

УДК 519.218.72

DOI: 10.17223/19988605/34/7

Г.Ш. Цициашвили

## СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В СЕТИ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ

В статье сеть массового обслуживания с многоканальными узлами и гиперэкспоненциальными распределениями времен обслуживания преобразована в сеть Джексоновского типа. С помощью теоремы мультипликативности установлен синергетический эффект, состоящий в исчезновении очередей при увеличении числа приборов в узлах сети.

**Ключевые слова:** гиперэкспоненциальное распределение; сеть массового обслуживания; теорема мультипликативности.

В настоящей работе решается задача конструирования сети массового обслуживания с многоканальными узлами и исчезающей при большом числе каналов очередью. В системах массового обслуживания такие синергетические эффекты достаточно детально изучены. Однако в сетях обслуживания подобное явление установить сложнее из-за перемешивания потоков заявок, выходящих из узлов. Подобная постановка вопроса связана с интенсивно развивающимися работами по исследованию бесконечно-линейных сетей массового обслуживания [1, 2], в которых отсутствуют очереди.

В статье делается предположение, что времена обслуживания в каналах отдельных узлов гиперэкспоненциальные, т.е. являются вероятностными смесями конечного числа экспоненциальных распределений. Каждый узел разбивается на определенное число многоканальных систем типа  $M|M|n|\infty$  со специально подобранным числом каналов. В результате исходная сеть преобразуется в открытую сеть Джексона, для которой мультипликативная теорема позволяет редуцировать первоначальную задачу конструирования сети, обладающей синергетическим эффектом, в отдельные многоканальные системы обслуживания (синергетический эффект для них уже установлен). Таким образом, расчетные методы сочетаются с элементами конструирования сетей обслуживания, обладающими синергетическим эффектом.

### Основной результат

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания  $G$ , состоящую из  $m$  узлов, между которыми циркулируют заявки и времена обслуживания в которых являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функциями распределения (ф.р.)

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^{r_i} p_{ik} (1 - \exp(-\mu_{ik} t)), \quad a_i = \int_0^\infty F_i(x) dx = \sum_{k=1}^{r_i} \frac{p_{ik}}{\mu_{ik}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

являющимися смесями  $r_i$  показательных распределений:  $p_{ik} > 0$ ,  $\sum_{k=1}^{r_i} p_{ik} = 1$ . Пусть все положительные

числа  $R_{ik} = \frac{p_{ik}}{\mu_{ik} a_i}$ ,  $k = 1, \dots, r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , являются рациональными и представляются равенствами

$R_{ik} = \frac{A_{ik}}{B_{ik}}$ , где числитель и знаменатель – взаимно простые числа. Обозначим  $N$  наименьшее общее

кратное чисел  $B_{ik}$ ,  $k = 1, \dots, r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и положим, что в каждом из узлов сети  $G$  содержится  $nN$  приборов.

Динамика перемещения заявки в сети  $G$  задается неразложимой маршрутной матрицей  $\Theta = \|\theta_{ij}\|_{i,j=0}^m$ , где  $\theta_{ij}$  – вероятность перехода заявки после обслуживания из узла  $i$  в узел  $j$ ,  $\theta_{i0}$  – вероятность ухода заявки из сети,  $\theta_{0i}$  – вероятность поступления заявки входного потока в узел  $i$ ,  $\theta_{00} = 0$ . Обозначим  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \Theta, \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0. \quad (1)$$

Предположим, что входной поток в сети  $G$  является пуассоновским с интенсивностью  $nN$  и выполнены неравенства

$$\rho_i = \lambda_i a_i < 1, i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Для получения синергетического эффекта в явном виде преобразуем сеть  $G$  с  $m$  узлами в сеть  $R$  с  $\sum_{i=1}^m r_i$  узлами. Обозначим

$$n_{ik} = nNR_{ik}, k = 1, \dots, r_i, \sum_{k=1}^{r_i} n_{ik} = Nn, i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

и заменим узел  $i$  сети  $G$  блоком  $(i)$ , состоящим из  $r_i$  узлов  $(i, k)$  с  $n_{ik}$  приборами, имеющими показательные распределения времен обслуживания  $1 - \exp(-\mu_{ik}t)$ ,  $k = 1, \dots, r_i$ . Заявка входного потока поступает в узел  $(i, k)$  с вероятностью  $\theta_{0i} p_{ik}$ , а после окончания обслуживания уходит в узел  $(j, l)$  с вероятностью  $\theta_{ij} p_{jl}$  или уходит из сети с вероятностью  $\theta_{i0}$ .

