

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2016**

**№ 2(40)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658  
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА  
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конец, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

**H-index:** <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.04.2016.  
Формат 70 × 100<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 8.71. Уч.-изд. л. 9.75. Тираж 300 экз. Заказ № 10.

---

Отпечатано на оборудовании  
**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 1803.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

<b>Бухтяк М.С.</b> Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна.....	5
<b>Гой Т.П.</b> Специальные функции, построенные с помощью возрастающих и центральных факториальных степеней.....	19
<b>Мисяков В.М.</b> Абелевы группы с регулярным центром кольца эндоморфизмов.....	33
<b>Розов А.В.</b> Об аппроксимируемости конечными $\pi$ -группами некоторых свободных произведений групп с центральными объединенными подгруппами.....	37

## МЕХАНИКА

<b>Гоцев Д.В., Перунов Н.С.</b> Распределение полей напряжений и перемещений в пористом сферическом теле с учетом упруго-пластических свойств.....	45
<b>Долгий М.Е.</b> Моделирование процессов электромагнитной эмиссии в геологической среде.....	53
<b>Дьяченко Н.Н., Дьяченко Л.И., Гурова В.С., Синеокая С.А.</b> Численное исследование течения в соплах РДТТ продуктов сгорания топлива, содержащего высокодисперсный порошок алюминия.....	63
<b>Кагенов А.М.</b> Численное исследование влияния струй двигательной установки космического аппарата «ЭкзоМарс» на эрозию поверхности Марса.....	71
<b>Охоткин К.Г.</b> Моделирование нелинейного магнитодеформационного эффекта для гибкой пластины из ферроэласта в однородном магнитном поле.....	82
<b>Пономарева М.А., Филина М.П., Якутенок В.А.</b> Циркуляционное течение высоковязкой неньютоновской жидкости в канале одношнекового экструдера.....	97
<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....	108

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Bukhtyak M.S.</b> Defect of mapping for deformed segment of metallic mesh .....	5
<b>Goy T.P.</b> Special functions generated by rising and central factorial powers .....	19
<b>Misyakov V.M.</b> Abelian groups with a regular center of the endomorphism ring .....	33
<b>Rozov A.V.</b> On the residual $\pi$ -finiteness of some free products of groups with central amalgamated subgroups .....	37

### MECHANICS

<b>Gotsev D.V., Perunov N.S.</b> Distribution of stress and displacement fields in a porous spherical body with allowance for elastic and plastic properties .....	45
<b>Dolgi M.E.</b> Modeling electromagnetic emission processes in the geological environment .....	53
<b>D'yachenko N.N., D'yachenko L.I., Gurova V.S., Sineokaya S.A.</b> Numerical investigation of the flow of combustion products containing high-dispersive aluminum powder in the solid-fuel rocket engine nozzles .....	63
<b>Kagenov A.M.</b> Numerical investigation of the influence of the "ExoMars" spacecraft propulsion system jets on erosion of the Mars surface .....	71
<b>Okhotkin K.G.</b> Simulation of the nonlinear magnetic strain effect for a flexible ferro-elastic plate in a uniform magnetic field .....	82
<b>Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A.</b> Circulatory high-viscosity non-newtonian fluid flow in a single-screw extruder channel .....	97
<b>BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS</b> .....	108

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22  
DOI 10.17223/19988621/40/1

М.С. Бухтяк

ДЕФЕКТ ОТОБРАЖЕНИЯ  
ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО ЛЕПЕСТКА СЕТЕПОЛОТНА

Как и в предшествующих публикациях, автор исследует раскрой сетеполотна для формирования осесимметричного параболического рефлектора, отождествляя раскрой с взаимно-однозначным отображением части плоскости на часть параболоида вращения. Введенное автором ранее понятие дефекта отображения применяется для сетеполотна, ограниченного соседними параболическими ребрами жесткости и подверженного так называемому матрасному эффекту.

**Ключевые слова:** параболический рефлектор, сетеполотно, отображение поверхностей, дефект отображения поверхности на поверхность, деформация сетеполотна.

Данная работа продолжает построение геометрической модели раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора, начатое в [1, 2]. В основе модели – вычисление искажений локальных длин при отображении части плоскости на часть параболоида вращения. Аппарат исследования, предложенный в [1, 2], дополнен инвариантом отображения [3]. Там же указанный инвариант применен для анализа раскроя сетеполотна, но без учета так называемого матрасного эффекта [4, 5]. Данный пробел восполнен в предлагаемой статье.

### 1. Модель деформированного лепестка

Модель лепестка, деформированного под действием так называемого матрасного эффекта (с учетом ортотропных свойств сетеполотна), построена в [4], однако недостаток места привел к неполному её описанию. Отметим ключевые данные о модели и восполним пробелы. Попутно уточним одну из оценок.

Конструктивные параметры рефлектора:  $F$  – фокусное расстояние параболоида,  $R$  – радиус вырезающего цилиндра,  $n$  – число секторов, на которые рефлектор разделен параболическими ребрами. Лепесток сетеполотна симметричен относительно плоскости, проведенной через ось  $l$  параболоида и линию  $\mathcal{L}$  наибольшего прогиба лепестка (гребневая линия). Модель основана на присоединении к гребневой линии парабол, пересекающих параболические ребра таким образом, чтобы вершина параболы находилась на гребневой линии, главные нормали в точке пересечения этих линий совпадали, а соприкасающиеся плоскости были ортогональны.

Пусть равновесное состояние нагруженного сетеполотна достигается на гребневой линии при значении кривизны этой линии в точке  $T$  равной  $k_{\text{окр}}$  и значении кривизны параболы в той же точке равной  $k_{\text{рад}}$ . Ортоотропность сетеполотна моделируется параметром

$$L = \frac{k_{\text{окр}}}{k_{\text{рад}}}.$$

Совместив начало координат  $O$  с вершиной параболоида, совместив ось  $Oz$  с  $l$  и располагая ось  $Oz$  в плоскости, содержащей линию  $\mathcal{L}$ , обнаруживаем, что вектор-функция, годограф которой есть гребневая линия (при сохранении главных членов разложения в ряд Маклорена), имеет вид

$$\mathbf{r} = \{t, 0, f(t)\}, \quad 0 \leq t \leq R, \quad (1.1)$$

где 
$$f(t) = Mt^2 + Nt^4 \quad (1.2)$$

и 
$$M = \frac{K^2 + 1}{4F(1 - K^2L)}, \quad N = \frac{K^2L(K^2 + 1)^3}{16F^3(6K^2L - 1)(1 - K^2L)^3}. \quad (1.3)$$

Здесь 
$$K = \text{tg} \frac{\pi}{n}.$$

В [4] приведены условия надежности модели. Заметим, что модель сохраняет надежность и при менее строгих ограничениях. Именно, вводя в рассмотрение величины

$$\tilde{M} = 4FM - 1, \quad \tilde{N} = (6K^2L - 1),$$

обнаруживаем, что условия (2.4) в [4] можно заменить более слабым требованием:

$$(M > 0) \& (N < 0) \& (\tilde{M} > 0) \& (4NF^3 + 4MF - 1 > 0).$$

Функция (1.2) с коэффициентами (1.3) найдена в [4] путем приближенного решения дифференциального уравнения (2.5) в [4] с надлежащими начальными условиями. Указанное уравнение перепишем в виде

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - \Phi(f(t)) = 0. \quad (1.4)$$

Описание оператора  $\Phi(f(t))$  ясно из [4], а также, что величины  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ ,  $\Phi(f(t))$  имеют одинаковую размерность. Следовательно, значение левой части равенства при подстановке  $f(t)$  из (1.2) имеет инвариантный смысл, если нет изменения масштабирования по координатным осям. Тем не менее имеет смысл оценить относительное значение разности (1.4), поскольку видно масштабное изменение значения указанной разности при подстановке (1.2) в зависимости от конструктивных параметров. Имея в виду цели практики, укажем, что для величин, имеющих размерность длины, числовые значения указаны в метрах.

В качестве эталона приняты следующие значения конструктивных параметров:

$$F_0 = 8, R_0 = 6, L_0 = 1, \{n_1, n_2, \dots, n_9\} = \{12, 14, 16, 20, 24, 26, 28, 32, 36\}. \quad (1.5)$$

Соответственно

$$K_i = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n_i}, \quad M_i = \frac{K_i^2 + 1}{4F_0(1 - K_i^2 L_0)}, \quad N_i = \frac{K_i^2 L_0 (K_i^2 + 1)^3}{16F_0^3 (6K_i^2 L_0 - 1)(1 - K_i^2 L_0)^3},$$

$$f_i(t) = M_i t^2 + N_i t^4, \quad i = 1, \dots, 9.$$

Невязку решения дифференциального уравнения (1.4) для различных значений  $i$  оценим безразмерным выражением

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} - \Phi(f_i(t))}{\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2}}.$$

Среднее квадратичное значение (СКО) невязки

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{R_0} \int_0^{R_0} \varepsilon_i^2 dt}.$$

Вычислив требуемые интегралы, получаем табл. 1 значений СКО невязки.

Таблица 1

Значения СКО невязки решения уравнения (1.4) для различных  $n_i$

$i$	$n_i$	$\delta_i$
1	12	0,02937
2	14	0,01880
3	16	0,01444
4	20	0,01077
5	24	0,00924
6	26	0,00878
7	28	0,00843
8	32	0,00795
9	36	0,00764

Автор склонен полагать решение дифференциального уравнения (1.4) в виде (1.2) удовлетворительным. Функции, с которыми мы будем иметь дело, содержат (кроме прочего) величины  $M$  и  $N$ . Ввиду чрезмерной громоздкости указанных функций, возникает необходимость их аппроксимировать (скажем, разложением в отрезок ряда Маклорена). В этой связи интересно выяснить, как ведут себя  $M$  и  $N$  при различных значениях конструктивных параметров. Ответ на этот вопрос содержится в рис. 1 и рис. 2. Разумеется, полученная информация не доказывает целесообразность применения разложений наших функций по  $M$  и  $N$ , но обосновывает надежду на успех. Полученные аппроксимации будут проверены на предмет близости к приближаемым функциям. Ясно, что порядок разложения по степеням  $M$  следует указывать большим, нежели порядок разложения по  $N$ .

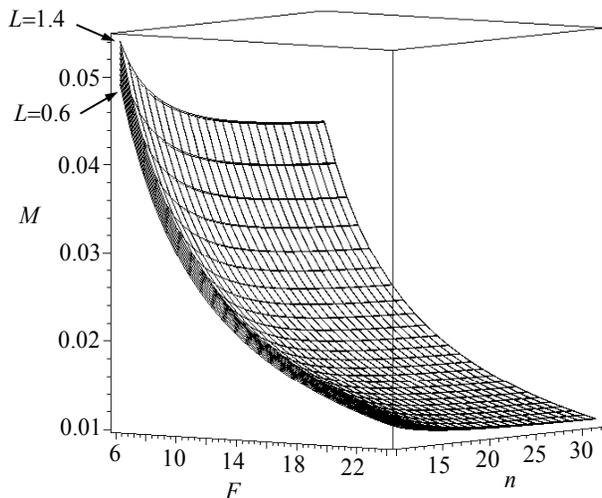


Рис. 1. Зависимость  $M$  от  $F$  и  $n$   
при  $L \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$

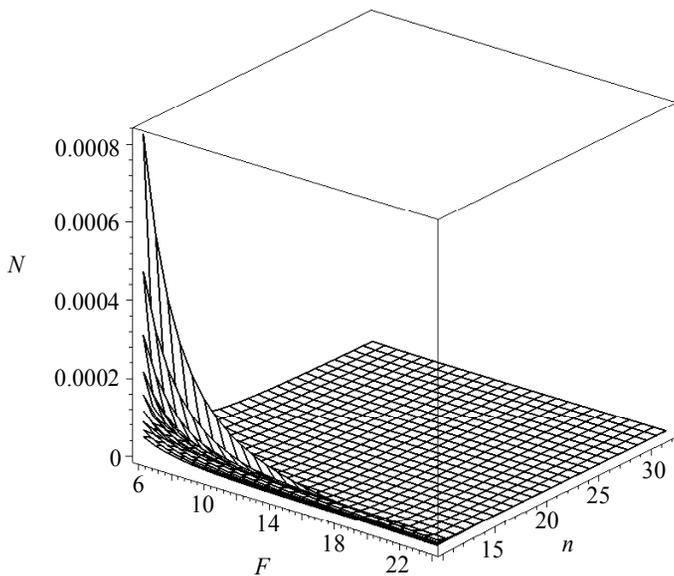


Рис. 2. Зависимость  $N$  от  $F$  и  $n$   
при  $L \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$   
(очередность снизу вверх)

## 2. Основная функция и дефект отображения

Основная функция, сопоставляемая паре поверхностей, введена в [3] в качестве меры отличия отображения одной поверхности на другую от изометрического отображения. В основе конструкции – две поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , отнесенные к

криволинейным координатам  $u, v$ . Именно,

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v) \in C^1, \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v) \in C^1, \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Из соображений технической природы предпочтительно говорить не о соответствии указанных поверхностей, а об отображении одной из них на другую:

$$\varphi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2. \quad (2.1)$$

Первые квадратичные формы суть дифференциальные формы

$$ds_1^2 = E_1(u, v)du^2 + 2F_1(u, v)dudv + G_1(u, v)dv^2,$$

$$ds_2^2 = E_2(u, v)du^2 + 2F_2(u, v)dudv + G_2(u, v)dv^2.$$

Для отображения поверхности  $\Sigma_2$  на поверхность  $\Sigma_1$  безразмерная характеристика отклонения отображения от изометрического определена *основной функцией* [3]

$$\Lambda(u, v) = \left( 1 - \frac{E_2(u, v)G_2(u, v) - F_2(u, v)^2}{E_1(u, v)G_1(u, v) - F_1(u, v)^2} \right)^2 + \left( 2 + \frac{-E_2(u, v)G_1(u, v) - E_1(u, v)G_2(u, v) + 2F_2(u, v)F_1(u, v)}{E_1(u, v)G_1(u, v) - F_1(u, v)^2} \right)^2.$$

Дефект  $K(f)$  отображения (2.1) определен в [3] соотношением

$$K(f) \triangleq \frac{\iint_{(D)} \Lambda \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} dudv}{S_2}.$$

Для гребневой линии (1.1) элемент длины дуги имеет вид

$$\sqrt{1 + 4M^2 t^2 + 16Mt^4 N + 16N^2 t^6}. \quad (2.2)$$

Функцию (2.2) аппроксимируем полиномом

$$1 + 8Mt^4 N + 2M^2 t^2. \quad (2.3)$$

Относительная погрешность  $Q$  аппроксимации (2.3) для различных значений  $n$  из (1.5) представлена на рис. 3.

Есть основания считать аппроксимацию приемлемой. Длина дуги гребневой линии соответственно оценивается функцией

$$DL = t + \frac{8}{5}Mt^5 N + \frac{2}{3}M^2 t^3.$$

Как предложено в [4], деформированный благодаря «матрасному эффекту» лепесток  $\Sigma_2$  задается вектор-функцией

$$\mathbf{R}_2 = \left\{ t + \frac{u^2 L f f''}{2(1+(f')^2)^2}, u, f - \frac{u^2 L f''}{2(1+(f')^2)^2} \right\}, \quad (2.4)$$

и  $f$  определена в (1.2).

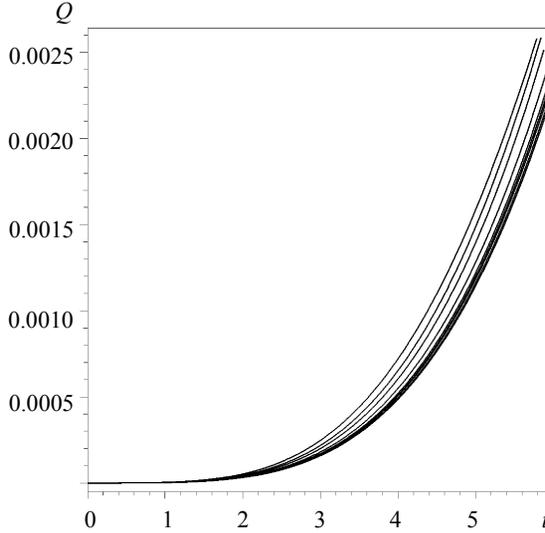


Рис. 3. Относительная погрешность аппроксимации (2.3) для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

Таким образом,

$$\Sigma_2 : \mathbf{R}_2 = \left\{ t + \frac{u^2 L (2M + 12Nt^2)(2Mt + 4Nt^3)}{2(1 + 4M^2t^2 + 16Mt^4N + 16N^2t^6)^2}, u, \right. \\ \left. Mt^2 + Nt^4 - \frac{u^2 L (2M + 12Nt^2)}{2(1 + 4M^2t^2 + 16Mt^4N + 16N^2t^6)^2} \right\}, \quad 0 \leq t \leq R. \quad (2.5)$$

Для  $\mathbf{R}_2(u, v)$  строится полиномиальное приближение (по аргументу  $N$  порядок разложения в ряд полагаем равным 8, а по аргументу  $M$  равным 16).

Плоский кусок сетеполотна  $\Sigma_1$ , отображаемый на  $\Sigma_2$ , зададим следующей вектор-функцией:

$$\mathbf{R}_1 = \{DL, u, 0\} = \left\{ t + \frac{8}{5}Mt^5N + \frac{2}{3}M^2t^3, u, 0 \right\}, \\ 0 \leq t \leq R, \quad -Kt \leq u \leq Kt. \quad (2.6)$$

Пара вектор-функций  $\mathbf{R}_1(u, v)$ ,  $\mathbf{R}_2(u, v)$  определяет отображение (2.1). Ясно, что прямые, соединяющие соответствующие точки двух определенных выше поверхностей, параллельны плоскости  $xOz$ , а сферическое изображение конгруэнции указанных прямых [6, с. 19] есть линия. Таким образом, конгруэнция – цилиндрическая [6]. Представление о соответствии наших поверхностей получим, соединив прямолинейными отрезками их соответствующие точки. Часть указанной конструкции приведена на рис. 4.

Вычислим дефект этого отображения. Следует иметь в виду, что исследуемое здесь отображение не есть результат решения оптимизационной задачи. Практически наверняка существует отображение, реализующее меньшее значение дефекта

та. Таким образом, речь идет о верхней оценке дефекта. Уточнение значения верхней оценки (тем более – отыскание точной верхней границы) представляется весьма сложной задачей.

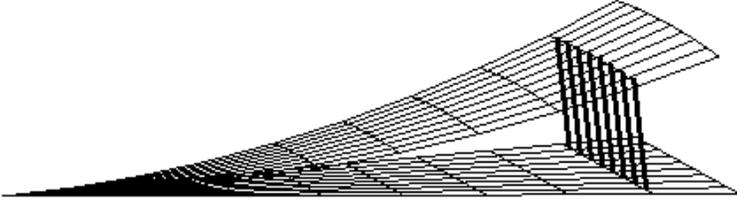


Рис. 4. Фрагмент соответствия поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$

Вычисление основной функции для  $\mathbf{R}_2$  весьма затруднено. Применим для неё полиномиальное приближение. По аргументу  $N$  порядок разложения в ряд полагаем равным 6, а по аргументу  $M$  равным 12. Примем для аппроксимирующей вектор-функции символику

$$\widetilde{\mathbf{R}}_2 = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}. \quad (2.7)$$

Тогда, в частности,

$$\tilde{x} = t - 2Ltu^2 a_x,$$

где

$$\begin{aligned} a_x = & -M^2 + 8t^2M^4 - 48t^4M^6 + 256t^6M^8 - 1280t^8M^{10} - 12t^4N^2 + 384t^{10}N^4 - \\ & -24576t^{14}MN^5 - 8t^2MN + 96t^4M^3N + 384t^6N^2M^2 - 768t^6M^5N - 4800t^8N^2M^4 + \\ & + 5120t^8M^7N + 640t^8MN^3 + 43008t^{10}N^2M^6 - 15360t^{10}M^3N^3 - 322560t^{12}N^2M^8 - \\ & -26880t^{12}N^4M^2 + 172032t^{12}NM^{11} + 200704t^{12}M^5N^3 + 2162688t^{14}N^2M^{10} - \\ & -3148873728t^{22}N^5M^9 + 29771169792t^{24}N^5M^{11} + 573440t^{14}N^4M^4 - \\ & -7741440t^{16}N^4M^6 + 16220160t^{16}M^9N^3 + 1032192t^{16}M^3N^5 - 119275520t^{18}N^3M^{11} - \\ & -20643840t^{18}N^5M^5 + 81100800t^{18}N^4M^8 - 721616896t^{20}N^4M^{10} + \\ & + 285474816t^{20}M^7N^5 - 1966080t^{14}M^7N^3 - 30720t^{10}M^9N, \end{aligned}$$

$$\tilde{y} = u,$$

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & -u^2LM + (M + 8u^2LM^3 - 6u^2LN)t^2 + \\ & + (-48u^2LM^5 + N + 80Nu^2LM^2)t^4 + 32u^2Lt^6b_z, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} b_z = & -21NM^4 + 4992Nt^6M^{10} - 8320t^6M^7N^2 + 4160t^6N^3M^4 - \\ & -312t^6MN^4 - 40t^2M^9 + 192t^4M^{11} + 6t^2N^3 - 144t^8N^5 + 7MN^2 - \\ & -108t^2M^3N^2 - 340480t^{12}N^5M^4 + 57600t^8M^9N^2 + \\ & + 1056t^4M^5N^2 - 152320t^{10}M^5N^4 - 264t^4N^3M^2 - 880t^4NM^8 + \\ & + 13056t^{10}N^5M^2 + 9600t^8M^3N^4 - 44800t^8N^3M^6 + 1751040t^{12}M^7N^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+5419008t^{14}N^5M^6 - 65286144t^{16}N^5M^8 - 16558080t^{14}N^4M^9 + \\
&+137166848t^{16}N^4M^{11} - 365568t^{10}N^2M^{11} - 2996224t^{12}N^3M^{10} + \\
&+656015360t^{18}N^5M^{10} + 144t^2NM^6 + 391680t^{10}N^3M^8 + 8M^7.
\end{aligned}$$

На рис. 5 представлены графики основной функции для различных значений числа лепестков. График точного представления основной функции – на рис. 6.

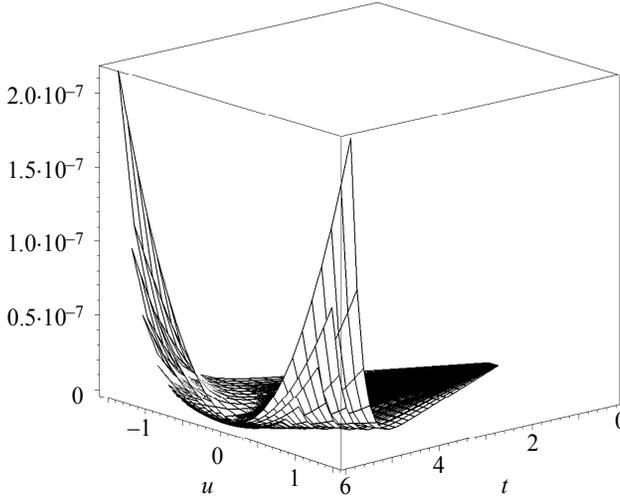


Рис. 5. Относительная погрешность аппроксимации (2.7) – модуль разности вектор-функций для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

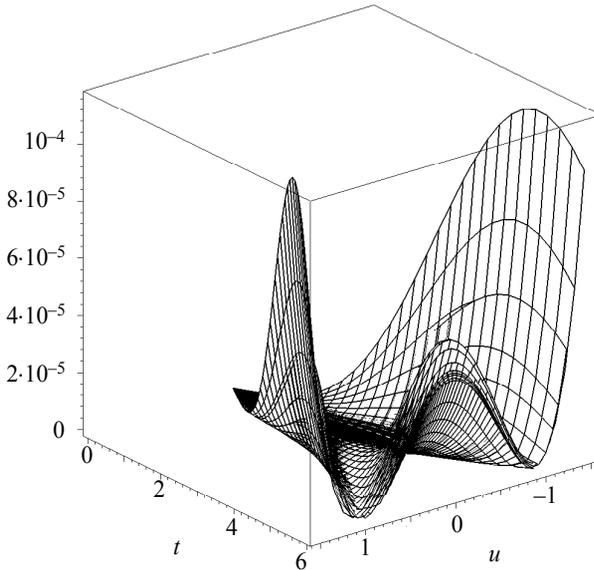


Рис.6. Точные значения основной функции для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

Для основной функции также строится полиномиальное приближение. О его качестве свидетельствует рис. 7.

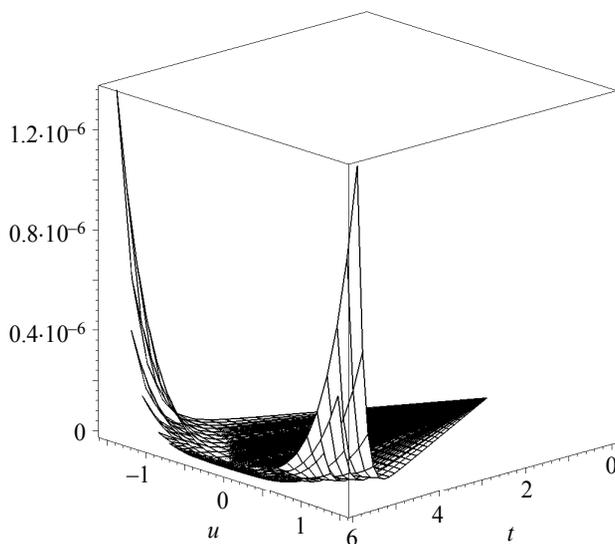


Рис. 7. Абсолютная погрешность аппроксимации основной функции для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

Аналогично (рис. 8) строится полиномиальное приближение для элемента площади деформированного лепестка.

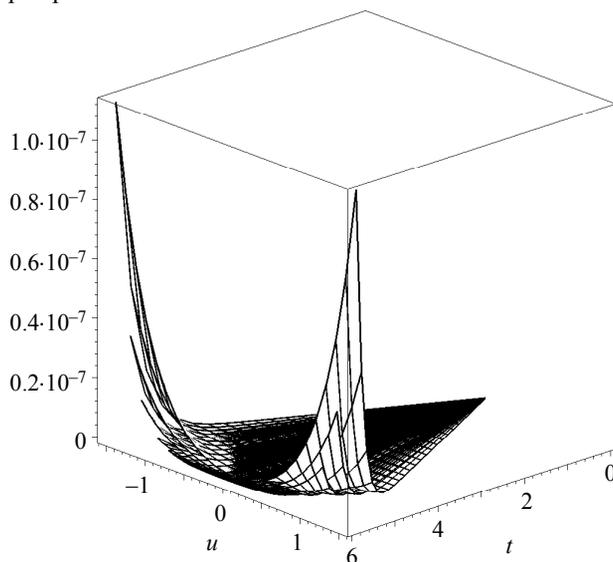


Рис. 8. Относительная погрешность аппроксимации элемента площади деформированного лепестка для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

Построенные аппроксимации позволяют вычислить дефект отображения для различных значений параметра  $n$  (число лепестков). Вычисления проведены для значений  $F = F_0 = 8$ ,  $R = R_0 = 6$ ,  $L = L_0 = 1$ . Алгоритм, запрограммированный в среде Maple, позволяет провести вычисления для любых допустимых значений указанных конструктивных параметров. Стоит отметить, что уровень ресурсоемкости программы определяется двумя параметрами: константой Digits, задающей разрядность обрабатываемых чисел, и порядком  $m_0$  разложения функций в степенной ряд. Начиная со значения Digits=12, дальнейшее увеличение значения этой константы не сказывается на результате (хотя растет продолжительность вычислений). В то же время, при  $m_0 > 10$  требуются слишком большие ресурсы компьютера. Результат вычислений представлен в табл. 2.

Таблица 2

**Дефект отображения для различных значений числа лепестков при  $F = 8$ ,  $R = 6$ ,  $L = 1$**

Число лепестков	Дефект отображения
12	0,000015
14	$0.8662 \cdot 10^{-5}$
16	$0.6117 \cdot 10^{-5}$
20	$0.5018 \cdot 10^{-5}$
24	$0.5281 \cdot 10^{-5}$
26	$0.5501 \cdot 10^{-5}$
28	$0.5720 \cdot 10^{-5}$
32	$0.6113 \cdot 10^{-5}$
36	$0.6431 \cdot 10^{-5}$

### 3. Второе отображение

Здесь мы строим отображение

$$\Phi_2 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2,$$

отличающееся от (2.1) заданием иной вектор-функции, годограф которой есть кусок плоскости. Оставим неизменной первую компоненту вектор-функции (2.6), а в качестве второй компоненты примем длину  $s$  дуги  $\nu$ -линии деформированного лепестка (2.5). Заметим, что

$$s = \int_0^u \sqrt{\frac{u^2 L^2 (2M + 12Nt^2)^2 (2Mt + 4Nt^3)^2}{(1 + 4M^2 t^2 + 16Mt^4 N + 16N^2 t^6)^4} + 1 + \frac{u^2 L^2 (2M + 12Nt^2)^2}{(1 + 4M^2 t^2 + 16Mt^4 N + 16N^2 t^6)^4}} dt.$$

Применяя полиномиальное приближение, приходим к оценке искомой величины в виде

$$\tilde{s} = u + 8u^3 L^2 M t^2 N + \frac{2}{3} u^3 L^2 M^2. \quad (3.1)$$

График относительной погрешности аппроксимации (3.1) представлен на рис. 9.

Теперь плоскую область, отображаемую на деформированный лепесток, зададим вектор-функцией

$$\mathbf{R}_1 = \left( t + \frac{8}{5} M t^5 N + \frac{2}{3} M^2 t^3, u + 8u^3 L^2 M t^2 N + \frac{2}{3} u^3 L^2 M^2, 0 \right), \quad 0 \leq t \leq R, \quad -Kt \leq u \leq Kt.$$

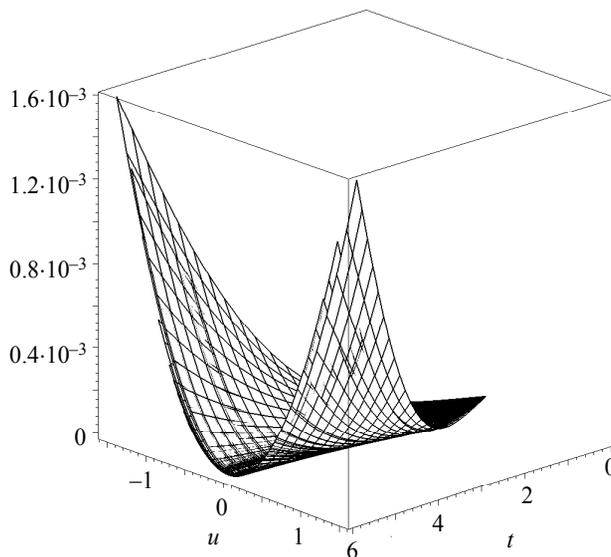


Рис. 9. Относительная погрешность аппроксимации (3.1) для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

Конгруэнция прямых, соединяющих соответствующие точки, теперь не цилиндрическая [6]. Сферическое изображение этой конгруэнции для значений конструктивных параметров (1.5) имеет вид (рис. 10):

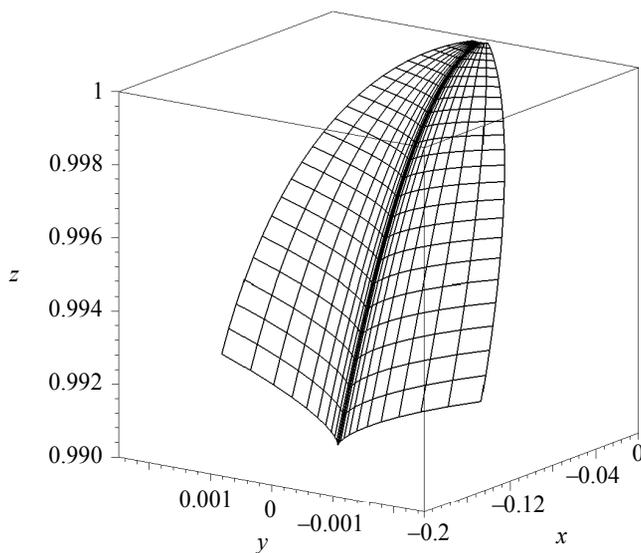


Рис. 10. Сферическое изображение конгруэнции лучей, соединяющих соответствующие точки

Полиномиальное приближение основной функции здесь не приводим. Отметим, что относительная погрешность аппроксимации описывается графиком (рис. 11).

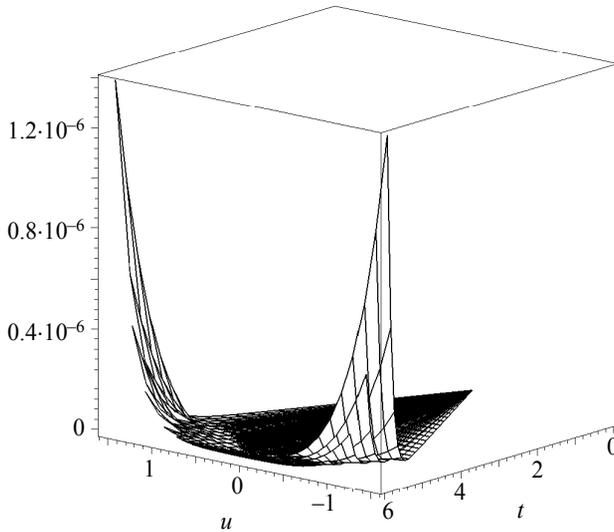


Рис. 11. Абсолютная погрешность аппроксимации основной функции для значений  $n_1, \dots, n_9$  из (1.5) (очередность сверху вниз)

Мы не приводим данные о точности аппроксимации прочих функций. Ограничимся констатацией того факта, что точность не хуже, чем при рассмотрении первого отображения (табл. 3).

