z < \mu_\nu$ также имеет по крайней мере один корень $z_\nu > 0$.

Количество рассматриваемых интервалов равно n, совпадающее с числом положительных корней $z = z_\nu,\ \nu = \overline{1,n}.$

Лемма доказана.

Следствие 1. Корень $0 < z_1 < \mu_1$, а для любого $\nu = \overline{2,n},\ \ \mu_{\nu-1} < z_\nu < \mu_\nu$.

Сформулированное следствие существенно упрощает численное нахождение всех положительных корней уравнения (16).

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Решение $P_1(s)$ уравнения (15) имеет вид

$$P_1(s) = C \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e^{z_\nu (s-S)}, \quad s < S\,, \tag{17}$$

где z_ν – положительные корни уравнения (16), параметры x_ν распределения (17) являются компонентами вектора $\mathbf{X}$ – решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{AX} = \mathbf{h}\,, \tag{18}$$

где элементы $A_{k\nu}$ матрицы $\mathbf{A}$ и компоненты h_k вектора $\mathbf{h}$ имеют вид

$$A_{k\nu} = \frac{\lambda_1}{\mu_k - z_\nu}, \quad h_k = \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma}\,, \tag{19}$$

нормирующая константа C определяется равенством

$$C = \left(\frac{1}{\gamma} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{z_\nu} \right)^{-1}. \tag{20}$$

Доказательство. Решение $P_1(s)$ уравнения (15) будем искать в виде (17).

Подставляя выражение (17) в (15) и выполняя несложные преобразования, получим равенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e^{z_\nu (s-S)} \left\{ z_\nu + \lambda_1 + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\mu_k}{z_\nu - \mu_k} \right\} = \sum_{k=1}^{n} b_k \mu_k e^{\mu_k (s-S)} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\lambda_1}{z_\nu - \mu_k} + \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma} \right\}.$$

Приравнивая в полученном выражении коэффициенты в линейной комбинации экспонент $e^{z_\nu s}$ к нулю, получим равенства

$$z_\nu + \lambda_1 + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\mu_k}{z_\nu - \mu_k} = 0, \quad \nu = \overline{1,m}\,,$$

которые при всех $\nu = \overline{1,n}$ совпадают с (16), следовательно, $z = z_\nu$ являются корнями уравнения (16).

Аналогично для экспонент $e^{\mu_k s}$ получим равенства

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\lambda_1}{\mu_k - z_\nu} = \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma}, \quad k = \overline{1,n},$$

которые составляют неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно x_ν, совпадающую с системой (18), в которой элементы $A_{k\nu}$ матрицы **A** и компоненты h_k вектора **h** определяются равенствами (19).

Значение константы C найдем из условия нормировки

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} P(s)ds = \int_{-\infty}^{S} P_1(s)ds + \int_{S}^{\infty} P_2(s)ds = C\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \int_{-\infty}^{S} e^{z_\nu(s-S)}ds + C\int_{S}^{\infty} e^{-\gamma(s-S)}ds =$$

$$= C\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \int_{-\infty}^{0} e^{z_\nu x}dx + C\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x}dx = C\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{z_\nu} + \frac{1}{\gamma}\right\}.$$

Отсюда следует равенство

$$C = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{z_\nu} + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1},$$

которое совпадает с (20). Теорема доказана.

В силу (17) и (12) распределение $P(s)$ из (8) имеет вид

$$P(s) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{z_\nu} + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1} \cdot \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e^{z_\nu(s-S)}, & s < S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s > S, \end{cases} \qquad (21)$$

где параметры γ и z_ν этого распределения являются положительными корнями уравнений (13) и (16), параметры x_ν являются компонентами вектора **X** – решения системы линейных алгебраических уравнений (18).

Явное выражение (21) для решения $P(s)$ уравнения (6) полностью решает проблему исследования математической модели управления запасами при выполнении указанных ограничений: релейное управление и гиперэкспоненциальное распределение объемов партий потребления ресурсов.

