УДК 51.76, 577.21, 512.542.7

КРУГОВЫЕ ИНВЕРСИИ ПЕРЕСТАНОВОК И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СОРТИРОВКИ

А. Ю. Зубов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Предлагается алгоритм сортировки перестановки на основе её множеств круговых инверсий. Указывается на приложения в молекулярной биологии и в теории групп подстановок.

Ключевые слова: *инверсии и круговые инверсии перестановок, сортировка линейных и круговых перестановок, диаметр группы подстановок.*

DOI 10.17223/20710410/31/2

CIRCULAR INVERSIONS OF PERMUTATIONS AND THEIR USE IN SORTING PROBLEMS

A. Yu. Zubov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: Zubovanatoly@yandex.ru

For a permutation sorting, an algorithm based on the circular inversions of the permutation is proposed. Some its applications in molecular biology and in the theory of permutation groups are pointed.

Keywords: *inversions, circular inversions of permutations, sorting linear and circular permutations, diameter of the permutation group.*

1. Задачи сортировки перестановок

Целое направление исследований в вычислительной молекулярной биологии связано с оценкой сложности перестройки одного генотипа в другой с помощью определённого типа преобразований [1 – 19]. При этом генотип представляется в виде перестановки составляющих её генов. По сути дела, речь идёт о взаимной трансформации биологических видов с одинаковым набором генов, возникающей в результате различных мутаций. К числу допустимых преобразований относятся: *кусочные транспозиции* (transpositions), *кусочные инверсии* (reversals) и некоторые другие преобразования (translocations, block-interchanges, fissions, fusions). Задача перестройки генотипа равносильна задаче сортировки перестановки с помощью минимально возможного числа допустимых преобразований. Целью сортировки является получение тривиальной перестановки.

Задача сортировки перестановки имеет очевидную теоретико-групповую трактовку. В самом деле, пусть $\Omega_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$; S_n — симметрическая группа подстановок множества Ω_n; H — система образующих элементов группы S_n; $l_H(\sigma)$ — длина минимального представления подстановки $\sigma \in S_n$ в виде произведения элементов из H. Система образующих H может состоять из множества кусочных транспозиций, кусочных инверсий или преобразований другой природы.

Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 0\sigma & 1\sigma & \dots & (n-1)\sigma \end{pmatrix}$$

— произвольная подстановка из S_n и $\overline{\sigma} = [0\sigma, 1\sigma, \dots, (n-1)\sigma]$ — перестановка, образованная нижней строкой подстановки σ. Указанные выше преобразования следующим образом определяются своим действием на перестановку $\overline{\sigma}$: кусочная транспозиция $T_{i,j,k}$ $(i < j < k)$ определяется равенством

$$T_{i,j,k}(\overline{\sigma}) = [0\sigma, \dots, (i-1)\sigma, (j+1)\sigma, \dots, k\sigma, i\sigma, \dots, j\sigma, (k+1)\sigma, \dots, (n-1)\sigma],$$

а кусочная инверсия $R_{i,j}$ $(i < j)$ — равенством

$$R_{i,j}(\overline{\sigma}) = [0\sigma, \dots, (i-1)\sigma, j\sigma, (j-1)\sigma, \dots, i\sigma, (j+1)\sigma, \dots, (n-1)\sigma].$$

Задача сортировки перестановки $\overline{\sigma} = [0\sigma, 1\sigma, \dots, (n-1)\sigma]$ равносильна задаче нахождения величины $l_H(\sigma)$. Максимум

$$\max_{\sigma \in S_n} l_H(\sigma) = L_H(S_n)$$

характеризует вычислительную сложность задачи сортировки. В обзоре [20] величина $l_H(\sigma)$ названа *длиной элемента* $\sigma \in S_n$, а $L_H(S_n)$ — *длиной* (*или диаметром*) *группы* S_n в системе образующих H. В [21] указаны приложения этой тематики в криптографии.

Помимо задачи сортировки обычных перестановок (они называются также *линейными*), представляет интерес задача сортировки *круговых* (circular) перестановок [12, 16]. Эта задача связана с преобразованиями циркулярных геномов, к числу которых относятся геномы бактерий и митохондрий. Фактически круговая перестановка — это класс эквивалентных перестановок, отличающихся циклическим сдвигом:

$$[0\sigma, 1\sigma, \dots, (n-1)\sigma] = [1\sigma, 2\sigma, \dots, 0\sigma] = \dots = [(n-1)\sigma, 0\sigma, \dots, (n-2)\sigma].$$

Сортировка круговой перестановки — это сортировка перестановки с точностью до циклического сдвига тривиальной перестановки, т. е. «сортировка на круге», при которой первый и последний символы перестановки считаются соседними. Известно [16], что задача сортировки линейной перестановки n элементов эквивалентна задаче сортировки круговой перестановки $n+1$ элементов.

Данная работа посвящена решению задачи сортировки круговых перестановок с помощью простейших кусочных инверсий вида

$$\begin{aligned} R_0([0\sigma, 1\sigma, \dots, (n-1)\sigma]) &= [1\sigma, 0\sigma, 2\sigma, \dots, (n-1)\sigma], \\ R_1([0\sigma, 1\sigma, \dots, (n-1)\sigma]) &= [0\sigma, 2\sigma, 1\sigma, 3\sigma, \dots, (n-1)\sigma], \dots, \\ R_{n-1}([0\sigma, 1\sigma, \dots, (n-1)\sigma]) &= [(n-1)\sigma, 1\sigma, 2\sigma, \dots, (n-2)\sigma, 0\sigma]. \end{aligned}$$

Для линейных перестановок сортировка с помощью преобразований R_i (всех, кроме R_{n-1}) соответствует транспозициям пар символов, составляющих множество обычных инверсий перестановки, а для круговых перестановок — транспозициям пар символов, составляющих множество инверсий перестановки «на круге», названных в данной работе *круговыми инверсиями*. Если для любой линейной перестановки имеется

лишь одно множество инверсий, то для круговой перестановки имеется большое число множеств круговых инверсий, каждое из которых может быть использовано для сортировки круговой перестановки.

Предлагается конструктивное описание всех множеств круговых инверсий, в том числе множество круговых инверсий минимальной мощности, дающее решение задачи сортировки с помощью преобразований $R_0, \ldots, R_{n-1}$ за минимально возможное число шагов.

2. Кортежи перестановок

Пусть $\sigma \in S_n$. Заметим, что преобразование R_i представляет собой обычную транспозицию $(i, i+1)$ из группы S_n, а её применение к перестановке $\overline{\sigma}$ приводит к перестановке $\overline{R_i \cdot \sigma}$.

Для $i, j, \ldots \in \Omega_n$ обозначим через $\{i, j, \ldots\}\,\sigma$ множество $\{i\sigma, j\sigma, \ldots\}$.

Определение 1. Последовательность пар символов

$$A_\sigma = \left(\{a_0, b_0\}, \{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_k, b_k\}\right),\ k \in \mathbb{N},$$

из Ω_n назовём *кортежем подстановки* σ (или, короче, *σ-кортежем*), если найдутся $n_0, n_1, \ldots, n_{k+1} \in \Omega_n$, такие, что

$$\sigma = R_{n_0} \cdot R_{n_1} \cdot \ldots \cdot R_{n_k} \cdot C^{n_{k+1}},$$

где $C = (0, 1, \ldots, n-1)$ — полноцикловая подстановка, причём выполняются равенства

$$\{n_i, n_i + 1\}\left(R_{n_i} \cdot \ldots \cdot R_{n_0} \cdot \sigma\right) = \{a_i, b_i\},\ i = 0, 1, \ldots, k.$$

Число $k+1$ назовём *длиной кортежа* A_σ, а слово $\Theta(A_\sigma) = R_{n_k} \ldots R_{n_0}$ (в алфавите $\{R_0, \ldots, R_{n-1}\}$) — *словом, определяющим кортеж.*

Пусть $\widehat{\Theta}(A_\sigma)$ — подстановка, равная произведению $R_{n_k} \cdot \ldots \cdot R_{n_0}$. Из определения 1 следует, что для некоторого $t \in \Omega_n$ выполняется равенство

$$\widehat{\Theta}(A_\sigma) \cdot \sigma = C^t. \tag{1}$$

Будем полагать, что $\widehat{\Theta}(A_\sigma) = e$ — единичная подстановка, если $\Theta(A_\sigma)$ — пустое слово.

Заметим, что каждый σ-кортеж A_σ определяет естественный алгоритм сортировки круговой перестановки $\overline{\sigma}$. В самом деле, если $\widehat{\Theta}(A_\sigma) = R_{n_k} \cdot \ldots \cdot R_{n_0}$, то последовательному умножению σ слева на подстановки $R_{n_0}, \ldots, R_{n_k}$ соответствует последовательность транспозиций пар символов в перестановке $\overline{\sigma}$, совпадающая с последовательностью пар в A_σ.

Определение 2. Пусть A_σ — σ-кортеж и $\widetilde{A_\sigma}$ — совокупность всех пар из A_σ с учётом кратностей их вхождения. Назовём мультимножество $\widetilde{A_\sigma}$ *носителем σ-кортежа A_σ*.

В [22, теорема 1.2] доказано, что носитель любого конечного σ-кортежа может быть получен путём добавления кратных вхождений пар к подходящему σ-кортежу без кратных вхождений пар. Покажем, что класс всех носителей σ-кортежей без кратных вхождений пар состоит из множеств круговых инверсий перестановок $\overline{C^t \cdot \sigma}$, $t \in \Omega_n$.