Таблица 3

Дефект отображения для различных значений числа лепестков при  $F=8, R=6, L=1$

Число лепестков	Дефект отображения
12	$0.7466 \cdot 10^{-5}$
14	$0.7755 \cdot 10^{-5}$
16	$0.7710 \cdot 10^{-5}$
20	$0.7676 \cdot 10^{-5}$
24	$0.7707 \cdot 10^{-5}$
26	$0.7728 \cdot 10^{-5}$
28	$0.7748 \cdot 10^{-5}$
32	$0.7785 \cdot 10^{-5}$
36	$0.7814 \cdot 10^{-5}$

Сведем в одну таблицу данные о дефекте отображения для примеров, приведенных в [3], и примеров, рассмотренных здесь (при  $F = 8, R = 6, L = 1$ ) (табл. 4).

Таблица 4

Дефект отображения для различных схем раскроя сетеполотна  
числа лепестков при  $F = 8$ ,  $R = 6$ ,  $L = 1$ 

Число лепестков	Выкраивание плоским листом	Выкраивание лепестком с закругленными краями	Для отображения $\varphi_1$	Для отображения $\varphi_2$
12	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.2833 \cdot 10^{-9}$	0.000015	$0.7466 \cdot 10^{-5}$
14	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.1529 \cdot 10^{-9}$	$0.8662 \cdot 10^{-5}$	$0.7755 \cdot 10^{-5}$
16	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.8665 \cdot 10^{-10}$	$0.6117 \cdot 10^{-5}$	$0.7710 \cdot 10^{-5}$
20	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.3672 \cdot 10^{-10}$	$0.5018 \cdot 10^{-5}$	$0.7676 \cdot 10^{-5}$
24	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.1771 \cdot 10^{-10}$	$0.5281 \cdot 10^{-5}$	$0.7707 \cdot 10^{-5}$
26	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.1286 \cdot 10^{-10}$	$0.5501 \cdot 10^{-5}$	$0.7728 \cdot 10^{-5}$
28	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.9558 \cdot 10^{-11}$	$0.5720 \cdot 10^{-5}$	$0.7748 \cdot 10^{-5}$
32	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.5603 \cdot 10^{-11}$	$0.6113 \cdot 10^{-5}$	$0.7785 \cdot 10^{-5}$
36	$0.1805 \cdot 10^{-6}$	$0.3498 \cdot 10^{-11}$	$0.6431 \cdot 10^{-5}$	$0.7814 \cdot 10^{-5}$

## 4. Выводы

Содержание последней таблицы позволяет считать, что дефект отображения – довольно чувствительный инструмент сравнения отображений, отвечающих различным схемам раскроя сетеполотна, способный, к тому же, отмечать искажение формы сетеполотна, обусловленное «матрасным эффектом» [5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 5–14.
3. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Об одном инварианте отображения поверхностей применительно к раскрою сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 13–24.
4. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 1. С. 97–106.
5. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
6. Фиников С.П. Теория конгруэнций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 528 с.

Статья поступила 10.01.2016 г.

*Bukhtyak M.S. DEFECT OF MAPPING FOR DEFORMED SEGMENT OF METALLIC MESH*  
DOI 10.17223/19988621/40/1

Metallic mesh tailoring aimed to form a parabolic reflector is identified with biunique reflection of plain's part on a part of a paraboloid of revolution. In previous publications the authors have developed an analytical tool to assess the quality of metallic mesh tailoring for reflector antennas of any design. Its basis is a function (called the main function) the value of which depends on the ratio of first quadratic forms defining a local quadratic metric of a piece of plane and that for the corresponding segment of the metallic mesh. The integral mean of this function is called

the display defect. The examples of display effect to assess the quality of metallic mesh tailoring for axisymmetric reflector are provided in previous publications. They, however, do not take into account the effect of reverse deflection of the metallic mesh between adjacent ribs of the bearing structure – the so-called mattress effect. This article fills this gap. A vector function has been built for the metallic mesh exposed to mattress effect. The functions by which the problem of display defect is solved are very complex. Polynomial approximations are constructed for them with estimated accuracy of approximation. The algorithm has been developed to calculate the display defect for practically important values for technological parameters of the axisymmetric reflector. Among these parameters are the focal parameter of the parent paraboloid, radius of the cutting out cylinder, and number of sectors.

Keywords: parabolic reflector, metallic mesh, mapping of surfaces, defect of surface-to surface mapping, deformation of metallic mesh.

*BUKHTYAK Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1.
2. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2 [Geometric modelling of metallic mesh tailoring for axisymmetric refltor. Part 2]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1.
3. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2016) Ob odnom invariante otobrazheniya poverkhnostey primenitel'no k raskroyu setepolotna [On an invariant of surface mapping as applied to metallic mesh tailoring] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(39). pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988621/39/2.
4. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical modeling of parabolic reflector's metallic mesh deformation. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). (In print)
5. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvyaemye zerkal'nye anteny zontichnogo tipa* [Deployable Mirror Umbrella-Type Antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
6. Finikov S.P. (1950) *Teoriya kongruentsiy* [Theory of Congruences]. Moscow; Leningrad: GITTL.

УДК 517.589, 517.926.4  
DOI 10.17223/19988621/40/2

Т.П. Гой

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ПОСТРОЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ВОЗРАСТАЮЩИХ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ ФАКТОРИАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Изучаются неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные в виде степенных рядов с использованием возрастающих и центральных факториальных степеней. Установлены некоторые свойства этих функций, приведены их графики. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются новые функции.

**Ключевые слова:** *возрастающая факториальная степень, центральная факториальная степень, интегралы Френеля, обобщенная гипергеометрическая функция, задача Коши.*

Математические модели многих процессов и явлений часто приводят к задачам, точные решения которых классическими методами получить невозможно. Увеличение количества неэлементарных функций приводит к расширению круга задач, которые могут быть решены в замкнутом виде. При этом особое внимание уделяется исследованию новых функций с целью их использования для решения сложных теоретических и практических задач.

Тригонометрические функции  $\cos x$ ,  $\sin x$  задаются как степенные ряды

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

определенные с помощью факториалов (убывающих факториальных степеней). Заменяя в этих рядах убывающие факториальные степени соответствующими возрастающими факториальными степенями, авторы [1] изучили новые неэлементарные функции действительной переменной  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Sin } x$ . Аналогично, в [2, 3] представлено исследование функций действительной переменной  $\text{Cosc } x$ ,  $\text{Sinc } x$ , построенных с помощью центральных факториальных степеней. Показано, в частности, что новые функции являются решениями обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго (функции  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Sin } x$ ) и третьего (функции  $\text{Cosc } x$ ,  $\text{Sinc } x$ ) порядка с полиномиальными коэффициентами.

В [4] рассмотрены неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные в виде степенных рядов с использованием возрастающих факториальных степеней. Автором [5–8] изучаются некоторые другие подобного рода функции действительного и комплексного переменного.

### 1. Факториальные степени

Для произвольных чисел  $x \in \mathbf{R}$  и  $m \in \mathbf{N}$  факториальной степенью  $m$  с шагом  $k \in \mathbf{R}$  называют выражение [9]

$$x^{m\{k\}} = x(x+k)(x+2k) \cdots (x+(m-1)k).$$

Факториальную степень называют *возрастающей*, если  $k > 0$ , и *убывающей*, если  $k < 0$ . В случае  $k = 0$  имеем обыкновенную степень, т.е.  $x^{m\{0\}} = x^m$ . По умолчанию,  $x^{0\{k\}} = 1$ . Возрастающую факториальную степень  $m$  с шагом 1 и убывающую факториальную степень  $m$  с шагом  $(-1)$  будем обозначать через  $x^{\bar{m}}$  и  $x^{\underline{m}}$  соответственно, т.е.

$$x^{\bar{m}} \equiv x^{m\{1\}} = x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} \equiv x^{m\{-1\}} = x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-m+1).$$

Очевидно, что  $n! = 1^{\bar{n}} = n^{\underline{n}}$ .

Основные свойства возрастающих и убывающих факториальных степеней выражаются с помощью формул

$$\bar{\Delta} x^{\bar{m}} = mx^{\bar{m}-1}, \quad \Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m}-1},$$

где  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$  – разность функции  $f(x)$ , а  $\bar{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1)$  – опаздывающая разность этой функции.

Комбинаторный закон двойственности возрастающих и убывающих факториальных степеней выражается с помощью равенств

$$(-m)^{n\{-k\}} = (-1)^n m^{n\{k\}}, \quad (-m)^{n\{k\}} = (-1)^n m^{n\{-k\}}.$$

Для произвольных чисел  $x \in \mathbf{R}$  и  $m \in \mathbf{N}$  *центральной факториальной степени*  $m$  с шагом  $k > 0$  называют выражение [10]

$$x^{m[k]} = x \left( x + \frac{mk}{2} - k \right) \left( x + \frac{mk}{2} - 2k \right) \cdot \dots \cdot \left( x - \frac{mk}{2} + k \right),$$

причем  $x^{0[k]} = 1$ . Центральную факториальную степень  $m$  с шагом 1 будем обозначать через  $x^{[m]}$ , например

$$x^{5[1]} \equiv x^{[5]} = \left( x - \frac{3}{2} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) x \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x + \frac{3}{2} \right),$$

$$x^{6[1]} \equiv x^{[6]} = (x-2)(x-1)x^2(x+1)(x+2).$$

Для центральных факториальных степеней с шагом 1 имеет место формула

$$\delta x^{[m]} = mx^{[m-1]},$$

аналогичная соответственным формулам для возрастающих и убывающих факториальных степеней. Здесь  $\delta f(x) = f(x+1/2) - f(x-1/2)$  – центральная разность функции  $f(x)$ .

Легко показать, что  $x^{[m]} = x(x+m/2-1)^m$ . Другие свойства и некоторые применения факториальных степеней можно найти, например, в [11] – [14].

Отметим, что возрастающим, убывающим и центральным факториальным степеням в комбинаторном анализе часто присуща двойственность: если комбинаторная задача приводит к тождеству с использованием, например, убывающих факториальных степеней, то обычно существует содержательная комбинаторная задача, приводящая к двойственному тождеству с участием возрастающих или центральных факториальных степеней.

**2. Неэлементарные функции  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Sin } x$ ,  $\text{Cosc } x$ ,  $\text{Sinc } x$ , определенные с помощью возрастающих и центральных факториальных степеней**

Обозначим через  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Sin } x$ ,  $\text{Cosc } x$ ,  $\text{Sinc } x$  функции действительного переменного, определенные с помощью степенных рядов [1, 2]:

$$\text{Cos } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{2n}} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots ; \quad (1)$$

$$\text{Sin } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} x^{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^5}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \dots ; \quad (2)$$

$$\text{Cosc } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{[2n]}} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots ; \quad (3)$$

$$\text{Sinc } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{[2n+1]}} x^{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{\frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^5}{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{13}{2}} - \dots \quad (4)$$

Легко убедиться, что

$$\text{Cos } x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!} x^{2n}, \quad \text{Sin } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(4n-3)!} x^{2n-1}; \quad (5)$$

$$\text{Cosc } x = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3n-1)!} x^{2n}, \quad \text{Sinc } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (2n-1)!!}{(6n+1)!!} x^{2n+1}. \quad (6)$$

В [1 – 3] доказано, что

$$\text{Cos } x = 1 + 2\sqrt{x} \left( \cos \frac{x}{4} S \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right) - \sin \frac{x}{4} C \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right); \quad (7)$$

$$\text{Sin } x = 2\sqrt{x} \left( \cos \frac{x}{4} C \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right) + \sin \frac{x}{4} S \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right), \quad (8)$$

где  $C(p) = \int_0^p \cos t^2 dt$ ,  $S(p) = \int_0^p \sin t^2 dt$  – интегралы Френеля [15], а также установлена связь между функциями  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Sin } x$ ,  $\text{Cosc } x$ ,  $\text{Sinc } x$  и обобщенной гипергеометрической функцией  ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$  с помощью формул

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{6} \cdot {}_1F_2 \left( 1; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{x^2}{64} \right), \quad \text{Sin } x = x \cdot {}_1F_2 \left( 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{x^2}{64} \right),$$

$$\text{Cosc } x = 1 - \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2 \left( 1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27} \right), \quad \text{Sinc } x = x \cdot {}_1F_2 \left( 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27} \right).$$

Напомним, что обобщенная гипергеометрическая функция

$${}_sF_q(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_q; z)$$

определяются как сумма обобщенного гипергеометрического ряда [16]

$${}_sF_q(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\bar{n}} \cdot \dots \cdot a_s^{\bar{n}}}{b_1^{\bar{n}} \cdot \dots \cdot b_q^{\bar{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

в области его сходимости, где  $a_1^{\bar{n}}, \dots, a_s^{\bar{n}}, b_1^{\bar{n}}, \dots, b_q^{\bar{n}}$  – возрастающие факториальные степени с шагом 1.

На рис. 1 – 4 приведены графики функций  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Sin } x$ ,  $\text{Cosc } x$ ,  $\text{Sinc } x$ . На рис. 1, 2 пунктиром проведены параболы  $(y+1)^2 = \pm \pi x$  и  $y^2 = \pm \pi x$  соответственно, а на рис. 3, 4 – соответственно параболы  $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \pm \frac{7\pi x}{12}$  и  $y^2 = \pm \frac{7\pi x}{12}$ .

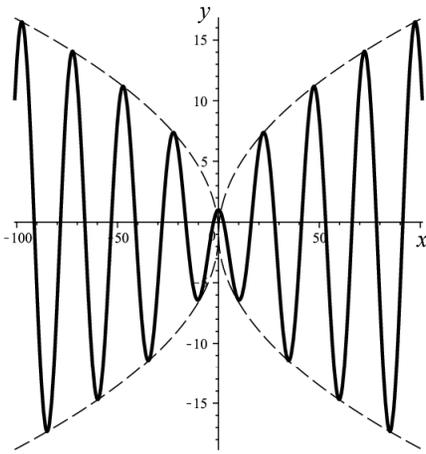


Рис. 1. График функции  $y = \text{Cos } x$

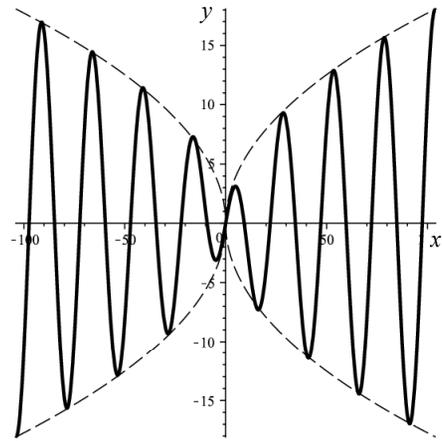


Рис. 2. График функции  $y = \text{Sin } x$

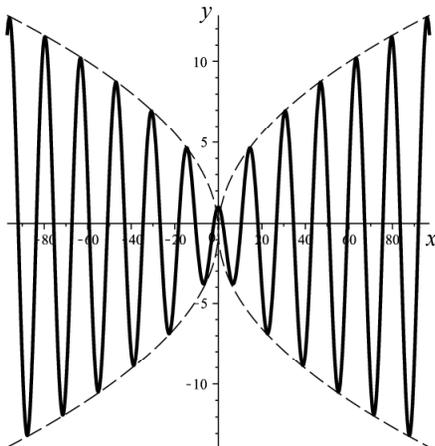


Рис. 3. График функции  $y = \text{Cosc } x$

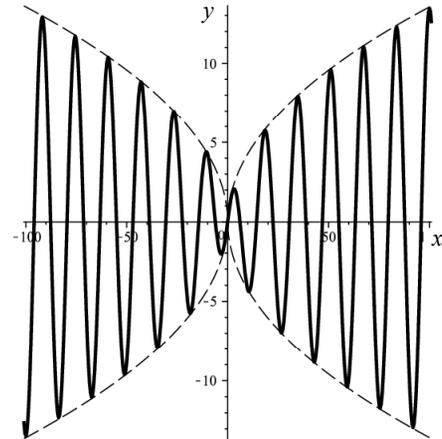


Рис. 4. График функции  $y = \text{Sinc } x$

**3. Неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные с помощью возрастающих факториальных степеней**

Обозначим через  $S_1(x)$ ,  $C_1(x)$  функции

$$C_1(x) = \int_0^x \text{Cos } t^2 dt ; \tag{9}$$

$$S_1(x) = \int_0^x \text{Sin } t^2 dt. \tag{10}$$

Из формул (9), (10), учитывая (5), получаем разложения функций  $S_1(x)$ ,  $C_1(x)$  в степенные ряды, абсолютно сходящиеся на всей числовой оси:

$$C_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!(4n+1)} x^{4n+1} ; \tag{11}$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(4n-3)!(4n-1)} x^{4n-1}. \tag{12}$$

Графики функций  $C_1(x)$ ,  $S_1(x)$  приведены на рис. 5, 6.

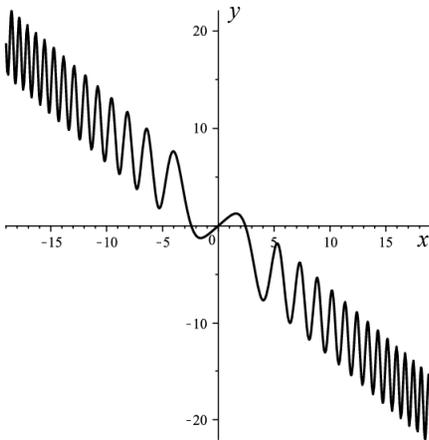


Рис. 5. График функции  $y = C_1(x)$

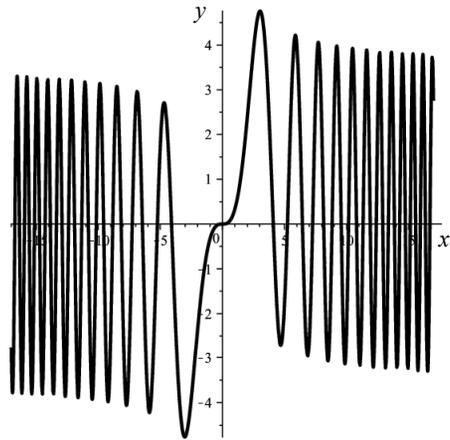


Рис. 6. График функции  $y = S_1(x)$

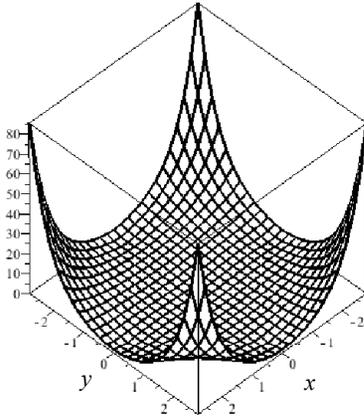
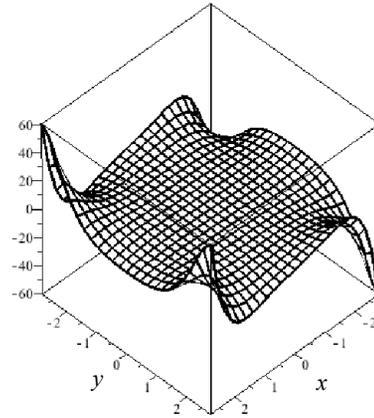
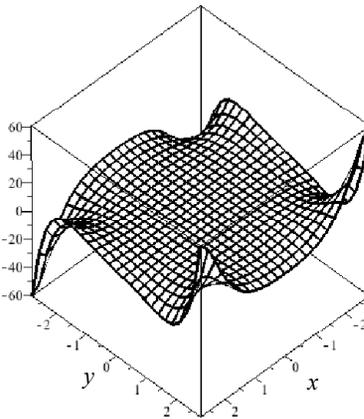
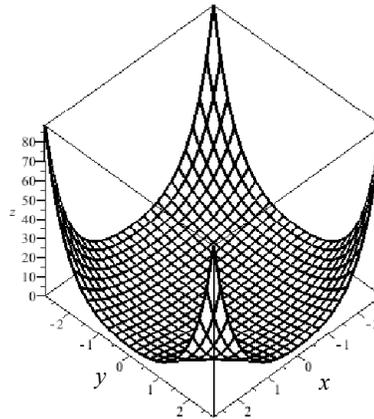
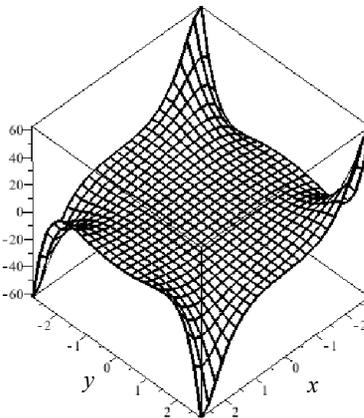
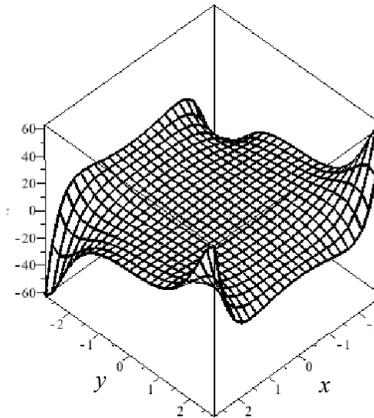
**Теорема 1.** [4] Для всех  $x \in \mathbf{R}$  имеют место тождества

$$C_1(x) = 4 \left( \cos \frac{x^2}{4} C \left( \frac{x}{2} \right) + \sin \frac{x^2}{4} S \left( \frac{x}{2} \right) \right) - x,$$

$$S_1(x) = 4 \left( \sin \frac{x^2}{4} C \left( \frac{x}{2} \right) - \cos \frac{x^2}{4} S \left( \frac{x}{2} \right) \right),$$

где  $C(p)$ ,  $S(p)$  – интегралы Френеля.

На рис. 7 – 12 представлены графики функций комплексного переменного  $C_1(z)$ ,  $S_1(z)$ , где  $z = x + iy$ .

Рис. 7. График функции  $|C_1(z)|$ Рис. 8. График функции  $\text{Re}(C_1(z))$ Рис. 9. График функции  $\text{Im}(C_1(z))$ Рис. 10. График функции  $|S_1(z)|$ Рис. 11. График функции  $\text{Re}(S_1(z))$ Рис. 12. График функции  $\text{Im}(S_1(z))$

Покажем, что функции  $C_1(x)$  и  $S_1(x)$  являются решениями линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

**Теорема 2.** *Функции  $C_1(x)$  и  $S_1(x)$  – решения соответственно таких задач Коши:*

$$4xy'' - 4y' + x^3y = -x^4 - 4, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1; \quad (13)$$

$$4xy'' - 4y' + x^3y = 4x^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \quad (14)$$

**Доказательство.** То, что функции  $C_1(x)$  и  $S_1(x)$  удовлетворяют начальные условия из (13), (14), следует соответственно из формул (11) и (12). Докажем, что эти функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

Обозначим

$$\alpha(x) \equiv \sin(x^2/4)S(x/2) + \cos(x^2/4)C(x/2),$$

$$\beta(x) \equiv \sin(x^2/4)C(x/2) - \cos(x^2/4)S(x/2).$$

Тогда из формулы (9), учитывая (7), находим производные функции  $C_1(x)$ :

$$C_1'(x) = 1 - 2x\beta(x), \quad C_1''(x) = -2\beta(x) - x^2\alpha(x). \quad (15)$$

Теперь дифференциальное уравнение из (13) легко получаем, исключая из (7), (15) выражения  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ .

То, что функция  $S_1(x)$  является частным решением дифференциального уравнения из (14), доказывается аналогично, путем исключения выражений  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  из (8) и следующих формул для производных функции  $S_1(x)$ :

$$S_1'(x) = 2x\alpha(x), \quad S_1''(x) = x - x^2\beta(x) + 2\alpha(x). \quad \blacksquare$$

#### 4. Неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные с помощью центральных факториальных степеней

Обозначим через  $C_2(x)$  и  $S_2(x)$  функции

$$C_2(x) = \int_0^x \text{Cosc} t^2 dt; \quad (16)$$

$$S_2(x) = \int_0^x \text{Sinc} t^2 dt. \quad (17)$$

Из (16), (17), учитывая формулы (6), получаем следующие разложения функций  $C_2(x)$ ,  $S_2(x)$  в степенные ряды:

$$C_2(x) = x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3n-1)!(4n+1)} x^{4n+1}; \quad (18)$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 16^n (2n)!(3n)!}{n!(6n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}, \quad (19)$$

абсолютно сходящиеся при каждом действительном  $x$ .

Графики функций  $C_2(x)$  и  $S_2(x)$  приведены на рис. 13 и 14.

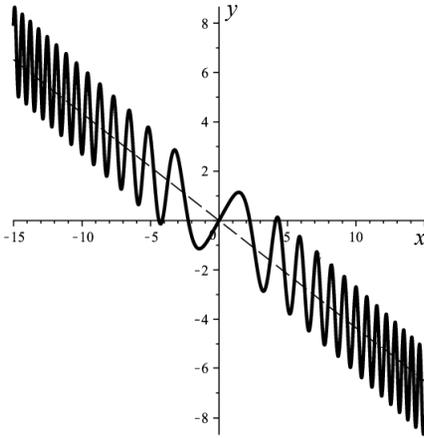


Рис. 13. График функции  $y = C_2(x)$

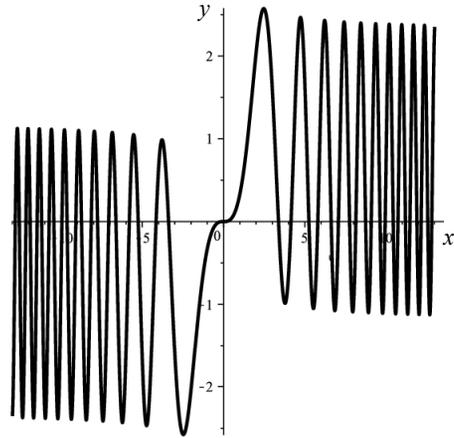


Рис. 14. График функции  $y = S_2(x)$

Следующая теорема устанавливает связь между интегральными функциями  $C_2(x)$ ,  $S_2(x)$  и обобщенной гипергеометрической функцией  ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$ .

**Теорема 3.** Для всех  $x \in \mathbf{R}$  имеют место тождества

$$C_2(x) = x - \frac{x^5}{20} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right); \quad (20)$$

$$S_2(x) = \frac{x^3}{3} \cdot {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right). \quad (21)$$

*Доказательство.* Для функции  $C_2(x)$ , учитывая (18), получаем соотношения

$$\begin{aligned} C_2(x) &= x - \frac{x^5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(3n+2)!(4n+5)} x^{4n} = \\ &= x - \frac{x^5}{20} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4n+1}{4}}{\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \dots \cdot \frac{3n+1}{3}\right) \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \dots \cdot \frac{3n+2}{3}\right) \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{13}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4n+1}{4}\right)} \left(-\frac{x^4}{27}\right)^n \right) = \\ &= x - \frac{x^5}{20} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n \left(\frac{5}{4}\right)^{\bar{n}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{9}{4}\right)^n n!} \left(-\frac{x^4}{27}\right)^n = x - \frac{x^5}{20} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right). \end{aligned}$$

Для функции  $S_1(x)$ , учитывая (19), имеем

$$S_2(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 16^n (2n)!(3n)!}{n!(6n+1)!(4n+3)} x^{4n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4n-1}{4}}{\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{11}{6} \cdot \dots \cdot \frac{6n-1}{6}\right) \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{13}{6} \cdot \dots \cdot \frac{6n+1}{6}\right) \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4n+3}{4}\right)} \left(-\frac{x^4}{27}\right)^n = \\
 &= \frac{x^3}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \bar{1}^{\bar{n}}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{7}{6}\right)^n \left(\frac{7}{4}\right)^n n!} \left(-\frac{x^4}{27}\right)^n = \frac{x^3}{3} \cdot {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

На рис. 15 – 20 представлены графики функций комплексного переменного  $C_2(z)$ ,  $S_2(z)$ , где  $z = x + iy$ .

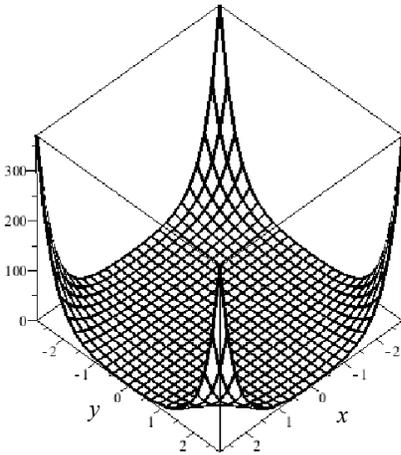


Рис. 15. График функции  $|C_2(z)|$

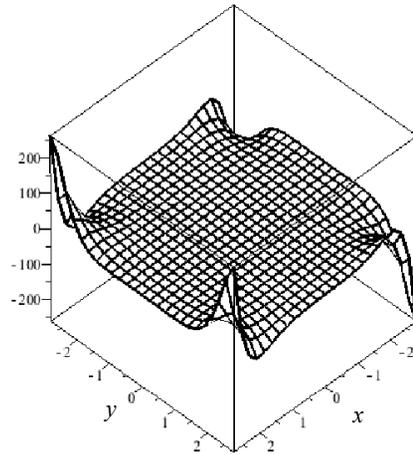


Рис. 16. График функции  $\text{Re}(C_2(z))$

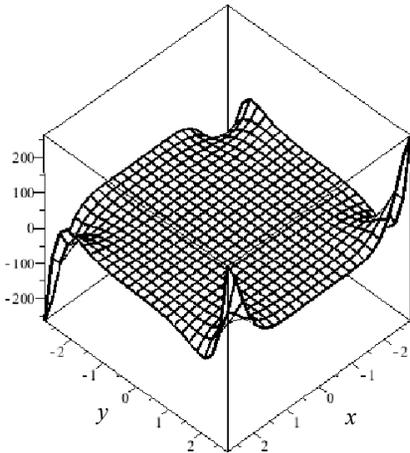


Рис. 17. График функции  $\text{Im}(C_2(z))$

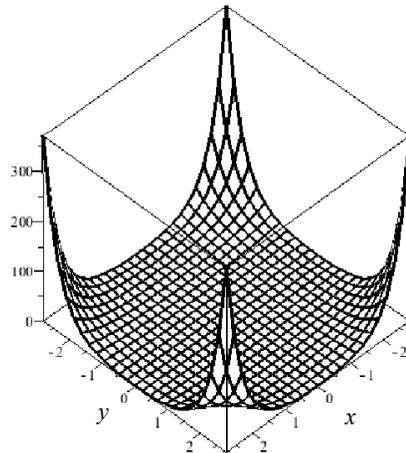
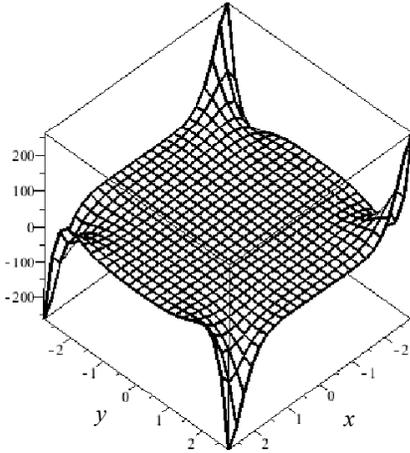
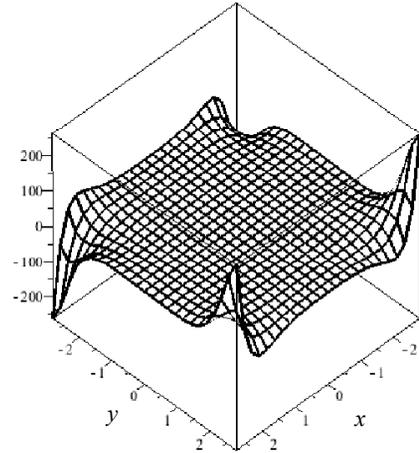


Рис. 18. График функции  $|S_2(z)|$

Рис. 19. График функции  $\text{Re}(S_2(z))$ Рис. 20. График функции  $\text{Im}(S_2(z))$ 

Покажем, что функции  $C_2(x)$ ,  $S_2(x)$  являются решениями задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

**Теорема 4.** *Функции  $C_2(x)$  и  $S_2(x)$  – решения соответственно таких задач Коши:*

$$\begin{aligned} 27x^3y^{IV} - 135x^2y''' + (16x^5 + 339)y'' - 384y' &= -384, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 27x^3y^{IV} - 81x^2y''' + (16x^5 + 177x)y'' + (32x^4 - 192)y' &= 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2. \end{aligned} \quad (23)$$

**Доказательство.** Из (18) и (19) следует, что функции  $C_2(x)$  и  $S_2(x)$  удовлетворяют начальные условия из (22), (23). Покажем, что эти функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

Обобщенная гипергеометрическая функция  ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$ , через которую в соответствии с (20) выражается функция  $C_2(x)$ , удовлетворяет обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка [16]

$$(\sigma(\sigma + b_1 - 1)(\sigma + b_2 - 1)(\sigma + b_3 - 1) - z(\sigma + a_1)(\sigma + a_2))w(z) = 0,$$

где  $\sigma$  – дифференциальный оператор  $\sigma = z \frac{d}{dz}$ . Таким образом, функция

$$w(z) = {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; z\right)$$

из (20) является решением дифференциального уравнения

$$\left(\sigma\left(\sigma + \frac{1}{3}\right)\left(\sigma + \frac{2}{3}\right)\left(\sigma + \frac{5}{4}\right) - z(\sigma + 1)\left(\sigma + \frac{5}{4}\right)\right)w(z) = 0,$$

а учитывая, что

$$\sigma^2 = z \frac{d}{dz} + z^2 \frac{d^2}{dz^2}, \quad \sigma^3 = z \frac{d}{dz} + 3z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z^3 \frac{d^3}{dz^3},$$

$$\sigma^4 = z \frac{d}{dz} + 7z^2 \frac{d^2}{dz^2} + 6z^3 \frac{d^3}{dz^3} + z^4 \frac{d^4}{dz^4},$$

после несложных преобразований убеждаемся, что она удовлетворяет дифференциальное уравнение

$$z^3 w^{IV} + \frac{33}{4} z^2 w''' + \left( \frac{137}{9} z - z^2 \right) w'' + \left( 5 - \frac{13}{4} z \right) w' - \frac{5}{4} w = 0. \quad (24)$$

Произведем в (24) замену независимого переменного по формуле  $z = -x^4/27$ . Тогда

$$w'_z = -\frac{27}{4x^3} w'_x, \quad w''_z = \frac{729}{16x^7} (xw''_x - 3w'_x), \quad w'''_z = -\frac{19683}{64x^{11}} (x^2 w'''_x - 9xw''_x + 21w'_x),$$

$$w^{IV}_z = \frac{531441}{256x^{15}} (x^3 w^{IV}_x - 18x^2 w'''_x + 111xw''_x - 231w'_x)$$

и, подставляя в (24), получаем, что функция  $w(x) = {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right)$  – частное решение линейного однородного уравнения

$$27x^3 w^{IV} + 405x^2 w''' + (16x^5 + 1554)w'' + (1386 + 160x^4)w' + 320x^3 w = 0.$$

Наконец, подставляя в последнее уравнение  $w(x) = 20x^{-5}(1 - C_2(x))$ , после упрощений получаем, что функция  $y = C_2(x)$  удовлетворяет дифференциальное уравнение из (22).

