УДК 512.13

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТИПОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Д. А. Сошин

ФГУП «НИИ «Квант», г. Москва, Россия

Введён в рассмотрение класс k-значных алгебраических пороговых функций. Показано, что класс AT_n^k всех таких функций от n переменных включает в себя класс T_n^k известных пороговых функций и значительно расширяет его. Доказано, что при $k = 2$ и $n = 3$ только один геометрический тип задается функцией, не являющейся алгебраической пороговой, а остальные принадлежат классу AT_3^2. Алгебраические пороговые функции обладают простотой реализации в различных вычислительных средах, в том числе в перспективной оптической, что делает их изучение актуальным для синтеза высокоскоростных систем переработки информации.

Ключевые слова: *пороговые функции, многозначная логика, алгебраические пороговые функции, геометрические типы.*

DOI 10.17223/20710410/31/3

REPRESENTATION OF GEOMETRIC TYPES OF BOOLEAN FUNCTIONS IN THREE VARIABLES BY ALGEBRAIC THRESHOLD FUNCTIONS

D. A. Soshin

Technology Federal State Unitary Enterprise "Research Institute Kvant", Moscow, Russia

E-mail: danil_re@list.ru

Algebraic threshold functions are defined in the article. It is shown that the class AT_n^k of all k-valued algebraic threshold functions in n variables includes the class of k-valued ordinary threshold functions in n variables and is much greater than it. It is proved that, for $k = 2$ and $n = 3$, the only geometric type is determined by a function which is not an algebraic threshold one, but others belong to the class AT_3^2. Algebraic threshold functions are simply realized in different computing areas, including the perspective optical ones, what makes important researching them for the synthesis of highspeed information processing systems.

Keywords: *threshold functions, multiple-valued logic, algebraical threshold functions, geometric types.*

1. Основные обозначения

В работе использованы следующие основные обозначения:

— k — значность логики;

— n — количество переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

— $\Omega_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\Omega_k^n = \underbrace{\Omega_k \times \Omega_k \times \ldots \times \Omega_k}_{n}$;
— $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел;
— $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
— $r_m(y)$ — функция взятия остатка при делении целого числа y на модуль m ($r_m(y) \in \{0, \ldots, m-1\}$);
— F_n^k — множество всех k-значных функций от n переменных ($f_n^k : \Omega_k^n \to \Omega_k$);
— T_n^k — класс всех k-значных пороговых функций от n переменных;
— AT_n^k — класс всех k-значных алгебраических пороговых функций от n переменных;
— L_n^k — множество всех линейных функций k-значной логики от n переменных.

2. Алгебраические пороговые функции

В [1–3] приведено следующее определение k-значной пороговой функции.

Определение 1. Функция k-значной логики $f_n^k : \Omega_k^n \to \Omega_k$ называется пороговой, если для неё существует линейная форма

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \quad c_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n,$$

и $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$, такие, что для любого $\alpha \in \{0, \ldots, k-1\}$ выполняется

$$f_n^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad b_\alpha \leqslant c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n < b_{\alpha+1},$$

набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ назовём вектором коэффициентов линейной формы (в некоторых работах его называют вектором весов [4]), а $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ — вектором порогов функции f_n^k. Элементы множества Ω_k^n будем называть точками и ассоциировать их с точками в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1 введено с условием того, что доказан факт совпадения множества $\mathbb{R}T$ всех пороговых функций, у которых векторы коэффициентов линейной формы и порогов выбираются из множества действительных чисел $\mathbb{R}$, с множеством $\mathbb{Z}T$ всех пороговых функций, у которых соответствующие векторы выбираются из множества целых чисел $\mathbb{Z}$ (одно из последних доказательств в булевом случае содержится в [1], и оно распространяется на случай многозначной логики).

Алгебраическую пороговую функцию (АПФ) определим следующим образом.

Определение 2. Функцию k-значной логики $f_n^k : \Omega_k^n \to \Omega_k$ назовём алгебраической пороговой, если существуют целочисленные наборы $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ и модуль m, такие, что для любого $\alpha \in \{0, \ldots, k-1\}$ выполняется

$$f_n^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad b_\alpha \leqslant r_m(c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) < b_{\alpha+1}. \tag{1}$$

Двойное неравенство (1) можно записать равносильным способом

$$b_\alpha \leqslant c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + mt < b_{\alpha+1} \tag{2}$$

для некоторого $t \in \mathbb{Z}$ [5, том 1, глава V, § 1]. Сокращённо вектор коэффициентов линейной формы и вектор порогов алгебраической пороговой функции будем записывать следующим образом:

$$c^{(n)} = (c_0, c_1, \ldots, c_n), \quad b^{(k)} = (b_0, b_1, \ldots, b_k),$$

а тройку $(c^{(n)}; b^{(k)}; m)$ назовём структурой алгебраической пороговой функции f_n^k.

Пример 1. Зададим 2-значную алгебраическую пороговую функцию $f_2^2(x_1, x_2)$, в обозначениях определения 2, её структурой

$$(c^{(3)}; b^{(2)}; m) = ((1,1,1); (0,1,2); 2)\,.$$

Выпишем неравенства, задающие значения функции f_2^2:

$$\begin{aligned} f_2^2(x_1,x_2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant r_2(1 + x_1 + x_2) < 1, \\ f_2^2(x_1,x_2) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant r_2(1 + x_1 + x_2) < 2. \end{aligned}$$

Заданная таким образом функция представляет линейную булеву функцию

$$x_1 + x_2 + 1 \pmod 2. \tag{3}$$

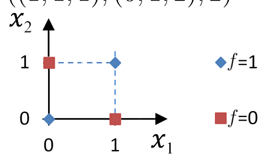
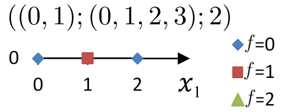
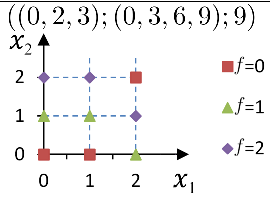
Пример 1 иллюстрирует функцию $f(x_1, x_2)$, принадлежащую классу AT_2^2, но не принадлежащую классу T_2^2. Такой вывод следует из того, что функция (3) не является полностью монотонной, в то время как любая пороговая k-значная функция полностью монотонная [3].