3. Множества круговых инверсий перестановок

Определение 3. Определим процедуру, которую назовём *расстановкой меток в подстановке*. Она состоит в следующем. Сопоставим каждому символу нижней строки подстановки $\sigma \in S_n$ метку 0 или 1. При этом символу i, такому, что $i\sigma = i$, сопоставляется лишь метка 0. Если же $i\sigma \neq i$, то символу i можно сопоставить как метку 0, так и метку 1. Если x_i — метка символа $i \in \Omega_n$, то вектор $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ назовём *вектором меток* в σ. Для вектора меток $\mathbf{x}$ в σ через $[i\sigma, i]_{\mathbf{x}}$ обозначим следующее множество символов нижней строки подстановки:

$$[i\sigma, i]_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \{i\sigma, (i+1)\sigma, \ldots, i\}, & \text{если } x_i = 0 \text{ и } i\sigma \neq i, \\ \{i\sigma, (i-1)\sigma, \ldots, i\}, & \text{если } x_i = 1 \text{ и } i\sigma \neq i, \\ \{i\}, & \text{если } i\sigma = i. \end{cases} \tag{2}$$

В (2) операции сложения и вычитания выполняются по модулю n.

Поставим в соответствие вектору меток $\mathbf{x}$ в σ множество $D_\sigma(\mathbf{x})$ пар символов из Ω_n, построенное по следующему правилу: пара $\{i, j\}$ принадлежит $D_\sigma(\mathbf{x})$ в том и только в том случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $[i\sigma, i]_{\mathbf{x}} \subset [j\sigma, j]_{\mathbf{x}}$ или $[j\sigma, j]_{\mathbf{x}} \subset [i\sigma, i]_{\mathbf{x}}$;

2) $[i\sigma, i]_{\mathbf{x}} \cap [j\sigma, j]_{\mathbf{x}} \neq \varnothing$, причём $x_i \neq x_j$.

Множества $[i\sigma, i]_{\mathbf{x}}$ и $D_\sigma(\mathbf{x})$ имеют простую геометрическую интерпретацию. Расположим подстановку σ на круге с n точками (замкнув начало с концом), верхнюю строку — на внутренней части круга, нижнюю — на внешней части. Пусть метка 0 соответствует «направлению движения» символа, расположенного на внешней части круга, «на своё место» на внутренней части круга против часовой стрелки. Пусть метка 1 соответствует «направлению движения» символа по часовой стрелке (если $i\sigma = i$, то символ i «неподвижен»). Утверждение $\{i, j\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$ равносильно тому, что символы i и j при «движении» на свои места по предписанным им направлениям обязаны встретиться на внешней части круга и поменяться местами друг с другом.

Важная роль в дальнейших рассуждениях отводится вектору меток $\mathbf{0}$, состоящему из одних нулей. В этом случае $D_\sigma(\mathbf{0})$ совпадает с множеством

$$\{\{i, j\} : [i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \supseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \ \text{ или } \ [i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}\}.$$

Пусть $D_\sigma = \{D_{C^k \cdot \sigma}(\mathbf{0}) : k \in \Omega_n\}$, где C — введённая в определении 1 полноцикловая подстановка.

Утверждение 1. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ множество D_σ состоит из носителей σ-кортежей.

Доказательство. Достаточно показать, что $D_\sigma(\mathbf{0})$ является носителем σ-кортежа. Докажем это индукцией по $|D_\sigma(\mathbf{0})| = r$.

При $r = 0$ множество $D_\sigma(\mathbf{0})$ пусто. Покажем, что тогда $\sigma = C^t$ для некоторого $t \in \Omega_n$. Если для $j \in \Omega_n$ выполняется неравенство $(j+1)\sigma \neq j\sigma + 1$, то из определения 3 следует, что либо $\{j\sigma, j\sigma + 1\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$, либо $\{j\sigma + 1, (j+1)\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$, что противоречит условию $r = 0$. Отсюда следует, что $(j+1)\sigma = j\sigma + 1$ для любого $j \in \Omega_n$, что и требуется доказать.

Предположим, что при $r \leqslant m$ утверждение верно, и пусть $r = m + 1$. Покажем, что найдётся $k \in \Omega_n$, такое, что $\{k\sigma, (k+1)\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$. Пусть $\{i\sigma, j\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$. Если $\{i\sigma, (i+1)\sigma\} \notin D_\sigma(\mathbf{0})$, то $\{(i+1)\sigma, j\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$. Если $j = i + 2$, то $k = i + 1$. Если же

$j \neq i+2$, то рассмотрим пару $\{(i+1)\sigma, (i+2)\sigma\}$. Если она принадлежит $D_\sigma(\mathbf{0})$, то $k = i+1$. В противном случае $\{(i+2)\sigma, j\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$. Через конечное число аналогичных шагов получим искомую пару.

Пусть $\{i\sigma, (i+1)\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$. Из определения 3 следует, что для $\sigma_1 = (i, i+1)\cdot\sigma$ выполняется равенство $D_{\sigma_1}(\mathbf{0}) = D_\sigma(\mathbf{0})\setminus\{i\sigma, (i+1)\sigma\}$. По предположению индукции $D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$ является носителем σ_1-кортежа. Пусть $A_{\sigma_1} = (\{a_0, b_0\}, \ldots, \{a_k, b_k\})$ — σ_1-кортеж, для которого $\widetilde{A}_{\sigma_1} = D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$. Тогда $A_\sigma = (\{i\sigma, (i+1)\sigma\}, \{a_0, b_0\}, \ldots, \{a_k, b_k\})$ — σ-кортеж, для которого $\widetilde{A}_\sigma = D_\sigma(\mathbf{0})$, что и требуется доказать. ■

Следствие 1. Пусть для подстановки $\sigma \in S_n$ и $i \in \Omega_n$ пара $\{i\sigma, (i+1)\sigma\}$ принадлежит $D_\sigma(\mathbf{0})$. Тогда существует σ-кортеж A_σ, начинающийся парой $\{i\sigma, (i+1)\sigma\}$.

Заметим, что множество инверсий произвольной перестановки $[0\sigma, 1\sigma, \ldots, (n-1)\sigma]$ может быть реализовано как множество $D_\sigma(\mathbf{x})$ для подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 \\ 0\sigma & 1\sigma & \ldots & (n-1)\sigma \end{pmatrix}$$

и подходящего вектора меток $\mathbf{x}$. Таковым является, например, вектор $\mathbf{x}$, в котором метка $x_{j\sigma}$ равна 0, если символ $j\sigma$ расположен правее своего места (или находится на своём месте), и равна 1, если символ $j\sigma$ расположен левее своего места в нижней строке подстановки σ.

В связи с указанной трактовкой множества инверсий введём следующее понятие.

Определение 4. Будем называть множество $D_\sigma(\mathbf{x})$, являющееся носителем σ-кортежа, *множеством круговых инверсий перестановки* $\overline{\sigma}$.

4. Описание множеств круговых инверсий перестановок

Для подстановки $\sigma \in S_n$, вектора меток $\mathbf{x}$ в σ и $\Omega \subset \Omega_n$ введём обозначение

$$D_\sigma^\Omega(\mathbf{x}) = \{\{\alpha, \beta\} \in D_\sigma(\mathbf{x}) : \alpha, \beta \in \Omega\}.$$

Лемма 1. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — векторы меток в подстановке σ и $D_\sigma(\mathbf{x})$ является множеством круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$. Если существуют различные точки $i, j, k \in \Omega_n$, для которых выполняются условия

$$D_\sigma^{\Omega_1}(\mathbf{x}) = D_\sigma^{\Omega_1}(\mathbf{y}),\ D_\sigma^{\Omega_2}(\mathbf{x}) = D_\sigma^{\Omega_2}(\mathbf{y}),\ D_\sigma^{\Omega_3}(\mathbf{x}) \neq D_\sigma^{\Omega_3}(\mathbf{y})$$

или условия

$$D_\sigma^{\Omega_1}(\mathbf{x}) \neq D_\sigma^{\Omega_1}(\mathbf{y}),\ D_\sigma^{\Omega_2}(\mathbf{x}) \neq D_\sigma^{\Omega_2}(\mathbf{y}),\ D_\sigma^{\Omega_3}(\mathbf{x}) \neq D_\sigma^{\Omega_3}(\mathbf{y}),$$

где $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\} = \{\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}\}$, то $D_\sigma(\mathbf{y})$ не является носителем σ-кортежа.

Доказательство. Пусть A_σ — это σ-кортеж с носителем $D_\sigma(\mathbf{x})$ и (от противного) A'_σ — σ-кортеж с носителем $D_\sigma(\mathbf{y})$. Проверим, исходя из условий леммы, как расположены символы i, j, k в перестановках $\overline{\widehat{\Theta}(A_\sigma)\cdot\sigma}$ и $\overline{\widehat{\Theta}(A'_\sigma)\cdot\sigma}$. Пусть, например, $\sigma = [\ldots, i, \ldots, j, \ldots, k, \ldots]$ и $\{i, j\}, \{i, k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, но $\{j, k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$. Поскольку $D_\sigma(\mathbf{x})$ — носитель σ-кортежа, согласно (1), для некоторых $t, r \in \Omega_n$

$$\overline{C^t \cdot \widehat{\Theta}(A_\sigma)\cdot\sigma} = [\ldots, i, \ldots, j, \ldots, k, \ldots] = \overline{C^r}.$$

Если же $\{i, j\} \in D_\sigma(\mathbf{y})$, $\{i, k\} \in D_\sigma(\mathbf{y})$ и $\{j, k\} \in D_\sigma(\mathbf{y})$, то для некоторого $t' \in \Omega_n$

$$\overline{C^{t'} \cdot \widehat{\Theta}(A'_\sigma)\cdot\sigma} = [\ldots, i, \ldots, k, \ldots, j, \ldots].$$

Такая перестановка не может совпадать с $\overline{C^{r'}}$ для любого $r' \in \Omega_n$. Получили противоречие с тем, что A'_σ является σ-кортежем. Во всех других случаях доказательство аналогично. ■

Определение 5. Если для подстановки $\sigma \in S_n$, векторов меток $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ в σ и символов $i, j, k \in \Omega_n$ выполняются условия леммы 1, то будем говорить, что тройки (y_i, y_j, y_k), (x_i, x_j, x_k) *не согласованы в* σ. В противном случае тройки будем называть *согласованными в* σ.