Покажем теперь, что функция  $S_2(x)$  является решением дифференциального уравнения из (23). Аналогично предыдущему доказывается, что обобщенная гипергеометрическая функция

$$u(z) = {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; z\right)$$

является решением дифференциального уравнения

$$z^3 u^{IV} + \frac{27}{4} z^2 u''' + \left( \frac{83}{9} z - z^2 \right) u'' + \left( \frac{245}{144} - \frac{11}{4} z \right) u' - \frac{3}{4} u = 0,$$

а функция  $u(x) = {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right)$  – решением дифференциального уравнения

$$27x^3 u^{IV} - 81x^2 u''' + (16x^5 + 177)u'' + (32x^4 - 192)u' = 0.$$

После замены в последнем уравнении  $w(x) = 3x^{-3}S_2(x)$  (с учетом (21)), получаем, что функция  $S_2(x)$  удовлетворяет уравнения из (23). ■

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гой Т.П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості // Буковинський мат. журн. 2013. Т. 1. № 1–2. С. 28–33.
2. Гой Т.П. Неелементарні функції, породжені центральними факторіальними степенями // Вестник Харьковського нац. університета імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». 2014. № 1133. С. 131–139.
3. Гой Т.П. О центральных факториальных степенях и некоторых их применениях // Межвуз. сб. науч. трудов «Математика и математическое образование. Теория и практика». Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2014. Вып. 9. С. 30–35.
4. Goy T.P., Zatorsky R.A. New integral functions generated by rising factorial powers // Карпатские мат. публикации. 2013. Т. 5. № 2. С. 217–224.
5. Goy T.P., Zatorsky R.A. On a nonelementary function of the Dawson's integral type // Вестник Киевского нац. университета имени Т. Шевченко. Серія «Фізико-математическіе науки». 2014. Вып. 1. С. 15–19.
6. Гой Т.П. Інтегралі від функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями // Тавричеський вестник інформатики і математики. 2014. Т. 24. № 1. С. 14–22.
7. Гой Т.П. Нові функції, означені при допомозі факторіальних степенів // Математическое и компьютерное моделирование. Серія «Фізико-математическіе науки». 2014. Вып. 11. С. 18–29.
8. Гой Т.П. О дифференциальных уравнениях функций, определенных с помощью возрастающих и центральных факториалов // Материалы Междунар. конф. «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». Ч. 1. Воронеж: ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2014. С. 58–61.
9. Jordan C. Calculus of Finite Differences. N.Y.: Chelsea Publishing, 1939.
10. Steffensen J.F. On the definition of the central factorial // J. Inst. Actuaries. 1933. V. 64. No. 2. P. 165–168.
11. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
12. Заторський Р.А., Малайчук О.Р. Факторіальні степені та трикутні матриці // Карпатские мат. публикации. 2009. Т.1. № 2. С. 217–224.
13. Comtet L. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reider Publishing, 1974.
14. Roman S. The Umbral Calculus. Academic Press, 1984.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука. 1973. 294 с.

Статья поступила 12.09.2015 г.

Goy T.P. SPECIAL FUNCTIONS GENERATED BY RISING AND CENTRAL FACTORIAL POWERS

DOI 10.17223/19988621/40/2

Replacing in the well-known series  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ,  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  falling factorial powers ( $m! = m^{\overline{m}}$ ) by rising and central factorial powers ( $m^{\overline{m}}$  and  $m^{[m]}$  respectively), we obtain real functions  $\text{Cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}}$ ,  $\text{Sin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}$ ,  $\text{Cos}^c x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}$ , and  $\text{Sinc} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}}$ .

In this paper, we consider the non-elementary Fresnel-type integral functions  $C_1(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$ ,  $S_1(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ ,  $C_2(x) = \int_0^x \operatorname{Cosct}^2 dt$ ,  $S_2(x) = \int_0^x \operatorname{Sinct}^2 dt$ . We prove the following formulas:

$$C_1(x) = 4 \left( \cos \frac{x^2}{4} C\left(\frac{x}{2}\right) + \sin \frac{x^2}{4} S\left(\frac{x}{2}\right) \right) - x, \quad S_1(x) = 4 \left( \sin \frac{x^2}{4} C\left(\frac{x}{2}\right) - \cos \frac{x^2}{4} S\left(\frac{x}{2}\right) \right),$$

$$C_2(x) = x - \frac{x^5}{20} {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right), \quad S_2(x) = \frac{x^3}{3} {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right),$$

where  $C(p)$  and  $S(p)$  are Fresnel integrals and  ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$  is a generalized hypergeometric function.

We also show that functions  $C_1(x)$ ,  $S_1(x)$  are solutions of the ordinary linear second-order differential equations  $4xy'' - 4y' + x^3y = -x^4 - 4$  and  $4xy'' - 4y' + x^3y = 4x^2$ , respectively, and the functions  $C_2(x)$ ,  $S_2(x)$  are solutions of the ordinary linear fourth-order differential equations  $27x^3y^{IV} - 135x^2y''' + (16x^5 + 339)y'' - 384y' = -384$  and  $27x^3y^{IV} - 81x^2y''' + (16x^5 + 177x)y'' + (32x^4 - 192)y' = 0$ , respectively.

Keywords: rising factorial power, central factorial power, Fresnel integrals, generalized hypergeometric function, Cauchy problem.

GOY Taras Petrovych (Candidate of Physics and Mathematics, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine)

E-mail: tarasgoy@yahoo.com

#### REFERENCES

1. Goy T.P., Zatorsky R.A. (2013) New functions generated by rising factorial powers and their properties. *Bukovyna Math. Journal*. 1(1–2). pp. 28–33. (In Ukrainian)
2. Goy T.P. (2014) Non-elementary functions generated by central factorial powers. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 1133. pp. 131–139. (In Ukrainian)
3. Goy T.P. (2014) O tsentral'nykh faktorial'nykh stepenyakh i nekotorykh ikh primenenyakh [On central factorial powers and some of their applications]. In: *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika* [Mathematics and mathematical education. Theory and practice]. Yaroslavl: YSTU. 9. pp. 30–35.
4. Goy T.P., Zatorsky R.A. (2013) New integral functions generated by rising factorial powers. *Carpathian Math. Publ.* 5(2). pp. 217–224. DOI: 10.15330/cmp.5.2.217-224.
5. Goy T.P., Zatorsky R.A. (2014) On a nonelementary function of the Dawson's integral type. *Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University. Series: Physics and Mathematics*. 1. pp. 15–19.
6. Goy T.P. (2014) Integrals of functions generated by rising factorial powers. *Taurida Journal of Computer Science and Mathematics*. 24(1). pp. 14–22. (in Ukrainian)
7. Goy T.P. (2014) New functions defined by factorial powers. *Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and mathematical sciences*. 11. pp. 18–29. (in Ukrainian)
8. Goy T.P. (2014) O differentsial'nykh uravneniyakh funktsiy, opredelennykh s pomoshch'yu vozrastayushchikh i tsentral'nykh faktorialov [On differential equations of functions defined by rising and central factorials]. In: *Proc. of the International Conference "Sovremenne problemy analiza dinamicheskikh sistem. Prilozheniya v tekhnike i tekhnologiyakh"* [Proc. Intern. Conf. "Modern Problems of the Analysis of Dynamic Systems. Appendices in Equipment Technologies"]. Pt 1. Voronezh: VSFA. pp. 58–61. DOI: 10.12737/4702.

- 
9. Jordan C. (1939) *Calculus of Finite Differences*. N.Y.: Chelsea Publishing.
  10. Steffensen J.F. (1933) On the definition of the central factorial. *J. Inst. Actuaries*. 64(2). pp. 165–168.
  11. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. (1994) *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley.
  12. Zatorsky R.A., Malarchuk A.R. (2009) Factorial powers and triangular matrices. *Carpathian Math. Publ.* 1(2). pp. 161–171. (In Ukrainian)
  13. Comtet L. (1974) *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. D. Reider Publishing.
  14. Roman S. (1984) *The Umbral Calculus*. Academic Press.
  15. Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.) (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publication.
  16. Bateman H., Erdelyi A. (1953) *Higher Transcendental Functions. Vol. 1*. McGraw-Hill.

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/40/3

В.М. Мисяков

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С РЕГУЛЯРНЫМ ЦЕНТРОМ  
КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ

Рассматриваются абелевы группы, имеющие регулярное кольцо эндоморфизмов (регулярный центр кольца эндоморфизмов).

**Ключевые слова:** абелева группа, регулярное кольцо эндоморфизмов, регулярный центр кольца эндоморфизмов.

Основные исследования по изучению абелевых групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, связаны с работами К.М. Rangaswamy [1], L. Fuchs и К.М. Rangaswamy [2], которые свели изучение таких групп к редуцированным группам. В теореме 4 данной работы рассматривается этот случай. Описание редуцированных групп конечного ранга без кручения, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, было предложено S. Glaz и W. Wickless в [3].

Интерес к исследованию абелевых групп, имеющих регулярный центр кольца эндоморфизмов, связан в первую очередь с проблемой, поставленной в монографии [4]: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». В работе [5] изучение таких групп было сведено к редуцированному случаю, а в теореме 2 предлагаемой работы рассматривается данный случай.

Центр кольца эндоморфизмов абелевых групп, а также связанные с этим вопросы изучались в ряде работ. Так, в [6] описание центра кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы сводится к описанию некоторых подколец центра кольца эндоморфизмов ее части без кручения. В [7] рассматривается строение аддитивной группы регулярного модуля. Изучаются абелевы группы, являющиеся регулярными модулями над своими кольцами эндоморфизмов. В [8] доказывается регулярность кольца эндоморфизмов по радикалу самой малой  $sp$ -группы. В [9] содержатся как известные, так и новые результаты о гомоморфизмах, близких к регулярным. В [10] изучаются абелевы группы с центральными идемпотентами, а в [11] – с перестановочными мономорфизмами.

Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми, а все кольца являются унитарными предкольцами [12]. Введем следующие обозначения:  $E(G)$  – кольцо эндоморфизмов группы  $G$ ;  $C(E(G))$  – центр кольца  $E(G)$ ;  $T(G)$  – периодическая часть группы  $G$ ;  $T_p(G)$  –  $p$ -компонента периодической части группы  $G$ ; прямую сумму и произведение групп обозначаем символами  $\oplus$  и  $\prod$  соответственно. Все понятия, которые не поясняются здесь, являются стандартными их можно найти, например, в монографиях [4, 12–14].

Напомним, что предкольцо  $A$  называется регулярным, если  $A$  – регулярная мультипликативная полугруппа (т. е. если  $a \in aAa$  для любого  $a \in A$ ) [12].

Нам потребуется следующая теорема, доказанная в [5]:

**Теорема 1 [5].** Для группы  $G$  следующие условия справедливы:

1) Если  $G$  – нередуцированная группа, то  $C(E(G))$  – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа  $G$  удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

а)  $G$  – делимая группа без кручения;

б)  $G = A \oplus D$ , где  $A$  – элементарная группа, а  $D$  – делимая группа без кручения.

2) Если  $G$  – редуцированная группа и  $C(E(G))$  – регулярное кольцо, то  $T(G)$  – элементарная группа,  $G/T(G)$  – делимая группа и

$$\bigoplus_{p \in P} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p \in P} T_p(G).$$

**Определение.** Подкольцо  $B$  кольца  $A$  назовём регулярно разрешимым в  $A$ , если для любого  $b \in B$  из того, что  $b \in bAb$ , следует, что  $b \in bBb$ .

**Замечание.** Очевидно, что если  $B$  – регулярное подкольцо кольца  $A$ , то  $B$  регулярно разрешимо в  $A$ .

В следующей теореме рассматриваются редуцированные группы, имеющие регулярный центр кольца эндоморфизмов.

**Теорема 2.** Если  $G$  – редуцированная группа, то  $C(E(G))$  – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1)  $T(G)$  – элементарная группа;

2)  $C(E(G))$  изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца  $E(T(G))$ .

**Доказательство. Необходимость.** Справедливость условия 1) следует из теоремы 1. Докажем, что выполняется условие 2). Рассмотрим кольцевой гомоморфизм  $\varphi: E(G) \rightarrow E(T(G))$ , ставящий в соответствие каждому  $\alpha \in E(G)$  его ограничение на  $T(G)$ . Предположим, что существует ненулевой гомоморфизм  $\beta \in E(G)$  такой, что  $\beta \in \ker \varphi$ . Тогда  $\text{im}(\beta)$  является делимой группой (как эпиморфный образ делимой группы  $G/T(G)$  (см. теорему 1)), что противоречит редуцированности группы  $G$ . Следовательно,  $\varphi$  – мономорфизм.

Пусть  $i: C(E(G)) \rightarrow E(G)$  – тождественное вложение, тогда  $\text{im}(\varphi i)$  – регулярно разрешимое подкольцо кольца  $E(T(G))$ .

**Достаточность.** Так как  $T(G)$  – элементарная группа, то  $E(T(G))$  – регулярное кольцо [4, следствие 18.2] и, следовательно,  $C(E(G))$  – регулярное кольцо по условию 2).

Напомним результат, полученный Фуксом и Рангасвами [1, 2] для абелевых групп, имеющих регулярно разрешимое кольцо эндоморфизмов.

**Теорема 3 ([1, 2]).** Для группы  $G$  следующие условия справедливы:

а) Если  $G$  – периодическая группа, то кольцо  $E(G)$  регулярно тогда и только тогда, когда  $G$  – элементарная группа.

б) Если  $G$  – нередуцированная группа, то  $E(G)$  – регулярно разрешимое кольцо тогда и только тогда, когда  $G$  – прямая сумма делимой группы без кручения и элементарной группы.

в) Если  $G$  – редуцированная группа и  $E(G)$  – регулярно разрешимое кольцо, то  $T(G)$  – элементарная группа,  $G/T(G)$  – делимая группа и

$$\bigoplus_{p \in P} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p \in P} T_p(G).$$

Поскольку нередуцированные группы, имеющие регулярное кольцо эндоморфизмов, в теореме 3 описаны, то в следующей теореме рассмотрим только редуцированный случай.

**Теорема 4.** Если  $G$  – редуцированная группа, то  $E(G)$  – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1)  $T(G)$  – элементарная группа;
- 2)  $E(G)$  изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца  $E(T(G))$ .

**Доказательство.** При использовании условия в) теоремы 3 доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Rangaswamy K.M.* Abelian groups with endomorphism images of special types // *J. Algebra*. 1967. V. 6. P. 271–280.
2. *Fuchs L., Rangaswamy K.M.* On generalized regular rings // *Math. Z.* 1968. V. 107. P. 71–81.
3. *Glaz S. and Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // *Comm. Algebra*. 1994. V. 22. No. 4. P. 1161–1176.
4. *Крылов П.А., Михалёв А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Томский государственный университет, 2002. 464 с.
5. *Карпенко А.В., Мисяков В.М.* О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы // *Фундамент. и прикл. матем.* 2007. Т. 13. Вып. 3. С. 39–44.
6. *Крылов П.А., Классен Е.Д.* Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // *Сиб. матем. журн.* 1999. Т. 40. № 5. С. 1074–1085.
7. *Крылов П.А., Пахомова Е.Г.* Абелевы группы и регулярные модули // *Матем. заметки*. 2001. Т. 69. № 3. С. 402–411.
8. *Крылов П.А.* Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2007. № 1. С. 17–27.
9. *Абызов А.Н., Туганбаев А.А.* Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // *Фундамент. и прикл. матем.* 2010. Т. 16. № 7. С. 3–38.
10. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // *Алгебра и логика*. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
11. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами // *Сиб. матем. журн.* 2013. Т. 54. № 5. С. 1182–1187.
12. *Туганбаев А.А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
13. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.
14. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.

Статья поступила 11.02.2016 г.

*Misyakov V.M.* ABELIAN GROUPS WITH A REGULAR CENTER OF THE ENDOMORPHISM RING

DOI 10.17223/19988621/40/3

The article is related to the following fundamental problem: "What rings are endomorphism rings of abelian groups?", as well as to the problem of describing abelian groups for which the center of endomorphism ring possesses one or another property. In particular, we consider abelian groups whose endomorphism rings are regular. L. Fuchs and K.M. Rangaswamy described abelian groups with a regular endomorphism ring by use of the reduced case. If a group is reduced and has a regular endomorphism ring, then its periodic part is elementary, its factor group is divisible, and the group is embedded in a direct product of the  $p$ -components of its periodic part, as is shown by those authors. Similar results were obtained for groups the centers of endomorphism rings of which are regular by A. V. Karpenko and V.M. Misyakov. In this article, some necessary

and sufficient conditions for the existence of a regular endomorphism ring (of a regular center of the endomorphism ring) of a reduced Abelian group are found.

Keywords: abelian group, regular endomorphism ring, regular center of the endomorphism ring.

MISYAKOV Victor Mikhajlovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: mvm@mail.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Rangaswamy K.M. (1967) Abelian groups with endomorphism images of special types. *J. Algebra*. 6. pp. 271–280.
2. Fuchs L., Rangaswamy K.M. (1968) On generalized regular rings. *Math. Z.* 107. pp. 71–81.
3. Glaz S., Wickless W. (1994) Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups. *Comm. Algebra*. 22(4). pp. 1161–1176. DOI: 10.1080/00927879408824899.
4. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. (2003) *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. DOI 10.1007/978-94-017-0345-1.
5. Karpenko A.V., Misyakov V.M. (2008) On regularity of the center of the endomorphism ring of an abelian group. *Journal of Mathematical Sciences*. 154(3). pp. 304–307. DOI 10.1007/s10958-008-9186-0
6. Krylov P.A., Klassen E.D. (1999) The center of the endomorphism ring of a split mixed abelian group. *Siberian Mathematical Journal*. 40(5). pp. 907–916.
7. Krylov P.A., Pakhomova E.G. (2001) Abelian groups and regular modules. *Mathematical Notes*. 69(3). pp. 364–372.
8. Krylov P.A. (2007) Radikaly kolets endomorfizmov abelevykh grupp [The radicals of endomorphism rings of abelian groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1. pp. 17–27.
9. Abyzov A.N., Tuganbaev A.A. (2012) Homomorphisms close to regular and their applications. *Journal of Mathematical Sciences*. 183(3). pp. 275–298. DOI: 10.1007/s10958-012-0813-4.
10. Chekhlov A.R. (2009) *Abelian groups with normal endomorphism rings*. *Algebra and Logic*. 48(4). pp. 298–308. DOI: 10.1007/s10469-009-9056-y.
11. Chekhlov A.R. (2013) On abelian groups with commuting monomorphisms. *Siberian Mathematical Journal*. 54(5). pp. 946–950. DOI: 10.1134/S0037446613050182.
12. Tuganbaev A.A. (2009) *Teoriya kolets. Arifmeticheskie moduli i kol'tsa* [Ring Theory. Arithmetical Modules and Rings]. Moscow: MCNMO Publ.
13. Fuchs L. (1970) *Infinite Abelian Groups. V. I*. New York – London: Academic Press.
14. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian Groups. V. II*. New York – London: Academic Press.

УДК 512.543

DOI 10.17223/19988621/40/4

А.В. Розов

**ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ  $\pi$ -ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ<sup>1</sup>**

Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел,  $G$  – свободное произведение групп  $A$  и  $B$  с собственными нормальными объединенными подгруппами  $H$  и  $K$ . И пусть  $A$  – нильпотентная группа конечного ранга, а  $H$  содержится в ее центре. Доказано, что группа  $G$  аппроксимируема конечными  $\pi$ -группами тогда и только тогда, когда группы  $A$ ,  $B$ ,  $A/H$  и  $B/K$  аппроксимируемы конечными  $\pi$ -группами.

**Ключевые слова:** нильпотентная группа конечного ранга, центр группы, обобщенное свободное произведение групп, аппроксимируемость конечными  $\pi$ -группами.

**1. Введение**

Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел,  $F_\pi$  – класс всех конечных  $\pi$ -групп. Напомним, что конечная группа называется  $\pi$ -группой, если все простые делители ее порядка принадлежат множеству  $\pi$ . Группа  $G$  называется аппроксимируемой конечными  $\pi$ -группами (или, короче,  $F_\pi$ -аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента  $x$  из  $G$  существует гомоморфизм группы  $G$  на некоторую конечную  $\pi$ -группу, при котором образ элемента  $x$  отличен от единицы. В случае, когда множество  $\pi$  состоит из одного простого числа  $p$ , говорят об  $F_p$ -аппроксимируемости.

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные группы,  $H$  и  $K$  – подгруппы групп  $A$  и  $B$  соответственно,  $\varphi$  – изоморфизм подгруппы  $H$  на подгруппу  $K$ . И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

– свободное произведение групп  $A$  и  $B$  с подгруппами  $H$  и  $K$ , объединенными относительно изоморфизма  $\varphi$ . Напомним, что группа  $G$  порождается всеми порождающими групп  $A$  и  $B$  и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида  $h\varphi = h$ , где  $h \in H$ .

Очевидным необходимым условием  $F_\pi$ -аппроксимируемости группы  $G$  является  $F_\pi$ -аппроксимируемость групп  $A$  и  $B$ . Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным. Для изучения  $F_\pi$ -аппроксимируемости группы  $G$  будем накладывать на группы  $A$  и  $B$  и подгруппы  $H$  и  $K$  некоторые дополнительные ограничения.

Далее будем требовать, чтобы подгруппы  $H$  и  $K$  содержались в центрах групп  $A$  и  $B$  соответственно. При таком ограничении может быть доказано, что если  $A$  и  $B$  – конечные  $\pi$ -группы, то группа  $G$   $F_\pi$ -аппроксимируема (см. доказанное ниже

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

предложение 3). Аналогичный результат может быть получен, если ослабить требование конечности групп  $A$  и  $B$  до требования конечности объединенных подгрупп  $H$  и  $K$ : свободное произведение двух  $F_\pi$ -аппроксимируемых групп с конечными центральными объединенными подгруппами является  $F_\pi$ -аппроксимируемой группой (см. предложение 4). Группа  $G$  оказывается  $F_\pi$ -аппроксимируемой и в том случае, когда группы  $A$  и  $B$   $F_\pi$ -аппроксимируемы, а фактор-группы  $A/H$  и  $B/K$  являются конечными  $\pi$ -группами (см. предложение 5).

Заметим, что в последнем утверждении требование конечности фактор-групп  $A/H$  и  $B/K$  не может быть заменено на более слабое требование  $F_\pi$ -аппроксимируемости этих фактор-групп. Соответствующий пример будет приведен в четвертом разделе данной статьи. Тем не менее в случае, когда  $A$  – нильпотентная группа конечного ранга, имеет место следующий критерий.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – свободное произведение групп  $A$  и  $B$  с нормальными объединенными подгруппами  $H$  и  $K$ , не совпадающими с группами  $A$  и  $B$ . И пусть  $A$  – нильпотентная группа конечного ранга, а  $H$  содержится в ее центре. Тогда группа  $G$   $F_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы  $A$ ,  $B$ ,  $A/H$  и  $B/K$   $F_\pi$ -аппроксимируемы.

Напомним, что группа  $G$  называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число  $r$ , такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы  $G$  порождается не более чем  $r$  элементами.

Заметим, что необходимость в теореме 1 имеет место и без предположения о том, что  $A$  – нильпотентная группа конечного ранга (см. ее доказательство). Заметим еще, что теорема 1 обобщает аналогичный критерий  $F_\pi$ -аппроксимируемости группы  $G$ , полученный автором работы [1], в котором наряду с требованиями конечности ранга группы  $A$ , ее нильпотентности и центральности подгруппы  $H$  в группе  $A$  накладываются такие же требования на группу  $B$  и на ее подгруппу  $K$ . Кроме того, частным случаем теоремы 1 является один из результатов работы [2, теор. 4], доказанный для случая, когда  $A$  – конечно порожденная нильпотентная группа.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

## 2. Вспомогательные утверждения

**Предложение 1.** Пусть  $G$  – нильпотентная группа конечного ранга. Если группа  $G$  является расширением конечной  $\pi$ -группы с помощью  $F_\pi$ -аппроксимируемой группы, то группа  $G$   $F_\pi$ -аппроксимируема.

Это утверждение было доказано автором в [1].

Пусть  $G$  – свободное произведение групп  $A$  и  $B$  с объединенными относительно изоморфизма  $\varphi$  подгруппами  $H$  и  $K$ . Хорошо известно, что группы  $A$  и  $B$  естественным образом вложимы в группу  $G$ . Поэтому можно считать, что  $A$  и  $B$  – подгруппы группы  $G$ . Тогда  $A \cap B = H = K$ . Далее в некоторых случаях для группы  $G$  будем использовать более компактное обозначение  $G = (A * B; H)$  и называть ее свободным произведением групп  $A$  и  $B$  с объединенной подгруппой  $H$ .

**Предложение 2.** Пусть  $G = (A * B; H)$ ,  $M$  и  $N$  – нормальные подгруппы групп  $A$  и  $B$  соответственно, такие, что  $M \cap H = N \cap H$ . Тогда естественные гомоморфизмы  $A \rightarrow A/M$  и  $B \rightarrow B/N$  могут быть продолжены до гомоморфизма  $\rho_{MN}$  группы  $G$  на свободное произведение  $G_{MN}$  групп  $A/M$  и  $B/N$  с объединенной подгруппой  $H_{MN} = HM/M = HN/N$ .

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется (см. [3]).

Напомним, что группа  $G$  называется расщепляемым расширением группы  $A$  с помощью группы  $B$ , если  $A$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $B$  – подгруппа группы  $G$ ,  $A \cap B = 1$  и  $G = AB$ . Очевидно, что  $G/A \cong B$  и  $[G : B] = |A|$ .

**Предложение 3.** Пусть  $G$  – свободное произведение конечных  $\pi$ -групп  $A$  и  $B$  с нормальной объединенной подгруппой  $H$ . Если  $H$  центральна в  $A$ , то группа  $G F_\pi$ -аппроксимируема.

*Доказательство.* Заметим, что фактор-группа  $G/H F_\pi$ -аппроксимируема, поскольку представляет из себя свободное произведение конечных  $\pi$ -групп  $A/H$  и  $B/H$ . Обозначим через  $D/H$  ее декартову подгруппу, т. е. ядро гомоморфизма группы  $G/H$  на прямое произведение групп  $A/H$  и  $B/H$ , продолжающего тождественные отображения  $A/H \rightarrow A/H$  и  $B/H \rightarrow B/H$ . По хорошо известной теореме Куроша о подгруппах свободных произведений групп (см., напр., [4, с. 253]) подгруппа  $D/H$  свободна. Кроме того,  $D/H$  нормальна в группе  $G/H$  и имеет в ней конечный  $\pi$ -индекс. Поэтому подгруппа  $D$  нормальна в группе  $G$ , имеет в ней конечный  $\pi$ -индекс и представляет из себя расширение группы  $H$  с помощью свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение расщепляемо. Таким образом,  $D$  – расщепляемое расширение конечной  $\pi$ -группы  $H$  с помощью некоторой свободной группы  $F$ , изоморфной  $D/H$ . Покажем, что группа  $D F_\pi$ -аппроксимируема.

Пусть  $\rho$  – гомоморфизм группы  $G$  в группу автоморфизмов группы  $H$ , сопоставляющий каждому элементу  $x$  из  $G$  ограничение на  $H$  внутреннего автоморфизма группы  $G$ , производимого элементом  $x$ . Так как  $H$  лежит в центре группы  $A$ , то  $A\rho = 1$ . Отсюда и из того, что  $G$  порождается подгруппами  $A$  и  $B$  следует, что  $G\rho = B\rho$  и, следовательно,  $G\rho$  – конечная  $\pi$ -группа. Обозначим через  $N$  ядро гомоморфизма  $\rho$ . Тогда  $F \cap N$  – нормальная подгруппа группы  $F$  и  $F/F \cap N \cong FN/N \leq G/N \cong G\rho$ . Отсюда и из того, что  $G\rho$  – конечная  $\pi$ -группа, следует, что  $[F : F \cap N]$  –  $\pi$ -число. С другой стороны, так как  $D$  – расщепляемое расширение группы  $H$  с помощью группы  $F$ , то  $[D : F] = |H|$ , и поэтому  $[D : F]$  –  $\pi$ -число. Следовательно,  $[D : F \cap N]$  –  $\pi$ -число. Так как  $D = HF$ ,  $F \cap N$  – нормальная подгруппа группы  $F$  и  $F \cap N$  поэлементно перестановочна с  $H$ , то  $F \cap N$  – нормальная подгруппа группы  $D$ . Таким образом,  $D$  содержит свободную нормальную подгруппу  $F \cap N$  конечного  $\pi$ -индекса. Поэтому группа  $D F_\pi$ -аппроксимируема. При этом  $D$  является нормальной подгруппой конечного  $\pi$ -индекса группы  $G$ . Поэтому группа  $G$  также  $F_\pi$ -аппроксимируема. Предложение доказано.

Напомним, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $F_\pi$ -отделимой, если для каждого элемента  $x$  группы  $G$ , не принадлежащего  $H$ , существует гомоморфизм  $\phi$  группы  $G$  на конечную  $\pi$ -группу, такой, что  $x\phi \notin H\phi$ . Хорошо известно, что в случае, когда  $H$  нормальна в  $G$ , ее  $F_\pi$ -отделимость равносильна  $F_\pi$ -аппроксимируемости группы  $G/H$ .

**Предложение 4.** Пусть  $G$  – свободное произведение  $F_\pi$ -аппроксимируемых групп  $A$  и  $B$  с конечной нормальной объединенной подгруппой  $H$ . Если  $H$  центральна в  $A$ , то группа  $G F_\pi$ -аппроксимируема.

*Доказательство.* Для доказательства  $F_\pi$ -аппроксимируемости группы  $G$  достаточно для каждого ее неединичного элемента  $g$  указать гомоморфизм группы  $G$  на  $F_\pi$ -аппроксимируемую группу, образ  $g$  относительно которого отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда  $g \notin H$ . Покажем, что подгруппа  $H F_\pi$ -отделима в группе  $A$ . Пусть  $a \in A \setminus H$ . Так как группа  $A F_\pi$ -аппроксимируема, то для каждого элемента  $h \in H$  существует гомоморфизм  $\varphi_h$  группы  $A$  на конечную  $\pi$ -группу такой, что  $a\varphi_h \neq h\varphi_h$ . Так как подгруппа  $H$  конечна, то группа  $P = A / \bigcap_{h \in H} \text{Ker } \varphi_h$  является конечной  $\pi$ -группой. Если теперь через  $\delta$  обозначить естественный гомоморфизм  $A \rightarrow P$ , то  $a\delta \notin H\delta$ . Таким образом, подгруппа  $H$  группы  $A F_\pi$ -отделима, и поэтому фактор-группа  $A/H F_\pi$ -аппроксимируема. То же самое можно сказать и о группе  $B/H$ . Следовательно, группа  $G/H$ , изоморфная свободному произведению групп  $A/H$  и  $B/H$ , также  $F_\pi$ -аппроксимируема. Так как образ элемента  $g$  относительно естественного гомоморфизма  $\varepsilon: G \rightarrow G/H$  отличен от 1, то этот гомоморфизм является искомым.

Теперь рассмотрим случай, когда  $g \in H$ . Так как  $H$  – конечная подгруппа  $F_\pi$ -аппроксимируемой группы  $A$ , то в  $A$  существует нормальная подгруппа  $M$  конечного  $\pi$ -индекса, такая, что  $M \cap H = 1$ . Аналогично, в  $B$  существует нормальная подгруппа  $N$  конечного  $\pi$ -индекса такая, что  $N \cap H = 1$ . Поэтому в силу предложения 2 можно рассмотреть группу  $G_{MN} = (A/M * B/N; H_{MN})$  и гомоморфизм  $\rho_{MN}: G \rightarrow G_{MN}$ , продолжающий естественные гомоморфизмы  $A \rightarrow A/M$  и  $B \rightarrow B/N$ . Заметим, что  $G_{MN} F_\pi$ -аппроксимируема по предложению 3, и поэтому в качестве искомого гомоморфизма может быть взят  $\rho_{MN}$ . Предложение доказано.

**Предложение 5.** Пусть  $G$  – свободное произведение  $F_\pi$ -аппроксимируемых групп  $A$  и  $B$  с нормальной объединенной подгруппой  $H$ , причем  $H$  имеет конечный  $\pi$ -индекс в  $A$  и  $B$ . Если  $H$  центральна в  $A$ , то группа  $G F_\pi$ -аппроксимируема.

**Доказательство.** Как и при доказательстве предыдущего предложения, укажем для каждого неединичного элемента  $g$  из  $G$  гомоморфизм группы  $G$  на  $F_\pi$ -аппроксимируемую группу, образ  $g$  относительно которого будет отличен от 1.

Если  $g \notin H$ , то искомым, очевидно, снова будет естественный гомоморфизм  $\varepsilon: G \rightarrow G/H$ .

Рассмотрим случай, когда  $g \in H$ . Так как  $B F_\pi$ -аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа  $M$  конечного  $\pi$ -индекса группы  $B$ , не содержащая элемент  $g$ . Тогда подгруппа  $N = M \cap H$  является нормальной подгруппой группы  $B$  и центральной подгруппой группы  $A$ , причем ее индекс в группе  $H$ , а значит, и в группах  $A$  и  $B$  является  $\pi$ -числом. Таким образом, можно рассмотреть естественный гомоморфизм  $\varepsilon: G \rightarrow G/N$ , где  $G/N$  – свободное произведение конечных  $\pi$ -групп  $A/N$  и  $B/N$  с нормальной объединенной подгруппой  $H/N$ , содержащейся в центре  $A/N$ . Поскольку группа  $G/N F_\pi$ -аппроксимируема в силу предложения 3, то  $\varepsilon$  – искомым гомоморфизм. Предложение доказано.

