

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.17

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРАФОВ В ВИДЕ k -ДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Р. М. Ганопольский

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

Рассматривается связь между производящей функцией k -дольных графов и производящей функцией числа представлений графов в виде k -дольных. Получено соотношение между этими функциями. Показана связь между коэффициентами соотношения и коэффициентами хроматического полинома. Приводится пример применения соотношений для вычисления взвешенных сумм. Рассматриваются частные случаи сумм и варианты практического применения полученных результатов в физике и математике.

Ключевые слова: *граф, k -дольный граф, гиперграф, мультиграф, производящие функции, хроматический полином, взвешенная сумма.*

DOI 10.17223/20710410/31/1

GENERATING FUNCTION FOR REPRESENTATIONS OF GRAPHS BY k -PARTITE GRAPHS

R. M. Ganopolsky

*Tyumen State University, Tyumen, Russia***E-mail:** rodion@utmn.ru

A relation between the generating function of k -partite graphs and the generating function of the number of k -partite representations of graphs is obtained. A correlation between the relation's coefficients and chromatic polynomial coefficients is shown. An application of the results to calculation of weighted sums is demonstrated. Special cases of sums and some applications of the relations in physics and mathematics are considered.

Keywords: *graph, k -partite graph, hypergraph, multigraph, generating functions, chromatic polynomial, weighted sum.*

Введение

В [1] рассматривается специальный вид производящей функции последовательности чисел k -дольных графов

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n_i > 0} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}{n_1! n_2! \dots n_k!} f_k(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_k$ — переменные функции; f_k — число k -дольных графов, имеющих в каждой доле (с номером i) определённое количество (n_i) вершин. Получено соотношение, аналогичное экспоненциальной формуле [2]:

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{S=\{U_\alpha\}} \prod_{U_\alpha} (\exp D_{|U_\alpha|} - 1),$$

где сумма идёт по всем непустым покрытиям S множества номеров долей $X = \{1, 2, \dots, k\}$, а произведение — по всем подмножествам U_α , входящим в покрытие S ; D_j — экспоненциальные производящие функции от переменных $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_j}$ последовательности чисел связных j -дольных графов; j — мощность подмножества $U_\alpha = \{x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_j}\}$. При приравнивании всех переменных x_i одной переменной x получается следующее выражение [1]:

$$F_k(x) = \sum_{i \geq 0} {}_kN(i_1, i_2, \dots, i_k) \prod_j (e^{D_j(x)} - 1)^{i_j},$$

где ${}_kN(i_1, i_2, \dots, i_k)$ — число покрытий множества мощности k при условии, что каждое покрытие содержит для каждого $l = 1, \dots, k$ ровно i_l подмножеств мощности l . Суммирование идёт по всем неотрицательным значениям i_l (обозначено как $i \geq 0$). В работе [3] рассмотрены свойства этих чисел, в [4, 5] проанализированы их производящие функции.

Пусть задан некий класс B помеченных графов, имеющий следующее свойство: если в класс B входит граф G , то входят и все графы, получающиеся из графа G произвольной перестановкой меток (изоморфные относительно перестановки меток, далее просто изоморфные). Данному условию удовлетворяют такие классы помеченных графов, как деревья, леса, графы, имеющие определённое количество связных компонент (в том числе связные графы) и т. п.

Если множество вершин графа G можно разбить на k подмножеств так, чтобы между входящими в одно подмножество вершинами не было ни одного ребра, то будем говорить, что граф G *представим в виде k -дольного графа*. Получившийся k -дольный граф будем называть *представлением исходного графа G в виде k -дольного графа*. Даже для одного значения k может быть несколько представлений графа G в виде k -дольных графов — обозначим число таких представлений $M_k(G)$. В общем случае один граф может быть представлен в виде k -дольных графов для нескольких различных k .

Введём обозначения $F_k(x_1, x_2, \dots, x_k; B)$ и $f_k(n_1, n_2, \dots, n_k; B)$ для производящей функции и чисел k -дольных графов из (1), где учитываются только k -дольные графы, являющиеся представлениями графов из класса B .