Согласно лемме 1, тройки (x_i, x_j, x_k) и $(0, 0, 0)$ согласованы в σ в том и только в том случае, когда каждая из пар $\{i, j\}$, $\{i, k\}$, $\{j, k\}$ одновременно входит или не входит в $D_\sigma(\mathbf{x})$ и в $D_\sigma(\mathbf{0})$, или когда лишь одна из этих пар одновременно входит или не входит в $D_\sigma(\mathbf{x})$ и в $D_\sigma(\mathbf{0})$.

Лемма 2. Пусть $\sigma \in S_n$ и $\mathbf{x}$ — вектор меток в σ. Тогда $D_\sigma(\mathbf{x})$ является множеством круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$ тогда и только тогда, когда для любых различных $i, j, k \in \Omega_n$ тройки (x_i, x_j, x_k) и $(0, 0, 0)$ согласованы в σ.

Доказательство. Предположим, что $D_\sigma(\mathbf{x})$ — множество круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$, но для символов $i, j, k \in \Omega_n$ тройки (x_i, x_j, x_k) и $(0, 0, 0)$ не согласованы в σ. Тогда по лемме 1 $D_\sigma(\mathbf{0})$ не является носителем σ-кортежа, что противоречит утверждению 1. Отсюда следует необходимость. Убедимся в том, что условия являются и достаточными.

Рассмотрим такое множество $D_\sigma(\mathbf{x})$, что для любых различных $i, j, k \in \Omega_n$ тройки (x_i, x_j, x_k) и $(0, 0, 0)$ согласованы в σ. Покажем, что $D_\sigma(\mathbf{x})$ — носитель σ-кортежа. Применим метод индукции по $r = |D_\sigma(\mathbf{x})|$.

Пусть $r = 0$ и i — произвольный символ из Ω_n, причём $x_{i\sigma} = 0$. Если $x_{(i-1)\sigma} = 1$, то, согласно правилу построения множества $D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{(i-1)\sigma, i\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, что противоречит условию $r = 0$. Следовательно, $x_{(i-1)\sigma} = 0$. Аналогично получаем равенство $x_{(i-2)\sigma} = 0$, и так далее. Таким образом, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и, согласно утверждению 1, $D_\sigma(\mathbf{0})$ является носителем σ-кортежа. Ясно, что при этом $\sigma = e$ — единичная подстановка. В случае, когда $x_{i\sigma} = 1$, рассуждения аналогичны.

Предположим, что утверждение верно в случае, когда $|D_\sigma(\mathbf{x})| \leqslant r$, и σ — подстановка, для которой $|D_\sigma(\mathbf{x})| = r + 1$.

Если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, то утверждение леммы следует из утверждения 1. Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{1}$, то найдётся такой $i \in \Omega_n$, что $x_{(i-1)\sigma} = 1$, $x_{i\sigma} = 0$. При этом $\{(i-1)\sigma, i\sigma\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$. Рассмотрим все возможные случаи пересечения множеств $\{i-1, i\}$ и $\{(i-1)\sigma, i\sigma\}$:

I. $\{i-1, i\} \cap \{(i-1)\sigma, i\sigma\} = \varnothing$;

II. $(i-1)\sigma = i-1$, $i\sigma = i$;

III. $(i-1)\sigma = i$, $i\sigma = i-1$.

В случае I рассмотрим подстановку $\sigma_1 = (i, i-1) \cdot \sigma$ и тот же вектор меток $\mathbf{x}$ в σ_1, что и в σ. Непосредственно из определения множества $D_\sigma(\mathbf{x})$ следует, что в рассматриваемом случае выполняется равенство

$$D_{\sigma_1}(\mathbf{x}) = D_\sigma(\mathbf{x}) \backslash \{(i-1)\sigma, i\sigma\},$$

при этом для любых различных $i, j, k \in \Omega_n$ тройки (x_i, x_j, x_k) и $(0, 0, 0)$ согласованы для σ_1, также как и для σ. Поскольку $|D_{\sigma_1}(\mathbf{x})| = r$, по предположению индукции $D_{\sigma_1}(\mathbf{x})$ является носителем σ_1-кортежа. Следовательно, $D_\sigma(\mathbf{x})$ является носителем σ-кортежа, что и требуется доказать.

Пусть в случае II $\sigma_1 = (i, i-1)\cdot\sigma$. Рассмотрим для σ_1 вектор меток $\mathbf{x}'$, который отличается от $\mathbf{x}$ лишь тем, что $x'_i = 1$ (напомним, что $x_i = 0$). Легко видеть, что выполняется равенство

$$D_{\sigma_1}(\mathbf{x}') = D_\sigma(\mathbf{x})\backslash\{(i-1)\sigma, i\sigma\}.$$

Кроме того, очевидно, что если подмножество $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Omega_n$ не содержит i, то тройки $(x'_\alpha, x'_\beta, x'_\gamma)$ и $(0,0,0)$ остаются согласованными в подстановке σ_1, как и в σ. Проверим, что для любых $i, j, k \in \Omega_n$ тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1. С этой целью рассмотрим все возможные подслучаи случая II:

II.1. $i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i \in [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \subseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$;
II.2. $i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i \in [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$;
II.3. $i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$;
II.4. $i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$;
II.5. $i \notin [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \subseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$;
II.6. $i \notin [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$.

Рассуждения в каждом из этих случаев совершенно аналогичны. Поэтому рассмотрим, например, лишь случай II.1.

Из условий следуют включения $\{i, j\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$, $\{i, k\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$, $\{j, k\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$, а из условия согласованности троек (x_i, x_j, x_k) и $(0,0,0)$ в σ следует, что, в свою очередь, возможны лишь четыре подслучая:

II.1а) $\{i, j\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i, k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j, k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$;
II.1б) $\{i, j\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i, k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j, k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$;
II.1в) $\{i, j\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i, k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j, k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$;
II.1г) $\{i, j\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i, k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j, k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$.

Заметим прежде всего, что в условиях случая II.1 для σ_1 выполняются соотношения $\{i, j\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$, $\{i, k\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$, $\{j, k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$.

Рассмотрим подслучай II.1а. Из условий следует, что $x_j = x_k = 0$, откуда получаем соотношения $\{i, j\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i, k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j, k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. Следовательно, тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1.

Из условий подслучая II.1б следует, что $x_j = 0$, $x_k = 1$, откуда получаем соотношения $\{i, j\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i, k\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j, k\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, означающие, что тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1.

В условиях случая II.1в $x_j = 1$, $x_k = 0$, откуда следует, что $\{i, j\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i, k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j, k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. Полученные соотношения противоречат условиям, поэтому случай II.1в невозможен.

В подслучае II.1г $x_j = 1$, $x_k = 1$, откуда $\{i, j\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i, k\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j, k\} \in$ $\in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. И в этом случае тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1.

Итак, в случае II.1 для любых $i, j, k \in \Omega_n$ тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1. По предположению индукции $D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$ является носителем σ_1-кортежа, следовательно, и $D_\sigma(\mathbf{x})$ является носителем σ-кортежа.

Точно так же рассматриваются все другие подслучаи II.2–II.6. Рассмотрим случай III.

Пусть $\sigma_1 = (i-1, i)\cdot\sigma$ и $\mathbf{x}'$ — вектор меток для σ_1, который отличается от $\mathbf{x}$ лишь тем, что $x'_i = 0$ (напомним, что $x_i = 1$.) Как и в предыдущих случаях, выполняется соотношение

$$D_{\sigma_1}(\mathbf{x}') = D_\sigma(\mathbf{x})\backslash\{(i-1)\sigma, i\sigma\}.$$

Кроме того, если множество $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ не содержит i, то тройки $(x'_\alpha, x'_\beta, x'_\gamma)$ и $(0,0,0)$ остаются согласованными в σ_1, как и в σ. Проверим, что для различных $i, j, k \in \Omega_n$

тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1. С этой целью рассмотрим все возможные подслучаи случая III:

III.1. $i-1, i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i-1, i \in [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \subseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$;
III.2. $i-1, i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i-1, i \in [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$;
III.3. $i-1, i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i-1, i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$;
III.4. $i-1, i \in [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i-1, i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$;
III.5. $i-1, i \notin [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i-1, i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \subseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$;
III.6. $i-1, i \notin [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $i-1, i \notin [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$.

Рассуждения в каждом из этих случаев совершенно аналогичны. Поэтому рассмотрим, например, лишь случай III.1.

Из условий случая следуют соотношения $\{i,j\} \notin D_\sigma(\mathbf{0})$, $\{i,k\} \notin D_\sigma(\mathbf{0})$, $\{j,k\} \in \in D_\sigma(\mathbf{0})$, а из условия согласованности троек (x_i, x_j, x_k) и $(0,0,0)$ в σ следует, что возможны лишь четыре подслучая:

III.1а) $\{i,j\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i,k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j,k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$;
III.1б) $\{i,j\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i,k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j,k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$;
III.1в) $\{i,j\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i,k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j,k\} \notin D_\sigma(\mathbf{x})$;
III.1г) $\{i,j\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{i,k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$, $\{j,k\} \in D_\sigma(\mathbf{x})$.