Очевидно, что ф.р. времени обслуживания заявки, поступающей в блок  $(i)$ , совпадает с  $F_i(t)$ , а число приборов в блоке  $(i)$  в силу (3) равно  $nN$ , как и в сети  $G$ . Маршрутная матрица сети  $R$  также является неразложимой. Таким образом, сеть  $R$  является сетью Джексона. Докажем, что вероятность  $P_R(n)$  существования очереди хотя бы в одном из узлов  $(i, k)$  сети  $R$  удовлетворяет соотношению

$$P_R(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Во всех узлах сети  $R$  в силу условий (2) выполняются неравенства

$$\frac{nN\lambda_i p_{ik}}{n_{ik}\mu_{ik}} = \rho_i < 1, k = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Тогда из мультипликативной теоремы Джексона [3] следует, что предельное распределение числа заявок в узлах  $(i, k)$ ,  $k = 1, \dots, r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  сети  $R$  удовлетворяет равенству

$$P(t_{ik}, k = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, m) = \prod_{i=1}^m \prod_{k=1}^{r_i} P_{ik}(t_{ik}). \quad (6)$$

Здесь  $P_{ik}(t_{ik})$  предельное распределение числа заявок в  $n_{ik}$  – канальной системе массового обслуживания типа  $M|M|n|\infty$  с интенсивностью входного потока  $nN\lambda_i p_{ik}$  и интенсивностью обслуживания на отдельном приборе  $\mu_{ik}$ .

Известно, что для системы массового обслуживания  $M|M|n|\infty$  с интенсивностью входного потока  $n\lambda$  и интенсивностью обслуживания  $\mu$  на отдельном приборе стационарная вероятность  $p_n(k)$  нахождения в системе  $k$  заявок вычисляется по формулам [4]:

$$p_n(k) = p_n(0) \frac{n^k \rho^k}{\prod_{j=1}^k \min(j, n)}, \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$p_n(0) = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k \rho^k}{\prod_{j=1}^k \min(j, n)} \right]^{-1} \leq \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k \rho^k}{k!} \right]^{-1} = e^{-np}.$$

В силу формулы Стирлинга [5. Глава I, § 2]:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{\psi(n)}{12n}\right), \quad 0 < \psi(n) < 1,$$

и неравенства  $f(\rho) = 1 + \ln \rho - \rho < 0$ ,  $0 < \rho < 1$ , стационарная вероятность  $P(n)$  существования очереди в такой системе удовлетворяет соотношению

$$P(n) = p_n(0) \sum_{k>n} \frac{n^k \rho^k}{n! n^{k-n}} \leq e^n \frac{p_n(0)}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{k>n} \rho^k \leq \frac{\exp(nf(\rho))}{(1-\rho)\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Обозначим  $P_{ik}(n)$  стационарную вероятность существования очереди в узле  $(i, k)$  сети  $R$ . В силу условия (5) и соотношений (6), (8) получим

$$P_{ik}(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, r_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Отсюда следует соотношение (4), характеризующее синергетический эффект в сети  $R$ .

**Замечание.** Нетрудно доказать, что в случае большой загрузки при  $\rho = \rho(n) = 1 - a n^{-\gamma}$ ,  $0 < a < 1$ , если  $0 < \gamma < 1/2$ , то  $P(n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , если  $\gamma > 1/2$ , то  $P(n) \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

## Заключение

Рассмотренная в настоящей работе модель сети может быть распространена на случай вполне монотонных (complete monotone) [6] распределений времен обслуживания. Под вполне монотонными понимаются распределения с плотностью  $f(t)$ , удовлетворяющей неравенствам  $(-1)^k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \geq 0$ ,  $t > 0$ ,  $k \geq 1$ . С помощью [7. Theorem 1, Lemma 2] и ее обобщений доказывается, что для любой вполне монотонной ф.р.  $F(t)$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует гиперэкспоненциальная ф.р.  $G(t)$ , удовлетворяющая неравенству  $\sup_{t \geq 0} |F(t) - G(t)| \leq \varepsilon$ . Важными для приложений в теории массового обслуживания вполне монотонными ф.р. являются распределения Вейбулла, Парето и другие распределения с тяжелыми хвостами [8, 9]. В свою очередь, аппроксимировать вероятность существования очереди в системе обслуживания с вполне монотонными ф.р. времен обслуживания можно с помощью теорем устойчивости [10] применительно к рассмотренной в работе сети  $G$ .