### 3. Доказательство теоремы 1

Пусть  $G$  – свободное произведение  $F_\pi$ -аппроксимируемых групп  $A$  и  $B$  с нормальной объединенной подгруппой  $H$ , не совпадающей с группами  $A$  и  $B$ . И пусть  $A$  – нильпотентная группа конечного ранга, а  $H$  содержится в ее центре. Докажем, что группа  $G F_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы  $A$ ,  $B$ ,  $A/H$  и  $B/H F_\pi$ -аппроксимируемы.

Пусть группы  $A$ ,  $B$ ,  $A/H$  и  $B/H F_\pi$ -аппроксимируемы. Докажем, что группа  $G F_\pi$ -аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента  $g$

из  $G$  указать гомоморфизм группы  $G$  на  $F_\pi$ -аппроксимируемую группу, при котором образ  $g$  будет отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда  $g \notin H$ . Поскольку группа  $G/H = A/H * B/H$   $F_\pi$ -аппроксимируема, то естественный гомоморфизм  $\varepsilon: G \rightarrow G/H$  будет искомым.

Теперь рассмотрим случай, когда  $g \in H$ . Так как группа  $B$   $F_\pi$ -аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа  $N$  конечного  $\pi$ -индекса, не содержащая  $g$ . Обозначим через  $S$  подгруппу  $N \cap H$  группы  $A$ . Тогда  $S$ , как и  $H$ , центральна в  $A$ , а ее индекс в группе  $H$ , очевидно, является  $\pi$ -числом. Рассмотрим фактор-группу  $A/S$ . Так как она является расширением конечной  $\pi$ -группы  $H/S$  с помощью  $F_\pi$ -аппроксимируемой группы  $A/H$ , то в силу предложения 1 она сама  $F_\pi$ -аппроксимируема. Отсюда следует, что в  $A/S$  существует нормальная подгруппа  $M/S$  конечного  $\pi$ -индекса, тривиально пересекающаяся с  $H/S$ . Заметим, что  $M$  – нормальная подгруппа конечного  $\pi$ -индекса группы  $A$ , и  $M \cap H = S$ .

Используя предложение 2, построим теперь группу  $G_{MN} = (A/M * B/N, H_{MN})$  и гомоморфизм  $\rho_{MN}: G \rightarrow G_{MN}$ , продолжающий естественные гомоморфизмы  $A \rightarrow A/M$  и  $B \rightarrow B/N$ . Заметим, что группа  $G_{MN}$  является свободным произведением конечных  $\pi$ -групп  $A/M$  и  $B/N$  с нормальной объединенной подгруппой  $H_{MN}$ , причем  $H_{MN}$  центральна в  $A/M$ . Поэтому в силу предложения 3  $G_{MN}$   $F_\pi$ -аппроксимируема. Остается отметить, что  $\rho_{MN} g \neq 1$ , поскольку  $g \notin N$ , и что  $\rho_{MN}$  – искомым гомоморфизм.

Докажем теперь необходимость в теореме 1. Пусть группа  $G$   $F_\pi$ -аппроксимируема. Покажем, что группы  $A/H$  и  $B/H$   $F_\pi$ -аппроксимируемы. Для этого достаточно доказать  $F_\pi$ -отделимость подгруппы  $H$  в группах  $A$  и  $B$ .

Предположим, что подгруппа  $H$  не является  $F_\pi$ -отделимой в группе  $A$ . Тогда в группе  $A$  существует элемент  $a$ , не принадлежащий  $H$  и такой, что для каждого гомоморфизма  $\varphi$  группы  $A$  на конечную  $\pi$ -группу  $a\varphi \in H\varphi$ . Зафиксируем элемент  $b$  группы  $B$ , не принадлежащий  $H$ , и рассмотрим коммутатор  $c$  элементов  $a$  и  $b^{-1}ab$ , т. е. элемент вида

$$c = [a, b^{-1}ab] = a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab.$$

Элемент  $c$  имеет в группе  $G$  несократимую запись длины 8, и поэтому отличен от 1. Отсюда и из того, что  $G$   $F_\pi$ -аппроксимируема, следует, что существует гомоморфизм  $\psi$  группы  $G$  на конечную  $\pi$ -группу, такой, что  $c\psi \neq 1$ . Из сделанного выше предположения заключаем, что  $a\psi \in H\psi$ , т. е.  $a\psi = h\psi$  для некоторого элемента  $h$  группы  $H$ . Заметим, что группа  $H$  абелева, так как она центральна в группе  $A$ . Отсюда и из нормальности подгруппы  $H$  в группе  $B$  получаем

$$c\psi = [a, b^{-1}ab]\psi = [h, b^{-1}hb]\psi = 1\psi = 1.$$

Однако раньше было сказано, что  $c\psi \neq 1$ . Таким образом, подгруппа  $H$   $F_\pi$ -отделима в группе  $A$ . Аналогично может быть доказана  $F_\pi$ -отделимость подгруппы  $H$  в группе  $B$ . Теорема доказана.

#### 4. О существенности требования конечности ранга в теореме 1

Покажем, что свободное произведение  $G$   $F_\pi$ -аппроксимируемых групп  $A$  и  $B$  с собственными центральными объединенными относительно изоморфизма  $\varphi$  подгруппами  $H$  и  $K$  не обязано быть  $F_\pi$ -аппроксимируемой группой при условии, что фактор-группы  $A/H$  и  $B/K$   $F_\pi$ -аппроксимируемы.

Пусть  $p$  и  $q$  – различные простые числа. Рассмотрим абелевы группы

$$A = \langle a_i \ (i \in \mathbf{N}); a_i a_l = a_l a_i, a_i^{p^i} = a_i^{p^l} \ (i, l \in \mathbf{N}) \rangle$$

и 
$$B = \langle b_j \ (j \in \mathbf{N}); b_j b_l = b_l b_j, b_j^{q^j} = b_j^{q^l} \ (j, l \in \mathbf{N}) \rangle.$$

Обозначим через  $h$  элемент группы  $A$ , совпадающий со всеми  $a_i^{p^i}$ , а через  $k$  – элемент группы  $B$ , совпадающий со всеми  $b_j^{q^j}$ . Тогда для любых неотрицательных целых  $m$  и  $n$  уравнения

$$x^{p^m} = h \quad \text{и} \quad y^{q^n} = k \tag{1}$$

разрешимы в группах  $A$  и  $B$  соответственно.

Рассмотрим циклические подгруппы  $H = \langle h \rangle$  и  $K = \langle k \rangle$  групп  $A$  и  $B$  и группу

$$G = (A * B; H = K, \varphi),$$

где  $\varphi: H \rightarrow K$  – изоморфизм, продолжающий отображение  $h \mapsto k$ . Пусть  $\pi = \{p, q\}$ . Покажем, что группы  $A$ ,  $B$ ,  $A/H$  и  $B/K$   $F_\pi$ -аппроксимируемы, а группа  $G$  – нет.

Очевидно, что фактор-группа  $A/H$  имеет представление

$$A/H = \langle a_i \ (i \in \mathbf{N}); a_i a_l = a_l a_i, a_i^{p^i} = 1 \ (i, l \in \mathbf{N}) \rangle, \tag{2}$$

и поэтому может быть представлена как прямое произведение счетного числа циклических  $p$ -групп. Легко понять, что такое прямое произведение  $F_p$ -аппроксимируемо, и поэтому  $F_\pi$ -аппроксимируемо. Аналогично устанавливается, что группа  $B/K$   $F_q$ -аппроксимируема, и поэтому  $F_\pi$ -аппроксимируема.

Покажем теперь, что группа  $A$   $F_\pi$ -аппроксимируема. Для этого укажем для каждого неединичного элемента  $a$  из  $A$  гомоморфизм группы  $A$  на конечную  $p$ -группу, переводящий  $a$  в неединичный элемент.

Рассмотрим сначала случай, когда  $a \notin H$ . Пусть  $\varepsilon: A \rightarrow A/H$  – естественный гомоморфизм. Тогда  $a\varepsilon \neq 1$ , и поскольку  $A/H$   $F_p$ -аппроксимируема, то существует гомоморфизм  $\psi$  группы  $A/H$  на конечную  $p$ -группу такой, что  $a\varepsilon\psi \neq 1$ . При этом  $\varepsilon\psi$  – искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда  $a \in H$ . Так как  $H$  – бесконечная циклическая группа, то существует целое положительное число  $r$  такое, что  $a$  не принадлежит подгруппе  $L = H^{q^r}$  группы  $H$ . Очевидно, что  $H/L$  – конечная  $q$ -группа. Кроме того, группа  $A/L$  периодическая, так как она является расширением конечной группы  $H/L$  с помощью периодической группы  $A/H$ . Заметим, что  $H/L$  совпадает с  $q$ -компонентой группы  $A/L$ . Действительно, пусть  $xL$  –  $q$ -элемент группы  $A/L$ . Тогда  $xH$  –  $q$ -элемент группы  $A/H$ . Отсюда и из того, что  $A/H$  –  $p$ -группа (см. (2)), а простые числа  $p$  и  $q$  различны, следует, что  $x \in H$ , и поэтому  $xL \in H/L$ .

Хорошо известно, что любая периодическая абелева группа раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Поэтому  $H/L$  выделяется в  $A/L$  прямым множителем, т. е.

$$A/L = H/L \times X/L.$$

Рассмотрим проекцию  $\sigma: A/L \rightarrow H/L$ . Так как  $aL$  – неединичный элемент группы  $H/L$ , то  $(aL)\sigma \neq 1$ . И если  $\varepsilon: A \rightarrow A/L$  – естественный гомоморфизм, то гомоморфизм  $\varepsilon\sigma$  является искомым гомоморфизмом.

Таким образом, группа  $A$   $F_\pi$ -аппроксимируема. Аналогично может быть доказана  $F_\pi$ -аппроксимируемость группы  $B$ .

Покажем теперь, что группа  $G$  не  $F_\pi$ -аппроксимируема. Пусть  $\psi$  – гомоморфизм группы  $G$  на конечную  $\pi$ -группу  $P$  и пусть  $s$  – порядок группы  $P$ . Тогда  $s$  можно записать в виде

$$s = p^m \cdot q^n,$$

где  $m$  и  $n$  – целые неотрицательные числа. Так как в группе  $G$  выполняется равенство  $h = k$  и разрешимы уравнения (1), то  $a^{p^m} = h = b^{q^n}$  для подходящих элементов  $a$  и  $b$  группы  $G$ . Поэтому

$$(h\psi)^{p^m} = (b^{q^n}\psi)^{p^m} = (b\psi)^s = 1$$

и

$$(h\psi)^{q^n} = (a^{p^m}\psi)^{q^n} = (a\psi)^s = 1.$$

Отсюда и из того, что  $p$  и  $q$  взаимно просты, следует, что  $h\psi = 1$ . Поэтому группа  $G$  не является  $F_\pi$ -аппроксимируемой.

Автор выражает благодарность Д. Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Розов А.В.* Об аппроксимируемости конечными  $\pi$ -группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами // Ярославский пед. вестн. Т. 3. Естественные науки. 2013. № 2. С. 7–13.
2. *Tumanova E.A.* On the residual  $\pi$ -finiteness of generalized free products of groups // Math. Notes. 2014. V. 95. No. 4. P. 544–551.
3. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
4. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.

Статья поступила 12.02.2016 г.

*Rozov A.V.* ON THE RESIDUAL  $\pi$ -FINITENESS OF SOME FREE PRODUCTS OF GROUPS WITH CENTRAL AMALGAMATED SUBGROUPS

DOI 10.17223/19988621/40/4

Let  $\pi$  be a set of primes. A criterion of residual  $\pi$ -finiteness for free products of two groups with central amalgamated subgroups has been obtained for the case where one factor is a nilpotent finite rank group. Recall that a group  $G$  is said to be a residually finite  $\pi$ -group if for every non-identity element  $x$  of  $G$  there exists a homomorphism of the group  $G$  onto some finite  $\pi$ -group such that the image of the element  $x$  differs from 1. A group  $G$  is said to be a finite rank group if there exists a positive integer  $r$  such that every finitely generated subgroup of group  $G$  is generated by at most  $r$  elements. Let  $G$  be a free product of groups  $A$  and  $B$  with normal amalgamated subgroups  $H$  and  $K$ . Let also  $A$  and  $B$  be residually finite  $\pi$ -groups and  $H$  be a central subgroup of the group  $A$ . If  $H$  and  $K$  are finite, then  $G$  is a residually finite  $\pi$ -group. The same holds if the groups  $A/H$  and  $B/K$  are finite  $\pi$ -groups. However,  $G$  is not obligatorily a residually finite  $\pi$ -group if we replace the requirement of finiteness of the groups  $A/H$  and  $B/K$  by a weaker requirement of  $A/H$  and  $B/K$  to be residually finite  $\pi$ -groups. A corresponding example is provided in the article. Nevertheless, we prove that if  $A$  is a nilpotent finite rank group, then  $G$  is a residually finite  $\pi$ -group if and only if  $A/H$  and  $B/K$  are residually finite  $\pi$ -groups.

Keywords: nilpotent finite rank group, group center, generalized free product of groups, residually finite  $\pi$ -group.

ROZOV Alexei Vyacheslavovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)

E-mail: post-box023@mail.ru

#### REFERENCES

1. Rozov A.V. (2013) Ob approksimirovannosti konechnymi  $\pi$ -gruppami svobodnykh proizvedeniy nil'potentnykhgrupp konechnogo ranga s tsentral'nymi ob"edinennymi podgruppami [On the residual  $\pi$ -finiteness of free products of nilpotent finite rank groups with central amalgamated subgroups]. *Yaroslavskiy ped. vestn. Tom 3. Estestvennye nauki – Yaroslavl Pedagogical Bulletin. Vol. 3. Natural Sciences. 2.* pp. 7–13.
2. Tumanova E.A. (2014) On the residual  $\pi$ -finiteness of generalized free products of groups. *Math. Notes.* 95(4). pp. 544–551. DOI: 10.1134/S0001434614030262.
3. Baumslag G. (1963) On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 106. pp. 193–209.
4. Magnus W., Karrass A., and Solitar D. (1966) *Combinatorial Group Theory*. New York: Wiley.

## МЕХАНИКА

УДК 539.374

DOI 10.17223/19988621/40/5

Д.В. Гоцев, Н.С. Перунов

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
В ПОРИСТОМ СФЕРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ  
С УЧЕТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние сферического тела, находящегося под действием всестороннего сжатия. При этом в качестве модели материала выбиралась пористая среда, сжатый скелет которой обладает упрочняющимися упругопластическими свойствами. Деформирование пористой среды под действием заданных равномерно распределенных сжимающих нагрузок разделяется на два этапа: упругое деформирование пористой среды и дальнейшее упругопластическое деформирование полностью сжатой матрицы. Получены аналитические соотношения, определяющие поля напряжений и перемещений на каждом этапе деформирования. Дана оценка влияния на величину упругопластической границы начальной пористости и других констант материала.

**Ключевые слова:** пористые материалы при неупругой работе сжатого скелета, сферическое тело при сжатии, напряженно-деформированное состояние.

В качестве модели пористого тела, учитывающей неупругую работу сжатого скелета, будем использовать модель, рассмотренную в работе [1]. Деформирование пористого материала с начальным раствором пор –  $\varepsilon_0$  разделим на два этапа. При этом, в отличие от [2], за первый этап примем упругое деформирование сжимаемой пористой среды под действием нагрузок, которые подлежат дальнейшему определению и представляют собой нагрузки, при которых происходит полное сжатие пор.

Второй этап – неупругое деформирование сжатого скелета под действием исходных нагрузок за вычетом из них той их части, которая пошла на полное сжатие пор.

Напряженно-деформированное состояние (НДС), полученное на первом этапе, предполагается начальным состоянием тела для второго этапа деформирования. Итоговое НДС получается путем сложения решений, полученных на каждом из этапов по следующим формулам для перемещений, деформаций и напряжений соответственно:

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)}; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (1)$$

где величины с индексом (1) относятся к первому этапу, с индексом (2) – ко второму.

Связь между напряжениями и деформациями на первом этапе деформирования берется в виде закона Гука для сжимаемого тела. На втором этапе упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела. В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упрочняющегося упругопластического тела [3] с поверхностью нагружения

$$F = \left( S_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta \right) \left( S_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j \right) - k^2, \quad (2)$$

где  $S_{j\beta}$  – компоненты тензора девиатора напряжений;  $\varepsilon_{j\beta}^p$  – компоненты тензора пластических деформаций;  $c$  – коэффициент упрочнения;  $k$  – предел текучести материала.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{j\beta} = \varepsilon_{j\beta}^e + \varepsilon_{j\beta}^p, \quad (3)$$

причем пластическая и упругая составляющие объемной деформации соответственно удовлетворяют условиям несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0, \quad \varepsilon_{nn}^e = -\varepsilon_0, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{j\beta}^e$  и  $\varepsilon_{j\beta}^p$  компоненты тензора полных и упругих деформаций соответственно.

Ниже рассмотрим задачу определения НДС сферического тела с внешним и внутренним радиусами  $b$  и  $a$  соответственно. По внешней поверхности действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивностью  $q_b$ , по внутренней поверхности – интенсивностью  $q_a$ .

НДС в рамках центрально симметричной постановки задачи в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  на первом этапе деформирования будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории:

уравнение равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0; \quad (5)$$

соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}; \quad (6)$$

закон Гука для упругого сжимаемого тела

$$\sigma_r = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + 2\lambda_1\varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \lambda_1\varepsilon_r + 2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_\theta, \quad (7)$$

где  $u$  – радиальная составляющая вектора перемещений;  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – нормальные компоненты тензора напряжений;  $\lambda_1, \mu_1$  – параметры Ламе сжимаемого тела.

Граничные условия:

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a. \quad (8)$$

Из системы (5) – (7) объемная деформация определится в виде

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 3C,$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Следовательно, объемная деформация не зависит от координаты, то есть она одинакова во всем теле. Поэтому сжатие пор произойдет одновременно во всем теле при достижении объемной деформацией некоторого заданного значения.

Пусть предельное значение объемной деформации будет равно  $-\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 > 0$ ), тогда условие наличия несжатых пор в сферическом теле представимо в форме

$$-3C < \varepsilon_0. \quad (9)$$

С учетом граничных условий (8) неравенство (9) примет вид

$$\frac{3(q_a a^3 - q_b b^3)}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(a^3 - b^3)} < \varepsilon_0. \quad (10)$$

Таким образом, если выполнено условие (10), то в теле остаются несжатые поры и НДС описывается соотношениями, приведенными в работе [2]. Если нагрузки  $q_a$  и  $q_b$  таковы, что неравенство (10) обращается в равенство, то есть выполняется условие

$$q_b = q_a \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \cdot \frac{b^3 - a^3}{b^3}, \quad (11)$$

то во всем теле произойдет полное сжатие пор.

НДС на момент полного сжатия пор согласно работе [2] при учете (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} \tilde{r} + \frac{1}{4} \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^2}, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{1}{2} \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^3}, \\ \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\varphi^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{1}{4} \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^3}, \\ \tilde{\sigma}_r^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) - \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^3}, \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)} = \tilde{\sigma}_\varphi^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) + \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{2\tilde{r}^3}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\theta(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_0 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$ .

В (12) и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, при этом все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине  $\mu_1$ , а имеющие размерность длины – к внешнему радиусу  $b$ . Здесь и далее безразмерные величины отмечены знаком  $\sim$ .

Второй этап деформирования будет реализовываться при выполнении условия  $\tilde{q}_b > \tilde{q}_a \tilde{a}^3 + \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2)(1 - \tilde{a}^3)$ . При этом около внутренней поверхности толсто-стенной сферической оболочки возникнет и будет расти пластическая зона, препятствовать развитию которой будет упрочнение материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как упрочняющаяся несжимаемая упругопластическая среда с параметрами  $\tilde{\mu} = 1 + \tilde{\mu}_0$ ,  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{c}$ , где  $\tilde{\mu}_0$  – модуль сдвига элемента характеризующего несжимаемую среду. В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую.

НДС на втором этапе деформирования будем моделировать формулами (3) – (6), присоединяя к ним реологические соотношения

$$\tilde{s}_r = 2\tilde{\mu}\varepsilon_r, \quad \tilde{s}_\theta = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\theta, \quad \tilde{s}_\varphi = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\varphi; \quad (13)$$

в упругой области и соотношения

$$\tilde{s}_r = 2\tilde{\mu}\varepsilon_r^e, \quad \tilde{s}_\theta = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\theta^e, \quad \tilde{s}_\varphi = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\varphi^e \quad (14)$$

и 
$$(\tilde{s}_r - \tilde{c}\varepsilon_r^p)^2 + (\tilde{s}_\theta - \tilde{c}\varepsilon_\theta^p)^2 + (\tilde{s}_\varphi - \tilde{c}\varepsilon_\varphi^p)^2 = 2\tilde{k}^2 \quad (15)$$

– в пластической зоне.

Граничные условия на этом этапе возьмем в виде

$$\tilde{\sigma}_r|_{r=a} = -(\tilde{q}_a - \tilde{q}_a^*), \quad \tilde{\sigma}_r|_{r=b} = -(\tilde{q}_b - \tilde{q}_b^*). \quad (16)$$

Условия совместности, на границе раздела упругой и пластической зон выберем в форме

$$\tilde{\sigma}_r^p|_{r=\gamma} - \tilde{\sigma}_r^e|_{r=\gamma} = 0, \quad \varepsilon_r^p|_{r=\gamma} = 0. \quad (17)$$

НДС сферического тела при неупругом деформировании сжатого скелета определяется следующими соотношениями:

- в упругой области ( $\tilde{\gamma} < \tilde{r} < 1$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r^{(2)} &= -\tilde{q}_b + \frac{8}{3} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \tilde{\gamma}^3 - \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} \right), \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(2)} &= -\tilde{q}_b + \frac{4}{3} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} + 2\tilde{\gamma}^3 \right); \end{aligned} \quad (18)$$

- в пластической области ( $a < r < \gamma$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{p(2)} &= \frac{2}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) - \frac{2D}{\tilde{r}^3} \tilde{\mu} + A \right), \\ \tilde{\sigma}_r^{(2)} &= -\tilde{q}_a - \frac{2}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \tilde{c} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} - \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{a}^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (2\varepsilon_0 \tilde{\mu} (2\tilde{\mu} - 1) + 6\tilde{\mu}A - \varepsilon_0 (\tilde{\mu} + 1)(2\tilde{\mu} + \tilde{c})) \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\theta^{(2)} = & -\tilde{q}_a + \frac{1}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \tilde{c} \left( \frac{2}{3} \varepsilon_0 (\tilde{\mu} + 2) + A \right) \left( \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} + \frac{2\tilde{\gamma}^3}{\tilde{a}^3} \right) + \right. \\ & \left. + \left( 2 \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} + 1 \right) \left( 2\varepsilon_0 \tilde{\mu}^2 - \tilde{c} \varepsilon_0 (\tilde{\mu} + 1) + 6A\tilde{\mu} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются соотношениями

$$\tilde{u} = \frac{D}{\tilde{r}^2} - \frac{\varepsilon_0}{3} \tilde{r}, \quad \varepsilon_r = -\frac{2D}{\tilde{r}^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{2D}{\tilde{r}^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (21)$$

Из первого условия сопряжения (16) с учетом (17) и (19) получим уравнение для определения радиуса  $\tilde{\gamma}$  раздела зон упругого и пластического деформирования сжатого скелета в виде

$$\begin{aligned} \tilde{q}_b - \tilde{q}_a - \frac{2}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \tilde{c} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{a}^3} \right) + \frac{4}{3} (2\tilde{\mu} + \tilde{c}) (1 - \tilde{\gamma}^3) \right) - \right. \\ \left. - (\varepsilon_0 (\tilde{\mu} (2\tilde{\mu} - 4 - \tilde{c}) - \tilde{c}) + 6\tilde{\mu}A) \ln \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{a}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь в (20) – (22)

$$\chi = \text{sign}(\tilde{q}_a - \tilde{q}_b), \quad A = \chi \sqrt{3\tilde{k}^2 - 2\varepsilon_0^2 \tilde{\mu}^2}, \quad D = \frac{(2\tilde{\mu} + 1)\varepsilon_0 + 3A}{6\tilde{\mu}} \tilde{\gamma}^3.$$

Таким образом, итоговое НДС толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенных сжимающих нагрузок при учете начальной пористости материала и неупругих свойств сжатого скелета, определяется по формулам (1). При этом компоненты с индексом (1) определяются по соотношениям (12), а компоненты с индексом (2) – по соотношениям (18) – (22).

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1, *a* кривая 1 соответствует  $\tilde{k} = 0.002$ , кривая 2 –  $\tilde{k} = 0.005$ , кривая 3 –  $\tilde{k} = 0.008$ . На рис. 1, *б* кривая 1 соответствует  $\tilde{\mu}_0 = 1$ , кривая 2 –  $\tilde{\mu}_0 = 2$ , кривая 3 –  $\tilde{\mu}_0 = 3$ .

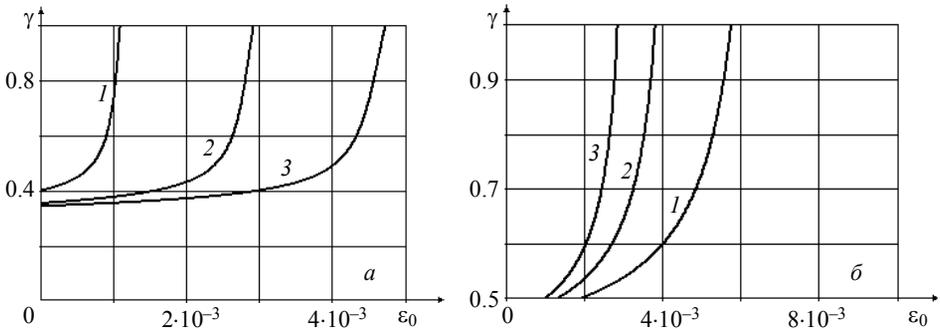


Рис. 1. Зависимость радиуса упруго-пластической границы от величины начального раствора пор при различных значениях параметра пластичности  $\tilde{k}$  (*a*) и при различных значениях параметра  $\tilde{\mu}_0$  (*б*)

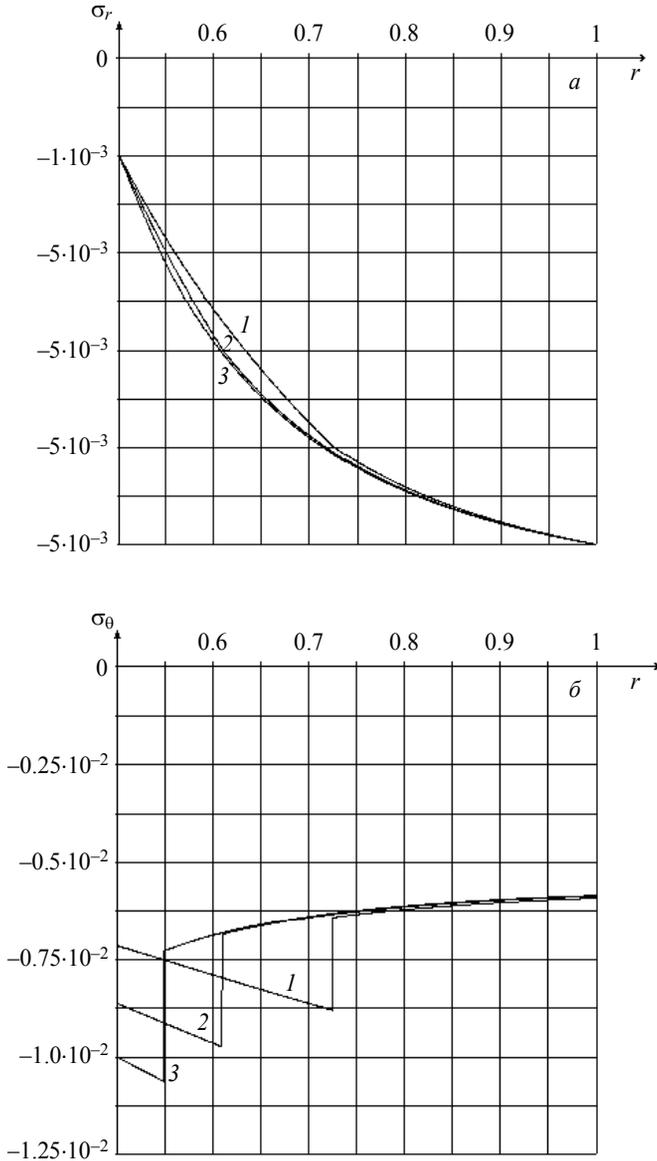


Рис. 2. Зависимости радиальной компоненты напряжений (а) и второй компоненты напряжений (б) от радиуса при различных значениях параметра пластичности  $\tilde{k}$

На рис. 2 кривые 1 соответствуют  $\tilde{k} = 0.0011$ , кривые 2 –  $\tilde{k} = 0.0012$ , кривая 3 –  $\tilde{k} = 0.0013$ . Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, брались следующими:  $\tilde{q}_a = 0.001$ ,  $\tilde{q}_b = 0.005$ ,  $\tilde{a} = 0.5$ ,  $\tilde{b} = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0005$ ,  $\tilde{k} = 0.0012$ ,  $\tilde{c} = 0.005$ ,  $\tilde{\mu}_0 = 1$ ,  $\tilde{\lambda} = 3$ ,  $\tilde{\mu}_1 = 1$ .

Из анализа результатов численного эксперимента следует, что с ростом прочностных свойств материала радиус упруго-пластической границы уменьшается, а с ростом значения начального раствора пор радиус упруго-пластической границы увеличивается.

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания напряженно-деформированного состояния сплошной среды, учитывающая пористую структуру материала и упруго-пластические свойства сжатого скелета. В рамках предложенного подхода на основе соотношений геометрически-линейной теории малых деформаций решена задача об определении полей напряжений и перемещений толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием всестороннего равномерного сжатия. Получены аналитические соотношения, описывающие НДС на этапах упругого сжатия пор и неупругого деформирования сжатого скелета. Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всем теле. При этом из анализа решений следует, что как при увеличении предела текучести, так и с ростом модуля сдвига сжатой матрицы величина радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования сжатого скелета уменьшается. Увеличение величины начального раствора пор приводит к расширению области неупругих деформаций сжатой матрицы.

Необходимо отметить, что для полученных решений справедлив предельный переход, а именно, если в соотношениях (12), (18) – (22) устремить значение величины  $\varepsilon_0$  к нулю, то мы получим результаты, представленные в работе [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. 299 с.
2. Гоцев Д.В., Бунтов А.Е., Перунов Н.С. Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы». Чувашский гос. пед. ун-т, 2015. С. 91–99.
3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 448 с.

Статья поступила 17.01.2016 г.

*Gotsev D. V., Perunov N. S. DISTRIBUTION OF STRESS AND DISPLACEMENT FIELDS IN A POROUS SPHERICAL BODY WITH ALLOWANCE FOR ELASTIC AND PLASTIC PROPERTIES*

DOI 10.17223/19988621/40/5

A mathematical model of the intense deformed state of a spherical body under hydrostatic compression has been constructed. A porous continuum the squeezed skeleton of which possesses strengthened elasto-plastic properties was chosen as the material model. Deformation of the porous environment under the action of uniformly distributed squeezing loads is divided into two stages: elastic deformation of the porous environment and inelastic deformation of the squeezed matrix. At the first stage, only the deformation caused by partial external pressure and leading to complete compression of the initial porosity in the whole body is considered. The resulting solution of the first tasks of the intense deformed state is taken as the initial state for the second phase in which the remainder of the external pressure is applied to the body. Constructing a mathematical model describing the stress field and displacement field for a spherical body was carried out within the centrally symmetric formulation. The relations determining fields of tension and dis-

placements at the first stage of deformation have been found. The squeezing pressure under which the initial porosity of material in the entire body reaches the zero value has been determined. At the second stage of the deformation process, analytical expressions for fields of tension and displacements in elastic and plastic deformation zones of the squeezed skeleton are derived, and the equation for determining the radius of the elasto-plastic border is obtained. The effect of hardening and fluidity limits on the size of the border area between elastic and plastic deformations of the initial porosity is estimated.

Keywords: porous materials during an inelastic work of a squeezed skeleton, spherical body under compressive loads, intense deformed state.

*GOTSEV Dmitry Viktorovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Voronezh State University, Russian Federation).

E-mail: [rbgotsev@mail.ru](mailto:rbgotsev@mail.ru)

*PERUNOV Nikolay Sergeevich* (Student, Voronezh State University, Russian Federation).

E-mail: [perunovnikolays@gmail.com](mailto:perunovnikolays@gmail.com)

#### REFERENCES

1. Gotsev D.V., Sporykhin A.N. (2010) *Metod vozmushcheniy v zadachakh ustoychivosti podkreplennykh gornykh vyrabotok* [Method of perturbations in problems of stability of supported excavations]. Voronezh: Voronezh State University.
2. Gotsev D.V., Buntov A.E., Perunov N.S. (2015) Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannykh sostoyaniy poristykh tsilindricheskikh i sfericheskikh tel pri szhatii s uchetom neuprugogo povedeniya szhatogo skeleta [Mathematical modeling of stress-strain states of porous cylindrical and spherical bodies under compression with allowance for inelastic behavior of the compressed skeleton]. In: *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy shkoly-konferentsii "Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy"* [Proceedings of All-Russia Scientific School-Conference "Mechanics of the limit state and related problems"]. Chuvash State Pedagogical University.
3. Ivlev D.D. (2002) *Mekhanika plasticheskikh sred: v 2 t. T. 2.* [Mechanics of plastic media: in 2 volumes. Vol. 2]. Moscow: FIZMATLIT.