В случае III.1 для σ_1 выполняются соотношения $\{i,j\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$, $\{i,k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$, $\{j,k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{0})$.

В случае III.1а $x_j = x_k = 1$, поэтому $\{i,j\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i,k\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j,k\} \in \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. Тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы.

В случае III.1б $x_j = 1$, $x_k = 0$, поэтому $\{i,j\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i,k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j,k\} \in \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. Эти соотношения противоречат условиям. Случай III.1б невозможен.

В случае III.1в $x_j = 0$, $x_k = 1$, поэтому $\{i,j\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i,k\} \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j,k\} \notin \notin D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. Тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы.

В случае III.1г $x_j = x_k = 0$, поэтому $\{i,j\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{i,k\} \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$, $\{j,k\} \in \in D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$. Тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы.

Точно так же рассматриваются подслучаи III.2–III.6.

Во всех возможных случаях для любых $i,j,k \in \Omega_n$ тройки (x'_i, x'_j, x'_k) и $(0,0,0)$ согласованы в σ_1. По предположению индукции $D_{\sigma_1}(\mathbf{x}')$ является носителем σ_1-кортежа, поэтому и $D_\sigma(\mathbf{x})$ является носителем σ-кортежа. ■

Рассмотрим более подробно условия, при которых $D_\sigma(\mathbf{x})$ является множеством круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$.

Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ и каждых трёх символов $i,j,k \in \Omega_n$ построим булеву функцию $f^\sigma_{i,j,k}$ от переменных x_i, x_j, x_k следующим образом:

$$f^\sigma_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j, x_k) \text{ и } (0,0,0) \text{ согласованы в } \sigma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственно из леммы 2 следует

Лемма 3. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ и вектора меток $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ в σ множество $D_\sigma(\mathbf{x})$ является множеством круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f^\sigma_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) = 1, \\ \{i,j,k\} \in \overline{\Omega}^3_n, \end{cases} \tag{3}$$

где $\overline{\Omega}^3_n$ — множество неупорядоченных троек различных символов из Ω_n.

Получим явный вид системы уравнений (3). Для этого заметим, что для любой подстановки $\sigma \in S_n$ и любых $i, j, k \in \Omega_n$ выполняется лишь одно из следующих соотношений:

1) $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \subseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$;
2) $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \subseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $k \in \{j+1, j+2, \ldots, i-1\}$;
3) $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [i\sigma, i]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}} \nsubseteq \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$;
4) $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}} \nsubseteq [i\sigma, i]_{\mathbf{0}}$;
5) ни одно из $[i\sigma, i]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma, j]_{\mathbf{0}}$, $[k\sigma, k]_{\mathbf{0}}$ не содержит другого.

Лемма 4. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ и любых различных символов $i, j, k \in \in \Omega_n$ функция $f^{\sigma}_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k)$ имеет вид

$$f^{\sigma}_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) = \begin{cases} x_ix_j \oplus x_ix_k \oplus x_jx_k \oplus x_j \oplus 1 & \text{в случае 1;} \\ x_ix_j \oplus x_ix_k \oplus 1 & \text{в случае 2;} \\ x_ix_j \oplus x_i \oplus 1 & \text{в случае 3;} \\ x_ix_j \oplus x_jx_k \oplus x_i \oplus x_k \oplus 1 & \text{в случае 4;} \\ 1 & \text{в случае 5.} \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства нужно, исходя из определения, построить $f^{\sigma}_{i,j,k}$ в каждом из случаев 1–5. Например, функцию $f^{\sigma}_{i,j,k}$ в случае 1 можно задать в виде таблицы:

(x_i, x_j, x_k)	$\{i, j\}$	$\{i, k\}$	$\{j, k\}$	Значение
000	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	1
001	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\notin D_\sigma(\mathbf{x})$	$\notin D_\sigma(\mathbf{x})$	1
010	$\notin D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	0
011	$\notin D_\sigma(\mathbf{x})$	$\notin D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	1
100	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	1
101	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\notin D_\sigma(\mathbf{x})$	0
110	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	1
111	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	$\in D_\sigma(\mathbf{x})$	1

Отсюда получаем многочлен Жегалкина:

$$f^{\sigma}_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) = x_ix_j \oplus x_ix_k \oplus x_jx_k \oplus x_j \oplus 1.$$

Точно так же поступаем и в остальных случаях. ■

Лемма 5. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ и любых различных символов $i, j, k \in \in \Omega_n$ функция $\bar{f}^{\sigma}_{i,j,k}$ является суммой форм $x_\alpha x_\beta \oplus x_\alpha$, где $\bar{f}$ — отрицание f; $\alpha, \beta \in \in \{i, j, k\}$, причём $x_\alpha x_\beta \oplus x_\alpha$ входит слагаемым в $\bar{f}^{\sigma}_{i,j,k}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $\alpha \leqslant \alpha\sigma^{-1} < \beta\sigma^{-1} < \beta$;
2) $\beta < \alpha \leqslant \alpha\sigma^{-1} < \beta\sigma^{-1}$;
3) $\alpha\sigma^{-1} < \beta\sigma^{-1} < \beta < \alpha$;
4) $\beta\sigma^{-1} < \beta < \alpha \leqslant \alpha\sigma^{-1}$.

Доказательство. Ясно, что $\{\alpha, \beta\} \in D_\sigma(\mathbf{0})$ и $[\alpha\sigma, \alpha]_{\mathbf{0}} \subseteq [\beta\sigma, \beta]_{\mathbf{0}}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий 1–4. Остаётся проверить, что функция $\bar{f}^{\sigma}_{i,j,k}$, составленная по правилу, указанному в формулировке, совпадает с функцией $\bar{f}^{\sigma}_{i,j,k}$, указанной в лемме 4. ■

Вид системы уравнений (3) можно упростить. Для этого рассмотрим следующую систему, состоящую из $|D_\sigma(\mathbf{0})|$ уравнений:

$$\begin{cases} x_i\bar{x}_j = 0, \\ \{i,j\} \in D_\sigma(\mathbf{0}),\ [i\sigma,i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma,j]_{\mathbf{0}}. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ и вектора меток $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ в σ множество $D_\sigma(\mathbf{x})$ является множеством круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений (4).

Доказательство. Покажем, что системы уравнений (3) и (4) равносильны.

Из лемм 4 и 5 следует, что любое уравнение системы (3) является суммой некоторых уравнений системы (4). Покажем, что каждое уравнение системы (4) содержится среди уравнений системы (3). Для этого, согласно лемме 4, надо показать, что если $[i\sigma,i]_{\mathbf{0}} \subseteq [j\sigma,j]_{\mathbf{0}}$, то найдётся $k \in \Omega_n$, такое, что множество $[k\sigma,k]_{\mathbf{0}}$ не содержит множеств $[i\sigma,i]_{\mathbf{0}}, [j\sigma,j]_{\mathbf{0}}$ и не содержится в них.

Пусть $i\sigma^{-1} = r$, $j\sigma^{-1} = s$, $\Delta_1 = \{i{+}1, i{+}2, \ldots, s\}$, $\Delta_2 = \{(i{+}1)\sigma, (i{+}2)\sigma, \ldots, (s{-}1)\sigma\}$.

Если $s = i+1$, то $\Delta_1 = \{i+1\}$, $\Delta_2 = \varnothing$. Поскольку $|\Delta_1| > |\Delta_2|$, найдётся $k \in \Delta_1 \setminus \Delta_2$. Легко проверить, что для такого k множество $[k\sigma,k]_{\mathbf{0}}$ не содержит множеств $[i\sigma,i]_{\mathbf{0}}$, $[j\sigma,j]_{\mathbf{0}}$ и не содержится в них. ■

Теорема 2. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ класс носителей σ-кортежей без кратных пар совпадает с объединением классов всех множеств круговых инверсий перестановок $\overline{C^k \cdot \sigma}$ по всем $k \in \Omega_n$.

Доказательство. Покажем, что для любого σ-кортежа A_σ без кратных пар найдётся $k \in \Omega_n$ и решение $\mathbf{x}$ системы уравнений (4) применительно к подстановке $C^k \cdot \sigma$, такое, что $\widetilde{A}_\sigma = D_{C^k\cdot\sigma}(\mathbf{x})$. Используем метод индукции по $r = |\widetilde{A}_\sigma|$.

При $r = 0$ носитель $\widetilde{A}_\sigma$ — пустое множество и, следовательно, $\Theta(A_\sigma)$ — пустое слово, а $\widehat{\Theta}(A_\sigma)$ — единичная подстановка. Тогда, согласно (1), $\sigma = C^t$ и $\widetilde{A}_\sigma = D_\sigma(\mathbf{0})$. Предположим, что утверждение верно, если $r \leqslant m$.

Пусть σ — подстановка и $A_\sigma = (\{\alpha,\beta\},\ldots)$ — её кортеж с носителем $\widetilde{A}_\sigma$, $|\widetilde{A}_\sigma| = m+1$. Пусть $i\sigma = \alpha$, $(i+1)\sigma = \beta$ и $\sigma_1 = (i, i+1)\cdot\sigma$. Тогда $\widetilde{A}_{\sigma_1} = \widetilde{A}_\sigma \setminus \{\alpha,\beta\}$ является носителем σ_1-кортежа и по предположению индукции найдётся $s \in \Omega_n$, для которого $\widetilde{A}_{\sigma_1} = D_{C^s\cdot\sigma_1}(\mathbf{x})$, причём $\mathbf{x}$ является решением системы уравнений (4) применительно к подстановке $\sigma_2 = C^s \cdot \sigma_1$. Пусть $j\sigma_2 = \beta$, $(j+1)\sigma_2 = \alpha$ и $\Delta = \{j, j+1\} \cap \{\alpha,\beta\}$. Рассмотрим ряд случаев.