Определение 3 [3]. Функция k-значной логики $f_n^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется t-монотонной, если для любого $s \leqslant t$, любого подмножества переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ и любых двух фиксаций этих переменных $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)$, $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$ соответствующие этим фиксациям подфункции f_ε и f_δ удовлетворяют одному из условий: либо $f_\varepsilon \geqslant f_\delta$, либо $f_\varepsilon \leqslant f_\delta$. Функция называется полностью монотонной, если она n-монотонна.

В табл. 1 приведены примеры алгебраических пороговых функций, не принадлежащих классу T_n^k при минимальных параметрах $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$. В случае $n = 1$ и $k = 2$ все функции пороговые.

Таблица 1

Примеры не пороговых, но алгебраических пороговых функций при минимальных параметрах n и k с заданием структуры соответствующей функции

k	n: 1	n: 2
2	Все функции пороговые	$((1,1,1);(0,1,2);2)$ 
3	$((0,1);(0,1,2,3);2)$ 	$((0,2,3);(0,3,6,9);9)$ 

Для задания произвольной пороговой функции $f_n^k \in T_n^k$ с вектором линейной формы $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и вектором порогов $(b_0, b_1, \dots, b_k)$ алгебраической пороговой функцией необходимо за счёт выбора коэффициента c_0 добиться, чтобы линейная форма алгебраической пороговой функции $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ принимала минимальное значение 0, а пороги $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ сдвинуть на соответствующее значение c_0. Модуль m при этом необходимо взять строго бо́льшим максимального значения, которое принимает получившаяся линейная форма на множестве Ω_k^n. Алгебраическая пороговая функция будет иметь структуру

$$((c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n); (b_0 + c_0, b_1 + c_0, \ldots, b_k + c_0); m).$$

Помимо включения $T_n^k \subseteq AT_n^k$ верно включение $L_n^k \subseteq AT_n^k$, где L_n^k — множество линейных функций k-значной логики от n переменных. Для доказательства достаточно в качестве модуля m взять значение k, вектор порогов равным вектору $(0, 1, \ldots, k)$, а вектор коэффициентов линейной формы — совпадающим с вектором коэффициентов соответствующей линейной функции. На схеме рис. 1 стрелками изображены включения одного множества в другое. Класс AT_n^k, как и класс пороговых функций, прост в реализации.

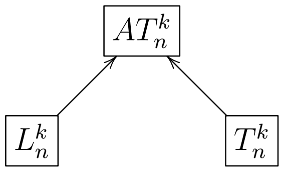


Рис. 1. Диаграмма включений линейных, пороговых и алгебраических пороговых функций

3. Геометрическая замкнутость класса алгебраических пороговых функций

Рассмотрим группу преобразований G_n на множестве функций многозначной логики [6]. Группой движения G_n назовём группу, порождённую группами S_n и N_n:

$$G_n = \langle S_n, N_n \rangle,$$

где S_n — группа подстановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$; $N_n = \{-1, 1\}^n$ — группа инвертирования переменных. Действие данных групп на множестве Ω_k^n определяется следующим образом: для любой точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega_k^n$, для любых преобразований $s \in S_n$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in N_n$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^s = (a_{s^{-1}(1)}, a_{s^{-1}(2)}, \ldots, a_{s^{-1}(n)}),$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\beta = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad u_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } \beta_i = 1, \\ k - 1 - a_i, & \text{если } \beta_i = -1. \end{cases}$$

Обозначим через $f_{n,\beta,s}^k$ функцию, полученную из функции f_n^k по правилу

$$f_{n,\beta,s}^k = f_n^k(x^{\beta s}).$$

Заметим, что действие $-1 \in N_1$ на произвольное значение $a \in \Omega_k$ соответствует действию стрелки Лукашевича $a^{-1} = \overline{a} = k - 1 - a$. Далее будем рассматривать её действие не только на аргументы, но и на саму функцию.

Определение 4. Функции f_n^k и g_n^k из множества F_n^k называются эквивалентными относительно группы движения G_n (обозначается $g_n^k \sim f_n^k$), если существуют элементы $s \in S_n$ и $\beta \in N_n$, такие, что $g_n^k = f_{n,\beta,s}^k$.

Эквивалентность относительно группы движения G_n является отношением эквивалентности. Свойства рефлексивности, транзитивности и симметричности проверяются непосредственно из определения. Это отношение разбивает множество F_n^k на классы эквивалентности. Класс эквивалентности относительно группы движений функции f_n^k из множества F_n^k обозначим $[f_n^k]_{G_n} = \left\{f_{n,\beta,s}^k : s \in S_n, \beta \in N_n\right\}$.