УДК 53.098  
DOI 10.17223/19988621/40/6

М.Е. Долгий

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭМИССИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Предлагается модель, основанная на термодинамических представлениях, позволяющая описывать процессы, происходящие в земной коре и приводящие к электромагнитной эмиссии. Рассчитанное по этой модели пространственное распределение электрического и магнитного полей качественно согласуется с экспериментальными данными. Связь между полем деформации и электромагнитным полем дает возможность по известной деформации построить пространственные распределения электрического и магнитного полей. При наличии априорной информации о расположении источника деформации возможно и нахождение решения обратной задачи.

**Ключевые слова:** *физическая модель, электромагнитное излучение, естественное импульсное электромагнитное поле Земли.*

Как известно, пьезоэффект был открыт братьями Кюри в 1881 г. [1], позже Степанов в 1933 г. наблюдал электризацию при пластической деформации кристаллов, не склонных к проявлению пьезоэффекта [2]. Авторами [3] в лабораторных условиях было рассмотрено влияние различных внешних факторов на электризацию подобного рода кристаллов при деформации.

Очевидно, что существующие современные теории и методы интерпретации данных естественного электромагнитного поля Земли, описанного профессором А. А. Воробьевым [4, 5], далеко не всегда соответствуют реальным результатам, поэтому разработка новых методов остается актуальной задачей. Многоплановость и сложность этой проблемы очевидны. Они обусловлены, главным образом, неполнотой и ограниченностью физических представлений, лежащих в основе описания процессов взаимодействия электромагнитных полей различного происхождения и интенсивности с геосредой. Сейчас, как в прикладных науках, так и теоретических, наметились тенденции к углубленному изучению подобных процессов, и результатом явилось значительное усложнение существующих физических моделей, расширение класса математических операций и модификации способов решения. Очевидно, что для дальнейшего развития теорий необходимы целенаправленные эксперименты

В современной литературе большое распространение получила модель В.Н. Шумана [6, 7] и В.В. Суркова [8]. В основу данных работ положен диффузионный подход к процессам распространения электромагнитного поля в среде. Базовые представления данной модели легли в основу различных теоретических и прикладных работ, таких как [9 – 12].

Целью данной работы является получение модели, основанной на термодинамических представлениях, позволяющей описывать распространение электромагнитных волн, сгенерированных деформацией. Связь между полем деформации и электромагнитным полем дает возможность по известной деформации построить пространственные распределения электрического и магнитного полей. При нали-

чий априорной информации о расположении источника деформации возможно нахождение решения обратной задачи.

### Постановка задачи

Рассмотрим модель геологической среды, находящейся в постоянном магнитном поле Земли. Введем следующие предположения:

- Рассматриваемый объем геологической среды является однородным.
- Система находится в адиабатических условиях.
- В системе отсутствуют источниковые члены.

Используя данные предположения, запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho_e (\mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \right) &= -\nabla \cdot (\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \mathbf{S}) + \hat{\sigma} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

где первое уравнение – уравнение неразрывности, второе – сохранения импульса, третье – сохранения энергии. В системе (1)  $\rho$  – плотность вещества системы,  $\rho_e$  – плотность свободных зарядов системы,  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\mu$  – в общем случае тензор магнитной проницаемости,  $\hat{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\hat{\varepsilon}$  – тензор деформаций,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  – вектор Пойнтинга,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости перемещения частиц среды.

Если (1) описывает систему, подчиняющуюся условию локального равновесия, то можно записать основные термодинамические потенциалы системы и соответствующие уравнения Гиббса [13, 14]:

$$du = Tds + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\rho_e} E_k dP_k + \frac{\mu_{lm}^{-1}}{\mu_0} B_l dj_m, \quad (2)$$

где  $u$  – внутренняя энергия системы,  $T$  – температура,  $s$  – энтропия,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций,  $\rho$  – плотность вещества системы,  $\rho_e$  – плотность зарядов,  $E_i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля,  $P_i$  – компоненты вектора поляризации,  $B_i$  – компоненты вектора магнитной индукции,  $j_i$  – компоненты вектора намагнитченности. Данная термодинамическая система по определению является сложной и для нее энтальпия определяется равенством [15]:

$$dH = Tds - \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{1}{\rho_e} P_k dE_k - \frac{\mu_{lm}^{-1}}{\mu_0} B_l dj_m; \quad (3)$$

$$dG = -sdT - \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{1}{\rho_e} P_k dE_k - \frac{\mu_{lm}^{-1}}{\mu_0} B_l dj_m. \quad (4)$$

Для каждого из уравнений Гиббса можно записать обобщенные уравнения состояний в дифференциальной форме. Так, в случае (4) можно записать систему уравнений в полных дифференциалах, которая даст нам систему уравнений состояния:

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}, E_k, B_l} dT + \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T, E_k, B_l} d\sigma_{ij} + \left( \frac{\partial s}{\partial E_k} \right)_{T, \sigma_{ij}, B_l} dE_k + \left( \frac{\partial s}{\partial B_l} \right)_{T, \sigma_{ij}, E_k} dB_l; \quad (5)$$

$$d\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}, E_k, B_l} dT + \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T, E_k, B_l} d\sigma_{ij} + \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_k} \right)_{T, \sigma_{ij}, B_l} dE_k + \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial B_l} \right)_{T, \sigma_{ij}, E_k} dB_l; \quad (6)$$

$$dP_k = \left( \frac{\partial P_k}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}, E_k, B_l} dT + \left( \frac{\partial P_k}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T, E_k, B_l} d\sigma_{ij} + \left( \frac{\partial P_k}{\partial E_k} \right)_{T, \sigma_{ij}, B_l} dE_k + \left( \frac{\partial P_k}{\partial B_l} \right)_{T, \sigma_{ij}, E_k} dB_l; \quad (7)$$

$$dj_l = \left( \frac{\partial j_l}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}, E_k, B_l} dT + \left( \frac{\partial j_l}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T, E_k, B_l} d\sigma_{ij} + \left( \frac{\partial j_l}{\partial E_k} \right)_{T, \sigma_{ij}, B_l} dE_k + \left( \frac{\partial j_l}{\partial B_l} \right)_{T, \sigma_{ij}, E_k} dB_l. \quad (8)$$

Каждый из коэффициентов в (5) – (8), стоящих перед дифференциалами, характеризует определенный физический эффект. Большая часть из них известна в литературе [16, 17]. По главной диагонали в правой части системы (5) – (8) находятся коэффициенты, характеризующие главные эффекты, остальные коэффициенты иллюстрируют перекрестные или сопряженные эффекты.

Таким образом, систему (5) – (8) можно записать:

$$ds = \frac{c}{T} dT + \rho \alpha_{ij} d\sigma_{ij} + p_k dE_k + q_l dB_l; \quad (9)$$

$$d\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} dT + \rho s_{ijkl} d\sigma_{kl} + d_{ijm} dE_m + b_{ijn} dB_n; \quad (10)$$

$$dP_k = p_k dT + \rho d_{ijk} d\sigma_{ij} + 4\pi \kappa_0 \chi_{kl} dE_l + \nu_{km} dB_m; \quad (11)$$

$$dj_l = q_l dT + \rho b_{ijl} d\sigma_{ij} + \tilde{\nu}_{kl} dE_k + 4\pi \kappa_{lm} dB_m. \quad (12)$$

Здесь  $c$  – теплоемкость при постоянном механическом напряжении и постоянных электрических и магнитных полях,  $T$  – абсолютная температура;  $\alpha_{ij}$  – тензор коэффициентов пьезокалорического эффекта и теплового расширения при постоянном электромагнитном воздействии;  $p_k$  – вектор пирозлектрического и электрокалорического эффектов при постоянстве поля деформации и магнитного поля;  $q_l$  – вектор пиромагнитного и магнетокалорического эффекта при постоянных значениях поля механических напряжений и электрического поля;  $s_{ijkl}$  – тензор упругих податливостей при постоянном поле температуры и постоянном электромагнитном поле;  $d_{ijm}$  – тензор пьезоэлектрического эффекта, рассчитанный при постоянном магнитном и температурном полях;  $b_{ijn}$  – тензор пьезомагнитного эффекта при постоянстве температурного и электрического поля;  $4\pi \kappa_0 \chi_{kl}$  – тензор диэлектрической восприимчивости при постоянных поле напряжений, температурном и магнитных полях;  $\nu_{km}$  – тензор прямого магнитоэлектрического эффекта и  $\tilde{\nu}_{kl}$  – тензор обратного магнитоэлектрического эффекта, рассчитанные при постоянстве полей температуры и напряжения;  $4\pi \kappa_{ij}$  – тензор магнитной восприимчивости при постоянных значениях поля температуры, напряжения и электрического эффекта. Величины теплоемкости, тензоров податливостей, ди-

электрической и магнитной восприимчивостей входят в систему уравнений (9) – (12), описывающую главные эффекты. Из сопряжённых эффектов наиболее интересны прямой и обратный магнитоэлектрические эффекты, их тензоры в общем случае несимметричны, и пьезомагнитный эффект, тензор третьего порядка которого симметричен по двум индексам.

Аналогичную систему уравнений состояний типа (9) – (12) можно записать для (2):

$$dT = \frac{T}{c} ds + \rho \alpha_{ij}^{-1} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{p_k} dP_k + \frac{1}{q_l} dj_l; \quad (13)$$

$$d\sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{-1} ds + \rho s_{ijkl}^{-1} d\varepsilon_{kl} + d_{ijm}^{-1} dP_m + b_{ijn}^{-1} dj_n; \quad (14)$$

$$dE_k = \frac{1}{p_k} ds + \rho d_{ijk}^{-1} d\varepsilon_{ij} + \frac{\chi_{kl}^{-1}}{4\pi\kappa_0} dP_l + \tilde{v}_{kn}^{-1} dj_n; \quad (15)$$

$$dB_l = \frac{1}{q_l} ds + \rho b_{jil}^{-1} d\varepsilon_{ij} + v_{kl}^{-1} dP_k + \frac{\kappa_{lm}^{-1}}{4\pi} dj_m. \quad (16)$$

Уравнения (9) – (16) показывают, что все входящие в них величины имеют разнообразную физическую природу и связаны между собой.

### Производство основных величин термодинамической системы

Из уравнения (15) следует, что изменение компонент вектора напряженности электрического поля системы связано с изменением полей деформации, поляризации и намагниченности. Под действием поля деформаций они изменяются, отражая реакцию среды на воздействие этого поля, и, как видно из (10), эти изменения, в свою очередь, приводят к изменению поля деформации.

Введем замену переменных:

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{\Pi}, \quad \hat{d}^{-1} = \hat{\Delta}, \quad \frac{\hat{\chi}^{-1}}{4\pi\kappa_0} = \hat{X}, \quad \hat{v}^{-1} = \hat{Y} \quad (17)$$

Перепишем уравнение (15) в векторной форме:

$$d\mathbf{E} = \mathbf{\Pi} ds + \rho \hat{\Delta} d\hat{\varepsilon} + \hat{X} d\mathbf{P} + \hat{Y} d\mathbf{j}. \quad (18)$$

Из [18] известно, что

$$\mathbf{j} = \hat{\chi} \mathbf{H}, \quad (19)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \hat{\chi} \mathbf{E}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля, а  $\hat{\chi}$  – тензор магнитной восприимчивости. Также учтем соотношение между напряженностью и индукцией магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}. \quad (21)$$

Уравнения Максвелла используем в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (23)$$

Предположим, что рассматриваемая нами система находится в адиабатических условиях.

Запишем (18) вдоль траектории движения центра масс:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \rho\hat{\Delta} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} + \hat{X} \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \hat{Y} \frac{d\mathbf{j}}{dt},$$

Преобразуем последнее, с учетом (19) – (23):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= \rho\hat{\Delta} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} + \hat{X}\varepsilon\varepsilon_0\hat{\chi} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \hat{Y} \frac{\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \\ \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= \rho\hat{\Delta} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} + \hat{X}\varepsilon\varepsilon_0\hat{\chi} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \hat{Y} \frac{\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{B} \right), \end{aligned}$$

получим 
$$(1 - \hat{X}\varepsilon\varepsilon_0\hat{\chi}) \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \hat{Y} \frac{\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = \rho\hat{\Delta} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}, \quad (24)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Векторное дифференциальное уравнение (24) демонстрирует связь между изменениями во времени электрического поля и поля деформаций изучаемой системы.

Повторим рассуждения относительно уравнения (15) для уравнения (16). Приращение вектора магнитной индукции вызывается изменением полей деформации, поляризации, намагниченности и изменением энтропии. Введем замену переменных:

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{\Theta}, \quad \hat{b}^{-1} = \hat{\mathbf{B}}, \quad \frac{\hat{\mathbf{K}}^{-1}}{4\pi} = \hat{\mathbf{K}}, \quad \hat{\mathbf{v}}^{-1} = \hat{\Psi} \quad (25)$$

Запишем уравнение (17) в векторном виде:

$$d\mathbf{B} = \mathbf{\Theta}ds + \rho\hat{\mathbf{B}}d\hat{\varepsilon} + \hat{\Psi}d\mathbf{P} + \hat{\mathbf{K}}dj. \quad (26)$$

Добавим и соответствующие уравнения Максвелла [18]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B} - \mu\mu_0\mathbf{j}). \quad (28)$$

Запишем (26) вдоль траектории движения центра масс и преобразуем его с учетом (19) – (21) и (27) – (28):

$$\left( 1 - \frac{\hat{\mathbf{K}}\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \right) \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{\hat{\Psi}\hat{\chi}}{\mu\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B} - \hat{\chi}\mathbf{B}) = \rho\hat{\mathbf{B}} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} + \hat{\Psi}\hat{\chi}\rho_e\mathbf{v}, \quad (29)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость движения зарядов внутри изучаемой системы.

Аналогично тому, как находится (24) из (15) и (29) из (16), возможно получить из (13) и (14) соответственно

$$\frac{dT}{dt} = \left( \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^{-1} \left( 1 - \frac{\hat{\mathbf{K}}\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \right) + \frac{\mathbf{\Theta}\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \right) \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{\mathbf{\Pi}\hat{\chi} - \hat{\Psi}\hat{\chi}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^{-1}}{\mu\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B} - \hat{\chi}\mathbf{B}) + (\mathbf{\Pi} - \hat{\Psi}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^{-1})\hat{\chi}\rho_e\mathbf{v}, \quad (30)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \left( \hat{\Omega}\hat{B}^{-1} \left( 1 - \frac{\hat{K}\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \right) + \frac{\hat{B}\hat{\chi}}{\mu\mu_0} \right) \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{\hat{\Delta}\hat{\chi} - \hat{\Psi}\hat{\chi}\hat{\Omega}\hat{B}^{-1}}{\mu\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B} - \hat{\chi}\mathbf{B}) + (\hat{\Delta} - \hat{\Psi}\hat{\Omega}\hat{B}^{-1}) \hat{\chi} \rho_e \mathbf{v}. \quad (31)$$

Электромагнитная эмиссия возможна только при разрушении кристаллической решетки, но такие разрушения учитываются коррекцией параметров среды [23].

### Расчет электрического и магнитного полей по полю деформации

Предположим, что процесс протекает без завихрений электромагнитных полей, тогда уравнение (24) примет вид

$$(1 - \hat{X}\varepsilon\varepsilon_0\hat{\chi}) \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \rho\hat{\Delta} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}. \quad (32)$$

Рассмотрим коэффициент при производной по электрическому полю. В общем случае величины  $\hat{X}$  и  $\hat{\chi}$  могут существенно различаться [19], но для геологических сред их можно считать равными.

Зададим тензор деформации в виде [22]

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 10^{-6} \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} \cos z \end{pmatrix}. \quad (33)$$

В [19 – 21] описаны параметры основных и перекрестных эффектов:

$$\begin{aligned} \rho &= 2600, \quad \hat{\Delta} = 1,6 \cdot 10^3 \hat{\delta}, \quad \hat{\chi} = 15,1 \cdot 10^{-6} \hat{\delta}, \quad \hat{B} = 1,12 \cdot 10^9 \hat{\delta}, \\ \hat{K} &= -1,4 \cdot 10^4 \hat{\delta}, \quad \hat{\Psi} = 1 \cdot 10^{-6} \hat{\delta}, \quad \varepsilon = 4. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $\hat{\delta}$  – символ Кронекера.

В результате расчета по известному полю деформаций, с помощью соотношения (32), на рис. 1 изображено электрическое поле, порожденное пьезоэлектрическим эффектом в среде с параметрами (34).

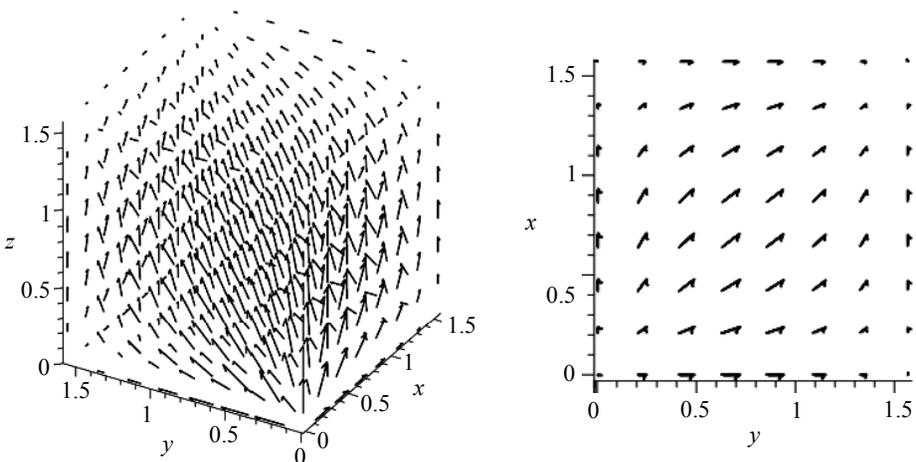


Рис. 1. Электрическое поле, порожденное деформацией в кристалле кварца (трехмерное изображение поля и срез при значении  $z = 0,785$  мкм)

Согласно [8], при деформации горной породы (кварца) – росте трещин – на берегах растущей трещины образуются электрические заряды различных знаков. При «пробивании» конденсатора-трещины и образуется искомое электромагнитное поле. Рассмотрим формулу (29), при условии отсутствия вихревого магнитного поля она примет вид

$$\left(1 - \frac{\widehat{K}\widehat{\chi}}{\mu\mu_0}\right) \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{\widehat{\Psi}\widehat{\chi}}{\mu\mu_0} \widehat{\chi}\mathbf{B} = \rho\widehat{B} \frac{d\widehat{\varepsilon}}{dt} + \widehat{\Psi}\widehat{\chi}\rho_e\mathbf{v}. \quad (35)$$

Из (34) видно, что вторые слагаемые, в правой и левой частях равенства (35), пренебрежительно малы и их можно опустить:

$$\left(1 - \frac{\widehat{K}\widehat{\chi}}{\mu\mu_0}\right) \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \rho\widehat{B} \frac{d\widehat{\varepsilon}}{dt}. \quad (35)$$

В результате расчета по известному полю деформаций, с помощью соотношения (35), на рис. 2 изображено магнитное поле, порожденное пьезоэлектрическим эффектом в среде с параметрами (34).

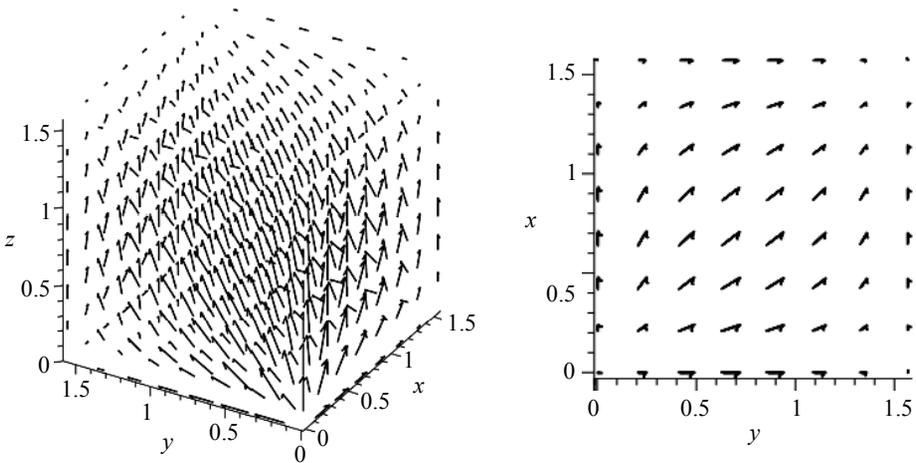


Рис. 2. Магнитное поле, порожденное деформацией в кристалле кварца (трехмерное изображение поля и срез при значении  $z = 0.785$  мкм)

### Заключение

Таким образом, в работе выделены соотношения, связывающие изменение поля деформации с изменениями электрического и магнитного полей. Соотношения для приращений электрического и магнитного полей содержат параметры, обладающие ясным физическим смыслом, которые могут быть определены из эксперимента. Это относится, например, к коэффициентам пьезомагнитного и пьезоэлектрического эффектов.

Если поле задано (поле деформаций), то, не решая конкретных краевых задач, можно рассчитать характеристики других полей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Иоффе А.Ф.* Пьер Кюри // УФН. 1956. Т. 58. № 4. С. 571–579. URL: <http://ufn.ru/articles/1956/4/a/>. DOI: 10.3367/UFNr.0058.195604a.0571.
2. *Stepanow A.W.* Über den Mechanismus der plastischen Deformation // Zeitschrift für Physik. 1933. Bd. 81. H. 7–8. S. 560–564.
3. *Bahat D., Rabinovitch A., Frid V.* Electromagnetic Radiation Induced in Fractured Materials // Tensile Fracturing in Rocks: Tectonofractographic and Electromagnetic Radiation Methods. 2005. P. 379–458.
4. *Воробьев А.А.* О возможности электрических разрядов в недрах Земли // Геология и геофизика. 1970. № 12. С. 3–13.
5. *Воробьев А.А.* Тектоэлектрические явления и возникновение естественного импульсного электромагнитного поля Земли – ЕИЭМПЗ. Томск, 1979. 585 с. Рукопись представлена Томским политехническим университетом: часть 1 – № 4296-79 – 202 с.; часть 2 – № 4297-79 – 149 с.; часть 3 – № 380-80 – 243 с.
6. *Шуман В.Н.* Переходные электромагнитные процессы в расширенном временном интервале: физико-математические модели и особенности // Геофиз. журн. 2001. Т. 23. № 1. С. 3–21.
7. *Шуман В.Н.* Глубинность электромагнитных зондирующих систем в реальных средах // Геофиз. журн. 1999. Т. 21. № 6. С. 16–27.
8. *Сурков В.В.* Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах. М.: МИФИ, 2000. 448 с.
9. *Ogawa T., Oike K., Miura T.* Electromagnetic radiations from rocks // Journal of Geophysical Research: Atmospheres (1984 – 2012). 1985. V. 90. No. D4. P. 6245–6249.
10. *Защинский А.А., Саломатин В.Н., Матов Ш.Р.* Методические рекомендации по применению методов регистрации естественного импульсного электромагнитного поля Земли при изучении оползневых процессов. Симферополь, 1983. 75 с.
11. *Соболев Г.А., Демин В.М.* Механоэлектрические явления в Земле. М.: Наука, 1980. 215 с.
12. *Соболев Г.А., Гохберг М.Б. и др.* Электромагнитные предвестники землетрясений. М.: Наука, 1982.
13. *Базаров И.П.* Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991. Т. 376.
14. *Назаренко Н.Н.* Моделирование диффузионно-контролируемых процессов при нанесении кальций-фосфатных покрытий и при их взаимодействии с биологической жидкостью: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / Назаренко Нелли Николаевна; [Место защиты: Ин-т физики прочности и материаловедения СО РАН]. Томск, 2009. 183 с.
15. *Сычев В.В.* Сложные термодинамические системы. 5-е изд., доп. М.: Издательский дом МЭИ, 2009. 295 с.
16. *Най Д.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц: пер. с англ. Л.А. Шувалова. 2-е изд. М.: Мир, 1967. 385 с.
17. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики: учеб. пособие для студентов физических специальностей высших учебных заведений. 2-е изд. перераб. М.: Наука, 1979. 640 с.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. М.: Наука, 1969.
19. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1984.
20. *Вадюнина А.Ф., Бабанин В.Ф.* Магнитная восприимчивость некоторых почв СССР // Почвоведение. 1972. № 10. С. 56–66.
21. *Винокуров В.М.* К магнитным свойствам минералов // Зап. Всес. мин. об-ва. 1961. № 5.
22. *Гончаров С.А., Ананьев П.П., Ермаков С.В.* Разупрочнение горных пород в импульсных магнитных полях сложной пространственно-временной структуры // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal). 2008. № 6. С. 117–123.

23. Немирович-Данченко М.М. Модель гипопругой хрупкой среды: применение к расчету деформирования и разрушения горных пород // Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. №. 2.
24. Судьенков Ю.В. Электромагнитное излучение при разрушении пьезоэлектриков субмикросекундными импульсами давления // Журнал технической физики. 2001. Т. 71. № 12. С. 101–103.

Статья поступила 27.01.2016 г.

Dolgi M.E. MODELING ELECTROMAGNETIC EMISSION PROCESSES IN THE GEOLOGICAL ENVIRONMENT

DOI 10.17223/19988621/40/6

A model which is based on thermodynamic representations and allows one to describe processes occurring in the crust and leading to electromagnetic emission is proposed. The equations involved in the model show that a change in the electric field strength vector of the system is related to the change in the fields of deformation, polarization, and magnetization. Under the action of the deformation field, these components are changed, which reflects the reaction of the environment to the action of this field, and these changes, in turn, lead to a change in the deformation field. The relations connecting the change in the field of deformation with changes in the electric and magnetic fields have been obtained. For increments of the electric and magnetic fields, these relations contain parameters determined from the experiment and have a clear physical meaning. This is concerned, for example, to coefficients of piezo-magnetic and piezo-electric effects.

The spatial electric and magnetic field distribution calculated by this model qualitatively agrees with experimental data. The relation between the deformation field and electromagnetic field makes it possible to construct spatial distributions of the electric and magnetic fields by a known deformation. In the presence of a priori information on the location of the deformation source, finding the solution of the inverse problem is also possible.

Keywords: physical model, electromagnetic radiation, natural pulse electromagnetic field of the Earth.

DOLGIY Maxim Evgen'evich (Tomsk State University, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: maxim\_ev\_dolgy@mail.ru

#### REFERENCES

1. Ioffe A.F. *Pierre Curie* [Online]. Available from: <http://ufn.ru/ru/articles/1956/4/a/>. DOI: 10.3367/UFNr.0058.195604a.0571. (in Russian)
2. Stepanow A.W. (1933) Uber den Mechanismus der plastischen Deformation. *Zeitschrift fur Physik*. 81(7–8). pp. 560–564.
3. Bahat D., Rabinovitch A., Frid V. (2005) Electromagnetic Radiation Induced in Fractured Materials. *Tensile Fracturing in Rocks: Tectonofractographic and Electromagnetic Radiation Methods*. pp. 379–458.
4. Vorobyov A.A. (1970) O vozmozhnosti elektricheskikh razryadov v nedrakh Zemli [On the possibility of electrical discharges in the Earth's interior]. *Geologiya i geofizika – Geology and Geophysics*. 12. pp. 3–13.
5. Vorobyov A.A. (1979) *Tektoelektricheskie yavleniya i vzniknovenie estestvennogo impul'snogo elektromagnitnogo polya Zemli – EIEMPZ* [Tectoelectrical phenomena and occurrence of the natural pulsed electromagnetic field of the Earth]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.
6. Shuman V.N. (2001) Perekhodnye elektromagnitnye protsessy v rasshirennom vremennom intervale: fiziko-matematicheskie modeli i osobennosti [Transient electromagnetic processes in an extended time interval: physico-mathematical models and features]. *Geofiz. Zhurn. – Geophysical Journal*. 23(1). pp. 3–21.

7. Shuman V.N. (1999) Glubinnost' elektromagnitnykh zondiruyushchikh sistem v real'nykh sredakh [Deepness of electromagnetic sounding systems in real-world environments]. *Geofiz. Zhurn. – Geophysical Journal*. 21(6). pp. 16–27.
8. Surkov V.V. *Elektromagnitnye efekty pri zemletryasenyakh i vzryvakh* [Electromagnetic effects during earthquakes and explosions]. Moscow: Moscow Engineering Physics Institute.
9. Ogawa T., Oike K., Miura T. (1985) Electromagnetic radiations from rocks. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres (1984 – 2012)*. 90(D4). pp. 6245–6249.
10. Zashchinskiy A.A., Salomatin V.N., Mastov Sh.R. (1983) *Metodicheskie rekomendatsii po primeneniyu metodov registratsii estestvennogo impul'snogo elektromagnitnogo polya Zemli pri izuchenii opolzneвого protsessa* [Methodical recommendations on the use of methods of recording the natural pulsed electromagnetic field of the Earth in the study of the landslide process]. Simferopol.
11. Sobolev G.A., Demin V.M. (1980) *Mekhanoelektricheskie yavleniya v Zemle* [Mechanoelectric phenomena in the Earth]. Moscow: Nauka.
12. Sobolev G.A. et al. (1982) *Elektromagnitnye predvestniki zemletryaseny* [Electromagnetic precursors of earthquakes]. Moscow: Nauka.
13. Bazarov I.P. (1991) *Termodinamika* [Thermodynamics]. Moscow: Vysshaya Shkola.
14. Nazarenko N.N. (2009) *Modelirovanie diffuzionno-kontroliruemyykh protsessov pri nanesenii kal'tsiy-fosfatnykh pokrytiy i pri ikh vzaimodeystvii s biologicheskoy zhidkost'yu* [Modeling of diffusion-controlled processes under deposition of calcium-phosphate coverings and their interaction with a biological fluid]: Abstract of Phys. Cand. Diss. Tomsk.
15. Sychev V.V. (2009) *Slozhnye termodinamicheskie sistemy* [Complex thermodynamic systems]. 5th ed. Moscow: MEI Publishing House.
16. Nye J. (1957) *Physical Properties of Crystals: Their Description by Tensors and Matrices*. Oxford: Clarendon Press.
17. Sirotnin Yu.I., Shaskol'skaya M.P. (1979). *Osnovy kristallofiziki* [Fundamentals of crystallophysics]. 2nd ed. Moscow: Nauka.
18. Landau L.D., Lifshits E.M. (1969) *Kratkiy kurs teoreticheskoy fiziki. Kniga 1. Mekhanika. Elektrodinamika* [Short Course of Theoretical Physics. Mechanics. Electrodynamics]. Moscow: Nauka.
19. Vonsovskiy S.V. (1984) *Magnetizm* [Magnetism]. Moscow: Nauka.
20. Vadyunina A.F., Babanin V.F. (1972) Magnitnaya vosprimchivost' nekotorykh pochv SSSR [Magnetic susceptibility of some soils of the USSR]. *Pochvovedenie – Eurasian Soil Science*. 10. pp. 56–66.
21. Vinokurov V.M. (1961) K magnitnym svoystvam mineralov [The magnetic properties of minerals]. *Zap. Vses. min. ob-va*. 5.
22. Goncharov S.A., Anan'ev P.P., Ermakov S.V. (2008) Razuprochnenie gornyykh porod v impul'snykh magnitnykh polyakh slozhnoy prostranstvenno-vremennoy struktury [Softening rocks in pulsed magnetic fields of a complex spatial-temporal structure]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' (nauchno-tekhnicheskiy zhurnal) – Mining Informational and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)*. 6. pp. 117–123.
23. Nemirovich-Danchenko M.M. (1998) Model' gipouprugoy khрупkoy sredy: primeneniye k raschetu deformirovaniya i razrusheniya gornyykh porod [Hypoelastic fragile environment model: Application to calculation of deformation and fracture of rocks]. *Fizicheskaya mezomekhanika*. 1(2).
24. Sud'enkov Yu.V. (2001) Elektromagnitnoye izlucheniye pri razrushenii p'ezoelektrikov submikrosekundnymi impul'sami davleniya [Electromagnetic radiation in the process of piezoelectric destruction by submicrosecond pressure pulses]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*. 71(12). pp. 101–103.

УДК 532.529

DOI 10.17223/19988621/40/7

Н.Н. Дьяченко, Л.И. Дьяченко, В.С. Гурова, С.А. Синеекая

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В СОПЛАХ РДТТ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ ТОПЛИВА, СОДЕРЖАЩЕГО ВЫСОКОДИСПЕРСНЫЙ ПОРОШОК АЛЮМИНИЯ**

Исследуется влияние высокодисперсного состава конденсированной фазы на процессы изменения спектра частиц. Показана зависимость двухфазных потерь двигателя от размера частиц оксида алюминия на входе в сопло. Описание взаимодействия частиц конденсата базируется на непрерывном подходе. Представлены результаты численного расчёта квазиодномерного установившегося течения продуктов сгорания в сопле РДТТ.

**Ключевые слова:** *двухфазное течение, функция распределения частиц по размерам, ультрадисперсные частицы, коагуляция и дробление частиц.*

Для увеличения энергетических характеристик ракетного двигателя в топливо добавляют порошок алюминия. Продукты сгорания такого топлива представляют смесь газа и полидисперсного ансамбля жидких частиц оксида алюминия. Неравновесность потока приводит к потере удельного импульса двигателя. Течение сопровождается коагуляцией и дроблением частиц конденсата. Учитывая актуальность задачи использования металлизированных топлив, были проведены широкомасштабные исследования течений двухфазных сред в соплах РДТТ. Наиболее полную библиографию этих исследований можно найти в работах [1–5].

До недавнего времени порошковые технологии позволяли получать порошки алюминия в промышленных объёмах, начиная с размера частиц в 2 мкм. Вышеуказанные исследования двухфазных течений базировались на результатах горения частиц такого размера. **В настоящее время разработаны технологии получения высокодисперсных (вплоть до наноразмерных) порошков.** С уменьшением размера частиц увеличивается их полнота сгорания, уменьшаются двухфазные потери, что стимулирует более широкое применение высокодисперсных порошков в энергосистемах [6, 7].