I. Пусть $\Delta = \varnothing$. Возможны подслучаи: I.1. $\{\alpha,\beta\} \in D_{\sigma_2}(\mathbf{0})$ и I.2. $\{\alpha,\beta\} \notin D_{\sigma_2}(\mathbf{0})$.

Из условия случая I.1 следует, что система уравнений (4) применительно к σ_2 содержит уравнение $x_\beta\bar{x}_\alpha = 0$, причём x_α и x_β удовлетворяют этому уравнению. Поэтому могут иметь место следующие три случая:

I.1а) $x_\alpha = x_\beta = 1$; I.1б) $x_\alpha = 1$, $x_\beta = 0$; I.1в) $x_\alpha = x_\beta = 0$.

На самом деле, случаи I.1а и I.1в невозможны, поскольку в их условиях $\{\alpha,\beta\} \in D_{\sigma_2}(\mathbf{x})$, что противоречит тому, что A_σ не содержит кратных пар. Остаётся случай I.1б. В этом случае для подстановки $\sigma_2' = (j, j+1)\cdot\sigma_2$ и вектора меток $\mathbf{x}$ выполняется равенство

$$D_{\sigma_2'}(\mathbf{x}) = D_{\sigma_2}(\mathbf{x}) \cup \{\alpha,\beta\}, \tag{5}$$

причём $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений (4) применительно к подстановке $\sigma_2' = C^s \cdot \sigma$. Последнее следует из того, что в рассматриваемых условиях система (4)

применительно к σ_2 отличается от системы (4) применительно к σ_2' лишь тем, что первая содержит уравнение $x_\beta \bar{x}_\alpha = 0$, а вторая нет. Поэтому, если из системы изъять одно уравнение, то решение исходной системы останется решением и меньшей системы. Мы доказали утверждение в случае I.1.

В случае I.2 из условия $\{\alpha, \beta\} \notin D_{\sigma_2}(\mathbf{x})$ следует, что возможны лишь два варианта:
I.2а) $x_\alpha = x_\beta = 0$; I.2б) $x_\alpha = x_\beta = 1$.

В случае I.2а для подстановки $\sigma_2' = C^s \cdot \sigma$ выполняется равенство (5), причём система уравнений (4) применительно к σ_2 отличается от системы уравнений (4) применительно к σ_2' лишь тем, что к первой системе добавляется уравнение $x_\beta \bar{x}_\alpha = 0$, которому x_α и x_β удовлетворяют. В этом случае утверждение также доказано.

Совершенно аналогично обстоит дело и в случае I.2б. При этом рассматриваемые значения $x_\alpha = x_\beta = 1$ также удовлетворяют уравнению $x_\beta \bar{x}_\alpha = 0$.

II. Пусть $|\Delta| = 1$, причём $j = \beta,\ (j+1)\sigma_2 \neq j+1$.

В этом случае $\{\alpha, \beta\} \in D_{\sigma_2}(\mathbf{0})$ и $\{\alpha, \beta\} \notin D_{\sigma_2}(\mathbf{x})$. Легко проверить, что этим условиям удовлетворяют лишь $x_\alpha = 1$ и $x_\beta = 0$. Требуемое утверждение следует из тех же рассуждений, что и в случае I.1.

III. Пусть $|\Delta| = 1$, причём $j+1 = \alpha,\ j\sigma_2 \neq j$.

В этом случае $x_\alpha = 0$ и, поскольку $\{\alpha, \beta\} \notin D_{\sigma_2}(\mathbf{x})$, то и $x_\beta = 0$. Отсюда следует, что $\{\alpha, \beta\} \notin D_{\sigma_2}(\mathbf{0})$. Рассмотрим подстановку $\sigma_2' = (j, j+1) \cdot \sigma_2$ и вектор меток $\mathbf{x}'$, который отличается от $\mathbf{x}$ лишь тем, что $x'_\alpha = 1$ (напомним, что $x'_\alpha = 0$).

Заметим, что системы уравнений (4) применительно к подстановкам σ_2 и σ_2' имеют единственное отличие: если $x_\alpha \bar{x}_{\gamma_1} = 0, \ldots, x_\alpha \bar{x}_{\gamma_k} = 0$ — все уравнения системы для σ_2, содержащие x_α, то $\bar{x}_\alpha x_\gamma = 0$, $\gamma \in \Omega_n \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \beta\}$ — все уравнения системы для σ_2', содержащие x_α. Поэтому если $x_\alpha = x_\beta = 0$ удовлетворяют системе для σ_2, то $x_\alpha = 1$, $x_\beta = 0$ удовлетворяют системе для σ_2'. Отсюда следует утверждение в случае III.

IV. $\beta = j+1$, $\alpha = j$.

Очевидно, что в этом случае $x_\alpha = x_\beta$, так как иначе $\{\alpha, \beta\} \in D_{\sigma_2}(\mathbf{x})$.

В рассматриваемом случае в подстановке $\sigma_2' = (j, j+1) \cdot \sigma_2$ символы α и β расположены «на своих местах». В силу того, что множество $\widetilde{A}_{\sigma_2} = \widetilde{A}_\sigma \setminus \{\alpha, \beta\}$ не содержит кратных пар и является носителем σ_2-кортежа, символы α и β вновь могут оказаться «на своих местах» в подстановке $\overline{\Theta}(A_{\sigma_2}) \cdot \sigma_2 = C^r$, $r \in \Omega_n$, лишь тогда, когда выполняется равенство

$$\{\gamma \in \Omega_n : \{\alpha, \gamma\} \in \widetilde{A}_\sigma\} \cup \{\delta \in \Omega_n : \{\beta, \delta\} \in \widetilde{A}_\sigma\} = \Omega_n.$$

Заметим также, что при этом ни для одного $k \in \Omega_n$ невозможно одновременное включение $\{\alpha, k\}, \{\beta, k\} \in \widetilde{A}_\sigma$. В самом деле, если $x_\alpha = x_\beta = 0$, то $\{\alpha, k\}, \{\beta, k\} \in \widetilde{A}_\sigma$ лишь тогда, когда $x_k = 1$, причём в системе уравнений (4) применительно к σ_2 содержится уравнение $x_k \bar{x}_\alpha = 0$. Но это невозможно, так как x_k и x_α не удовлетворяют этому уравнению, что противоречит предположению индукции. К аналогичному выводу приходим и в случае, когда $x_\alpha = x_\beta = 1$.

Пусть $x_\alpha = x_\beta = 0$. Рассмотрим подстановку $\sigma_3 = C \cdot \sigma_2$ и её вектор меток $\mathbf{x}'$, который отличается от $\mathbf{x}$ лишь тем, что символы k, такие, что $k\sigma_2 = k$ (и поэтому имеющие метки $x_k = 0$), получают метки $x'_k = 1$. Заметим, что в рассматриваемых условиях не существует t, такого, что $(t+1)\sigma_2 = t$, причём $x_t = 1$. В этом случае получаем включения $\{\alpha, t\}, \{\beta, t\} \in D_{\sigma_2}(\mathbf{x})$, которые противоречат сказанному выше. Пользуясь теперь определением множества $D_\sigma(\mathbf{x})$, убеждаемся в справедливости равенства $D_{\sigma_2}(\mathbf{x}) = D_{\sigma_3}(\mathbf{x}')$. Убедимся также в том, что вектор меток $\mathbf{x}'$ удовлетворяет системе уравнений (4) применительно к подстановке σ_3.

Рассмотрим пары символов $t, k \in \Omega_n$, такие, что $t\sigma_2 \neq t$, $k\sigma_2 \neq k$. Тогда $x'_t = x_t$, $x'_k = x_k$ и

$$\{t, k\} \in D_{\sigma_2}(\mathbf{0}) \Leftrightarrow \{t, k\} \in D_{\sigma_3}(\mathbf{0}).$$

Поэтому множества уравнений систем (4) для σ_2 и σ_3, в которых встречаются лишь такие переменные x_t и x_k, одинаковы. Пусть теперь для некоторого $k \in \Omega_n$ выполняется равенство $k\sigma_2 = k$. Если уравнение системы (4) для σ_2 (для σ_3) содержит переменную x_k, то это уравнение имеет вид $x_k\bar{x}_t = 0$ (соответственно $\bar{x}_k x_s = 0$). Поэтому если $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе (4) для σ_2, то $\mathbf{x}'$ удовлетворяет системе (4) для σ_3.

Рассмотрим подстановку $\sigma'_3 = (j, j+1)\cdot\sigma_3$ и её вектор меток $\mathbf{x}''$, который отличается от $\mathbf{x}'$ лишь тем, что $x''_j = 1$. Легко убедиться в том, что выполняются равенства

$$D_{\sigma'_3}(\mathbf{x}'') = D_{\sigma_3}(\mathbf{x}') \cup \{\alpha, \beta\} = D_{\sigma_2}(\mathbf{x}) \cup \{\alpha, \beta\} = \widetilde{A}_\sigma.$$

Кроме того, $\mathbf{x}''$ удовлетворяет системе (4) применительно к подстановке σ'_3. Это следует из того, что если уравнение системы для σ_3 содержит переменную x_j, то это уравнение имеет вид $x_j\bar{x}_t = 0$. Если же уравнение системы для σ'_3 содержит переменную x_j, то это уравнение имеет вид $\bar{x}_j x_k = 0$.