1. Производящая функция

Рассмотрим производящую функцию числа представлений помеченного графа G порядка n в виде k -дольных графов для всех k с различными долями

$$M(y; G) = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 1} M_k(G) y^k$$

и производящую функцию для всех графов класса B

$$M(x, y; B) = \sum_{G \in B} \frac{x^{|V(G)|}}{|V(G)|!} \sum_{k \geq 1} M_k(G) y^k = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} M_k(G) y^k,$$

где $V(G)$ — множество вершин графа G . Покажем, что производящая функция $M(x, y; B)$ выражается через производящие функции $F_k(x_1, x_2, \dots, x_k; B)$.

Пусть граф $\tilde{G}$ изоморфен графу G , то есть получается из G перестановкой меток. Та же перестановка меток любому разбиению вершин графа G ставит в однозначное соответствие некое разбиение вершин графа $\tilde{G}$. Следовательно, каждому представлению графа G в виде k -дольного графа соответствует представление графа $\tilde{G}$ в виде k -дольного графа, то есть $M_k(G) = M_k(\tilde{G})$ и $M(y; G) = M(y; \tilde{G})$.

Пусть B' — это подкласс класса B , в котором нет изоморфных друг другу графов, но для любого графа из B есть изоморфный ему граф в B' . Тогда

$$M(x, y; B) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{G \in B' \\ |V(G)|=n}} I(G) \sum_{k \geq 1} M_k(G) y^k, \quad (2)$$

где $I(G)$ — число графов в B , изоморфных G (включая сам граф G).

Определим число $I(G)M_k(G)$ из других соображений и свяжем его с числами $f_k(n_1, n_2, \dots, n_k; B)$. Возьмём произвольное разбиение числа n на k положительных чисел $l_1, \dots, l_k$ и разобьём n вершин на k частей так, чтобы для каждого $i = 1, \dots, k$ в части с номером i было l_i вершин:

$$\{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1l_1}\}, \dots, \{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kl_k}\}. \quad (3)$$

Пусть $r_G(\{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1l_1}\}, \dots, \{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kl_k}\})$ — количество графов, изоморфных G , которые можно представить в виде k -дольного графа с разбиением вершин вида (3). Так как все перестановки меток вершин дают входящие в класс B графы, значение r_G не должно зависеть от способа разбиения множества вершин на части, а только от размера частей:

$$r_G(\{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1l_1}\}, \dots, \{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kl_k}\}) = r_G(l_1, \dots, l_k).$$

Число разбиений n вершин графа на k частей так, чтобы в i -й части было l_i вершин, равно обобщённому биномиальному коэффициенту [6]

$$\frac{n!}{l_1! \dots l_k!}.$$

Таким образом, общее число представлений графов, изоморфных G , в виде k -дольных графов с долями, имеющими $l_1, \dots, l_k$ вершин, равно

$$\frac{n!}{l_1! \dots l_k!} r_G(l_1, \dots, l_k).$$

Просуммировав по всем возможным разбиениям $l_1, \dots, l_k$, получим общее число представлений графов, изоморфных G , в виде k -дольных графов

$$I(G)M_k(G) = \sum_{\sum l_i = n} \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} r_G(l_1, \dots, l_k), \quad (4)$$

где $|V(G)| = n$. С другой стороны, если просуммировать $r_G(l_1, \dots, l_k)$ по всем графам, входящим в B' , то получим количество всех k -дольных графов с количеством вершин в долях $l_1, \dots, l_k$, являющихся представлениями графов из B :

$$f_k(l_1, \dots, l_k; B) = \sum_{G \in B'} r_G(l_1, \dots, l_k). \quad (5)$$

Подставив суммы (4) и (5) в выражения (1) и (2), получаем искомое соотношение между $M(x, y; B)$ и $F_k(x_1, x_2, \dots, x_k; B)$:

$$M(x, y; B) = \sum_{k \geq 0} F_k(x, x, \dots, x; B) y^k. \quad (6)$$

2. Хроматический полином

Пусть $p(k; G)$ — функция от графа G , дающая для каждого числа k количество представлений графа G в виде k -дольного графа с маркированными, в том числе пустыми, долями. Тогда $p(k; G)$ и $M_k(G)$ связаны соотношением

$$p(k; G) = \sum_{l=1}^k C_k^l M_l(G). \quad (7)$$

Используя обратное биномиальное преобразование [2], получим

$$M_k(G) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l C_k^l p(l; G). \quad (8)$$