Данная работа посвящена численному исследованию течения продуктов сгорания смесового твёрдого топлива, **металлической добавкой к которому является высокодисперсный порошок алюминия.**

**Постановка задачи**

Для описания двухфазного течения используется непрерывная модель коагуляции частиц и феноменологическая многожидкостная модель среды. При численном расчете непрерывная функция распределения  $f(r)$  заменяется ступенчатой (счетной)  $n(r)$ , весь спектр частиц делится на  $N$  фракций, внутри фракции частицы имеют одинаковый размер, номер фракции определяется индексами  $i, j$ . Произведение  $m_i \cdot n_i = \rho_i$  – массовая концентрация частиц  $i$ -й фракции (здесь  $m_i$  – масса одной частицы,  $n_i$  – число частиц).

Система квазиодномерных уравнений, описывающих стационарное двухфазное полидисперсное течение с учетом коагуляции и дробления в рамках монодисперсной модели осколков, записывается в виде

$$F\rho U = \text{const}; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}F\rho U^2 + F\frac{d}{dx}P = F\sum_{i=1}^N\rho_i\varphi_{Ri}(U_i - U); \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}F\rho UH_0 = F\sum_{i=1}^N\rho_i[\varphi_{ai}c_p(T_i - T) + \varphi_{Ri}U_i(U_i - U)]; \quad (3)$$

$$P = \rho RT; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}F\rho_i U_i = F(n_i \sum_{j=1}^i K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\Phi_{ij}\rho_j - \rho_i \sum_{j=i}^N K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\Phi_{ij}n_j); \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}Fn_i U_i = -Fn_i \sum_{j=1}^N K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\Phi_{ij}n_j; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F\rho_i U_i^2 = & F[\rho_i\varphi_{Ri}(U - U_i) + K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\rho_j(U_j - (1 - \Phi_{ij})U_i) - \\ & - n_i \sum_{j=1}^i \rho_j \sum_{j=1}^N K_{ij}\mathcal{E}_{ij}n_j(U_i - (1 - \Phi_{ij})U_i)]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F\rho_i U_i T_i = & F[\rho_i\varphi_{ai}\frac{c_p}{c_b}(T - T_i) + \frac{n_i}{c_b} \sum_{j=1}^i K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\rho_j E_{ij} + \frac{\rho_i}{c_b} \sum_{j=1}^N K_{ij}\mathcal{E}_{ij}n_j(1 - \Phi_{ij})E_{ji} + \\ & + T_i(n_i \sum_{j=1}^i K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\Phi_{ij}\rho_j - \rho_i \sum_{j=1}^N K_{ij}\mathcal{E}_{ij}\Phi_{ij}n_j)]. \end{aligned} \quad (8)$$

В системе уравнений  $F = F(x)$  – сечение сопла;  $\rho, U, P, T$  – плотность, скорость, давление, температура газа;  $H_0$  – энтальпия торможения;  $c_p$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении;  $c_b$  – удельная теплоемкость вещества;  $R$  – газовая постоянная;  $\varphi_{Ri}, \varphi_{ai}$  – функции динамического и теплового взаимодействия газа с частицами;  $\rho_i, U_i, T_i$  – плотность, скорость, температура частиц;  $\rho_b$  – плотность вещества частицы;  $K_{ij}$  – константа коагуляции;  $\Phi_{ij}$  – коэффициент эффективности столкновений;  $\mathcal{E}_{ij}$  – коэффициент захвата;  $E_{ij}$  – энергия взаимодействующих частиц. Функции динамического и теплового взаимодействия газа и частицы определяются по формулам  $\varphi_{Ri} = F_\sigma \frac{\mu}{\rho_i r_i^2}$ ,  $\varphi_{ai} = \frac{3 \text{Nu}}{2 \text{Pr}} \frac{c_p \mu}{\rho_i c_b r_i^2}$ , где  $f_\sigma$  – функция сопротивления,  $\mu$  – динамическая вязкость газа;  $\text{Nu}, \text{Pr}$  – числа Нуссельта и Прандтля.

С учетом обдува частиц газом константа коагуляции и коэффициент эффективности столкновений записываются в виде

$$K_{ij} = \pi(\beta_i r_i + \beta_j r_j)^2 |U_i - U_j|, \text{ где } \beta_k = (1 + 0.03 We_k), \quad k = i, j,$$

$$\Phi_{ij} = 1 - 0.247 Re_{B_{ij}}^{0.434} Lp_j^{-0.133} (r_i / r_j)^{0.273} - \Phi_{ij},$$

где

$$\Phi_{ij} = 0.00446 B_{ij}, \text{ если } B_{ij} \leq 40.6,$$

$$\Phi_{ij} = 11.9 (B_{ij} / 100)^{4.64}, \text{ если } 40.6 \leq B_{ij} \leq 120,$$

$$B_{ij} = Re_{B_{ij}}^{0.285} Lp_j^{0.2} (r_i / r_j)^{0.4} We_j^{0.442}.$$

Здесь

$$Re_{B_{ij}} = \frac{2\rho_{B_i}}{\mu_{B_i}} |U_i - U_j| r_i, \quad We_j = \frac{2\rho}{\sigma_{B_j}} |U - U_j|^2 r_j,$$

$$Lp_j = 2r_j \sigma_{B_j} \rho_{B_j} / \mu_{B_i}.$$

Формула для коэффициента эффективности столкновений справедлива в диапазоне

$$45 \leq Re_{ij} \leq 480, \quad 8 \leq Lp_j \leq 930, \quad 2 \leq (r_j / r_i) \leq 12.$$

Зависимость плотности, вязкости и коэффициента натяжения от температуры задавались следующими соотношениями:

$$\rho_{B_i} = (6.044 - 0.001294 T_i) \cdot 10^3, \quad \text{кг/м}^3,$$

$$\mu_{B_i} = 0.0234 (2670 / T_i)^n, \quad \text{нс/м},$$

$$\sigma_i = (700 - 0.195 (T_i - 2309)) \cdot 10^{-3}, \quad \text{н/м}.$$

Здесь  $n = \begin{cases} 6.5 & \text{при } T_i \leq 2670, \\ 2.387 & \text{при } T_i \geq 2670. \end{cases}$

Коэффициент захвата  $\mathcal{E}_{ij}$  определялся по формулам Ленгмюра и Блоджетт:

$$\mathcal{E}_{ij} = \left( \mathcal{E}_{ij}^* + \mathcal{E}_{ij}^{**} \frac{Re_{ij}}{60} \right) \frac{1}{1 + Re_{ij} / 60},$$

где

$$\mathcal{E}_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } Stk_{ij} \leq 0.607, \\ \left( 1 + 0.75 \frac{\ln(4Stk_{ij})}{2Stk_{ij}} \right)^2, & \text{если } Stk_{ij} > 0.607, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{ij}^{**} = \begin{cases} 0, & \text{если } Stk_{ij} < 0.1, \\ \left( \frac{Stk_{ij}}{Stk_{ij} + 0.125} \right)^2, & \text{если } Stk_{ij} \geq 0.1, \end{cases}$$

$$Stk_{ij} = r_i^2 \rho_i \frac{|U_i - U_j|}{9r_i \mu}, \quad Re_{ij} = \frac{2\rho}{\mu} |U_i - U_j| r_j.$$

Энергия взаимодействующих частиц:

$$E_{ij} = c_0 (T_i - T_j) + \frac{(U_i - U_j)^2}{2}.$$

Наиболее полная физико-математическая постановка задачи представлена в работах [1, 5].

Система уравнений (1) – (8) решалась на основе обратной задачи. Для численного интегрирования системы уравнений газа использовался стационарный аналог нецентральной конечно-разностной схемы Мак-Кормака, второго порядка точности. Интегрирование системы уравнений фракции частиц осуществлялось с помощью неявной разностной схемы, имеющей также второй порядок точности. На входном сечении использовалось условие скоростного и температурного равновесия между газовой фазой и частицами. Течение рассчитывалось в квазиодномерной постановке для модельного радиусно-профилированного сопла [4]. Радиус скругления в горловине сопла  $r = r_*$  ( $r_*$  – радиус минимального сечения сопла), угол поджатия в дозвуковой области  $\alpha_1 = 45^\circ$ , углы поджатия в сверхзвуковой области  $\alpha_2 = 24^\circ$  и  $\alpha_3 = 7^\circ$  соответственно.

Расчеты проводились при следующих значениях исходных параметров:

$$P_k = 6 \cdot 10^6, 7 \cdot 10^6, 8 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$T_k = 3000, 3200, 3400 \text{ К};$$

$$\mu = 0.89 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$R = 300 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Расширение сопла  $Y_a = 6$ ; радиус критического сечения сопла  $r_* = 0.1$  м; весовая доля конденсата  $Z = 0.3$ ; число фракций  $N = 15$ .

Непрерывная функция распределения частиц по размерам на входе в сопло задавалась в виде

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r \ln(\sigma)} \exp \left\{ - \left[ \frac{\ln(r) - \ln(r_0)}{\sqrt{2\pi} \ln(\sigma)} \right]^2 \right\}.$$

Здесь  $r_0$  – средний размер частиц,  $\sigma = 1.5$  – дисперсия.

При достижении числа Вебера ( $We$ ) критического значения равного 17 и критического момента вращения ( $M$ ) равного 4 частица дробится [1].

### Результаты расчётов

На рис. 1 представлены результаты расчётов среднемассового размера частиц  $D_{43}$  вдоль сопла. Средний радиус частиц на входе в сопло  $r_0$  принимался равным 1.5; 1.0; 0.5; 0.1 мкм. При  $r_0 = 1.5$  и 1.0 мкм в области минимального сечения сопла наблюдается интенсивный рост частиц, процесс коагуляции превосходит процесс дробления. Дробление в дозвуковой части сопла определяется взаимодействием частиц с газом (числом Вебера), в трансзвуковой и сверхзвуковой областях сопла основным механизмом дробления является вращение частиц (накопленное при нецентральных столкновениях) и определяется моментом вращения.

Для более мелких частиц ( $r_0 = 0.5, 0.1$  мкм) в области критического сечения сопла также наблюдается интенсивный рост среднемассового размера частиц. Значение числа Вебера не достигает критической величины вдоль всего сопла. Не достигает критического значения и момент вращения, как в трансзвуковой, так и в сверхзвуковой областях сопла. Изменение спектра частиц определяется только процессом коагуляции. В сверхзвуковой области процесс столкновения частиц практически не наблюдается, так как разница скорости между частицами мала.

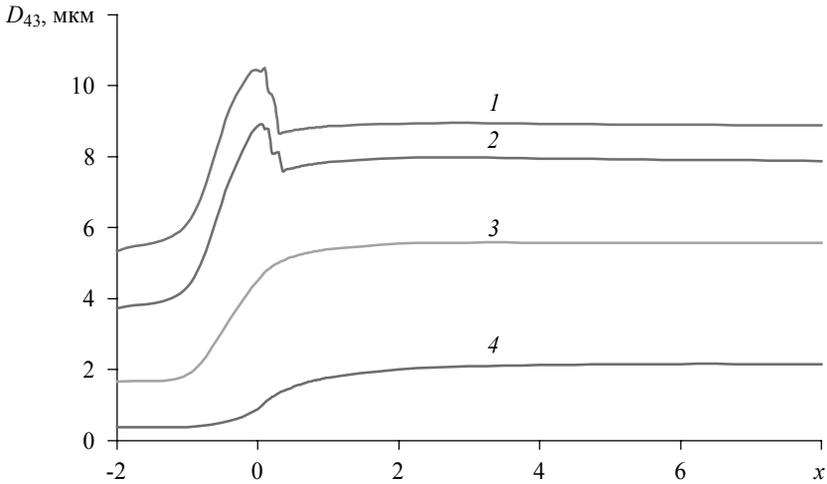


Рис. 1. Изменение среднемассового размера частиц вдоль сопла при  $P_k = 70$  атм,  $T_k = 3200$  К (1 —  $r_0 = 1.5$  мкм, 2 —  $r_0 = 1.0$  мкм, 3 —  $r_0 = 0.5$  мкм, 4 —  $r_0 = 0.1$  мкм)

На рис. 2 представлены результаты расчёта среднемассового размера частиц  $D_{43}$  на срезе сопла от среднего радиуса частиц  $r_0$  на входе в сопло.

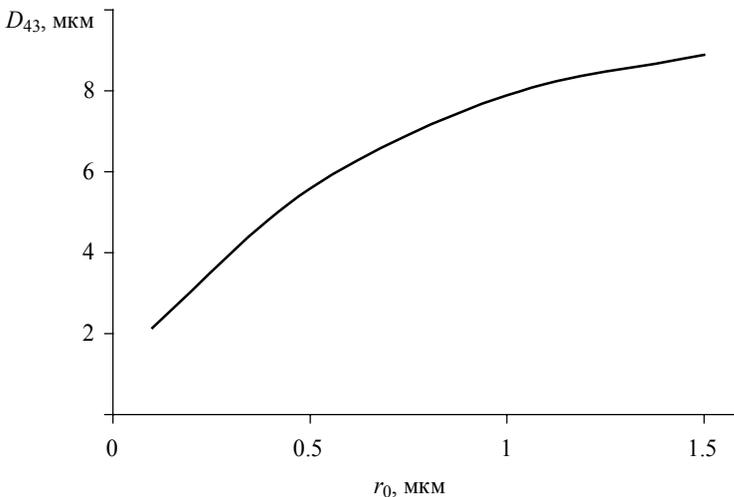


Рис. 2. Зависимость среднемассового размера частиц на срезе сопла  $D_{43}$  от среднего радиуса частиц на входе  $r_0$  ( $P_k = 70$  атм;  $T_k = 3200$  К)

На рис. 3 представлена зависимость двухфазных потерь от среднего радиуса частиц ( $r_0$ ) на входе в сопло.

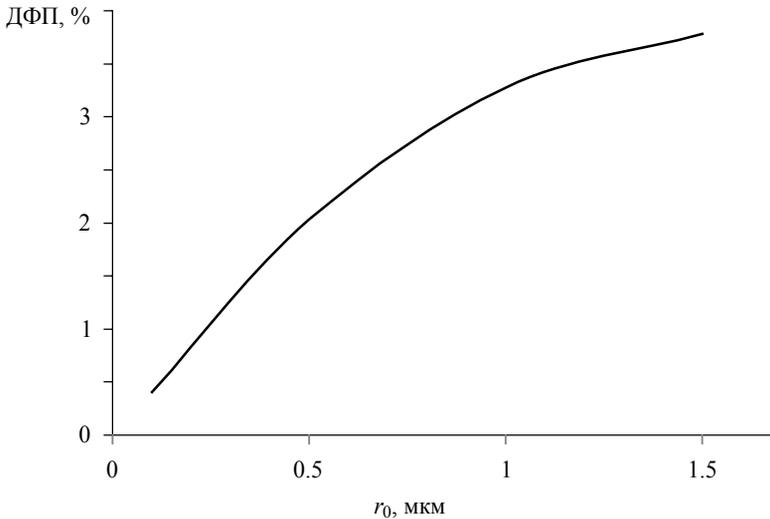


Рис. 3. Зависимость изменения двухфазных потерь двигателя (ДФП, %) от среднего радиуса частиц на входе  $r_0$  ( $P_k = 70$  атм;  $T_k = 3200$  К)

В таблице представлены результаты численного расчёта среднемассового размера частиц на срезе сопла и значения двухфазных потерь для значений средних радиусов частиц на входе в сопло. Расчёты проведены при давлении газа в камере сгорания  $P_k = 60$  атм; 70 атм; 80 атм и температуре в камере  $T_k = 3000$  К; 3200 К; 3400 К.

$r_0$	$P$	$T$	$D_{43}$	ДФП	$P$	$T$	$D_{43}$	ДФП	$P$	$T$	$D_{43}$	ДФП
1.5	60	3000	8.759	3.8721	70	3000	9.138	3.9315	80	3000	9.476	3.9744
1	60	3000	7.713	3.3201	70	3000	8.128	3.4215	80	3000	8.494	3.5035
0.5	60	3000	5.290	1.9729	70	3000	5.720	2.1318	80	3000	6.103	2.2613
0.1	60	3000	1.716	0.3249	70	3000	2.251	0.4407	80	3000	2.812	0.5855
1.5	60	3200	8.506	3.721	70	3200	8.877	3.7807	80	3200	9.211	3.8248
1	60	3200	7.474	3.175	70	3200	7.883	3.2764	80	3200	8.348	3.3566
0.5	60	3200	5.147	1.882	70	3200	5.570	2.0323	80	3200	5.946	2.1646
0.1	60	3200	1.640	0.3059	70	3200	2.139	0.4090	80	3200	2.710	0.5416
1.5	60	3400	8.544	3.6826	70	3400	8.917	3.7385	80	3400	9.2540	3.7853
1	60	3400	7.518	3.1453	70	3400	7.253	3.091	80	3400	8.303	3.3271
0.5	60	3400	5.174	1.8579	70	3400	5.601	2.014	80	3400	5.981	2.1470
0.1	60	3400	1.632	0.2954	70	3400	2.15	0.3963	80	3400	2.702	0.5268

### Заключение

Течение двухфазного потока, дискретной фазой которого является высокодисперсный ансамбль частиц оксида алюминия, сопровождается коагуляцией и дроблением частиц. С уменьшением размера частиц на входе уменьшается их среднемассовый размер на выходе и, как следствие, уменьшаются двухфазные потери

двигателя. Течение ультрадисперсного ансамбля частиц ( $r_0 < 0.5$  мкм) сопровождается только коагуляцией частиц. Расчёты можно проводить без учёта дробления частиц как за счёт их взаимодействия с газом, так и за счёт их вращения.

Необходимо отметить, что вопрос формирования ансамбля частиц оксида при горении ультра- и нанопорошков алюминия остаётся открытым и требует своего решения.

Представленная работа может быть использована при разработке металлизированного топлива, а также при проектировании энергосистемы в целом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф.* Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во ТГУ, 1986. 262 с.
2. *Шрайбер А.А.* Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // *Итоги науки и техн. Комплексные и специальные разделы механики.* М.: ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
3. *Алемасов В.Е., Дрегалин АФ., Тишин А.П.* Теория ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1989. 464 с.
4. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 366 с.
5. *Стернин Л.Е., Шрайбер А.А.* Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
6. *Де Лука Л.Т., Галфетти Л., Северини Ф. и др.* Горение смесевых твердых топлив с наноразмерным алюминием // *Физика горения и взрыва.* 2005. Т. 41. № 6. С. 80–94.
7. *Ворожцов А.Б., Глазунов А.А., Де Лука Л.Т. и др.* Влияние применения наноалюминия на газодинамику высокоэнергетических установок // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2014. № 2(28). С. 45–57.

Статья поступила 15.03.2016 г.

*D'yachenko N.N., D'yachenko L.I., Gurova V.S., Sineokaya S.A.* NUMERICAL INVESTIGATION OF THE FLOW OF COMBUSTION PRODUCTS CONTAINING HIGH-DISPERSIVE ALUMINUM POWDER IN THE SOLID-FUEL ROCKET ENGINE NOZZLES

DOI 10.17223/19988621/40/7

The work is devoted to the numerical investigation of the flow of metalized fuel combustion products in the rocket engine nozzle cluster. The system of equations for the gas-droplet environment is written in the model of interpenetrating multispeed and multitemperature continua. The condensed phase is represented by an ensemble of polydisperse liquid alumina particles. Coagulation and fragmentation are taken into account due to the interaction both with each other and with the gas. The description of condensate particle interaction is based on the continuous approach of variation in the size distribution function.

The dependence of two-phase losses of the engine on the size of aluminum oxide particles due to the nonequilibrium of the flow at the nozzle entrance is shown. Results of the numerical calculation of the quasi-one-dimensional steady flow of aluminized fuel combustion products in the profiled solid-fuel rocket engine nozzle are presented. Analysis of the calculation data suggests that the use of high-dispersed aluminum powder in composite solid propellants increases the specific impulse of the engine as compared to previously used powders.

Keywords: two-phase flow, particle size distribution function, polydisperse ensemble, coagulation and fragmentation of particles.

*DYACHENKO Nikolay Nikolaevich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

DYACHENKO Lyudmila Ivanovna (Candidate of Physics and Mathematics, Scientific research institute of applied mathematics and mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

GUROVA Valeriya Sergeevna (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: valery0995@mail.ru

SINEOKAYA Sofiya Aleksandrovna (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: sophia1994@mail.ru

#### REFERENCES

1. Vasenin I.M. et al. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Shrayber A.A. (1988) *Mnogofaznye polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom diskretnykh vklyucheniy* [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of discrete inclusions]. *Itogi nauki i tekhniki. Kompleksnye i spetsial'nye razdely mekhaniki – Itogi Nauki i Tekhniki. Complex and special sections of mechanics*. Moscow: VINITI. 3. pp. 3–80.
3. Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P. (1989) *Teoriya raketnykh dvigateley* [Theory of rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Pirumov U.G., Roslyakov G.S. (1990) *Gazovaya dinamika sopel* [Gas dynamics of nozzles]. Moscow: Nauka.
5. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
6. De Luca L.T., Galfetti L., Severini F. et al. (2005) *Gorenie smesevykh tverdykh topliv s nanorazmernym alyuminiem* [Burning of nano-aluminized composite rocket propellants]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 41(6). pp. 680–692.
7. Vorozhtsov A.B. et al. (2014) *Vliyanie primeneniya nanoalyuminiya na gazodinamiku vysokoenergeticheskikh ustanovok* [The impact of application of nanoaluminum on gas dynamics of high-energy systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 45–57.

УДК 533.17, 631.42  
DOI 10.17223/19988621/40/8

А.М. Кагенов

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА «ЭКЗОМАРС» НА ЭРОЗИЮ ПОВЕРХНОСТИ МАРСА<sup>1</sup>

В работе представлены результаты математического моделирования воздействия струй продуктов сгорания двигательной установки (ДУ) на поверхность Марса при посадке десантного модуля (ДМ) «ЭкзоМарс». Проведены численные исследования разрушения различных типов грунтов (сыпучего, комковатого, кусковатого и песка) под действием истекающих сверхзвуковых струй продуктов сгорания ДУ в процессе посадки десантного модуля на поверхность Марса. Рассмотрены два режима работы ДУ посадочной платформы «ЭкзоМарс»: режим максимальной и минимальной тяги. По результатам параметрических исследований выявлено расстояние, с которого начинается эрозия поверхности Марса, более разрушительную силу сверхзвуковые струи ДУ проявляют на высоте с 1 м и ниже. Показано, что в момент касания ДМ поверхности Марса при работе ДУ на максимальном режиме возможна эрозия всех типов грунтов, за исключением сыпучего грунта, а на минимальном эрозия не наблюдается.

**Ключевые слова:** *космический аппарат «ЭкзоМарс», математическое моделирование, сверхзвуковая струя, эрозия, марсианский грунт, прочность на сдвиг.*

В связи с повышенным интересом к планете Марс активно развиваются различные космические программы, направленные на изучение космоса, ближайших планет и спутников, такие, как «Фобос-Грунт», «ЭкзоМарс», «Mars Scout», «MAVEN», «Curiosity» и т.д. С этой целью проектируются и модифицируются посадочные платформы космических аппаратов, предназначенных для изучения планеты Марс. В ходе посадки десантного модуля сверхзвуковые струи импульсных двигательных установок воздействуют на поверхность Марса. Процесс спуска ДМ может привести к разной степени эрозии почвы. Согласно результатам проведенных численных исследований, на большом удалении ДМ от поверхности Марса может образовываться пылевое облако, а на малых высотах и в момент касания поверхности возможно разрушение грунта. Эти факторы могут негативно сказаться на корректной работе бортовых приборов и полезной нагрузке посадочной платформы. В связи с этим, для обеспечения штатного функционирования бортовых приборов и защиты полезной нагрузки посадочной платформы КА «ЭкзоМарс» необходимо проведение исследований по оценке степени влияния воздействия истекающих струй на процесс разрушения марсианского грунта в планируемых местах посадки ДМ.

<sup>1</sup> В статье использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта (№ 8.2.45.2015), в рамках Программы «Научный фонд им. Д.И. Менделеева Томского государственного университета».

### Физико-математическая постановка задачи и метод решения

В данной работе рассматривается десантный модуль проекта «ЭкзоМарс» [1]. На рис. 1 показана примерная конфигурация посадочной платформы. Десантный модуль в основном состоит из: платформы, ДУ, радара, баков с топливом и гелием, тепловых сотопанелей, комплекса научной аппаратуры и марсохода. ДУ оснащена четырьмя импульсными жидкостными ракетными двигателями с возможностью изменения силы тяги. Согласно планируемому спуску КА на поверхность Марса, на высоте от 600–1000 м после отделения защитного кожуха системой управления выдается команда на включение ДУ. На высоте 10 м скорость спуска снижается до 1.8–2 м/с, далее ДУ обеспечивает заданную скорость спуска и касания с поверхностью. По сигналу касания одного из датчиков, установленных на каждой опоре, выполняется выключение ДУ [2]. В целях обеспечения безопасной посадки и достижения поставленных задач для марсохода и посадочной платформы у программы «ЭкзоМарс» имеется ряд требований к свойствам грунтов для места посадки ДМ [3]. Место для посадки должно быть древним, обладать в избытке морфологическими и минеральными свидетельствами о водной активности, содержать в себе осадочные отложения, выходящие на поверхность пласта, которые должны быть распределены по посадочному эллипсу и иметь небольшой пыльный покров.

В целях детального изучения протекающих процессов во время посадки ДМ на поверхность Марса с учетом сложной конфигурации посадочной платформы, характера ландшафта места посадки, наличия частиц грунта и пыли в окружающей среде и возможной эрозии марсианского грунта, математическая постановка задачи рассматривается в трехмерном приближении. При описании нестационарного сжимаемого вязкого течения газа записываются законы сохранения массы, количества движения и энергии совместно с моделью турбулентности  $k-\omega SST$  с использованием следующих допущений: газ считается идеальным, сила тяжести не учитывается [4–7].

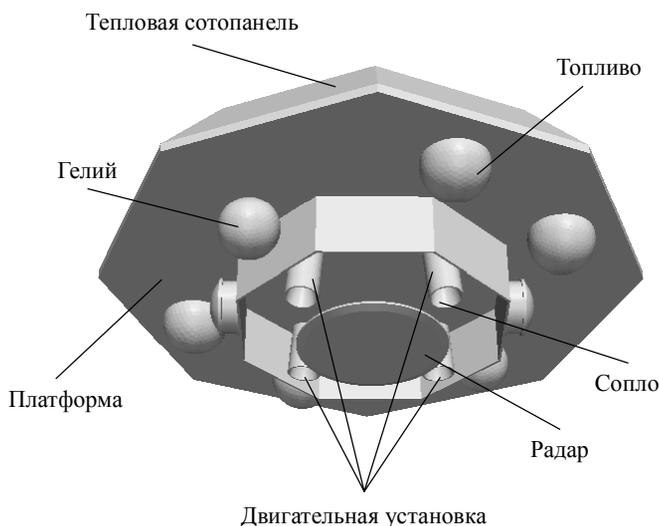


Рис. 1. Примерная конфигурация посадочной платформы «ЭкзоМарс»

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] = 0,$$

где  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $t$  – время, с;  $u_j$  – скорость, м/с;  $x_j$  – координата, м.

Уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ji}] = 0,$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $p$  – давление, Па;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Тензор вязких напряжений имеет следующий вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right],$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

Уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j E + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}] = 0,$$

где  $E$  – полная внутренняя энергия, Дж;  $q_j$  – тепловой поток, Дж/(м<sup>2</sup>·с).

Уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho R T,$$

где  $T$  – температура, К;  $R$  – удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К).

В качестве модели грунта используется уравнение Кулона для сухого связного грунта [8]. Сопротивление грунта сдвигу характеризуется прочностными свойствами грунта и складывается из сопротивления трения, пропорционального нормальному давлению, плюс сцепление, не зависящее от давления. Прочностью грунта называют способность его воспринимать силы внешнего воздействия не разрушаясь. Разрушение грунта происходит в виде перемещения-сдвига одной его части относительно другой тогда, когда силы внешнего воздействия превысят силы внутреннего сопротивления. Прочность грунта определяется его сопротивляемостью сдвигу и оценивается показателем, который называется предельным сопротивлением сдвигу  $\tau$ . Величина прочности на сдвиг  $\tau$  имеет следующее соотношение:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg}(\varphi) + c,$$

где  $\sigma$  – давление, направленное перпендикулярно плоскости сдвига, Па;  $\varphi$  – угол внутреннего трения, град;  $c$  – величина когезии, Па.

На рис. 2 представлена исследуемая расчетная область, приведены обозначения границ расчетной области, ДМ и ДУ.

Для границ Г1 и Г7 используются следующие граничные условия (ГУ): для давления – условия непроницаемости:

$$\operatorname{grad}(P) = 0;$$

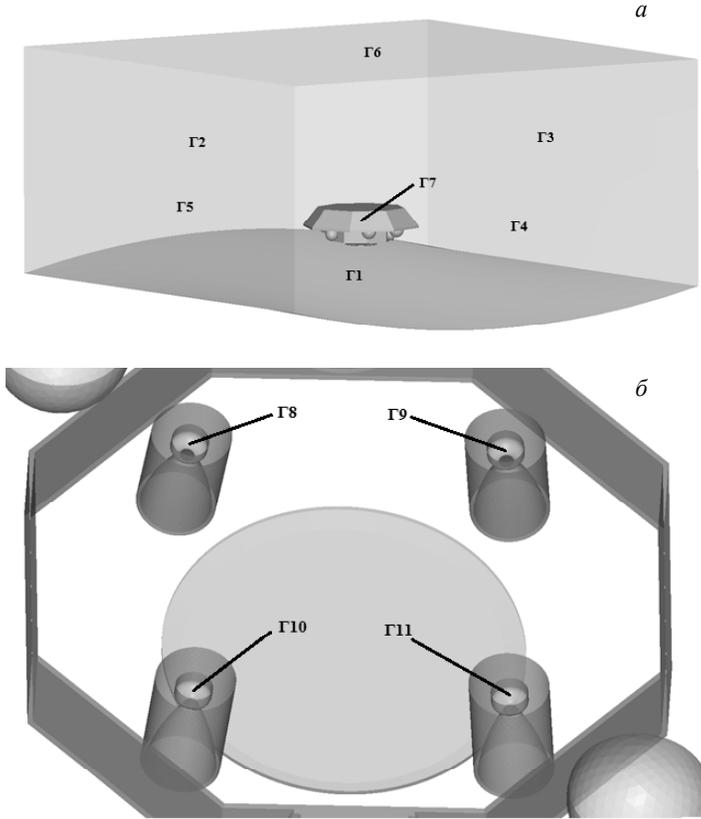


Рис. 2. Расчетная область и обозначения ГУ: Г1 – поверхность Марса; Г2, Г3, Г4, Г5, Г6 – внешние границы расчетной области; Г7 – поверхность ДМ; Г8, Г9, Г10, Г11 – камера сгорания ДУ

для скорости – условия прилипания (все компоненты вектора скорости равны нулю):

$$U_x = 0, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0;$$

для температуры (стенки сопла полагаются теплоизолированными)

$$\text{grad}(T) = 0.$$

Для кинетической энергии турбулентности и диссипации кинетической турбулентной энергии ГУ моделируются пристеночными функциями.

Для Г2, Г3, Г4, Г5 полагаются следующие условия:

$$P = P_a, \quad T = T_a, \quad U = 0.$$

где  $P_a$  – давление окружающей среды,  $T_a$  – температура окружающей среды.

$$\begin{aligned} \text{grad}(k) &= 0, \\ \text{grad}(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Как только истекающие струи достигают этих границ, используются граничные условия второго рода:

$$\text{grad}(P) = 0, \quad \text{grad}(U) = 0.$$

ГУ для Г6 имеют следующий вид:

$$P = P_a, \quad T = T_a, \quad U = 0.$$

На границах Г8, Г9, Г10, Г11 задаются следующие ГУ:

$$H = H_0, \quad S = S_0,$$

где  $H, S$  – энтальпия и энтропия.

$$k = k_0, \quad \omega = \omega_0.$$

Для реализации физико-математической модели и проведения численных исследований применялось свободное программное обеспечение OpenFOAM [9]. Численный метод реализован на методе конечных объемов, математическая модель основана на приближенном решении задачи Римана по схеме HLLC с использованием многомерного градиентного ограничителя [10]. СЛАУ разрешается методом Гаусса. Дискретизация по времени производится методом Рунге – Кутты. Численные исследования выполнены с использованием суперкомпьютера Национально исследовательского Томского государственного университета СКИФ Cyberia.

### Результаты численных исследований

Рассматривается работа ДУ на минимальном и максимальном режиме на высотах 1, 0.5 и 0.3 м. На максимальном режиме сила тяги одного двигателя ДУ соответствует 13734 Н, а на минимальном – 1962 Н. Время импульса ДУ составляет 0.03 с. Конечные характеристики ДУ посадочной платформы приведены в [2]. Давление окружающей среды полагается равным 650 Па, а температура 250 К. В расчетах принимается, что в начальный момент времени среда покоится. Поверхность, расположенная под ДМ, задается неровной. Расчеты проводятся для сыпучего (1–10 мкм), комковатого (5–500 мкм), кусковатого (50–3000 мкм) грунта и песка (60–200 мкм). В табл. 1 приведены используемые в модели грунта эмпирические константы, которые были получены из предыдущих космических программ Viking, Pathfinder и MER [11]. Согласно оценкам, прочность на сдвиг рыхлого сухого грунта Марса находится в пределах от 2 до 20 кПа. При превышении значения 20 кПа происходит разрушение марсианского грунта.

Таблица 1

Тип и параметры грунта

Тип грунта		Угол внутреннего трения, градус	Когезия, кПа
$\tau_1$	Сыпучий	18	3
$\tau_2$	Комковатый	35	3
$\tau_3$	Кусковатый	30	11
$\tau_4$	Песок	30	1

В табл. 2 приведены максимальные расчетные значения прочности на сдвиг сыпучего, комковатого, кусковатого грунта и песка при работе ДУ на стационарном режиме. Показано, что предельное значение 20 кПа превышают только случаи для комковатого и кусковатого грунта на высоте 0.3 метра при работе ДУ на

максимальном режиме. В остальных случаях превышение порогового значения не наблюдается.