Рассмотренные случаи I–IV исчерпывают все возможные варианты расположения символов α и β в нижней строке подстановки σ_2. В каждом из этих случаев мы реализовали множество $\widetilde{A}_\sigma$ как множество круговых инверсий $D_{C^k\cdot\sigma}(\mathbf{x})$ нижней строки подстановки $C^k \cdot \sigma$ для подходящего $k \in \Omega_n$. На этом доказательство теоремы закончено. ■

Выясним вопрос о том, сколько различных множеств круговых инверсий даёт система уравнений (4). Непосредственно из определения множества $D_\sigma(\mathbf{x})$ следует

Лемма 6. Справедливо равенство

$$D_\sigma(\mathbf{x}) = \{\{i, j\} : \text{либо} \{i, j\} \in D_\sigma(\mathbf{0}) \text{ и } x_i = x_j, \text{ либо } \{i, j\} \notin D_\sigma(\mathbf{0}) \text{ и } x_i = \bar{x}_j\}.$$

Лемма 7. Если $D_\sigma(\mathbf{x_1}) = D_\sigma(\mathbf{x_2})$, где $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ — решения системы уравнений (4), то $\mathbf{x_1} \oplus \mathbf{x_2} = \mathbf{1}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что если $\mathbf{x_1} = (\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$ и $\mathbf{x_2} = (\ldots, x_i, \ldots, \bar{x}_j, \ldots)$, то $D_\sigma(\mathbf{x_1}) \neq D_\sigma(\mathbf{x_2})$. Последнее следует из леммы 6. ■

Заметим, что $x_i^{(0)}$ и $x_j^{(0)}$ из $\{0, 1\}$ удовлетворяют уравнению $x_i\bar{x}_j = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i^{(0)} \leqslant x_j^{(0)}$. Система уравнений (4) индуцирует бинарное отношение ε на Ω_n: $i\varepsilon j \Leftrightarrow$ уравнение $x_i\bar{x}_j = 0$ входит в (4). Пусть Γ_σ — ориентированный граф отношения ε, $P(\sigma)$ — число решений системы (4), $K(\sigma)$ — число компонент связности графа Γ_σ и $N(\sigma)$ — число множеств круговых инверсий $D_\sigma(\mathbf{x})$ перестановки $\overline{\sigma}$, для которых $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе уравнений (4).

Теорема 3. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняется равенство

$$N(\sigma) = \begin{cases} P(\sigma), & \text{если } \exists i \in \Omega_n (i\sigma = i), \\ P(\sigma) - 2^{K(\sigma)-1}, & \text{если } \forall i \in \Omega_n (i\sigma \neq i). \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Пары чисел $x_i^{(0)}, x_j^{(0)}$ и $\bar{x}_i^{(0)}, \bar{x}_j^{(0)}$ из $\{0, 1\}$ одновременно удовлетворяют уравнению $x_i\bar{x}_j = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i^{(0)} = x_j^{(0)}$. Поэтому если решения $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ системы уравнений (4) удовлетворяют условию $\mathbf{x_1} \oplus \mathbf{x_2} = \mathbf{1}$, то координаты вектора $\mathbf{x_k}$, $k = 1, 2$, входящие в компоненту связности графа Γ_σ, совпадают

друг с другом. Отсюда ввиду того, что метка единичного цикла может быть равной лишь 0, а также из лемм 6 и 7 следует (6). ■

Теорема 3 позволяет вычислять общее число носителей кортежей без кратных пар для некоторых подстановок. Пусть, например, $\sigma = C^k$, $k \in \Omega_n$. Для этой подстановки система (4) состоит из пустого множества уравнений и, следовательно, любой вектор $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ является её решением. Тогда, согласно теореме 2, $P(C^k) = 2^n$, $K(C^k) = n$ и, с учётом леммы 7, число множеств круговых инверсий перестановки $\overline{\sigma}$ равно 2^{n-1}. Теперь заметим, что для любого $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ и любых i и j из $\Omega_n \setminus \{0\}$ выполняется равенство $D_{C^i}(\mathbf{x}) = D_{C^j}(\mathbf{x})$. Отсюда и из теоремы 3 следует, что число носителей кортежей без кратных пар подстановки σ равно 2^{n-1}.

5. Использование множеств круговых инверсий в сортировке перестановок

Как отмечалось выше, любое множество круговых инверсий можно использовать для сортировки круговой перестановки σ, поскольку, согласно теореме 2, каждое из этих множеств является носителем σ-кортежа. Если A_σ=$(\{a_0, b_0\}, \{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_k, b_k\})$ — σ-кортеж с носителем $D_{C^t\sigma}(\mathbf{x})$, то порядок следования пар в A_σ указывает порядок применения к перестановке $\overline{\sigma}$ преобразований R_i, $i = 1, \ldots, k+1$, приводящих $\overline{\sigma}$ к перестановке $\overline{C^s}$, $s \in \Omega_n$.

Алгоритм 1. Если $\{a_0, b_0\} = \{j\sigma, (j+1)\sigma\}$, то первый шаг сортировки соответствует переходу от $\overline{\sigma}$ к $\overline{\sigma_1} = \overline{R_j \cdot \sigma}$. Если $\{a_1, b_1\} = \{l\sigma_1, (l+1)\sigma_1\}$, то второй шаг сортировки соответствует переходу к $\overline{\sigma_2} = \overline{R_l \cdot \sigma}$ и так далее.

Если $\sigma \in S_n$, то минимальное число шагов сортировки перестановки $\overline{\sigma}$ в алгоритме 1 равно

$$\Delta_{\min}(\sigma) = \min_{t \in \Omega_n} \min_{\mathbf{x}-\text{решение}(4)} |D_{C^t\sigma}(\mathbf{x})|.$$

В [23, теорема 2.1] доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ имеет место равенство

$$\Delta_{\min}(\sigma) = \min_{t \in \Omega_n} |D_{C^t\sigma}(\mathbf{0})|.$$

Из этой теоремы следует, что для целей сортировки круговой перестановки σ достаточно использовать множества $D_{C^t\sigma}(\mathbf{0})$. Согласно утверждению 1, любой σ-кортеж без кратных пар может быть построен с помощью следующего алгоритма, уточняющего алгоритм 1.

Алгоритм 2. Пусть $D = D_{C^t\sigma}(\mathbf{0})$.

1) Находим любой символ $i_1 \in \Omega_n$, такой, что $\{i_1\sigma, (i_1+1)\sigma\} \in D$. Тогда $\{i_1\sigma, (i_1+1)\sigma\}$ — первая пара σ-кортежа.
2) Пусть $\sigma_1 = R_{i_1} \cdot \sigma$. Находим любой символ $i_2 \in \Omega_n$, такой, что $\{i_2\sigma_1, (i_2+1)\,\sigma_1\} \in D \setminus \{i_1\sigma, (i_1+1)\sigma\}$. Тогда $\{i_2\sigma_1, (i_2+1)\,\sigma_1\}$ — вторая пара σ-кортежа.
3) Применяя подобные шаги к подстановкам $\sigma_2 = R_{i_2} \cdot \sigma_1$, $\sigma_3 = R_{i_3} \cdot \sigma_2$ и т. д., получаем σ-кортеж.

Максимальное значение $\Delta_{\min}(\sigma)$ указывается в следующем утверждении.

Теорема 5.

$$\max_{\sigma \in S_n} \Delta_{\min}(\sigma) = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]. \tag{7}$$

Доказательство. Поставим в соответствие подстановке $\sigma \in S_n$ ориентированный граф Γ_σ с множеством вершин Ω_n, в котором имеется ребро, направленное из i

в j, в том и только в том случае, когда $[i\sigma, i]_{\overline{0}} \subset [j\sigma, j]_{\overline{0}}$. Граф Γ_σ обладает свойством транзитивности (если $(a,b),(b,c)$ — рёбра графа, то граф содержит также ребро (a,c)), а также свойством ограниченности полустепеней исхода и захода для всех вершин. В самом деле, эти полустепени для каждой вершины не превосходят $[(n-1)/2]$. Равенство (7) следует из [24, утверждение 9]. ■

Указанный максимум достигается на подстановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1\dots & n-1 \\ n-1 & n-2\dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в [22] получена также формула, позволяющая оценить трудоёмкость вычисления $\Delta_{\min}(\sigma)$ для произвольной подстановки $\sigma \in S_n$. Для формулировки результата введём следующие обозначения. Пусть $\Delta_i^{(\sigma)}$ — наименьший неотрицательный вычет числа $i - i\sigma$ по модулю n и $\Phi(x)$ — действительная функция, определённая формулой

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0, \\ 1, \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 6 [22, теорема 5.2]. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$

$$\Delta_{\min}(\sigma) = \min_{t\in\Omega_n} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi\left(\Delta_{j+k}^{(C^t\cdot\sigma)} - \Delta_j^{(C^t\cdot\sigma)} - k - 1\right).$$

Из приведённой формулы следует, что минимальное число шагов сортировки круговой перестановки n чисел с помощью преобразований R_i, $i = 0,\dots n-1$, можно вычислить за $\mathrm{O}(n^3)$ операций типа сложения и сравнения чисел.

Заметим, что для сортировки круговой перестановки $\overline{\sigma}$ может быть использовано множество (обычных) инверсий перестановок $\overline{C^t\cdot\sigma}$, $t \in \Omega_n$. Выясним, насколько эффективнее для целей сортировки может быть использование множества круговых инверсий.