Известно [2], что действие группы преобразований на класс пороговых функций T_n^k не выводит функции за пределы класса. Для любой функции f_n^k из класса пороговых функций T_n^k данное свойство можно записать следующим образом:

$$[f_n^k]_{G_n} \subset T_n^k. \tag{4}$$

Кроме того, для любой функции f_n^k из класса пороговых функций T_n^k выполняется

$$f_n^{k^{-1}} = \overline{f_n^k} = (k - 1 - f_n^k) \in T_n^k. \tag{5}$$

При одновременном выполнении свойств (4) и (5) для произвольного класса функций будем говорить о его геометрической замкнутости. С расширением класса пороговых функций возникает вопрос о геометрической замкнутости класса алгебраических пороговых функций AT_n^k.

Утверждение 1. Класс алгебраических пороговых функций AT_n^k замкнут относительно действия преобразований группы движений G_n.

Доказательство. Рассмотрим в отдельности действие преобразований из групп S_n и N_n на алгебраическую пороговую функцию f_n^k. Пусть функция f_n^k задана структурой $(c^{(n)}; b^{(k)}; m)$. Преобразование $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in N_n$ действует на линейную форму функции f_n^k следующим образом:

$$L(x^\beta) = c_0 + c_1 x_1^{\beta_1} + c_2 x_2^{\beta_2} + \ldots + c_n x_n^{\beta_n} =$$
$$= c_0 + \sum_{i:\beta_i=1} c_i\beta_i x_i + \sum_{i:\beta_i=-1} c_i(k - 1 + \beta_i x_i) = c_0 + (k-1)\sum_{i:\beta_i=-1} c_i + \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i x_i.$$

Из полученного выражения видно, что функция $f_{n,\beta}^k$ является алгебраической пороговой со структурой $(u^{(n)}; b^{(k)}; m)$, где вектор $u^{(n)}$ имеет вид

$$u^{(n)} = (u_0, u_1, \ldots, u_n), \quad u_0 = c_0 + (k-1)\sum_{i:\beta_i=-1} c_i, \quad u_i = c_i\beta_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Структура функции $f_{n,s}^k$, где $s \in S_n$, также отличается от структуры функции f_n^k только вектором коэффициентов линейной формы. Линейную форму $\tilde{L}$ функции $f_{n,s}^k$ выразим через линейную форму L функции f_n^k:

$$\tilde{L}(x) = L(x^s) = c_0 + c_1 x_{s^{-1}(1)} + c_2 x_{s^{-1}(2)} + \ldots + c_n x_{s^{-1}(n)} =$$
$$= c_0 + c_{s(1)}x_1 + c_{s(2)}x_2 + \ldots + c_{s(n)}x_n.$$

Из последнего получаем, что структура функции $f_{n,s}^k$ имеет вид $(v^{(n)}; b^{(k)}; m)$, где $v^{(n)} = (c^{(n)})^{s^{-1}} = (c_0, c_{s(1)}, c_{s(2)} \ldots, c_{s(n)})$.

В силу того, что преобразования из группы сдвига S_n и группы инвертирования N_n не выводят за класс AT_n^k, получаем его алгебраическую замкнутость относительно группы движений G_n. ■

Теорема 1. Класс алгебраических пороговых функций AT_n^k является геометрически замкнутым.

Доказательство. Для геометрической замкнутости класса AT_n^k осталось доказать, что инвертирование функции не выводит её из этого класса. Пусть функция f_n^k задана структурой $(c^{(n)}; b^{(k)}; m)$. Проведём эквивалентные преобразования условия (2):

$$\begin{aligned} f_n^k = \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad b_\alpha \leqslant c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + mt < b_{\alpha+1}, \\ \overline{f_n^k} = \overline{\alpha} \quad &\Leftrightarrow \quad -b_\alpha \geqslant -c_0 - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n - mt > -b_{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для того чтобы привести двойное неравенство (6) к виду (2), воспользуемся следующим свойством: для любых целых чисел a, b, c выполняется $a < b \leqslant c \ \Leftrightarrow \ a \leqslant b-1 < c$. Перепишем (6):

$$\overline{f_n^k} = \overline{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad -b_{\alpha+1} \leqslant -c_0 - 1 - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n - mt < -b_\alpha. \tag{7}$$

Далее выделим максимальное и минимальное значения, которые принимает функция f_n^k. Пусть эти значения P и p соответственно. Не ограничивая общности, для функции f_n^k можно считать, что $b_p = 0$, а $b_{P+1} = m$. Функция $\overline{f_n^k}$, в свою очередь, принимает минимальное значение $k-1-P$, а максимальное $k-1-p$. В неравенстве (7) осталось обеспечить, чтобы нижний порог, отвечающий значению $k-1-P$, и верхний порог, отвечающий значению $k-1-p$, равнялись 0 и m соответственно. Для этого, не нарушая справедливости неравенства, к левой и правой частям прибавим m:

$$\overline{f_n^k} = \overline{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad -b_{\alpha+1} + m \leqslant -c_0 - 1 - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n - mt < -b_\alpha + m. \tag{8}$$

Свернём (8) следующим образом:

$$\overline{f_n^k} = \overline{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad -b_{\alpha+1} + m \leqslant r_m(-c_0 - 1 - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n) < -b_\alpha + m.$$

Таким образом, функция $\overline{f_n^k}$ является алгебраической пороговой со структурой $(u^{(n)}; t^{(k)}; m)$, где

$$u^{(n)} = (-c_0 - 1, -c_1, -c_2, \ldots, -c_n), \quad t^{(k)} = (-b_k + m, -b_{k-1} + m, \ldots, -b_0 + m),$$

что завершает доказательство. ■

4. Геометрические типы булевых функций от трёх переменных и их представление алгебраическими пороговыми функциями

Определение 5. Геометрическим типом функции $f_n^k \in F_n^k$ будем называть объединение класса эквивалентности $[f_n^k]_{G_n}$ с классом эквивалентности $[\overline{f_n^k}]_{G_n}$ и писать

$$[f_n^k]_{\overline{G_n}} = [f_n^k]_{G_n} \cup [\overline{f_n^k}]_{G_n}.$$

Заметим, что тип $[f_n^k]_{\overline{G_n}}$ является классом эквивалентности функции f_n^k относительно группы $\overline{G_n}$, где $\overline{G_n}$ — расширение группы G_n преобразованием инвертирования функции.