4. Пример

Рассмотрим в качестве закона распределения объемов потребления гиперэкспоненциальное распределение третьего порядка

$$B(x) = \sum_{k=1}^{3} b_k\left(1 - e^{-\mu_k x}\right),$$

где значения μ_k и b_k определяются вектор-строками **μ** и **b** соответственно:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}1 & 0,4 & 10\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}, \qquad (22)$$

при которых средняя величина объемов потребления $b = 1$.

Для заданных значений параметров $\lambda_1 = 0,8$ и $\lambda_2 = 1,2$ найдены положительные корни уравнений (13) и (16)

$$\gamma = 0,099; \quad z_1 = 0,094; \quad z_2 = 0,899; \quad z_3 = 9,617.$$

Таким образом, уравнение (13) имеет единственное решение, а уравнение (16) имеет три положительных корня. Оба уравнения имеют нулевые корни, которые, как было показано выше, являются посторонними.

Найдем плотность распределения вероятностей значений объема запасов при заданных параметрах (22) и $S = 10$.

Параметры $x_\nu, \nu = \overline{1,3}$, распределения (16), являющиеся компонентами вектора **X** – решения системы (18) линейных алгебраических уравнений, имеют вид

$$x_1 = 0,945; \quad x_2 = 0,036; \quad x_3 = 0,019,$$

а нормирующая константа $C = 0,049$, тогда имеет место график, представленный на рис. 2.

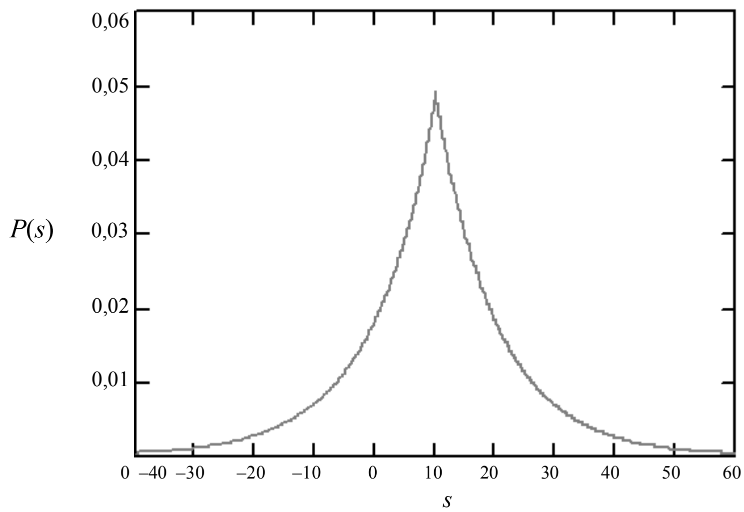

Рис. 2. Плотность распределения вероятностей значений процесса $P(s)$

Следует отметить, что плотность распределения вероятностей $P(s)$ значений процесса $s(t)$ является непрерывной для всех значений s, что естественно, но также и в точке $s = S$, что не является очевидным.

Заключение

В данной работе построена математическая модель системы управления запасами. Получено аналитическое выражение для стационарной плотности распределения значений объема запасов при гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления и релейном управлении объемом запасов. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам при различных распределениях объемов расходования ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 130–135.
2. Вальц О.В., Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 37–41.
3. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 18. С. 302–308.
4. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлением капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 19. С. 302–312.
5. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 35–37.
6. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 38–44.
7. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Управление капиталом фонда социального страхования // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 167–168.
8. Arrow K.J., Harris Th.E., Marschak J. Optimal Inventory Policy // Econometrica. 1951. V. 19, is. 3. P. 205–272.
9. Khouja M. The single-period (newsvendor) problem: Literature review and suggestions for future research // Omega. 2000. V. 27. P. 537–553.
10. Nahmias S. Demand estimation in lost sales inventory systems // Naval Research Logistics. 1994. V. 41. P. 739–757.
11. Gallego G., Moon I. The distribution free newsboy problem: Review and extensions // The Journal of the Operational Research Society. 1993. V. 44. P. 825–834.

Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com
Бронер Валентина Игоревна. E-mail: valsubbotina@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 12 декабря 2015 г.