Пусть $I_{\overline{\sigma}}$ — множество инверсий перестановки $\overline{\sigma}$ и

$$\nabla_{\min}(\sigma) = \min_{t\in\Omega_n} |I_{\overline{C^t\cdot\sigma}}|.$$

Очевидно, что справедливо неравенство

$$\Delta_{\min}(\sigma) \leqslant \nabla_{\min}(\sigma).$$

Для некоторых перестановок, например для $\overline{\sigma} = [n-1, n-2, \dots, 1, 0]$, величины $\Delta_{\min}(\sigma)$ и $\nabla_{\min}(\sigma)$ совпадают. В этом случае множества круговых инверсий не дают выигрыша в сортировке круговой перестановки. Но имеются перестановки, для которых $\Delta_{\min}(\sigma)$ существенно меньше, чем $\nabla_{\min}(\sigma)$. Например, для подстановки $\sigma \in S_n$, n — чётно, такой, что

$$i\sigma = \begin{cases} i, & \text{если } i \text{ чётно}, \\ (i-2) \bmod n, & \text{если } i \text{ нечётно}, \end{cases}$$

имеет место равенство

$$\Delta_{\min}(\sigma) = n/2,$$

в то время как

$$\nabla_{\min}(\sigma) = 3\,(n/2 - 1)\,.$$

Для таких перестановок использование круговых инверсий даёт значительный эффект.

Сравним полученные результаты с известными характеристиками алгоритмов сортировки перестановок с помощью различных классов преобразований, указанных в начале работы.

В обзорной работе [8] сформулированы 57 комбинаторных проблем, относящихся к задаче сортировки генотипов. Приводится ряд результатов, оценивающих эффективность сортировки.

Так, минимальное число $d_r(\overline{\sigma})$ кусочных инверсий, необходимое для сортировки перестановки $\overline{\sigma}$, удовлетворяет неравенству

$$d_r(\overline{\sigma}) \geqslant b(\overline{\sigma})/2,$$

где $b(\overline{\sigma})$ — число точек разрыва в перестановке $\overline{\sigma}$. Точка разрыва (breakpoint) перестановки определяется следующим образом. Пусть $i \sim j$, если $|i - j| = 1$. Расширим перестановку $\overline{\sigma} = [1\sigma, \ldots, n\sigma]$, добавив $0\sigma = 0$, $(n+1)\sigma = n+1$. Точки $i\sigma, (i+1)\sigma$, $0 \leqslant i \leqslant n$, называются несмежными, если $i \not\sim j$. При этом $i+1$ — точка разрыва.

В [3] получена оценка величины $d_t(\overline{\sigma})$:

$$d_t(\overline{\sigma}) \leqslant n + 1 - c(\overline{\sigma}),$$

где $c(\overline{\sigma})$ — число знакопеременных циклов в декомпозиции графа $G(\overline{\sigma})$, определяемого следующим образом. Если $\overline{\sigma} = [1\sigma, \ldots, n\sigma]$ и $0\sigma = 0$, $(n+1)\sigma = n+1$ — дополнительные точки, то $G(\overline{\sigma})$ — двухцветный ориентированный граф, чёрными рёбрами которого служат пары $((i-1)\sigma, i\sigma)$, где $1 \leqslant i \leqslant n+1$; i — точка разрыва, а серыми рёбрами — пары $(i, i+1)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, где $i, i+1$ — не соседние точки в $\overline{\sigma}$. Известно, что граф $G(\overline{\sigma})$ единственным образом раскладывается в объединение непересекающихся максимальных знакопеременных циклов, в которых цвет рёбер чередуется.

В [3] получена оценка

$$d_r(\overline{\sigma}) \geqslant b(\overline{\sigma}) - c(\overline{\sigma}).$$

В [6] показано, что

$$d_r(\overline{\sigma}) \geqslant b(\overline{\sigma})/3 \quad \text{и} \quad d_t(\overline{\sigma}) \geqslant (n + 1 - t_{\mathrm{odd}}(\overline{\sigma}))/2,$$

где $t_{\mathrm{odd}}(\overline{\sigma})$ — число знакопеременных циклов графа $G(\overline{\sigma})$, содержащих чётное число чёрных рёбер.

В [14] исследуется эффективность сортировки круговых перестановок с помощью кусочных транспозиций. Используются методы теории групп подстановок. Предлагается алгоритм сортировки произвольной перестановки $\overline{\sigma}$, имеющий сложность $\mathrm{O}(\delta n)$, где $\delta = 0{,}5\,(n - f(\sigma))$, а $f(\sigma)$ — число циклов подстановки σ.

В [8] приведены оценки диаметра $L_r(S_n)$ $(L_t(S_n))$ группы S_n в системе образующих, состоящей их кусочных инверсий (кусочных транспозиций). Диаметр $L_r(S_n)$ удовлетворяет неравенству

$$L_r(S_n) \leqslant n - 1.$$

Несколько позже в [6] было показано, что на самом деле имеет место равенство

$$L_r(S_n) = n - 1,$$

причём единственной перестановкой, требующей такого числа шагов сортировки, является перестановка Голлана γ_n, определяемая рекуррентной формулой

$$\gamma_{n+1} = \begin{cases} [1], \text{если } n = 0, \\ [\gamma_n(1), \gamma_n(2), \ldots, \gamma_n(n-1), n+1, \gamma_n(n),], \text{ если } n \text{ чётно}, \\ [\gamma_n(1), \gamma_n(2), \ldots, \gamma_n(n-2), n+1, \gamma_n(n-1), \gamma_n(n)], \text{ если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

В [3] получены оценки диаметра $L_t(S_n)$:

$$\frac{n}{2} \leqslant L_t(S_n) \leqslant \frac{3n}{4}.$$

В [13] эти оценки уточнены для $n \geqslant 9$:

$$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \leqslant L_t(S_n) \leqslant \left\lfloor \frac{2n-2}{3} \right\rfloor.$$

В [15] определяется число шагов сортировки перестановки с помощью кусочных транспозиций и кусочных инверсий. Доказано, что для любой перестановки требуется не более $\lfloor 2n/3 \rfloor$ шагов, причём для некоторых перестановок требуется не менее $\lfloor n/2 \rfloor$ шагов.

В [9] оценивается сложность сортировки с помощью ограниченного множества кусочных транспозиций типа $T(i, j, k)$, где $k \leqslant i+3$; вычислено точное значение диаметра:

$$L(S_n) = \left\lceil \frac{n(n-1)}{4} \right\rceil.$$

В [20] приведён обзор результатов по оценке диаметра $L_H(S_n)$ для различных систем образующих H. К сожалению, авторам этого обзора не были известны публикации по тематике перестройки генотипов, и оценки диаметра группы S_n, полученные по этой тематике, в обзор не вошли. Следует отметить один важный параметр, характеризующий эффективность системы образующих группы подстановок, на который обращается внимание в [20]. Речь идёт о мере информационной избыточности $\mu(G; H)$ системы образующих H группы подстановок G, равной произведению $L_H(S_n)\,|H|$. Этот параметр введён в 1968 г. В. М. Глушковым [25] в связи с абстрактно-автоматным подходом к понятию полноты системы операций в ЭВМ. Обзор результатов по этой тематике содержится в [26]. Параметр $\mu(G; H)$ является мерой эффективности системы образующих H: чем меньше $\mu(G; H)$, тем более эффективна система H.

Как отмечалось выше, оценка эффективности использования тех или иных преобразований в сортировке генотипов равносильна оценке эффективности соответствующих систем образующих группы S_n. Поэтому параметр $\mu(G; H)$ может служить и мерой эффективности классов преобразований, используемых в алгоритмах сортировки генотипов. В реальной жизни вряд ли можно говорить о том, что в некоторых условиях используются лишь определённые системы образующих H. Поэтому, с одной стороны, не вполне корректно сравнивать по эффективности различные классы преобразований, а с другой стороны, всё же интересен вопрос о том, какие преобразования потенциально быстрее приводят один генотип в другой.

С этой точки зрения полезно сравнивать по величине не только диаметры $L_H(S_n)$, но и меры информационной избыточности $\mu(G; H)$ различных систем образующих H.

Заметим, что основные классы преобразований генотипов, такие, как классы частичных транспозиций или другие классы более общих преобразований, рассматриваемые в работах по молекулярной биологии, соответствуют системам образующих группы S_n большой мощности. Для них величина $\mu(G;H)$ превышает $\mathrm{O}(n^3)$.