Пользуясь замечанием, нетрудно исследовать синергетические эффекты в режиме большой загрузки в отдельных узлах сети.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006.
2. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015.
3. Jackson J.R. Networks of Waiting Lines // Oper. Res. 1957. V. 5, No. 4. P. 518–521.
4. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М. : Высшая школа, 1982.
5. Ширяев А.Н. Вероятность. М. : Наука, 1989.
6. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long tailed distributions to analyze network performance models// Performance Evaluation. 1998. V. 31. P. 245–279.
7. Vatamidou E [et al.]. On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models // Scandinavian Actuarial Journal. 2014. V. 6. P. 510–534.
8. Embrechts P., Cluppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance. Berlin : Springer-Verlag 1997.
9. Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific Publishing Co Inc, 2000.
10. Боровков А.А. Пределочные теоремы для сетей обслуживания // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. XXXI, вып. 3. С. 474–490.

**Цициашвили Гурами Шалвович**, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: guram@iam.dvo.ru

Институт прикладной математики ДВО РАН,

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Поступила в редакцию 23 декабря 2015 г.

*Tsitsiashvili Gurami Sh.* (Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Science, Far Eastern Federal University, Russian Federation).

**Synergetic effect in network with hyperexponential distributions of service times.**

**Keywords:** hyperexponential distribution; queuing network; product theorem.

DOI: 10.17223/19988605/34/7

In this paper, a problem of construction of queuing network with multiserver nodes and vanishing queues with large numbers of servers is solved. In queing systems such synergetic effects are analyzed sufficiently detailed. But in queuing networks an analysis of these effects are more complicated because of mixing of outgoing flows. This problem is closely connected with intensively developing researchs of networks with infinite numbers of servers in which there are no queues. An interest to these networks is arised by a simplicity of probability distributions in the networks so by manifold applications like cloud computing and systmes of public service.

The networks with service times which have hyperexponential distributions are analyzed. That is service times distributions are probability mixtures of finite numbers of exponential distributions. Any network node is divided into few  $M | M | n | \infty$  systems with special numbers of servers. As a result initial queuing network is transformed into Jackson type network. So, to analyze synergetic effect it is enough to consider separate multiserver systems of  $M | M | n | \infty$  type for which this effects may be analyzed sufficiently simple. In such a way calculational and constructive mehtods are combuinied.

Main element of this construction is an algorithm of a transformation of queuing network with hyperexponential distributions of service times into network with exponentialy distributed service times. Main property of this transformation is a retention of servers numbers in different nodes. This algorithm is based on ergodicity condition essentially. Then product theorem for the Jackson type queuing network is used. This theorem allows to calculate limit distribution of customers numbers in the network by limit distribution of customers numbers in different nodes. So, to obtain synergetic effect in the network it is possible to use synergetic effect in the nodes.

Considered model of queing network may be spread onto networks with completely monotone distributions of service times. Here complete monotone distribution is distribution with probability density  $f(t)$ , satisfying the inequalities  $(-1)^k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \geq 0, t > 0, k \geq 1$ .

Well known results allow to approximate any completely monotone distribution  $F(t)$  by hyperexponential distribution  $G(t)$ , satisfying for any  $\varepsilon > 0$  the inequality  $\sup_{t \geq 0} |F(t) - G(t)| \leq \varepsilon$ . In queing theory completely monotone distributions are the Weibull, Pareto, and other subexponential distributions. To approximate probability of queue existence in networks with completely monotone distribution it is possible using stability theorems. A possibility to consider synergetic effects in separate nodes of the network in the regime of heavy traffic is discussed also.

## REFERENCES

1. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
2. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolineynye sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Queuing systems and networks with infinite number of servers]. Tomsk: NTL.
3. Jackson, J.R. (1957) Networks of Waiting Lines. *Oper. Res.* 5(4). pp. 518-521. DOI: 10.1287/opre.5.4.518
4. Ivchenko, G.I., Kashtanov, V.A. & Kovalenko, I.N.(1982) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory]. Moscow: Vysshaya shkola.
5. Shiriaev, A.N. (1989) *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow: Nauka.
6. Feldmann, A. & Whitt, W. (1998) Fitting mixtures of exponentials to long tailed distributions to analyze network perfomance models. *Perfomance Evaluation*. 31. pp. 245-279. DOI: 10.1109/INFCOM.1997.631130
7. Vatamidou, E et al. (2014) On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*. 6. pp. 510-534. DOI: 10.1080/03461238.2012.729154
8. Embrechts, P., Cluppelberg, C. & Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*. Springer-Verlag: Berlin.
9. Asmussen, S. (2000) *Ruin Probabilities*. Singapore: World Scientific Publishing Co Inc.
10. Borovkov, A.A. (1986) Predel'nye teoremy dlya setey obsluzhivaniya [Limit theorems for queuing networks]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Probability theory and its applications*. 31(3). pp. 474-490.