Далее покажем, что в булевом случае при $n = 3$ алгебраическими пороговыми функциями не представляется только один из геометрических типов, тогда как пороговые функции не задают 8 таких типов. Произведём каталогизацию функций F_3^2.

Перебор функций геометрического типа $[f_3^2]_{\overline{G_3}}$ произведём путём нахождения класса эквивалентности $[f_3^2]_{G_3}$ и дополнением его инвертированным классом $[\overline{f_3^2}]_{G_3}$. Функции внутри класса получаются действием преобразований из группы G_3 на выбранного представителя. Представители классов, в свою очередь, выбираются, исходя из структуры графа связности функции, поскольку действие преобразований G_3 сохраняет расстояние между точками графа и не изменяет его структуру. Опишем строение графа связности функции. Множеством вершин X графа $\mathfrak{G}_{f_3^2} = (X, U)$ функции f_3^2 являются точки множества Ω_2^3, в которых функция принимает значение 1 (носитель функции):

$$X = \{(a_1, a_2, a_3) \in \Omega_2^3 : f_3^2(a_1, a_2, a_3) = 1\},$$

а множеством рёбер U является множество рёбер куба, соединяющих соседние вершины графа:

$$U = \left\{((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) \in X^2 : \chi\left((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\right) = 1\right\},$$

где χ — расстояние Хемминга между точками (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3):

$$\chi\left((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}(a_i = b_i), \quad \mathrm{Ind}(a_i = b_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i = b_i, \\ 0, & \text{если } a_i \neq b_i. \end{cases}$$

В случае несовпадения классов $[f_3^2]_{G_3}$ и $[\overline{f_3^2}]_{G_3}$ один из них содержит функции с весом $|f_3^2|$, не превосходящим 4. В случае их совпадения вес функций равен 4. Исходя из этого, для выбора представителей типов достаточно перебрать графы $\mathfrak{G}_{f_3^2} = (X, U)$, у которых $|X| \leqslant 4$. Для функций f_3^2, таких, что $|f_3^2| \leqslant 4$, встречается всего 13 видов графов. В табл. 2 приведена классификация представителей. Нумерация представителей классов состоит из тройки чисел $a.b.c$, где $a = |X|$; b — число компонент связности в графе $\mathfrak{G}_{f_3^2}$; c — порядковый номер представителя класса с параметрами a и b. Такая нумерация соответствует порядку, установленному в каталоге В. Г. Никонова [7].

В табл. 3 приведены все представители геометрических типов. Каждый представитель типа записан в виде числа $n_f = \sum_{i=0}^{7} 2^i \cdot f(a_i)$, где a_i — упорядоченные в лексикографическом порядке точки множества Ω_2^3. В скобках объединены числа $(n_f, n_{\overline{f}})$ и упорядочивание пар в типе идет по первой координате, а типы расположены в порядке увеличения их мощности.

Из 14 геометрических типов только 6 представляются пороговыми функциями (0.0.1, 1.1.1, 2.1.1, 3.1.1, 4.1.1, 4.1.2), ещё 7 представляются алгебраическими пороговыми (2.2.1, 2.2.2, 3.2.1, 3.3.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.4.1), и только класс 4.1.3 не представляется алгебраическими пороговыми функциями.

Аналитическое задание и структура одного представителя из каждого класса 2.2.1, 2.2.2, 3.2.1, 3.3.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.4.1 приведены в табл. 4.

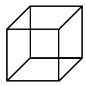
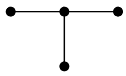
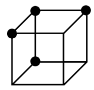
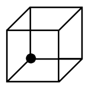
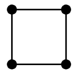
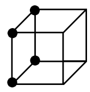
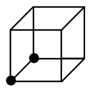
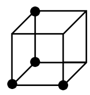
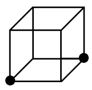
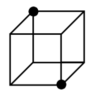
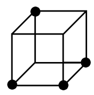
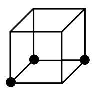
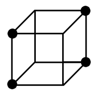
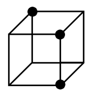
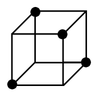
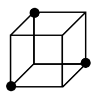
Докажем, что функция $f^{(4.1.3)} = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ из класса 4.1.3 не представляется алгебраическими пороговыми функциями.

Теорема 2. $f^{(4.1.3)} \notin AT_3^2$.

Доказательство. Пусть функция $f^{(4.1.3)}$ принадлежит классу AT_3^2 и имеет структуру $((c_0, c_1, c_2, c_3); (0, b, m); m)$. В силу свойств функции r_m можно считать, что коэффициенты линейной формы (c_0, c_1, c_2, c_3) принадлежат полуинтервалу $[0, m)$.