Наименьшее число преобразований содержит класс частичных инверсий. Он состоит лишь из $n(n-1)/2$ элементов. Для этой системы образующих H мера информационной избыточности равна $n(n-1)^2/2$. Преобразованиям, связанным с множествами круговых инверсий, отвечает система H' из n элементов. Для неё (при чётном n) мера информационной избыточности равна $n^2(n-2)/4$. Как видим, последние две величины сравнимы по порядку. Отметим, что величина $\mu(S_n;H)$ не может быть по порядку меньше, чем $\mathrm{O}(n^2)$. Примеры систем образующих, для которых $\mu(S_n;H) = \mathrm{O}(n^2)$, приведены в [20]. Среди известных систем образующих группы S_n наименьшей мерой информационной избыточности обладает система $H = \{(0,1),(0,1,2),\ldots,(0,1,\ldots n)\}$, для которой $\mu(S_n;H) = (n-1)^2$ [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dobzhansky T. and Sturtevant A. H.* Inversions in the chromosomes of drosophila pseudoobscura // Genetics. 1938. Vol. 23. P. 28–64.
2. *Aigner M. and West D. B.* Sorting by insertion of leading elements // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1987. Vol. 45. No. 2. P. 306–309.
3. *Bafna V. and Pevzner P. A.* Genome rearrangement and sorting by reversals // SIAM J. Comput. 1996. Vol. 25. No. 2. P. 272–289.
4. *Bafna V. and Pevzner P. A.* Sorting by transpositions // SIAM J. Discr. Math. 1998. Vol. 11. No. 2. P. 224–240.
5. *Christie D. A.* Sorting permutations by block-interchanges // Inform. Proc. Lett. 1996. Vol. 60. No.4. P. 165–169.
6. *Christie D. A.* Genome rearrangement problems. Submitted for the degree of Doctor of Philosophy to the University of Glasgow. Glasgow, 1998. 165 p.
7. *Kececioglu J. D. and Ravi R.* Of mice and men: algorithms for evolutionary distances between genomes with translocation // Proc. 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia, PA, USA, 1996. P. 604–613.
8. *Pevzner P. A. and Waterman M. S.* Open combinatorial problems in computational molecular biology // Proc. 3rd Israel Symposium on the Theory of Computing and Systems. 1995. P. 158–173.
9. *Heath L. S. and Vergara J. P. C.* Sorting by short block-moves // Technical Report TR-98-03. Virginia Tech. Department of Computer Science, Feb. 1998.
10. *Caprara A.* Sorting permutations by reversals and Eulerian cycle decompositions // SIAM J. Discr. Math. 1999. No. 12. P. 91–110.
11. *Eriksson H., Eriksson K., Karlander J., et al.* Sorting a bridge hand // Discr. Math. 2001. Vol. 241. No. 1. P. 289–300.
12. *Dias U. and Meidanis J.* Sorting by prefix transpositions // String Processing and Information Retrieval. Springer, 2002. P. 65–76.
13. *Eriksen N.* Combinatorial methods in comparative genomics. Doctoral dissertation. Royal Institute of Technology. Stockholm, 2003. 138 p.
14. *Lin Y. C., Lu C. L., Chang H.-Y., and Tang C. Y.* An efficient algorithm for sorting by block-interchanges and its application to the evolution of Vibrio Species // J. Computational Biology. 2005. Vol. 12. No. 1. P. 102–112.

15. *Cranston D., Sudborough I. H., and West D. B.* Short proofs for cat-and-paste sorting of permutations // Discr. Math. 2007. Vol. 307. Iss. 22. P. 2866–2870.
16. *Hartman T. and Shamir R.* A simpler and faster 1.5-approximation algorithm for sorting by transpositions // Information and Computation. 2006. Vol. 204. P. 275–290.
17. *Feng J. and Zhu D.* Faster algorithms for sorting by transpositions and sorting by block interchanges // ACM Transactions on Algorithms (TALG). 2007. Vol. 3. No. 3. Article No. 25.
18. *Bulteau L., Fertin G., and Rusu I.* Sorting by transpositions is difficult // SIAM J. Discr. Math. 2012. Vol. 26. No. 12. P. 1148–1180.
19. *Labarre A.* Lower bounding edit distances between permutations // SIAM J. Discr. Math. 2013. Vol. 27. No. 3. P. 1410–1428.
20. *Глухов М. М., Зубов А. Ю.* О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. М.: Наука, 1999. С. 5–32.
21. *Глухов М. М., Погорелов Б. А.* О некоторых применениях групп в криптографии // Материалы конф. «Математика и безопасность информационных технологий», МГУ, 28–29 октября 2004 г. М.: МЦНМО, 2005. С. 19–31.
22. *Зубов А. Ю.* О диаметре группы S_N относительно системы образующих, состоящей из полного цикла и транспозиции // Труды по дискретной математике. Т. 2. М.: ТВП, 1998. С. 112–150.
23. *Зубов А. Ю.* О представлении подстановок в виде произведений транспозиции и полного цикла // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. Вып. 1. С. 31–52.
24. *Зубов А. Ю.* О некоторых классах экстремальных ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2015. № 4(30). С. 45–50.
25. *Глушков В. М.* О полноте систем операций в электронных вычислительных машинах // Кибернетика. 1968. № 2. С. 1–5.
26. *Голунков Ю. В.* Программно-автоматная реализация подстановок симметрической полугруппы // Кибернетика. 1971. № 5. С. 33–39.

REFERENCES

1. *Dobzhansky T. and Sturtevant A. H.* Inversions in the chromosomes of drosophila pseudoobscura. Genetics, 1938, vol. 23, pp. 28–64.
2. *Aigner M. and West D. B.* Sorting by insertion of leading elements. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 1987, vol. 45, no. 2, pp. 306–309.
3. *Bafna V. and Pevzner P. A.* Genome rearrangement and sorting by reversals. SIAM J. Comput., 1996, vol. 25, no. 2, pp. 272–289.
4. *Bafna V. and Pevzner P. A.* Sorting by transpositions. SIAM J. Discr. Math. 1998, vol. 11, no. 2, pp. 224–240.
5. *Christie D. A.* Sorting permutations by block-interchanges. Inform. Proc. Lett., 1996, vol. 60, no.4, pp. 165–169.
6. *Christie D. A.* Genome rearrangement problems. Submitted for the degree of Doctor of Philosophy to the University of Glasgow, 1998. 165 p.
7. *Kececioglu J. D. and Ravi R.* Of mice and men: algorithms for evolutionary distances between genomes with translocation. Proc. 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia, PA, USA, 1996, pp. 604–613.
8. *Pevzner P. A. and Waterman M. S.* Open combinatorial problems in computational molecular biology. Proc. 3rd Israel Symposium on the Theory of Computing and Systems, 1995, pp. 158–173.

9. *Heath L. S. and Vergara J. P. C.* Sorting by short block-moves. Technical Report TR-98-03. Virginia Tech. Department of Computer Science, Feb. 1998.
10. *Caprara A.* Sorting permutations by reversals and Eulerian cycle decompositions. SIAM J. Discr. Math., 1999, no. 12, pp. 91–110.
11. *Eriksson H., Eriksson K., Karlander J., et al.* Sorting a bridge hand. Discr. Math., 2001, vol. 241, no. 1, pp. 289–300.
12. *Dias U. and Meidanis J.* Sorting by prefix transpositions. String Processing and Information Retrieval. Springer, 2002, pp. 65–76.
13. *Eriksen N.* Combinatorial methods in comparative genomics. Doctoral dissertation. Royal Institute of Technology, Stockholm, 2003. 138 p.
14. *Lin Y. C., Lu C. L., Chang H.-Y., and Tang C. Y.* An efficient algorithm for sorting by block-interchanges and its application to the evolution of Vibrio Species. J. Computational Biology, 2005, vol. 12, no. 1, pp. 102–112.
15. *Cranston D., Sudborough I. H., and West D. B.* Short proofs for cat-and-paste sorting of permutations. Discr. Math., 2007, vol. 307, iss. 22, pp. 2866–2870.
16. *Hartman T. and Shamir R.* A simpler and faster 1.5-approximation algorithm for sorting by transpositions. Information and Computation, 2006, vol. 204, pp. 275–290.
17. *Feng J. and Zhu D.* Faster algorithms for sorting by transpositions and sorting by block interchanges. ACM Transactions on Algorithms (TALG), 2007, vol. 3, no. 3, Article no. 25.
18. *Bulteau L., Fertin G., and Rusu I.* Sorting by transpositions is difficult. SIAM J. Discr. Math., 2012, vol. 26, no. 12, pp. 1148–1180.
19. *Labarre A.* Lower bounding edit distances between permutations. SIAM J. Discr. Math., 2013, vol. 27, no. 3, pp. 1410–1428.
20. *Glukhov M. M., Zubov A. Yu.* O dlinakh simmetricheskikh i znakoperemennykh grupp podstanovok v razlichnykh sistemakh obrazuyushchikh [On the length of the symmetric and alternating substitutions groups in different systems of generators]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 8. Moscow, Nauka Publ., 1999, pp. 5–32. (in Russian)
21. *Glukhov M. M., Pogorelov B. A.* O nekotorykh primeneniyakh grupp v kriptografii [Some applications of groups in cryptography]. Materialy konf. «Matematika i bezopasnost' informatsionnykh tekhnologiy», MSU, 28–29 October 2004. Moscow, MCCME Publ., 2005, pp. 19–31. (in Russian)
22. *Zubov A. Yu.* O diametre gruppy S_N otnositel'no sistemy obrazuyushchikh, sostoyashchey iz polnogo tsikla i transpozitsii [On the diameter of the group S_N with respect to a system of generators consisting of a complete cycle and a transposition]. Tr. Diskr. Mat., 1998, vol. 2 pp. 112–150. (in Russian)
23. *Zubov A. Yu.* O predstavlenii podstanovok v vide proizvedeniy transpozitsii i polnogo tsikla [On the representation of substitutions as products of a transposition and a full cycle]. Fundam. Prikl. Mat., 2009, vol. 15, iss. 1, pp. 31–51. (in Russian)
24. *Zubov A. Yu.* O nekotorykh klassakh ekstremal'nykh orientirovannykh grafov [About some classes of extremal oriented graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2015, no. 4(30), pp. 45–50. (in Russian)
25. *Glushkov V. M.* O polnote sistem operatsiy v elektronnykh vychislitel'nykh mashinakh [On the completeness of systems of operations in electronic computers]. Kibernetika, 1968, no. 2, pp. 1–5. (in Russian)
26. *Golunkov Yu. V.* Programmno-avtomatnaya realizatsiya podstanovok simmetricheskoy polugruppy [Software-automata implementation of the symmetric semigroup permutations]. Kibernetika, 1971, no. 5, pp. 33–39. (in Russian)