Nazarov Anatoliy A., Broner Valentina I. (Tomsk State University, Russian Federation).
Inventory control system with hyperexponential distribution of demand's batch size.
Keywords: inventory control; on/off control; hyperexponential distribution; mathematical modeling

DOI: 10.17223/19988605/34/5

Consider a mathematical model of inventory control. Let the product flow be continuous with the fixed rate ν = 1. Let $s(t)$ be an inventory level at the moment t. The demand occurs according to a Poisson process with piecewise constant intensity $\lambda(s)$,

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, & s < S, \\ \lambda_2, & s \geq S, \end{cases}$$

where S is the threshold inventory level of $s\ (t)$. The values of purchases are independent and identically distributed random variables from the n-th order hyperexponential distribution with the first moment equal to 1.

For stationary distribution probability density function $P(s)$ we obtained the equation

$$P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x)dB(x),$$

where $P(s)$ satisfies the boundary conditions

$$P(-\infty) = P(\infty) = 0.$$

Then, the expression for the probability density function $P(s)$ is derived:

$$P(s) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{z_\nu} + \frac{1}{\gamma} \right)^{-1} \cdot \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e^{z_\nu (s-S)}, & s < S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s > S, \end{cases}$$

where z_ν and γ are positive roots of equations

$$z + \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\mu_k}{\mu_k - z}, \quad \lambda_2 - \gamma = \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\gamma x} dB(x).$$

Here x_ν are components of the vector $\mathbf{X}$, which is a solution of a system of linear algebraic equations

$$\mathbf{AX} = \mathbf{h},$$

where $A_{k\nu}$ are elements of the matrix $\mathbf{A}$, h_k are elements of the vector $\mathbf{h}$. The elements $A_{k\nu}$ and h_k have the form

$$A_{k\nu} = \frac{\lambda_1}{\mu_k - z_\nu}, \quad h_k = \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma},$$

and normalizing constant C is determined by the equation

$$C = \left(\frac{1}{\gamma} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{z_\nu} \right)^{-1}.$$

REFERENCES

1. Zmeyev, O.A. (2003) The model of the social insurance fund with exponential distributed insurance payments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University*. 280. pp. 130-135. (In Russian).
2. Valts, O.V. & Zmeyev, O.A. (2004) Mathematical model of advertising campaign taking into account the effect of "boring" of advertisement. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University*. 284. pp. 37-41. (In Russian).
3. Livshits, K.I. & Shiferdeker, I.Yu. (2006) Mathematical model of incomercial fund functioning under the relay control of its capital. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University.* 18. pp. 302-308. (In Russian).
4. Livshits, K.I., Suhotina, L.Yu. & Shiferdeker, I.Yu. (2006) Puasson model of incomercial fund functioning under the relay control of its capital. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University.* 19. pp. 302-312. (In Russian).
5. Kitaeva, A.V. & Terpugov, A.F. (2006) The model of the social insurance fund on the relay management of capital and exponential distributed insurance payments and payments on social programs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University.* 293. pp. 35-37. (In Russian).
6. Livshits, K.I. & Shiferdeker, I.Yu. (2006) Diffusion approximation of the mathematical model of the non-profit foundation with the relay money management. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University.* 293. pp. 38-44.
7. Kitaeva, A.V. & Terpugov, A.F. (2006) Control of the social insurance fund's surplus. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Journal of the Tomsk State University.* 290. pp. 167-168. (In Russian).
8. Arrow, K.J., Harris, Th.E. & Marschak, J. (1951) Optimal Inventory Policy. *Econometrica*. 19(3). pp. 205-272. DOI: 10.2307/1906813
9. Khouja, M. (2000) The single-period (newsvendor) problem: Literature review and suggestions for future research. *Omega*. 27. pp. 537-553.
10. Nahmias, S. (1994) Demand estimation in lost sales inventory systems. *Naval Research Logistics*. 41. pp. 739-757. DOI: 10.1002/1520-6750(199410)41:6<739::AID-NAV3220410605>3.0.CO;2-A
11. Gallego, G. & Moon, I. (1993) The distribution free newsboy problem: Review and extensions. *The Journal of the Operational Research Society*. 44. pp. 825-834. DOI: 10.1038/sj/jors/0440809