Таблица 2

Графы булевых функций от трёх переменных веса не больше 4

№ $a.b$	Изображение графа	Номер класса $a.b.c$ и иллюстрация представителя	№ $a.b$	Изображение графа	Номер класса $a.b.c$ и иллюстрация представителя
0.0	$\mathfrak{G}_{f_3^2} = (\varnothing, \varnothing)$	0.0.1 	4.1		4.1.1 
1.1		1.1.1 	4.1		4.1.2 
2.1		2.1.1 	4.1		4.1.3 
2.2		2.2.1  2.2.2 	4.2		4.2.1 
3.1		3.1.1 	4.2		4.2.2 
3.2		3.2.1 	4.4		4.4.1 
3.3		3.3.1 			

В точке $(0,0,0)$ функция $f^{(4.1.3)}$ принимает значение 0, откуда получаем, что c_0 принадлежит полуинтервалу $[0,b)$:

$$f^{(4.1.3)}(0,0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant r_m(c_0) < b \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant c_0 < b. \tag{9}$$

В точке $(0,1,0)$ функция $f^{(4.1.3)}$ принимает значение 1, значит, для некоторого целого t выполняется

$$b \leqslant c_0 + c_2 + tm < m. \tag{10}$$

Из (9) и того, что $0 \leqslant c_2 < m$, получаем ограничения на сумму c_0 и c_2:

$$0 \leqslant c_0 + c_2 < m + b. \tag{11}$$

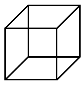
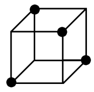
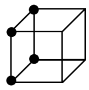
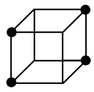
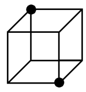
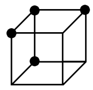
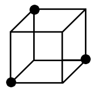
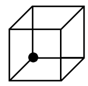
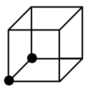
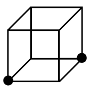
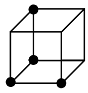
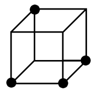
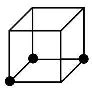
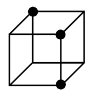
Условие (10) при ограничениях (11) возможно только при $t = 0$: $b \leqslant c_0 + c_2 < m$.

Для краткости подобные цепочки рассуждений будем записывать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r} f^{(4.1.3)}(0,1,0) = 1 \;\Leftrightarrow\; b \leqslant c_0 + c_2 + tm < m \\ \left.\begin{array}{r} 0 \leqslant c_0 < b \\ 0 \leqslant c_2 < m \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant c_0 + c_2 < m + b \end{array}\right\} \Rightarrow b \leqslant c_0 + c_2 < m.$$

Таблица 3

Геометрические типы булевых функций от трёх переменных

<table>
<tr><td>0.0.1

$(0,255)$</td><td>4.4.1

$(150,105)$</td><td>4.1.2

$(51,204),(170,85),$
$(240,15)$</td><td>4.2.2

$(90,165),(153,102),$
$(195,60)$</td></tr>
<tr><td>2.2.2

$(24,231),(36,219),$
$(66,189),(129,126)$</td><td>4.1.1

$(113,142),(178,77),$
$(212,43),(232,23)$</td><td>3.3.1

$(22,233),(41,214),$
$(73,182),(97,158),$
$(104,151),(134,121),$
$(146,109),(148,107)$</td><td>1.1.1

$(1,254),(2,253),$
$(4,251),(8,247),$
$(16,239),(32,223),$
$(64,191),(128,127)$</td></tr>
<tr><td>2.1.1

$(3,252),(5,250),$
$(10,245),(12,243),$
$(17,238),(34,221),$
$(48,207),(68,187),$
$(136,119),(160,95),$
$(192,63),(80,175)$</td><td>2.2.1

$(6,249),(9,246),$
$(18,237),(20,235),$
$(33,222),(40,215),$
$(65,190),(72,183),$
$(96,159),(130,125),$
$(132,123),(144,111)$</td><td>4.1.3

$(27,228),(29,226),$
$(39,216),(53,202),$
$(71,184),(83,172),$
$(139,116),(141,114),$
$(163,92),(177,78),$
$(197,58),(209,46)$</td><td>4.2.1

$(45,210),(57,198),$
$(75,180),(89,166),$
$(99,156),(101,154),$
$(135,120),(147,108),$
$(149,106),(169,86),$
$(201,54),(225,30)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.1.1

$(7,248),(11,244),(13,242),(14,241),(19,236),$
$(21,234),(35,220),(42,213),(49,206),(50,205),$
$(69,186),(76,179),(81,174),(84,171),(112,143),$
$(138,117),(140,115),(162,93),(168,87),(196,59),$
$(200,55),(176,79),(208,47),(224,31)$</td><td colspan="2">3.2.1

$(25,230),(26,229),(28,227),(37,218),(38,217),$
$(44,211),(52,203),(56,199),(67,188),(70,185),$
$(74,181),(82,173),(88,167),(98,157),(100,155),$
$(131,124),(133,122),(137,118),(145,110),(152,103),$
$(161,94),(164,91),(193,62),(194,61)$</td></tr>
</table>

Аналогичным образом показывается, что $c_0+c_1+c_2$ принадлежит полуинтервалу $[m, m+b)$, а $c_0+c_1+c_2+c_3$ — полуинтервалу $[m+b, 2m)$:

$$\left.\begin{array}{l} f^{(4.1.3)}(1,1,0)=0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant c_0+c_1+c_2+tm < b \\ \left.\begin{array}{l} b \leqslant c_0+c_2 < m \\ 0 \leqslant c_1 < m \end{array}\right\} \Rightarrow b \leqslant c_0+c_1+c_2 < 2m \end{array}\right\} \Rightarrow m \leqslant c_0+c_1+c_2 < m+b; \tag{12}$$

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f^{(4.1.3)}(1,1,1)=1 \;\Leftrightarrow\; b \leqslant c_0+c_1+c_2+c_3+tm < m \\ \left.\begin{array}{l} m \leqslant c_0+c_1+c_2 < m+b \\ 0 \leqslant c_3 < m \end{array}\right\} \Rightarrow m \leqslant c_0+c_1+c_2+c_3 < 2m+b \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow m+b \leqslant c_0+c_1+c_2+c_3 < 2m. \end{array} \tag{13}$$