Таблица 2

**Максимальные значения прочности на сдвиг связного сухого грунта**

Режим ДУ	Высота, м	$\tau_1$ , Па	$\tau_2$ , Па	$\tau_3$ , Па	$\tau_4$ , Па
Максимальный	0.3	13000	25500	28700	18700
	0.5	8410	15700	20600	10600
	1	5010	8330	14600	4570
Минимальный	0.3	4780	7840	14200	4160
	0.5	4360	6930	13400	3420
	1	3620	5330	12100	2100

На рис. 3 представлено распределение величины прочности на сдвиг для песка на поверхности Марса в случае расположения ДМ на высоте 0.3 м при работе ДУ на максимальном режиме. Изменение величины прочности на сдвиг для песка с течением времени на максимальном режиме работы ДУ и расположении ДМ на высоте 0.3, 0.5 и 1 м приведено на рис. 4–6. Здесь номера кривых соответствуют точкам, подписанным на рис. 3. Следует отметить, что качественная картина распределения прочности на сдвиг для других рассмотренных типов грунтов сохраняется, наблюдается отличие по величине. При работе ДУ на минимальном режиме, качественная картина распределения прочности на сдвиг подобна максимальному режиму, но воздействие струй на поверхность Марса менее интенсивное.

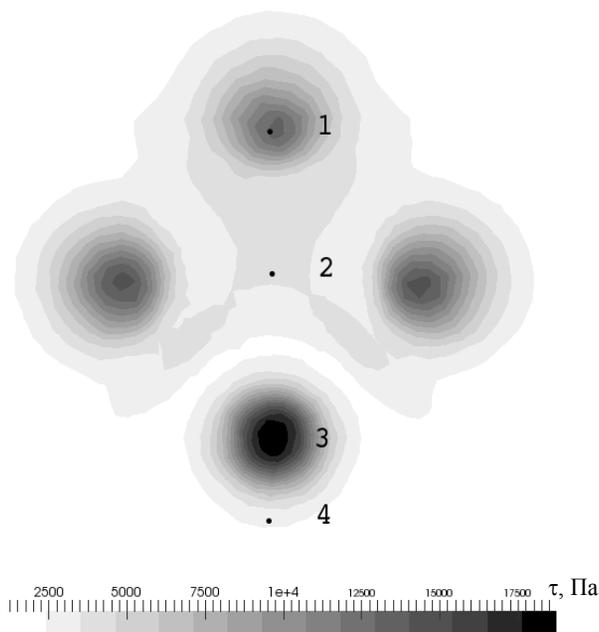


Рис. 3. Распределение  $\tau_4$  на высоте 0.3 м при работе ДУ на максимальном режиме

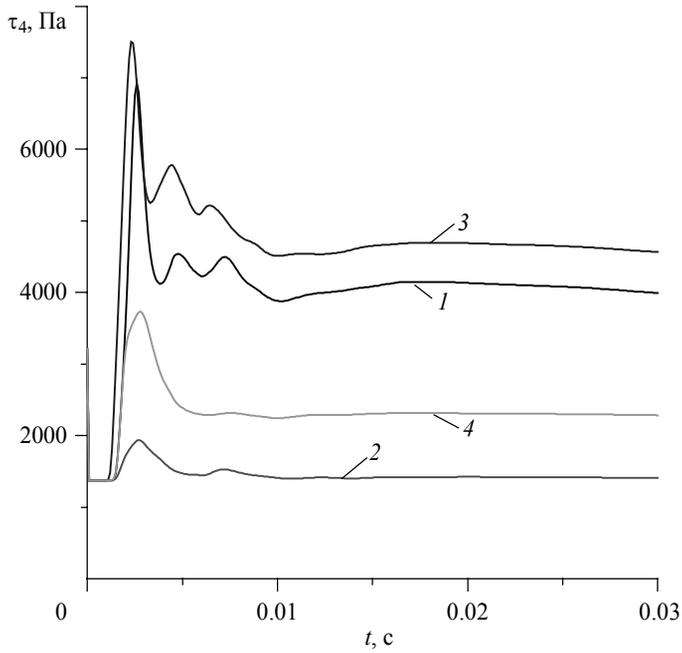


Рис. 4. Значение параметра  $\tau_4$  при расположении ДМ на высоте 1 метра

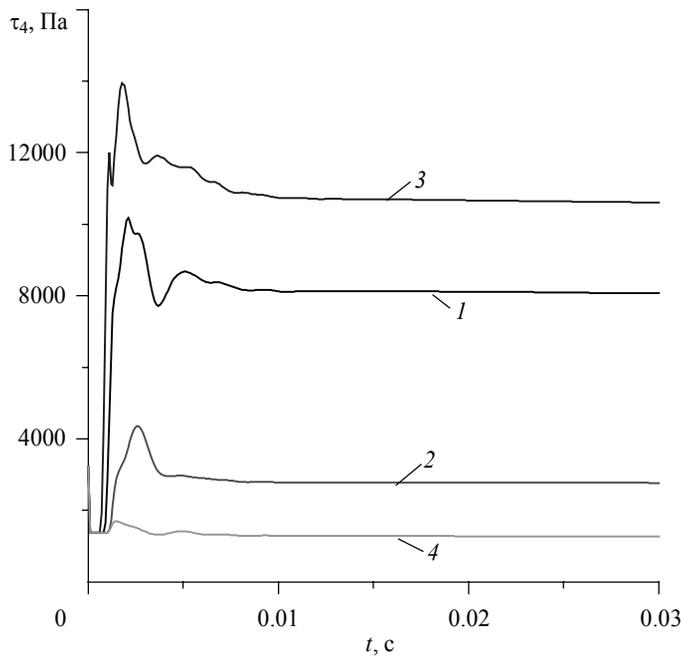


Рис. 5. Значение параметра  $\tau_4$  при расположении ДМ на высоте 0.5 метра

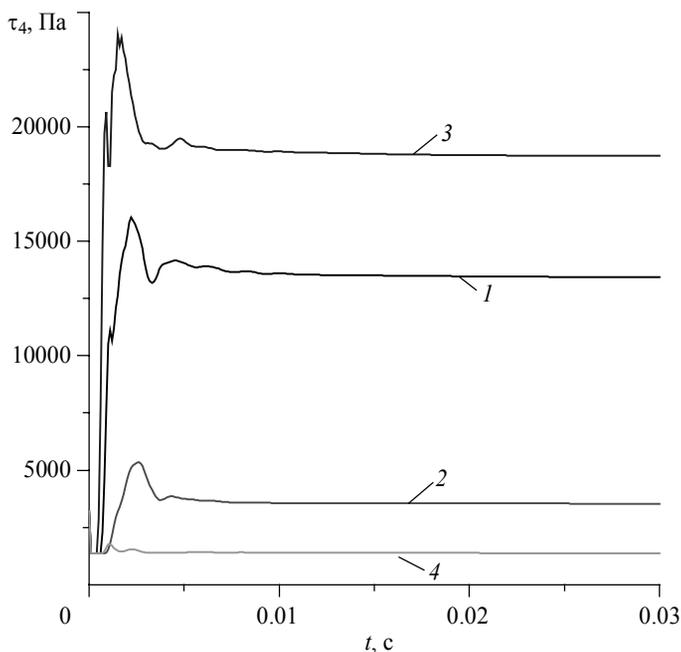


Рис. 6. Значение параметра  $\tau_4$  при расположении ДМ на высоте 0,3 м

При снижении ДМ с 1 м и ниже величина прочности на сдвиг увеличивается. При этом, в момент включения ДУ возможна эрозия марсианского грунта в результате ее нестационарной работы. Вследствие этого на поверхность в месте посадки последовательно приходят несколько ударных волн с уменьшающейся интенсивностью. Согласно результатам расчетов, при наличии данной конфигурации ДУ требуемое время для выхода на стационарный режим составляет 0,01 с.

Согласно результатам математического моделирования во всех случаях, наиболее разрушительное воздействие на почву, оказываемое сверхзвуковыми струями, происходит в первые сотые доли секунды работы ДУ. После выхода на стационарный режим интенсивность силового воздействия на поверхность Марса падает. Расчеты показывают, что при расположении ДМ на высоте 1 м в момент старта двигателей независимо от режима работы ДУ какой-либо разрушительный эффект на поверхность сверхзвуковые струи не оказывают. На высоте 0,5 м возможна эрозия почвы только для комковатого и кусковатого грунта на максимальном режиме работы ДУ. В момент касания ДМ поверхности Марса при работе ДУ на максимальном режиме может произойти разрушение почвы для всех типов грунта за исключением сыпучего, а на минимальном режиме работы ДУ эрозия почвы не наблюдается.

### Заключение

Проведено трехмерное математическое моделирование воздействия струй продуктов сгорания ДУ на поверхность Марса при посадке ДМ «ЭкзоМарс». Получены качественные результаты разрушения различных типов грунта Марса под

действием сверхзвуковых струй ДУ. Расчетные оценки проведены по пределу прочности на сдвиг сыпучего, комковатого, кусковатого грунта и песка с учетом нестационарных эффектов, характерных для выхода ДУ на режим. Выполнены многопараметрические численные исследования для случаев расположения ДМ на высоте 1, 0.5 и 0.3 м при работе ДУ на максимальном и минимальном режиме.

Получено, что в случае расположении ДМ на высоте 1 м и выше, какой-либо разрушительный эффект сверхзвуковые струи на поверхность Марса не оказывают. При сближении ДМ с поверхностью Марса при работе ДУ на максимальном режиме, возможно разрушение комковатого и кусковатого грунта на высоте 0.5 и 0.3 м после выхода ДУ на режим. Отмечено, что в момент включения ДУ также возможно разрушение песчаного грунта на расстоянии 0.3 м от поверхности. На минимальном режиме работы ДУ независимо от расположения ДМ, от момента старта ДУ и до выхода на стационарный режим, какое-либо разрушение почвы Марса не наблюдается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хартов В.В., Мартынов М.Б., Лукьянчиков А.В., Алексашкин С.Н. Проектная концепция десантного модуля «ЭкзоМарс-2018», создаваемого НПО им. С.А. Лавочкина // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 2 (23). С. 5–12.
2. Лихачев В.Н., Федотов В.П. Управление движением посадочного модуля космического аппарата «ЭкзоМарс» на этапе его спуска и посадки на поверхность Марса // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 2 (23). С. 58–64.
3. Ваго Хорсе, Лорензони Лейла, Калантропио Фабио, Зацциринский А.М. Выбор места посадки для миссии «ЭкзоМарс-2018» // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 2 (23). С. 42–46.
4. Глазунов А.А., Еремин И.В., Кагенов А.М., Кувишинов Н.Е. Численное исследование взаимодействия продуктов сгорания двигателей космических аппаратов с обтекаемыми поверхностями в условиях Марса // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 97–103.
5. Глазунов А.А., Еремин И.В., Кагенов А.М., Тырышкин И.М. Математическое моделирование взаимодействия продуктов сгорания двигателей КА с обтекаемыми поверхностями // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 57–59.
6. Глазунов А.А., Еремин И.В., Кагенов А.М., Тырышкин И.М. Применение пакета OpenFOAM для расчетов течений газа в соплах и струях // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 66–68.
7. Menter F.R. Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows // AIAA Paper. 1993. 93-2906. P. 1598–1605.
8. Kryzhanovskii L. Coulomb's friction law and soil failure in a three-dimensional stress-strain state // Hydrotechnical Construction. 1982. V. 16. No. 12. P. 664–674.
9. OpenFOAM / Официальный сайт OpenFOAM. [Электронный ресурс]. URL: <http://openfoam.com> (дата обращения 11.01.2016).
10. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. P. 315–344. DOI: 10.1007/b7976-1\_10.
11. Golombek M. P., Huertas A., Marlow J., McGrane B., Klein C., Martinez M., Arvidson R. E., Heet T., Barry L., Seelos K., Adams D., Li W., Matijevic J. R., Parker T., Sizemore H. G., Mellon M., McEwen A. S., Tamppari L. K., Cheng Y. Size-frequency distributions of rocks on the northern plains of Mars with special reference to Phoenix landing surfaces // Journal of Geophysical Research: Planets. 2008. V. 113. Issue E3.

Kagenov A.M. NUMERICAL INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE “EXOMARS” SPACECRAFT PROPULSION SYSTEM JETS ON EROSION OF THE MARS SURFACE

DOI 10.17223/19988621/40/8

The paper presents results of mathematical modeling of the effect caused by supersonic propulsion system jets on the surface of Mars during the descent of the ExoMars module. The action of propulsion system supersonic jets on the Mars surface was investigated numerically using the OpenFOAM software. According to results of the force action of supersonic jets on the Mars surface, the possible erosion of the Mars soil is estimated using Coulomb's law of shearing resistance. The soil model involves empirical constants which were obtained from previous Viking, Pathfinder, and MER space programs. The soil erosion during the landing of the spacecraft on the surface of Mars under the influence of the propulsion system at the maximum and minimum mode for loose, lumpy soil, and sand was investigated. During the numerical research, the distance from which soil erosion begins was revealed. The destructive force of propulsion system supersonic jets is greatest at one meter height and below. At the time of the spacecraft contacts with the surface of Mars at the maximum mode of the propulsion system, erosion of all soil types is possible except for the loose soil; for the minimum mode of the propulsion system, erosion is not observed.

Keywords: SC «ExoMars», mathematical modeling, supersonic jet, erosion, Mars, martian soil, shear strength.

KAGENOV Anuar Magzhanovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Khartov V.V., Martynov M.B., Luk'yanchikov A.V., Aleksashkin S.N. (2014) Proektnaya kontsepciya desantnogo modulya “EkzoMars-2018” sozdavaemogo NPO im. S.A.Lavochkina [Conceptual design of EXOMARS-2018 descent module developed by Lavochkin association]. *Vestnik FGUP NPO im. S.A. Lavochkina – Scientific and technical quarterly journal “NPO imeni S.A. Lavochkina”*. *Vestnik*. 2(23). pp. 5–12.
2. Likhachev V.N., Fedotov V.P. (2014) Upravlenie dvizheniem posadochnogo modulya kosmicheskogo apparata “EkzoMars” na etape ego spuska i posadki na poverhnost' Marsa [Control of EXOMARS SC landing module during its descent and landing on the Mars surface]. *Vestnik FGUP NPO im. S.A. Lavochkina – Scientific and technical quarterly journal “NPO imeni S.A. Lavochkina”*. *Vestnik*. 2(23). pp. 58–64.
3. Vago J., Lorenzoni L., Calantropio F., Zashchirinskii A.M. Vybora mesta posadki dlya missii “EkzoMars-2018 [Selecting a landing site for the EXOMARS-2018 mission]. *Vestnik FGUP NPO im. S.A. Lavochkina – Scientific and technical quarterly journal “NPO imeni S.A. Lavochkina”*. *Vestnik*. 2(23). pp. 42–46.
4. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Eremin I.V., Kuvshinov N.E. (2014) Chislennoe issledovanie vzaimodeystviya produktov sgoraniya dvigateley kosmicheskikh apparatov s obtekaemyimi poverhnostyami v usloviyah Marsa [Numerical study of the interaction of the spacecraft propulsion systems supersonic jets with the surfaces under conditions of Mars]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(8/2). pp. 97–103.
5. Glazunov A.A., Eremin I.V., Kagenov A.M., Tyryshkin I.M. (2013) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya produktov sgoraniya dvigateley KA s obtekaemyimi poverhnostyami [Mathematical modeling of the interaction of the spacecraft propulsion systems supersonic jets with the surfaces]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 56(9/3). pp. 57–59.
6. Glazunov A.A., Eremin I.V., Kagenov A.M., Tyryshkin I.M. (2013) Primenenie paketa OpenFOAM dlya raschetov techeniy gaza v soplakh i struyakh [Application of OpenFOAM for calculates gas flows in nozzles and jets]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 56(9/3). pp. 66–68

7. Menter F.R. (1993) Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. *ALAA Paper-93-2906*. pp. 1–23.
8. Kryzhanovskii L. (1982) Coulomb's friction law and soil failure in a three-dimensional stress-strain state. *Hydrotechnical Construction*. 16(12). pp. 664–674.
9. OpenFOAM. Official website. OpenFOAM C++ Documentation. [Online] Available from: <http://www.openfoam.com/docs/cpp> (accessed 11.01.2016).
10. Toro E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag. pp. 315–344. DOI: 10.1007/b7976-1\_10.
11. Golombek M. P., Huertas A., Marlow J., McGrane B., Klein C., Martinez M., Arvidson R. E., Heet T., Barry L., Seelos K., Adams D., Li W., Matijevic J. R., Parker T., Sizemore H. G., Mellon M., McEwen A. S., Tamppari L. K., Cheng Y. (2008) Size-frequency distributions of rocks on the northern plains of Mars with special reference to Phoenix landing surfaces. *Journal of Geophysical Research: Planets*. 113(E3). pp. 1–32.

УДК 539.3  
DOI 10.17223/19988621/40/9

К.Г. Охоткин

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТОДЕФОРМАЦИОННОГО ЭФФЕКТА ДЛЯ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ ФЕРРОЭЛАСТА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследована магнитоупругая задача о выпучивании тонкой гибкой прямоугольной пластины из ферроэласта под действием однородного поперечного магнитного поля в геометрически-нелинейной постановке. Получено аналитическое решение нелинейной краевой задачи в параметрическом виде с помощью введения специальных базовых функций, обобщающих эллиптические интегралы. Полученное решение позволяет проводить расчет и визуализацию форм выпучивания пластины и тестировать численные методы.

**Ключевые слова:** *ферроэласт, геометрическая нелинейность, магнитодеформационный эффект, специальные функции.*

Наряду с деформированием механических систем большой интерес представляют задачи изгиба и устойчивости композитных магнитоупругих систем. Одним из примеров таких систем являются гибкие упругие пластины с магнитными включениями – ферроэласты, находящиеся под действием магнитного поля. В настоящей статье рассмотрена магнитомеханическая задача деформирования гибких пластин, изготовленных из перспективных функциональных материалов – мягких ферроэластов или феррогелей. Этими понятиями обозначают композиционные системы, состоящие из низко модульной (модуль упругости  $\leq 10^4$  Па) полимерной матрицы, в которую внедрён высокодисперсный (микро- или наночастицы) феррит или ферромагнетик, например железо или магнетит. Эти микрочастицы имеют малую магнитную анизотропию и в отсутствии внешнего магнитного поля не имеют намагниченности. Ферроэласты – магниточувствительный материал, способный к большим деформациям, управляемым внешним магнитным полем. Устройства с использованием мягких ферроэластов имеют широкий круг перспективного применения в приборостроении (датчики, адаптивные демпферы, микроманипуляторы, бесконтактные виброузлы). Пластины из ферроэластов могут выступать в качестве чувствительного элемента датчиков в микроэлектромеханических устройствах (МЭМС). Проектирование таких устройств требует понимания механического поведения этих систем во внешнем магнитном поле.

В работах [1] и [2] описан эксперимент и решение методом конечных элементов задач деформирования ряда магнитоупругих систем с использованием метода конечных элементов. Основные уравнения магнитоупругости приведены в монографии [3]. Фундаментальной причиной магнитных деформаций являются пондеромоторные силы, возникающие в любом магнитном материале, помещенном в магнитное поле. Имеются два варианта действия пондеромоторных сил на тело. Первый вариант традиционный – в неоднородном поле внутри материала, способного к намагничиванию, возникают объемные силы, и тело деформируется в область максимального градиента. Второй вариант специфичен исключительно для мягких ферроэластов. Он возникает в однородном внешнем магнитном поле,

где роль объемных (градиентных) сил незначительна. В этом случае деформацию образца вызывает неоднородное распределение магнитного поверхностного давления. Магнитное поле оказывает воздействие на ферроэласты, направленное перпендикулярно силовым линиям. Эксперименты Степанова [1, 2] показали, что в силосановых ферроэластах этот эффект отчетливо выражен и достигает 10–20 %.

Авторами [1, 2] найден экспериментально и показан с помощью МКЭ пороговый эффект при деформации круговой пластины из ферроэласта в поперечном магнитном поле. В полях ниже критического пластина неподвижна и остается плоской. При достижении критического поля она начинает выгибаться, образуя купол, причем направление прогиба заранее не задано (вырождено). Так как во внешнем поле обнаружено критическое пороговое значение, то очевидно, что на пластину действуют сжимающие продольные распределенные силы (магнитное давление). В настоящей работе проводится аналогия с устойчивостью пластины в смысле Эйлера при продольном нагружении некоторой распределенной «эффективной» силой, приводятся результаты моделирования и аналитического решения задачи деформирования тонкой гибкой прямоугольной пластины из ферроэласта во внешнем магнитном поле с использованием авторского метода построения аналитических решений с учетом геометрической нелинейности. Магнитная часть модели выполнена оценочно в упрощенной постановке, а упор сделан на учет эффектов, связанных с геометрической нелинейностью в механической части модели. Аналитические решения будут построены на основе авторского подхода [4] с использованием новых специальных функций. Полученное аналитическое решение позволяет оценивать величину прогиба пластины в зависимости от величины внешнего поля и ее геометрических и физических параметров. Представленные результаты позволяют моделировать магнитоупругие системы, используемые в различных устройствах и датчиках микромеханики, в том случае, когда требуется точный учет геометрической нелинейности.

### Постановка задачи

Построим точное аналитическое решение задачи о геометрически нелинейном выпучивании тонкой гибкой прямоугольной пластины из ферроэласта, помещенной во внешнее поперечное однородное магнитное поле постоянного направления (магнитодеформационный эффект). В задаче будем рассматривать магнитомягкий материал пластины с магнитной анизотропией, соответствующей расположению магнитных моментов магнитных микрочастиц в плоскости пластины. При такой анизотропии на пластину, помещенную в поперечное магнитное поле, будет действовать продольное сжимающее магнитное давление. Будем для простоты исследовать пластину с двумя свободными противоположными краями. Два другие края пластины жестко (консольно) зашпелены и могут параллельно сдвигаться при деформировании пластины. При таком закреплении формы выпучивания пластины симметричны относительно поперечной плоскости сечения и задача является одномерной и геометрически подобной изгибу тонкого стержня в плоскости.

Рассмотрим тонкую гибкую прямоугольную пластину из ферроэласта со следующими геометрическими и физическими параметрами: длина  $L$ , ширина  $a$ , толщина  $h$ , модуль упругости  $E$ , магнитная восприимчивость материала  $\chi$ . Выберем декартову систему координат  $XYZ$  так, чтобы изначально плоская пластина была расположена на плоскости  $XOY$  (рис. 1). Два противоположных края

пластины, параллельных оси  $OY$ , жестко защемлены. Левый край закреплен и находится в начале координат, правый край имеет подвижное защемление и может сдвигаться параллельно оси  $OY$ . Два других края пластины, параллельных оси  $OX$ , свободны.

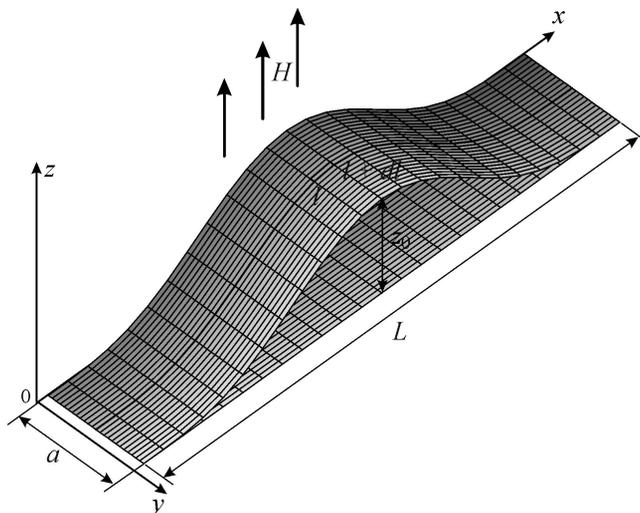


Рис. 1. Прямоугольная пластина из ферроэласта в поперечном магнитном поле в декартовой системе координат. Магнитное поле  $H$  имеет одну компоненту, параллельную оси  $OZ$ . Максимальный прогиб пластины –  $z_0$

Введём следующие допущения в нашей модели:

- Материал пластины изотропный и линейно-упругий, т.е. нормальные и тангенциальные напряжения не зависят от направления и пропорциональны деформациям.
- Пластина тонкая, т.е. толщина её существенно (на порядок) мала по сравнению с длиной и шириной.
- Считаем материал пластины нерастяжимым и не учитываем деформации растяжения-сжатия.
- Пренебрегаем деформациями поперечного сдвига материала пластины.
- Соответственно длина, ширина и толщина пластины не изменяются при деформировании.

Внешнее магнитное поле  $H$  приложено поперек недеформированной пластины и имеет одну компоненту, параллельную оси  $OZ$ . Под воздействием магнитного поверхностного давления происходит выпучивание пластины из плоскости  $XOY$ . При этом формы профиля изогнутой пластины получаются сечениями, параллельными плоскости  $XOZ$  (рис. 2). Формы профиля изогнутой пластины в сечении будут симметричны относительно ее середины. Обозначим максимальный прогиб пластины (на половине ее длины) –  $z_0$ . Форма изогнутого профиля в сечении  $XOZ$  будет описываться неизвестной зависимостью  $z(x, H)$ , которую будем далее определять.

Рассмотрим плоскую задачу в сечении  $XOZ$  (рис. 2). Введем в этой плоскости локальную касательную систему координат  $\theta(l)$ , где  $l$  – криволинейная координа-

та, отложенная вдоль изогнутой линии сечения профиля пластины ( $0 \leq l \leq L$ ),  $\theta(l)$  – угол между касательной в текущей точке к линии сечения профиля пластины и осью  $OX$  (локальный угол поворота малого элемента). Далее рассмотрим две связанные подзадачи – приближенную магнитоэластическую и упругую с точным учетом геометрической нелинейности.

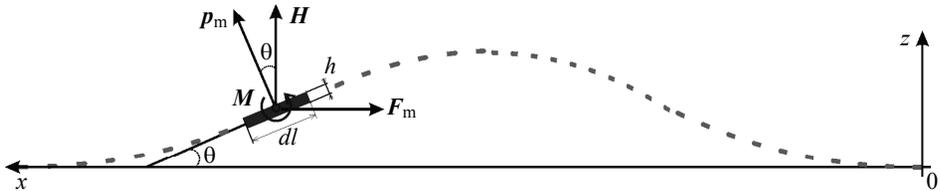


Рис. 2. Сечение (профиль) тонкой пластины и ее малый элемент в поперечном магнитном поле в касательной системе координат. Изогнутой профиль пластины показан штриховой линией. Малый элемент пластины длины  $dl$  показан синим прямоугольником. Упругий изгибающий момент  $M$  направлен поперек плоскости рисунка. Магнитный момент малого элемента  $p_m$  и сила магнитного давления  $F_m$ , вызывающая поворот малого элемента

### Магнитная часть модели

Сформулируем приближенную магнитную модель в упрощенной постановке для определения оценки силы магнитного давления, действующую на прямоугольную пластину из ферроэласта в поперечном магнитном поле. Рассмотрим малый элемент пластины длины  $dl$  (рис. 2). Обозначим его объем  $dV$  и площадь  $dS$ . Тогда имеем геометрические соотношения:

$$dV = dSh = ahdl. \tag{1}$$

Обозначим собственный магнитный момент малого элемента пластины –  $dp_m$ , действующий на него изгибающий упругий момент –  $dM$  и связанную с ним силу магнитного давления, вызывающую поворот малого элемента –  $dF_m$ . Запишем простые магнитные соотношения, связывающие изгибающий момент  $dM$  и магнитный момент  $dp_m$  для малого магнитного элемента, помещенного во внешнее поле с индукцией  $B$ :

$$dM = [Bdp_m],$$

или в компонентах:

$$dM = dF_m h = Bdp_m \sin\theta, \tag{2}$$

где  $\theta$  – угол между векторами магнитного поля и магнитного момента малого элемента. Векторы напряженности и индукции магнитного поля имеют одну компоненту и направлены вдоль оси  $OZ$ . Сила магнитного давления  $F_m$ , вызывающая поворот малого элемента, направлена параллельно пластине, против оси  $OX$ . Вектор изгибающего момента  $dM$  направлен вдоль оси  $OY$ .

Закон намагничивания ферроэласта  $J(H)$  предполагаем линейным:

$$J = \chi H = \frac{dp_m}{dV}. \tag{3}$$

Соотношения между векторами магнитного поля в системе СИ:

$$B = \mu_0 (H + J) = \mu_0 (H + \chi H) = \mu_0 (1 + \chi) H. \tag{4}$$

Из соотношений (1) – (4) последовательными подстановками выразим величину продольного магнитного давления  $q_x$  на малый элемент пластины в системе СИ:

$$q_x \equiv \frac{dF_m}{dS} = \frac{dF_m}{adl} = \mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 \sin \theta. \quad (5)$$

В нашей задаче с расположением магнитных моментов магнитных микрочастиц в плоскости пластины будем иметь магнитодеформационный эффект – выпучивание пластины под действием продольного сжимающего магнитного давления  $q_x$ , направленного против оси  $OX$ .

В экспериментах [1, 2] по исследованию пластин из ферроэластов в поперечном магнитном поле найден пороговый эффект и обнаружено критическое значение внешнего поля, только при превышении которого пластина начинает выпучиваться. Это значит, что на пластину действует продольная «эффективная» нагрузка, в случае наличия поперечной составляющей – выпучивание началось бы сразу при любом отличном от нуля значении поперечной составляющей нагрузки. Поэтому в модели учитывается одна продольная компонента магнитного давления  $q_x$ , которая рассматривается в качестве распределенной «эффективной» силы.

### Механическая часть модели

Запишем кинематические соотношения для малого элемента пластины:

$$\frac{dx}{dl} = \cos \theta(l), \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta(l). \quad (6)$$

Запишем уравнение равновесия моментов для элемента пластины в деформированном состоянии

$$\frac{dM}{dl} = F_n = -F_x \sin \theta + F_z \cos \theta, \quad (7)$$

где  $M$  – изгибающий момент,  $F_n$  – нормальная компонента внутренней упругой силы, отвечающая за изгиб пластины.

Выпишем уравнения равновесия сил для малого прямоугольного элемента пластины:

$$\frac{dF_x}{dl} = q_x, \quad \frac{dF_y}{dl} = q_y, \quad \frac{dF_z}{dl} = q_z, \quad (8)$$

где  $q_x, q_y, q_z$  – декартовы компоненты внешнего распределенного давления на поверхность пластины. В нашем случае давление имеет одну ненулевую продольную компоненту  $q_x$ , определяемую оценочным выражением (5),  $q_y = q_z = 0$ . Рассмотренная магнитомеханическая модель геометрически подобна задаче изгиба стержня под действием распределенного по нормали гидростатического давления, за исключением равной нулю одной из декартовых компонент давления  $q_z = 0$ .

В нашей модели будем использовать линейный закон Гука. Выражение для изгибающего момента в соответствии с законом Гука в геометрически нелинейном случае для выпученного (изогнутого в плоскости  $XOZ$ ) состояния имеет следующий вид:

$$M = EI_z d\theta/dl,$$

где  $E$  – модуль упругости Юнга,  $I_z = bh^3/12$  – поперечный момент инерции малого элемента пластины,  $EI_z$  – его изгибная жесткость,  $d\theta/dl$  – кривизна сечения изогнутой поверхности пластины.

Выпишем систему уравнений, описывающих изогнутое состояние пластины для случая одномерного изгиба в плоскости  $XOZ$ , используя выражения (5) – (9):

$$\begin{aligned} \frac{dF_x}{dl} &= \mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 \sin \theta, \quad \frac{dF_z}{dl} = 0, \\ EI_z \frac{d^2 \theta}{dl^2} &= -F_x \sin \theta + F_z \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Проводя интегрирование системы уравнений (10) и учитывая, что  $\sin \theta dl = dz$ , имеем

$$\begin{aligned} F_x &= C_1 + \mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 z, \quad F_z = C_2, \\ EI_z \frac{d^2 \theta}{dz^2} &= -F_x \sin \theta + F_z \cos \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, имеющие смысл внешних сосредоточенных сил действующих на пластину. Так как в нашем случае они отсутствуют, то без ограничения общности можно положить  $C_1 = C_2 = 0$ , и систему (11) перепишем в виде одного нелинейного уравнения равновесия второго порядка:

$$EI_z \frac{d^2 \theta}{dz^2} = -\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 z \sin \theta = 0. \quad (12)$$

Решив это уравнение, можно найти неизвестную функцию угла поворота элемента  $\theta(l)$  и далее с помощью интегрирования кинематических соотношений (6) определить форму изогнутой пластины в зависимости от приложенного внешнего поля  $H$ .