Номер доли можно интерпретировать как общий цвет вершин, находящихся в ней. Тогда $p(k; G)$ — количество способов окраски графа G с помощью k красок (не обязательно все использованы). Таким образом, функция $p(x; G)$ представляет собой хроматический полином [7]

$$p(x; G) = \sum_{i \geq 0}^n b_i x^i, \quad (9)$$

где n — количество вершин графа G . Подставим представление $p(x; G)$ в виде полинома (9) в выражение (8):

$$M_k(G) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l C_k^l \sum_{i \geq 0}^n b_i l^i.$$

Хроматический полином можно представить в виде

$$p(x; G) = \tilde{b}_n x^n + \tilde{b}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1 x, \quad (10)$$

где x^n — убывающая степень [6]:

$$x^n = x(x-1) \cdots (x-n+1), \quad x^1 = x^1 = x,$$

а $\tilde{b}_i$ — коэффициенты перед соответствующими убывающими степенями. Запишем связь коэффициентов разложений [6]:

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{i \geq k} s(i, k) \tilde{b}_i, \\ \tilde{b}_k &= \sum_{i \geq k} S(i, k) b_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где $s(i, k)$ и $S(i, k)$ — числа Стирлинга первого и второго рода соответственно.

При $x = k$ все слагаемые с убывающей степенью больше k равны нулю:

$$p(k; G) = \sum_{i=1}^k \tilde{b}_i k^i. \quad (12)$$

Так как убывающая степень и биномиальные коэффициенты при $k \leq n$ связаны соотношением $n^{\underline{k}} = C_n^k k!$ [6], соотношение (12) приводится к виду

$$p(k; G) = \sum_{i=1}^k i! \tilde{b}_i C_k^i.$$

Отсюда и из выражения (7) получаем

$$M_k(G) = k! \tilde{b}_k(G), \quad (13)$$

где $\tilde{b}_k(G)$ — коэффициенты разложения хроматического полинома по убывающим степеням (10) для графа G . Тогда

$$M(x, y; B) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} k! \tilde{b}_k(G) y^k. \quad (14)$$

Полученное выражение удобно использовать тогда, когда известен вид хроматического полинома для класса графов B . Например, если B — класс помеченных деревьев T , то хроматический полином дерева T_n с n вершинами имеет вид [7]

$$p(x; T_n) = x(x-1)^{n-1}.$$

Учитывая (11), запишем

$$(x-1)^{n-1} = \sum_k (x-1)^{\underline{k}} S(n-1, k);$$

отсюда ввиду равенства $x(x-1)^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}}$ получаем разложение хроматического полинома деревьев по убывающим степеням

$$p(x; T_n) = \sum_k x^{\underline{k+1}} S(n-1, k),$$

то есть $\tilde{b}_k = S(n-1, k-1)$. Следовательно, выражение (14) для класса помеченных деревьев имеет вид

$$M(x, y; T) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} k! S(n-1, k-1) y^k.$$

3. Взвешенная сумма

Пусть задана весовая функция от k -дольных графов ϕ , значение которой одинаково для всех представлений графа G в виде k -дольных графов (будем записывать $\phi(G)$), и пусть ϕ удовлетворяет следующему условию: значение функции от несвязного графа равно произведению значений функции от компонент связности. Так как k -дольный граф является представлением для всех изоморфных графу G графов, то функция $\phi(G)$ должна быть инвариантной относительно изоморфизма.