Дальнейшее доказательство разбивается на восемь случаев независимого расположения коэффициентов c_1, c_2, c_3 в полуинтервале $[0, m)$, а именно либо в полуинтервале $[0, b)$, либо в полуинтервале $[b, m)$. Покажем, что случаи

Таблица 4

Аналитические задания и структуры алгебраических пороговых функций

Номер геометрического типа $a.b.c$	Аналитическое задание представителя геометрического типа $a.b.c$	Структура представителя геометрического типа $a.b.c$
2.2.1	$f^{(2.2.1)} = (x_1 \oplus x_2)\overline{x_3}$	$((0,3,3,2);(0,3,4);4)$
2.2.2	$f^{(2.2.2)} = x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3$	$((0,1,1,2);(0,2,3);3)$
3.2.1	$f^{(3.2.1)} = \overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2$	$((0,2,2,4);(0,3,5);5)$
3.3.1	$f^{(3.3.1)} = x_1x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$((0,2,2,2);(0,2,3);3)$
4.2.1	$f^{(4.2.1)} = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$((0,3,3,2);(0,2,4);4)$
4.2.2	$f^{(4.2.2)} = x_1 \oplus x_2$	$((0,1,1,0);(0,1,2);2)$
4.4.1	$f^{(4.4.1)} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$((0,1,1,1);(0,1,2);2)$

I. $0 \leqslant c_2 < b,\ \ 0 \leqslant c_3 < b,$

II. $b \leqslant c_2 < m,\ \ b \leqslant c_3 < m,$

не зависящие от c_1, не могут выполняться. Введём обозначения для значений остатков функции $f^{(4.1.3)}$ в точках Ω_2^3:

$$(0,1,0):\quad r^{(1)} = r_m(c_0+c_2),\qquad (1,0,0):\quad r^{(5)} = r_m(c_0+c_1),$$
$$(0,1,1):\quad r^{(2)} = r_m(c_0+c_2+c_3),\qquad (1,1,0):\quad r^{(6)} = r_m(c_0+c_1+c_2),$$
$$(1,1,1):\quad r^{(3)} = r_m(c_0+c_1+c_2+c_3),\qquad (0,0,1):\quad r^{(7)} = r_m(c_0+c_3).$$
$$(1,0,1):\quad r^{(4)} = r_m(c_0+c_1+c_3),$$

На рис. 2 значения этих остатков привязаны к соответствующим вершинам трёхмерного куба.

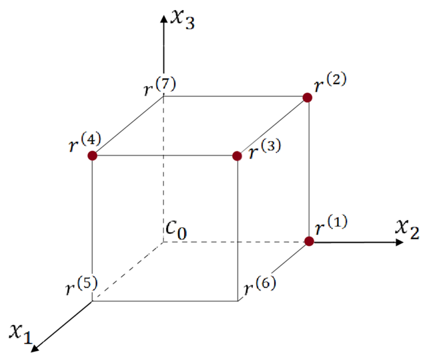


Рис. 2. Графическое задание функции $f^{(4.1.3)}$

Выделенные случаи разберём последовательно.

I. $0 \leqslant c_2 < b,\ \ 0 \leqslant c_3 < b.$

Выразим значения остатков $r^{(3)}$ и $r^{(2)}$ через $r^{(6)}$, $r^{(1)}$ и сравним их:

$$\left.\begin{array}{r} r^{(3)} = r^{(6)} + c_3 + tm \\ f^{(4.1.3)}(1,1,1) = 1 \;\Leftrightarrow\; b \leqslant r^{(3)} < m \\ \left.\begin{array}{r} 0 \leqslant c_3 < b \\ 0 \leqslant r^{(6)} < b \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant r^{(6)} + c_3 < 2b < m + b \end{array}\right\} \Rightarrow r^{(3)} = r^{(6)} + c_3; \tag{14}$$

$$\left.\begin{array}{r} r^{(2)} = r^{(1)} + c_3 + tm \\ f^{(4.1.3)}(0,1,1) = 1 \;\Leftrightarrow\; b \leqslant r^{(2)} < m \\ \left.\begin{array}{r} 0 \leqslant c_3 < b \\ b \leqslant r^{(1)} < m \end{array}\right\} \Rightarrow b \leqslant r^{(1)} + c_3 < m + b \end{array}\right\} \Rightarrow r^{(2)} = r^{(1)} + c_3. \tag{15}$$

Из того, что $r^{(6)} < r^{(1)}$, и условий (14) и (15) следует неравенство

$$r^{(3)} < r^{(2)}. \tag{16}$$

Аналогичным образом при выражении остатков $r^{(3)}$ и $r^{(2)}$ через $r^{(4)}$, $r^{(7)}$ и коэффициент c_2 получим неравенство $r^{(2)} < r^{(3)}$, что противоречит (16).

II. $b \leqslant c_2 < m,\; b \leqslant c_3 < m.$

Покажем, что если $b \leqslant c_3$, то $m - b \leqslant c_3$. Рассмотрим переход от c_0 к $r^{(7)}$:

$$+c_3 : \quad \left.\begin{array}{r} f^{(4.1.3)}(0,0,1) = 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant c_0 + c_3 + mt < b \\ \left.\begin{array}{r} 0 \leqslant c_0 < b \\ b \leqslant c_3 < m \end{array}\right\} \Rightarrow b \leqslant c_0 + c_3 < m + b \end{array}\right\} \Rightarrow m \leqslant c_0 + c_3 < m + b \Rightarrow c_3 > m - b.$$

Данное рассуждение можно провести для каждого c_i, поскольку по каждой переменной есть переход из нулевой вершины в нулевую:

$$b \leqslant c_i < m \quad \Rightarrow \quad m - b < c_i < m, \quad i = 1,2,3. \tag{17}$$

Используя подход доказательства п. 1 и свойство (17), получаем условия

$$b \leqslant c_3 < m \quad \Rightarrow \quad r^{(2)} < r^{(3)} \quad \text{и} \quad b \leqslant c_2 < m \quad \Rightarrow \quad r^{(2)} > r^{(3)},$$

которые противоречат друг другу.