Пусть необходимо вычислить взвешенную сумму для всех k -дольных графов, являющихся представлениями графов, входящих в класс B :

$$\Sigma(B) = \sum_{k \geq 0} \sum_{l_i \geq 0} \frac{1}{l_1! l_2! \cdots l_k!} \sum_{G \in B} a_k \phi(G), \quad (15)$$

где a_k — коэффициенты искомой суммы; сумма $\sum_{G \in B}$ идёт по всем k -дольным графам, являющимся k -дольными представлениями графов из B и имеющим для всех $i = 1, \dots, k$ в доле i ровно l_i вершин. Из соотношений (6) и (13) и инвариантности функции ϕ следует, что эта сумма равна

$$\Sigma(B) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} k! a_k \tilde{b}_k(G) \phi(G). \quad (16)$$

Рассмотрим сумму (16) для следующих вариантов задания коэффициентов a_k :

$$a_k = (-1)^k; \quad (17)$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k}; \quad (18)$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k(k-1)}. \quad (19)$$

В случае с коэффициентами (19) на функцию ϕ накладывается дополнительное условие: её значение для графа, состоящего из одной вершины, равно нулю, то есть сумма считается для графов, компоненты связности которых содержат хотя бы одно ребро, и сумма по k начинается с 2.

Введём следующие функции:

$$p'(x; G) = p(x; G)/x, \quad p''(x; G) = \frac{p(x; G)}{x(x-1)}.$$

Если в графе есть хотя бы одна вершина, то в хроматическом полиноме можно выделить множитель x , а если в графе есть хотя бы одно ребро, то в хроматическом полиноме можно выделить множитель $x(x-1)$ [7]. Значит, функции p' и p'' тоже являются полиномами, а их разложение через убывающие степени имеет вид

$$p'(x; G) = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x-1)^{\underline{(i-1)}}, \quad p''(x; G) = \sum_{i=2}^n \tilde{b}_i(x-2)^{\underline{(i-2)}}.$$

Вычислим значение полинома p при $x = -1$, полинома p' — при $x = 0$, а полинома p'' — при $x = 1$:

$$p(-1; G) = \sum_{i=1}^n (-1)^i i! \tilde{b}_i; \quad (20)$$

$$p'(0; G) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (i-1)! \tilde{b}_i; \quad (21)$$

$$p''(1; G) = \sum_{i=2}^n (-1)^i (i-2)! \tilde{b}_i. \quad (22)$$

Подставив (17)–(19) в (16) и учтя (20)–(22), получим

$$\Sigma(B) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} p(-1; G) \phi(G) \text{ при } a_k = (-1)^k;$$

$$\Sigma(B,) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} p'(0; G) \phi(G) \text{ при } a_k = \frac{(-1)^k}{k}; \quad (23)$$

$$\Sigma(B,) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{G \in B \\ |V(G)|=n}} \sum_{k \geq 1} p''(1; G) \phi(G) \text{ при } a_k = \frac{(-1)^k}{k(k-1)}. \quad (24)$$

Хроматический полином несвязного графа равен произведению хроматических полиномов его компонент связности, следовательно, в полиноме несвязного графа можно выделить множитель x^2 . То есть значение $p'(0; G)$ для несвязных графов равно нулю, а сумма в (23) идёт только по связным графам. Аналогичный вывод получается для суммы (24), так как каждая компонента связности должна содержать хотя бы одно ребро. Этот же результат для суммы (15) и коэффициентов (18) и (19) получен в [1] с помощью соотношений для чисел $_nN(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Рассмотрим класс связных графов с точкой сочленения, при удалении в которых одной вершины (точки сочленения) увеличивается количество компонент связности. В этот класс входят все деревья, имеющие больше одного ребра. Хроматический полином таких графов имеет вид

$$p(x; G) = \frac{p(x; G_1)p(x; G_2)}{x},$$

где G_1 и G_2 — графы, из которых с помощью объединения по вершине получается граф G [7]. В каждом из графов G_1 и G_2 должно быть хотя бы одно ребро, значит, в полиноме от графа с сочленением можно выделить множитель $x(x-1)^2$, а значение $p''(1; G)$ для таких графов равно нулю. Окончательно получаем, что сумма (24) идёт только по связным графам, не имеющим точки сочленения.

Заключение

В работе [1] введены понятия k -дольных гиперграфов и мультиграфов. Применяя такие же рассуждения, что при выводе выражений (14) и (16), и обобщая понятие хроматического полинома, можно получить аналогичные выражения для производящей функции и суммы весовых функций для классов гиперграфов и мультиграфов. Аналогично выводятся значения частных случаев сумм весовых функций с коэффициентами (17)–(19).

Полученные результаты, в частности соотношения (14) и (16), могут быть использованы для упрощения оперирования с диаграммами Фейнмана в квантовой теории, диаграммами теории возмущений в теории струн [8] и статистической физике [9–11]. Диаграммы Фейнмана и их аналоги являются по сути k -дольными графами или мультиграфами, что позволяет применять методы теории графов для упрощения выражений и вычисления бесконечных рядов таких диаграмм. Полученные результаты можно использовать также для анализа схем в схемотехнике, блок-схем в теории информационных систем, структур баз данных с сетевой моделью, нейронных сетей, криптостойкости алгоритмов в криптологии [12] и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганопольский Р. М. Экспоненциальные производящие функции последовательности чисел k -дольных графов // Прикладная дискретная математика. 2015. № 1(27). С. 84–91.
2. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005.
3. Ганопольский Р. М. Число неупорядоченных покрытий конечного множества подмножествами фиксированного размера // Прикладная дискретная математика. 2010. № 4(10). С. 5–17.
4. Ганопольский Р. М. Производящие функции последовательности чисел покрытий конечного множества // Прикладная дискретная математика. 2011. № 1(11). С. 5–13.
5. Ганопольский Р. М. Производящие функции последовательности чисел связных покрытий // Прикладная дискретная математика. 2013. № 3(21). С. 5–10.

6. Кнут Д., Грэхем Ф., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 2006.
7. Харари Ф. Теория графов. М.: УРСС, 2003.
8. Каку М. Введение в теорию суперструн. М.: Мир, 1999.
9. Фейнман Р. Статистическая механика: Курс лекций. М.: Мир, 1975.
10. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
11. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
12. Фомичев В. М. Методы дискретной математики в криптологии. М.: Диалог-МИФИ, 2010.

REFERENCES

1. Ganopol'skiy R. M. Eksponentsial'nye proizvodyashchie funktsii posledovatel'nosti chisel k -dol'nykh grafov [The exponential generating functions for sequence of the numbers of k -partite graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2015, no. 1(27), pp. 84–91. (in Russian)
2. Stenli R. Perechislitel'naya Kombinatorika. Derev'ya, Proizvodyashchie Funktsii i Simmetricheskie Funktsii [Enumerative Combinatorics. The Trees, Generating Functions and Symmetric Functions]. Moscow, Mir Publ., 2005. (in Russian)
3. Ganopolsky R. M. Chislo neuporyadochennykh pokrytiy konechnogo mnozhestva podmnozhestvami fiksirovannogo razmera [The number of disordered covers of a finite set by subsets having fixed cardinalities]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2010, no. 4(10), pp. 5–17. (in Russian)
4. Ganopolsky R. M. Proizvodyashchie funktsii posledovatel'nosti chisel pokrytiy konechnogo mnozhestva [Generating functions for sequences of disordered covers numbers]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 1(11), pp. 5–13. (in Russian)
5. Ganopolsky R. M. Proizvodyashchie funktsii posledovatel'nosti chisel svyaznykh pokrytiy [Generating functions for sequences of connected covers numbers]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2013, no. 3(21), pp. 5–10. (in Russian)
6. Graham R. L., Knuth D. E., and Patashnik O. Concrete Mathematics. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1994.
7. Harary F. Graph Theory. Reading, Addison-Wesley, 1994.
8. Kaku M. Introduction to Superstrings. Springer Verlag, 1988.
9. Feynman R. Statisticheskaya Mekhanika: Kurs Lektsiy [Statistical Mechanics. Lecture Course]. Moscow, Mir Publ., 1975. (in Russian)
10. Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzialoshinskij I. E. Metody Kvantovoy Teorii Polya v Statisticheskoy Fizike [Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. (in Russian)
11. Lifshic E. M., Pitaevskij L. P. Statisticheskaya Fizika [Statistical Physics]. P. 2. Moscow, Nauka Publ., 1978. (in Russian)
12. Fomichev V. M. Metody Diskretnoy Matematiki v Kriptologii [Methods of Discrete Mathematics in Cryptology]. Moscow, Dialog-MIFI Publ., 2010. (in Russian)