Поскольку случаи I и II не зависят от значений коэффициента c_1, осталось рассмотреть четыре случая:

III. $0 \leqslant c_1 < b,\; 0 \leqslant c_2 < b,\; b \leqslant c_3 < m;$
IV. $b \leqslant c_1 < m,\; 0 \leqslant c_2 < b,\; b \leqslant c_3 < m;$
V. $0 \leqslant c_1 < b,\; b \leqslant c_2 < m,\; 0 \leqslant c_3 < b;$
VI. $b \leqslant c_1 < m,\; b \leqslant c_2 < m,\; 0 \leqslant c_3 < b.$

В каждом случае покажем невозможность выполнения условий (12) и (13), полученных без наложения ограничений на коэффициенты линейной формы.

Докажем вспомогательное свойство, противоположное (17):

$$0 \leqslant c_i < b \quad \Rightarrow \quad 0 < c_i < m - b, \quad i = 1,2,3. \tag{18}$$

Проведём доказательство для $i = 1,\ 0 \leqslant c_1 < b$. Рассмотрим переход от $r^{(2)}$ к $r^{(3)}$:

$$+c_1: \qquad \left.\begin{array}{r} f^{(4.1.3)}(1,1,1) = 1 \Leftrightarrow b \leqslant r^{(2)} + c_1 + mt < m \\ \left.\begin{array}{l} b \leqslant r^{(2)} < m \\ 0 \leqslant c_1 < b \end{array}\right\} \Rightarrow b \leqslant r^{(2)} + c_1 < m + b \end{array}\right\} \Rightarrow b \leqslant r^{(2)} + c_1 < m \Rightarrow 0 \leqslant c_1 < m - b.$$

По каждой переменной у функции $f^{(4.1.3)}$ есть переход из единичной вершины в единичную, что доказывает условие (18).

Продолжим рассмотрение выделенных случаев.

III. $0 \leqslant c_1 < b,\ 0 \leqslant c_2 < b,\ b \leqslant c_3 < m.$

Покажем, что значение $c_0 + c_1 + c_2$ лежит в полуинтервале $[0, b)$, используя свойство (18) для $i = 1, 2$. Для этого последовательно добавим к c_0 значения c_1, c_2:

$$+c_1: \qquad \left.\begin{array}{r} f^{(4.1.3)}(1,0,0) = 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant c_0 + c_1 + tm < b \\ \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant c_0 < b \\ 0 \leqslant c_1 < m - b \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant c_0 + c_1 < m \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant c_0 + c_1 < b;$$

$$+c_2: \qquad \left.\begin{array}{r} f^{(4.1.3)}(1,1,0) = 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant c_0 + c_1 + c_2 + tm < b \\ \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant c_2 < m - b \\ 0 \leqslant c_0 + c_1 < b \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant c_0 + c_1 + c_2 < m \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant c_0 + c_1 + c_2 < b. \tag{19}$$

Получили противоречие с условием (12).

IV. $b \leqslant c_1 < m,\ 0 \leqslant c_2 < b,\ b \leqslant c_3 < m.$

Рассмотрим значение суммы $c_0 + c_1 + c_2 + c_3$, добавляя к c_0 коэффициенты c_2, c_3, c_1 в указанном порядке. Поскольку логика рассуждений повторяется, будем далее опускать каскады условий и писать только результат, используя условия (17) и (18):

$$\begin{array}{lll} +c_2: & \Rightarrow & b \leqslant c_0 + c_2 < m; \\ +c_3: & \Rightarrow & m + b \leqslant c_0 + c_2 + c_3 < 2m; \\ +c_1: & \Rightarrow & 2m + b \leqslant c_0 + c_1 + c_2 + c_3 < 3m. \end{array}$$

Получили противоречие с условием (13).

V. $0 \leqslant c_1 < b,\ b \leqslant c_2 < m,\ 0 \leqslant c_3 < b.$

В данном случае от c_0 до $c_0 + c_1 + c_2 + c_3$ будем переходить, добавляя слагаемые в порядке c_2, c_3, c_1:

$$\begin{array}{lll} +c_2: & \Rightarrow & b \leqslant c_0 + c_2 < m; \\ +c_3: & \Rightarrow & b \leqslant c_0 + c_2 + c_3 < m; \\ +c_1: & \Rightarrow & b \leqslant c_0 + c_1 + c_2 + c_3 < m. \end{array}$$

Получили противоречие с условием (13).

VI. $b \leqslant c_1 < m,\ b \leqslant c_2 < m,\ 0 \leqslant c_3 < b.$

Сформируем $c_0+c_1+c_2+c_3$, добавляя к c_0 коэффициенты в порядке c_1, c_3, c_2:

$$\begin{aligned} +c_1: \quad &\Rightarrow \quad m \leqslant c_0+c_1 < m+b;\\ +c_3: \quad &\Rightarrow \quad m+b \leqslant c_0+c_1+c_3 < 2m;\\ +c_2: \quad &\Rightarrow \quad 2m+b \leqslant c_0+c_1+c_2+c_3 < 3m. \end{aligned}$$

Получили противоречие с условием (13). Рассмотрение всех случаев привело к завершению доказательства. ■

В силу геометрической замкнутости класса алгебраических пороговых функций получили, что ни одна функция из класса 4.1.3 не представляется алгебраической пороговой функцией: $[f^{(4.1.3)}]_{G_3} \cap AT_3^2 = \varnothing$.

Следующая теорема определяет необходимое условие принадлежности функции классу алгебраических пороговых функций.

Теорема 3. Любая подфункция алгебраической пороговой функции является алгебраической пороговой.

Доказательство. Пусть дана алгебраическая пороговая функция f со структурой $((c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n); (b_0, b_1, \ldots, b_k); m)$. Для $t \in \{1, \ldots, n\}$, $i_1, i_2, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, n\}$ и произвольной фиксации $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t)$ рассмотрим подфункцию f_ε. В силу замкнутости класса AT_n^k относительно перестановки переменных можно считать, что $(i_1, i_2, \ldots, i_t) = (n-t+1, n-t+2, \ldots, n)$. Тогда

$$f_\varepsilon = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad b_\alpha \leqslant r_m\left(c_0 + \sum_{s=n-t+1}^{n} c_s\varepsilon_s + \sum_{i=1}^{n-t} c_i x_i\right) < b_{\alpha+1}.$$

Полученное условие задаёт следующую структуру подфункции f_ε:

$$\left(\left(c_0 + \sum_{s=n-t+1}^{n} c_s\varepsilon_s, c_1, c_2, \ldots, c_{n-t}\right); (b_0, b_1, \ldots, b_k); m\right),$$

а значит, функция f_ε — алгебраическая пороговая. ■

Заключение

В работе введён в рассмотрение новый класс k-значных алгебраических пороговых функций AT_n^k, расширяющий класс традиционных k-значных пороговых функций T_n^k. Выделим основные результаты:

1) установлено включение класса T_n^k в класс AT_n^k и показано, что AT_n^k содержит все линейные функции L_n^k;
2) доказана геометрическая замкнутость класса AT_n^k;
3) произведена типизация функций относительно указанных преобразований при $k=2$, $n=3$ и составлен каталог геометрических типов с нумерацией, предложенной В. Г. Никоновым в работе [7];
4) доказано, что только один из 14 геометрических типов булевых функций от трёх переменных не задаётся функциями из класса AT_3^2;
5) для 7 геометрических типов, не задаваемых функциями из класса T_3^2, но реализуемых функциями из класса AT_3^2, приведены структуры представителей;
6) доказано, что любая подфункция алгебраической пороговой функции является алгебраической пороговой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов А. П.* О конструктивной характеризации пороговых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. № 4. С. 189–208.
2. *Морага К.* Многозначная пороговая логика // Оптические вычисления. М.: Мир, 1993. С. 162–182.
3. *Никонов В. Г., Никонов Н. В.* Особенности пороговых представлений k-значных функций // Труды по дискретной математике. 2008. Т. 11. № 1. С. 60–85.
4. *Зуев Ю. А.* Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике // Дискретная математика. 1991. Т. 3. № 2. С. 47–57.
5. *Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А.* Алгебра. Т. 1, 2. М.: Гелиос АРВ, 2003.
6. *Никонов В. Г., Сошин Д. А.* Геометрический метод построения сбалансированных k-значных пороговых функций и синтез подстановок на их основе // Образовательные ресурсы и технологии. 2014. № 2(5). С. 76–80.
7. *Никонов В. Г.* Классификация минимальных базисных представлений всех булевых функций от четырех переменных // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. Дискретная математика. 1994. Т. 1. № 3. С. 458–545.

REFERENCES

1. *Sokolov A. P.* O konstruktivnoy kharakterizatsii porogovykh funktsiy [On the constructive characterization of threshold functions]. Fundam. Prikl. Mat., 2009, vol. 15, no. 4, pp. 189–208. (in Russian)
2. *Moraga K.* Mnogoznachnaya porogovaya logika [Multiple-valued threshold logic]. Opticheskie Vychisleniya. Moscow, Mir Publ., 1993, pp. 162–182. (in Russian)
3. *Nikonov V. G., Nikonov N. V.* Osobennosti porogovykh predstavleniy k-znachnykh funktsiy [Features of threshold representations of k-valued functions]. Tr. Diskr. Mat., 2008, vol. 11, no. 1, pp. 60–85. (in Russian)
4. *Zuev Yu. A.* Kombinatorno-veroyatnostnye i geometricheskie metody v porogovoy logike [Combinatorial-probability and geometric methods in threshold logic]. Diskr. Mat., 1991, vol. 3, no. 2, pp. 47–57. (in Russian)
5. *Glukhov M. M., Elizarov V. P., Nechaev A. A.* Algebra. V. 1, 2. Moscow, Gelios ARV Publ., 2003. 416 p. (in Russian)
6. *Nikonov V. G., Soshin D. A.* Geometricheskiy metod postroeniya sbalansirovannykh k-znachnykh porogovykh funktsiy i sintez podstanovok na ikh osnove [The geometric method for constructing a balanced k-valued threshold functions and construction of substitutions based on them]. Obrazovatel'nye Resursy i Tekhnologii, 2014, no. 2(5), pp. 76–80. (in Russian)
7. *Nikonov V. G.* Klassifikatsiya minimal'nykh bazisnykh predstavleniy vsekh bulevykh funktsiy ot chetyrekh peremennykh [The classification of minimal basic representations of Boolean functions of four variables]. Obozrenie Prikladnoy i Promyshlennoy Matematiki. Ser. Diskretnaya Matematika, 1994, vol. 1, no. 3, pp. 458–545. (in Russian)