### Краевые условия

Запишем краевые условия для уравнения (12). Жесткое защемление левого края пластины, расположенного вдоль оси  $OY$ , требует

$$\theta = 0, \quad z = 0 \quad \text{при } l = 0. \quad (13)$$

Граничное условие подвижного защемления правого параллельного края пластины имеет вид

$$\theta = 0, \quad z = 0 \quad \text{при } l = L. \quad (14)$$

### Аналитическое решение

Решим уравнение (12) с краевыми условиями (14), переходя для удобства интегрирования к декартовым координатам. В этом случае уравнение (12) допускает простое интегрирование. Выполним интегрирование уравнения (12):

$$\begin{aligned} EI_z \frac{d\theta}{dl} &= -\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 \int z \sin \theta dl, \\ \sin \theta \frac{d\theta}{dz} &= -\frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2}{EI_z} \int z dz, \\ -\frac{d \cos \theta}{dz} &= C_3 - \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2}{EI_z} \frac{z^2}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Выполним второе интегрирование (15) и получим общее решение:

$$\cos \theta = C_4 - C_3 z + \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 z^3}{EI_z 6}. \quad (16)$$

Введем безразмерные координаты:

$$\begin{aligned} s &= l / L, \quad 0 \leq s \leq 1; \\ x_1 &= x / L, \quad 0 \leq x_1 \leq 1; \\ z_1 &= z / L, \quad 0 \leq z_1 \leq 1. \end{aligned}$$

В новых переменных решение (16) примет вид

$$\cos \theta = C_4 - C_3 L z_1 + \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 L^3 z_1^3}{EI_z 6}.$$

Введем параметр  $q$  – собственное число уравнения (12):

$$q^3 = \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 L^3}{EI_z}, \quad (17)$$

определяемое внешним полем, геометрическими, упругими и магнитными свойствами пластины. Введем новое обозначение  $k$  для константы интегрирования:

$$C_3 L = 2kq.$$

Используя первое краевое условие (13) при  $l = 0$ , найдем значение константы  $C_4$ :

$$\cos \theta = C_4 = 1.$$

Далее из второго краевого условия можно будет найти связь между параметрами  $k$  и  $q$ . В новых обозначениях решение (16) примет вид

$$\cos \theta = 1 - 2kqz_1 + \frac{q^3 z_1^3}{6}. \quad (18)$$

Соответственно синус угла поворота

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{6} \sqrt{qz_1 (q^2 z_1^2 - 12k) (12kqz_1 - 12 - q^3 z_1^3)}.$$

Введем новую безразмерную переменную  $0 \leq t \leq 1$  с помощью замены:

$$qz_1 = 2k(1 - t), \quad t = 1 - qz_1/2k \quad (19)$$

и запишем решение (18) в виде

$$\cos \theta = 1 - 4k^2(1 - t) + \frac{4k^3(1 - t)^3}{3}. \quad (20)$$

Соответственно синус угла поворота

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}k}{3} \times \\ &\times \sqrt{(1 - t)(kt^2 - 2kt + k - 3)(2k^3 t^3 - 6k^3 t^2 + 6k^2(k - 1)t - 2k^3 + 6k^2 - 3)}, \quad (21) \end{aligned}$$

Из выражений (6) и (18) можно найти профиль изогнутой пластины в квадратурах:

$$\frac{x(z)}{L} = \int \frac{\cos \theta dl}{L} = \int \cos \theta ds = \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dz_1 = -\frac{2k}{q} \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dt, \quad (22)$$

или 
$$\frac{x(z)}{L} = 6 \int_0^{z/L} \frac{1 - 2kqz_1 + q^3 z_1^3 / 6}{\sqrt{qz_1 (q^2 z_1^2 - 12k) (12kqz_1 - 12 - q^3 z_1^3)}} dz_1, \quad (23)$$

$$\frac{x(t)}{L} = \frac{3k}{q\sqrt{2k}} \int_t^1 \frac{1 - 4k^2 + 4/3k^3 - 4k^2(k-1)t + 4k^3t^2 - 4/3k^3t^3}{\sqrt{(1-t)(kt^2 - 2kt + k - 3)(2k^3t^3 - 6k^3t^2 + 6k^2(k-1)t - 2k^3 + 6k^2 - 3)}} dt.$$

Из выражений (6) и (20) найдем соотношение между декартовой и криволинейной координатами:

$$s = \frac{l}{L} = \frac{1}{L} \int \frac{dz}{\sin \theta} = \int \frac{dz_1}{\sin \theta} = -\frac{2k}{q} \int \frac{dt}{\sin \theta},$$

$$s = \frac{3k}{q\sqrt{2k}} \int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(kt^2 - 2kt + k - 3)(2k^3t^3 - 6k^3t^2 + 6k^2(k-1)t - 2k^3 + 6k^2 - 3)}}. \quad (24)$$

### Введение специальных функций

Исходя из структуры выражений (23) и (24) целесообразно ввести новые функции по аналогии с эллиптическими интегралами. Сделаем в интегралах (23) и (24) замену  $t = \cos \varphi$  и введем новые функции:

$$Fn(\varphi, k) = \frac{3k}{\sqrt{2k}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(1-c)(kc^2 - 2kc + k - 3)(2k^3c^3 - 6k^3c^2 + 6k^2(k-1)c - 2k^3 + 6k^2 - 3)}},$$

где  $c = \cos \varphi$ ,

(25)

$$En(\varphi, k) = \frac{3k}{\sqrt{2k}} \int_0^\varphi \frac{(1 - 4k^2 + 4/3k^3 - 4k^2(k-1)c + 4k^3c^2 - 4/3k^3c^3) \sin \varphi}{\sqrt{(1-c)(kc^2 - 2kc + k - 3)(2k^3c^3 - 6k^3c^2 + 6k^2(k-1)c - 2k^3 + 6k^2 - 3)}} d\varphi.$$

Введенные новые функции  $F_n(\varphi, k)$  и  $E_n(\varphi, k)$  являются обобщением неполных эллиптических интегралов I и II рода, записанных в стандартной форме Лежандра. Особенностью новых функций является наличие в подынтегральном выражении полинома шестой степени в отличие от эллиптических интегралов, имеющих полином четвертой степени.  $F_n(0, k) = E_n(0, k) = 0$ . Аналогично целесообразно ввести полный эллиптический интеграл:

$$Kn(k) = Fn(\pi/2, k). \quad (26)$$

Для функций (25) будет выполняться свойство периодичности

$$mFn(\pi, k) = Fn(m\pi, k), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Область значений параметра  $k$  – модуля интегралов – можно найти, исследовав свойства подынтегрального полинома в (25) и потребовав положительность подкоренного выражения:

$$0 \leq k < 3/4. \quad (27)$$

Свойства введенных функций при  $k = 0$ :

$$Kn(0) = \sqrt{2}, \quad mFn(\pi, 0) = Fn(m\pi, 0) = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$Fn(\varphi, 0) = \sqrt{2 - 2\cos \varphi}, \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (28)$$

При малых  $k$  справедливо разложение:

$$Kn(k) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{30}k + \frac{73\sqrt{2}}{216}k^2 + \dots$$

Значения модуля  $k$ , близкие к 0, будут описывать случай малых отклонений от положения равновесия исследуемой системы – линейную задачу. Значения модуля  $k$  близкие к предельному значению  $3/4$ , будут описывать состояния системы с большими деформациями и с сильно нелинейными свойствами.

По аналогии с эллиптическими функциями Якоби, которые являются обращениями эллиптических интегралов, введем обращение (амплитуду) нового интеграла  $Fn(\varphi, k)$  как функции верхнего предела  $\varphi$ :

$$u = Fn(\varphi, k), \quad \varphi = Amn(u, k), \quad Fn(Amn(u, k), k) = u. \quad (29)$$

Новая введенная функция  $Amn(u, k)$  также будет зависеть от модуля  $k$ . Аналогом этой функции является эллиптическая амплитуда Якоби. Графики амплитуды  $Amn(u, k)$  при разных значениях модуля  $k$  представлены на рис. 3, а). Пунктирной линией на рисунке показана биссектриса прямого угла – линейная функция  $u$ .

Введем для удобства также новые функции – синус и косинус амплитуды:  $\sin(Amn(u, k))$  и  $\cos(Amn(u, k))$ , которые будут являться аналогами эллиптических синуса и косинуса Якоби. Графики синуса амплитуды  $\sin(Amn(u, k))$  при разных значениях модуля  $k$  представлены на рис. 3, б). Из рисунка видно, что при увеличении значения модуля  $k$  увеличивается период синуса амплитуды.

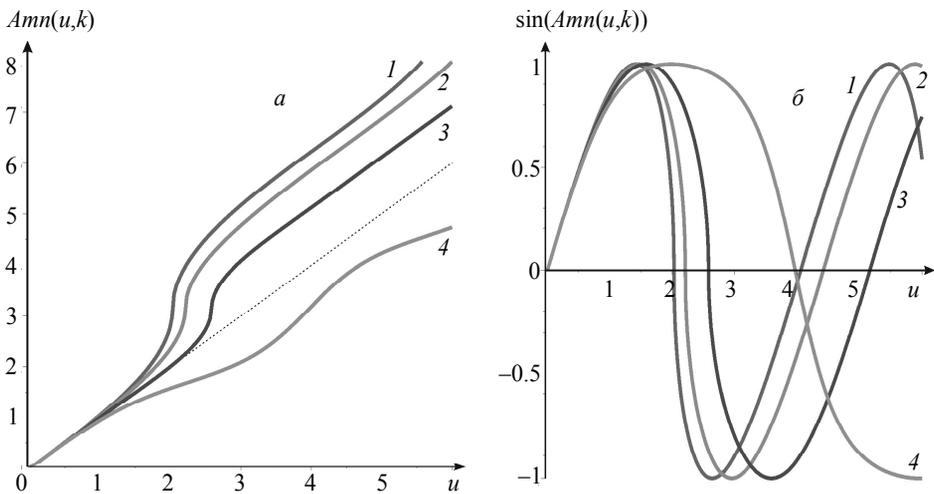


Рис. 3. Специальные функции:  $Amn(u, k)$  – аналог эллиптической амплитуды Якоби (а) и  $\sin(Amn(u, k))$  – аналог эллиптического синуса Якоби (б) при различных значениях модуля  $k$ : 1 –  $k = 0,1$ ; 2 –  $k = 0,3$ ; 3 –  $k = 0,5$ ; 4 –  $k = 0,75$ . Штриховой линией обозначена линейная функция  $u$

Введенные функции  $Amn(u, k)$  и  $\sin(Amn(u, k))$  являются неперiodическими мероморфными функциями. Новые специальные функции заданы в виде квадратур – интегралов, которые легко и быстро вычисляются в любом математическом пакете аналитических вычислений с любой наперед заданной точностью. Обра-

шение интегралов – вычисление амплитуды – можно выполнить численным методом арифметико-геометрического среднего. Нули функции  $\sin(Amn(u, k))$  задаются с помощью первого интеграла в (25):

$$\sin(Amn(u_n, k)) = 0 \text{ при } u_n = Fn(\pi n, k).$$

Периодом функций  $\sin(Amn(u, k))$  и  $\cos(Amn(u, k))$  является  $Fn(2\pi, k)$ . Все вычисления специальных функций выполнены в математическом пакете Maple.

### Представление аналитического решения с помощью новых специальных функций

Запишем выражение (24) с помощью новых функций (25)

$$s = \frac{1}{q} Fn(\arccost, k). \tag{30}$$

Обращая выражение (30), получим с помощью (29) обратную зависимость

$$t = \cos(Amn(qs, k)). \tag{31}$$

Возвращаясь к декартовой переменной с помощью замены (19), получим зависимость прогибов пластины от криволинейной координаты

$$\frac{z(s)}{L} = \frac{2k}{q} [1 - \cos(Amn(qs, k))]. \tag{32}$$

Запишем теперь выражение (23) с помощью новых функций

$$\frac{x(s)}{L} = \frac{1}{q} En(\arccost, k) = \frac{1}{q} En(Amn(qs, k), k). \tag{33}$$

Выражения (32) и (33) вместе образуют систему уравнений, описывающих профиль изогнутой пластины в параметрическом виде с параметром – криволинейная координата  $s$ :

$$\begin{cases} \frac{x(s)}{L} = \frac{1}{q} En(Amn(qs, k), k), \\ \frac{z(s)}{L} = \frac{2k}{q} [1 - \cos(Amn(qs, k))]. \end{cases} \tag{34}$$

По своей структуре система (34) совпадает с параметрической системой уравнений, описывающих формы изгиба стержня с обоими защемленными концами при действии продольного сжатия [4]. Только в нашем случае использованы новые специальные функции вместо эллиптических функций Якоби. Выполняется полная аналогия между функциями  $Amn(u, k) \leftrightarrow Am(u, k)$ .

### Система ветвей решения и определение порогов

Теперь, для того чтобы определить форму изогнутой пластины с помощью системы (34), нужно найти модуль  $k$ , используя второе краевое условие (14). Применим его к уравнению (20) – в точке  $l = L$  прогиб  $z_1 = 0$ , параметр  $t$ , по определению (19), автоматически равен  $t = 1$  и  $\theta = 0$ . Следовательно уравнение (20) тождественно удовлетворяет второму краевому условию. Применим это условие к

выражению (31) в точке  $l = L$ :  $1 = \cos(Ann(q, k))$  при  $s = 1$ . По свойству периодичности функции  $\cos(Ann(u, k))$ :

$$q_n(k) = nFn(2\pi, k), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Здесь  $n$  – номер моды (ветви) решения. Выражение (35) задает в неявном виде соотношение между параметром внешнего поля и модулем  $k$ . На первой основной моде пластина не будет иметь точек перегиба. Это соотношение для первой моды показано на рис. 4. Значение  $k = 0$  соответствует прямолинейному состоянию пластины, когда  $z = 0$ . Из (34) с помощью свойства новых функций (28) найдем пороговые значения параметра:

$$q_n(0) = nFn(2\pi, 0) = 4n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

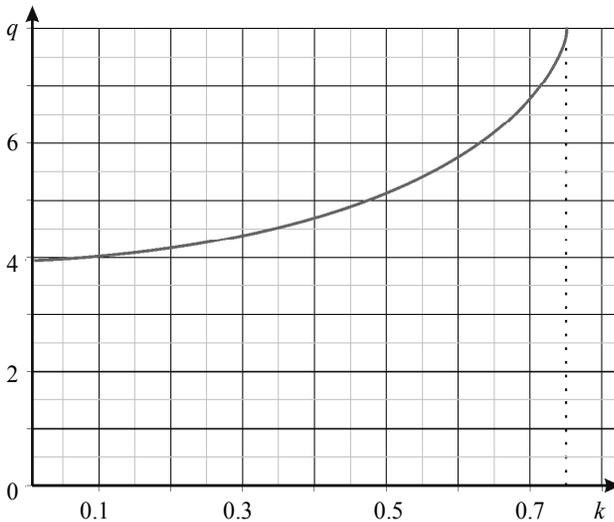


Рис. 4. Соотношение между параметром внешнего магнитного поля  $q$  и модулем  $k$  (35)

Соответственно найдем из (17) критическое значение внешнего магнитного поля

$$H_n^{\text{cr}} = \sqrt{\frac{q_n^3(0)EI_z}{\mu_0(1+\chi)\chi hL^3}}, \quad q_n(0) = 4n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Для частного случая квадратной пластины ( $L = b$ ,  $I_z = bh^3/12$ ) первое пороговое значение напряженности магнитного поля

$$H_1^{\text{cr}} = \frac{h}{L} \sqrt{\frac{16E}{3\mu_0(1+\chi)\chi}} \quad (37)$$

Таким образом, пластина остается плоской при помещении в магнитное поле до тех пор, пока поле не превысит критическую величину (36). При превышении критического поля пластина выпучивается, причем направление выпучивания (по полю или против) вырождено. Рассмотренная магнитомеханическая задача аналогична задаче Эйлера о потере устойчивости стержня при продольном нагружении.

### Формы профиля деформированной пластины

Определим величины прогиба центральной точки пластины  $z_0$  и перемещения ее правого края  $x(L)/L$ . В центре пластины при  $s = 1/2$  будем иметь  $q_m = mFn(\pi, k)$ ,  $m = 1, 3, 5$ , и логичное условие  $\theta(1/2) = 0$  – следующее из симметрии задачи, которое тоже автоматически выполняется. Это позволяет найти выражение для стрелы прогиба пластины (в ее центре) для первой моды  $z_0(q)$  в параметрическом виде:

$$\frac{z_0(k)}{L} = \frac{2k}{Fn(\pi, k)}, \quad q(k) = Fn(2\pi, k). \quad (38)$$

Зависимость (38) для первой моды приведена на рис. 5 в безразмерном виде и для заданных абсолютных значений параметров квадратной пластины и поля. Из рисунка и выражения (37) видно, что величина критического поля уменьшается при увеличении размера пластины при фиксированной толщине.

Найдем перемещение правого края пластины  $x(L)/L$  для первой моды в параметрическом виде с помощью выражений (33) и (35) при  $s = 1$ :

$$\frac{x(L)}{L} = \frac{En(2\pi, k)}{Fn(2\pi, k)}, \quad q(k) = Fn(2\pi, k). \quad (39)$$

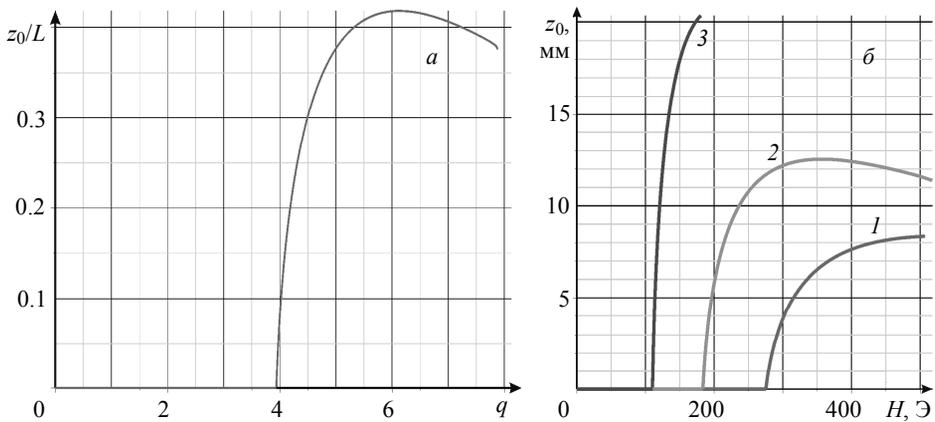


Рис. 5. Безразмерная стрела прогиба пластины из ферроэласти в магнитном поле в зависимости от безразмерного параметра  $q$ , определяемого величиной внешнего магнитного поля (а). Стрела прогиба квадратной пластины ( $L = b$ ) в зависимости от величины напряженности магнитного поля (СГС) при ее толщине  $h = 2$  мм, восприимчивости материала  $\chi = 1$ , модуле Юнга  $E = 25$  кПа и трех разных размерах: кр. 1 –  $L = 20$  мм,  $H^{cr} \approx 275$  Э; кр. 2 –  $L = 30$  мм,  $H^{cr} \approx 184$  Э; кр. 3 –  $L = 50$  мм,  $H^{cr} \approx 110$  Э (б)

Формы профиля изогнутой пластины для первой моды можно построить в параметрическом виде с помощью системы уравнений (34) и (35):

$$\begin{cases} \frac{x(s)}{L} = \frac{En(Amn(Fn(2\pi, k)s, k), k)}{Fn(2\pi, k)}, \\ \frac{z(s)}{L} = \frac{2k}{Fn(2\pi, k)} [1 - \cos(Amn(Fn(2\pi, k)s, k))]. \end{cases} \quad (40)$$

Формы профиля, построенные в соответствии с системой (40) приведены на рис. 6 для различных значений модуля  $k$ . Связь модуля  $k$  с величиной внешнего поля можно определить с помощью выражений (35) и (17).

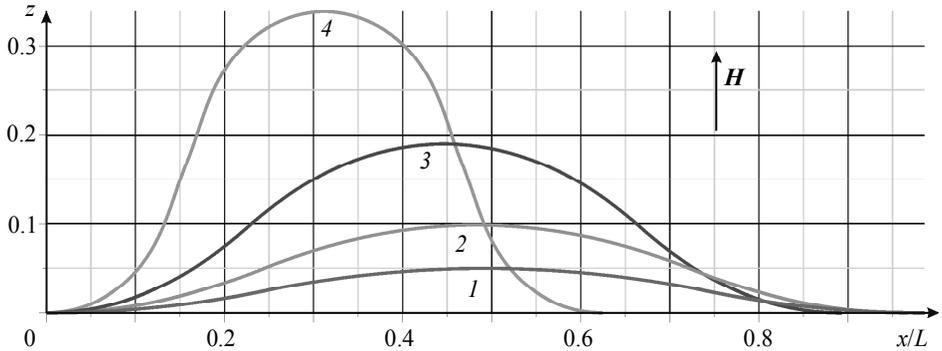


Рис. 6. Формы профиля изогнутой пластины из ферроэласта при различных значениях внешнего магнитного поля (40), соответствующих следующим значениям модуля  $k$ : кр. 1 – 0,05; кр. 2 – 0,1; кр. 3 – 0,2; кр. 4 – 0,4

В работах [1, 2] приведен ряд экспериментальных результатов по исследованию деформирования круговой пластины из ферроэласта в поперечном магнитном поле. На рис. 5, б приведены полученные автором аналитические результаты для квадратной пластины со сторонами, равными диаметру круговой пластины, и с такими же упругими и магнитными параметрами материала, как в работах [1, 2]. Имеется полное качественно и близкое количественное соответствие по пороговому значению магнитного поля. При этом надо учитывать, что величина Эйлера классического порога для квадратной пластины меньше примерно в полтора раза, чем у соответствующей круговой пластины при продольном обжатии. Проведем подобную оценку. Величина Эйлера порогового значения продольной нагрузки для квадратной пластины со стороной  $L$ :

$$P_{\text{КВ}} = \pi^2 \frac{4EI}{hL^2} = \pi^2 \frac{Eh^2}{3L^2}.$$

Величина Эйлера порогового значения продольной нагрузки для круговой пластины с диаметром  $d$

$$P_{\text{КР}} = \tau^2 \frac{4D}{hd^2} = \tau^2 \frac{Eh^2}{3(1-\mu^2)d^2}, \quad \tau \approx 3,83.$$

Отношение пороговых значений для круглой и квадратной пластинок при  $L = d$  и  $\mu = 0,25$ :

$$\frac{P_{\text{КР}}}{P_{\text{КВ}}} \approx 1,6.$$

### Выводы

Исследована и промоделирована смешанная магнитоупругая задача о выпучивании тонкой прямоугольной пластины из ферроэласти под действием однородного поперечного магнитного поля в геометрически-нелинейной постановке. Построено аналитическое решение задачи в квадратурах, в параметрическом виде путем введения специальных функций, обобщающих эллиптические интегралы. Во введенной интегральной функции в подинтегральном выражении под знаком корня стоит полином шестой степени, в отличие от обычного эллиптического интеграла.

Продемонстрированы возможности нового метода и математического аппарата введения новых специальных функций, являющихся базовыми для исследуемой задачи и являющихся некоторым обобщением эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби.

С помощью введенных функций записано аналитическое решение нелинейной краевой задачи, найдены многозначные ветви (моды) решения, описывающие формы выпучивания пластины в зависимости от величины внешнего магнитного поля. Показан пороговый эффект и определены критические (в смысле устойчивости по Эйлеру) значения напряженности внешнего магнитного поля.

Полученное приближенное аналитическое решение по сравнению с численными (МКЭ) имеют погрешность не более 5 % вплоть до прогибов центральной точки оболочки. Полученное аналитическое решение задачи в квадратурах имеет качественное и количественное совпадение (10 %) с имеющимися экспериментальными данными (Степанов Г.В., ГНИИ ХТЭОС, г. Москва) и численным решением (Ю.Л. Райхер, ИМСС УрО РАН).

Полученные результаты могут быть распространены на случай других условий закрепления. Полученное аналитическое решение позволяет легко проводить в математических пакетах расчет и визуализацию форм выпучивания пластины и использовать его для тестирования и отработки численных методов решения нелинейных краевых задач магнитоупругости тонких пластин и других проблем механики деформируемого твердого тела.

Данная в работе формулировка уравнений позволяет ставить и решать существенно нелинейные задачи для изотропных пластин и при иных нагрузках и граничных условиях.

Гибкие пластины из ферроэласти могут быть использованы в качестве чувствительных элементов в датчиках и других перспективных микро-электромеханических устройств.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.И., Горбунов А.И., Крамаренко Е.Ю., Левина Е.Ф., Райхер Ю.Л., Степанов Г.В., Столбов О.В. Деформация плоской мембраны из ферроэласти, закрепленной по ободу, в однородном магнитном поле // Зимняя школа по механике сплошных сред. 2007. Ч. 1. С. 31–34.
2. Столбов О.В. Моделирование магнитодеформационного эффекта в ферроэластах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, ИМСС УрО РАН, 2007. 18 с.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.

Статья поступила 09.02.2016 г.

Okhotkin K. G. SIMULATION OF THE NONLINEAR MAGNETIC STRAIN EFFECT FOR A FLEXIBLE FERROELASTIC PLATE IN A UNIFORM MAGNETIC FIELD

DOI 10.17223/19988621/40/9

We studied the problem of magnetoelastic buckling of thin flexible rectangular ferroelastic plates under the action of a uniform transverse magnetic field in the geometrically nonlinear statement. A ferroelastic material is a magnetical material capable of large deformations controlled by an external magnetic field. Ferroelastic plates can act as sensitive elements of sensors in microelectromechanical systems (MEMSs). Designing these devices requires understanding the mechanical behavior of these systems in an external magnetic field.

Possibilities of the new method of introducing new special functions which are basic for studying the problem and generalize elliptic integrals and Jacobi elliptic functions are demonstrated.

Using the introduced functions, an analytical solution of the nonlinear boundary value problem has been written and multi-valued solution branches (modes) describing the shape of the plate buckling depending on the external magnetic field have been found. The threshold effect is shown and critical values of the external magnetic field strength are determined (in the sense of Euler stability).

The obtained analytical solution allows one to visualize forms of plate buckling and to estimate the magnitude of plate deflection depending on the magnitude of the external field and its geometrical and physical parameters. The presented results make it possible to simulate magnetoelastic systems used in various micromechanical devices and sensors in the case requiring an exact consideration of the geometric nonlinearity.

Keywords: Ferroelastic material, geometric nonlinearity, magnetic strain effect, special functions.

OKHOTKIN Kirill Germanovich (Candidate of Physics and Mathematics, JSC «Academician M.F. Reshetnev «Information Satellite Systems»)  
E-mail: okg2000@mail.ru

#### REFERENCES

1. Alekseeva E.I., Gorbunov A.I., Kramarenko E.Yu., Levina E.F., Raykher Yu.L., Stepanov G.V., Stolbov O.V. (2007) Deformatsiya ploskoy membrany iz ferroelasta, zakreplennoy po obodu, v odnorodnom magnitnom pole [Deformation of a flat ferroelast membrane fixed over the rim in a uniform magnetic field]. In: *Zimnyaya shkola po mekhanike sploshnykh sred* [Winter School on Continuum Mechanics]. Pt 1. pp. 31–34.
2. Stolbov O.V. (2007) *Modelirovanie magnitodeformatsionnogo effekta v ferroelastakh* [Simulation of the magnetic strain effect in ferroelasts]. Abstract of Physics Cand. Diss. Perm: ICMM UB RAS.
3. Ambartsumyan S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V. (1977) *Magnitoprugost' tonkikh obolochek i plastin* [Magnetoelasticity of thin shells and plates]. Moscow: Nauka.
4. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G. (2002) Nonlinear bending of thin elastic rods. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 43(5). pp. 739–744.

УДК 532.516.5

DOI 10.17223/19988621/40/10

М.А. Пономарева, М.П. Филина, В.А. Якутенок

### ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ОДНОШНЕКОВОГО ЭКСТРУДЕРА<sup>1</sup>

Определены отношения ширины к глубине канала шнека экструдера, при котором является обоснованным предположение об отсутствии влияния боковых стенок на профиль скорости циркуляционного течения в срединном сечении канала, который считается прямоугольным. Приводится методика получения решения для профиля вектора скорости псевдопластичной жидкости без учета влияния боковых стенок. Достоверность результатов подтверждается сравнением с данными, представленными в литературе. Для численного решения с учетом влияния боковых стенок используется непрямой метод граничных элементов. Определено отношение ширины к глубине канала шнека, при котором допустимо пренебрегать влиянием боковых стенок на течение в середине канала.

**Ключевые слова:** одношнековый экструдер, неньютоновская жидкость, непрямой метод граничных элементов, течение в камере.

Одним из важнейших направлений современной промышленности является переработка высоковязких полимерных материалов. В настоящее время широко распространены экструзионные методы переработки. Основными преимуществами таких методов являются возможность их совмещения с другими технологическими процессами и непрерывность процесса переработки. Наиболее широкое применение среди экструзионных машин для переработки полимеров нашли одношнековые экструдеры. Их роль в современной промышленности сложно переоценить, поскольку часто только они способны перерабатывать высоковязкие материалы. В связи с этим, большое внимание уделяется созданию математических и численных моделей процесса экструзии [1–5], а также разработке рекомендаций по оптимизации определяющих параметров одношнековых машин [6, 7].

Частицы вещества, находящегося в шнековом канале, совершают сложное движение, поэтому в реальных условиях описать течение продукта в шнеке очень сложно, поскольку помимо течения вдоль канала шнека имеет место циркуляционное течение в поперечном к оси канала направлении и переток вещества через гребень шнека за счет зазоров между гребнем и корпусом.

Течение расплавленного полимерного вещества в зоне дозирования принято представлять как сумму двух независимых движений: поступательного течения вдоль оси шнека и циркуляционного течения в поперечном к оси канала направлении, которое и будет рассмотрено в настоящей работе. При построении математических моделей процесса течения в зоне дозирования, где полимерное вещество находится в расплавленном состоянии, вводится ряд упрощающих предположе-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол\_а.

ний: рассматривается стационарный процесс с заданным массовым расходом, шнековый канал разворачивается на плоскость и используется принцип обращенного движения, пренебрегается массовыми силами и перетоками жидкости через зазоры [8]. Кроме того, при построении плоской модели канала считается, что глубина канала шнека много меньше его ширины. Таким образом, полагается, что отсутствует влияние боковых стенок на скорость течения в середине канала. Это позволяет представить циркуляционное течение как течение в бесконечно длинном прямоугольном канале, верхняя стенка которого движется с постоянной скоростью в своей плоскости. В связи с этим возникает вопрос, при какой величине отношения ширины канала к его глубине является допустимым предположение об отсутствии влияния боковых стенок. Этот вопрос и рассматривается в настоящей работе.

### Основные уравнения

Поскольку в зоне дозирования существует только жидкая фаза, расплав можно считать неньютоновской жидкостью. Основными уравнениями для описания двумерного течения неньютоновской жидкости при малых числах Рейнольдса ( $Re \ll 1$ ) являются уравнения Стокса:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$  – компоненты полного тензора напряжений,  $p$  – давление,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений,  $x_j$  – декартовы координаты.

В качестве реологической модели, описывающей неньютоновское поведение жидкости, используется степенной закон, характеризующий зависимость вязкости от скорости сдвига:

$$\tau_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij}, \quad (2)$$

где  $\eta = \dot{\gamma}^{n-1}$  – коэффициент эффективной вязкости,  $n$  – индекс течения (показатель нелинейности),  $\dot{\gamma} = (2\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ji})^{1/2}$  – интенсивность скоростей деформаций,  $\dot{e}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $u_i$  – компоненты вектора скорости.

Систему (1) необходимо дополнить уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

и граничными условиями, которые состоят в задании компонент скорости на стенках канала: на верхней подвижной стенке

$$u_1 = 1, u_2 = 0 \quad (4)$$

и на остальных стенках

$$u_i = 0. \quad (5)$$

Все уравнения записаны в безразмерных переменных. В качестве характерного размера выбрана глубина канала  $H$ , в качестве характерной скорости – скорость

движения верхней стенки канала  $u_0$ . Давление обезразмерено к величине  $k\left(\frac{u_0}{H}\right)^n$ , где  $k$  – коэффициент консистенции. На рис. 1 представлена область решения.

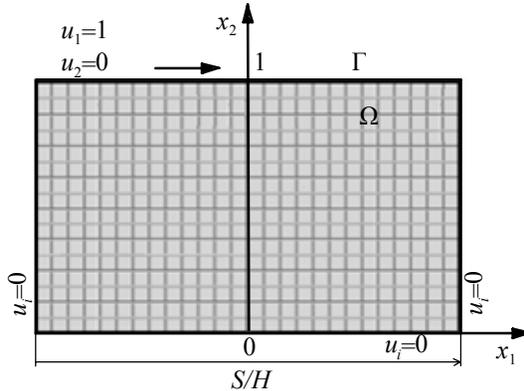


Рис. 1. Область решения ( $S$  – ширина,  $H$  – глубина)

В такой постановке задача фактически сводится к задаче о течении степенной жидкости в прямоугольной камере с верхней движущейся стенкой [9].

### Решение задачи без учета влияния боковых стенок

Предполагается, что  $H \ll S$ . Тогда постановка задачи о циркуляционном течении неньютоновской жидкости в канале шнека экструдера при отсутствии влияния боковых стенок на профиль скорости в сечении  $x_1 = 0$  (рис. 1) и с учетом указанных выше допущений сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2), \\ p &= p(x_1), \\ \frac{dp}{dx_1} &= \frac{d\tau_{12}}{dx_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия (4) и (5) остаются прежними. Левая часть уравнения (6) не зависит от  $x_2$ , значит, и правая часть не может зависеть от  $x_2$ , следовательно, обе части уравнения равны постоянной величине. Введем обозначение  $\frac{dp}{dx_1} = A$ .

В результате интегрирования уравнения (6) получим

$$\tau_{12} = Ax_2 - AC_1, \tag{7}$$

где постоянную интегрирования для удобства дальнейших вычислений выберем в виде  $-AC_1$ . С учетом соотношений для  $\eta$  и  $\dot{\gamma}$  выражение (7) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{du_1}{dx_2}\right)^n = A(x_2 - C_1). \tag{8}$$

Уравнение (8) преобразуем к виду

$$\frac{du_1}{dx_2} = \frac{(x_2 - C_1)}{\alpha}, \quad (9)$$

где  $\alpha = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n}}$ . Интегрируя выражение (9) с учетом граничного условия на нижней стенке, получим

$$u_1(x_2) = \frac{1}{\alpha} \frac{n}{n+1} \left[ |x_2 - C_1|^{\frac{n+1}{n}} - C_1^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (10)$$

Для нахождения неизвестных постоянных  $C_1$ ,  $A$  используем граничное условие на движущейся стенке и тот факт, что расход поперек канала должен быть равен нулю. В результате получаем систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{n}{(n+1)} \left[ |1 - C_1|^{\frac{n+1}{n}} - C_1^{\frac{n+1}{n}} \right] - 1 = 0, \\ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{n}{(2n+1)} \left( |1 - C_1|^{\frac{2n+1}{n}} - C_1^{\frac{2n+1}{n}} \right) - C_1^{\frac{n+1}{n}} \right] = 0, \end{cases} \quad (11)$$

которая решается методом Ньютона для определения значений  $C_1$  и  $A$  при различных значениях  $n$ . После этого по формуле (10) можно рассчитать профиль скорости.

### Решение задачи с учетом влияния боковых стенок

Для численного решения задачи с учетом влияния боковых стенок используется непрямой метод граничных элементов [11]. Представим (1) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^N}{\partial x_j} = \Psi_i, \quad (12)$$

где  $\sigma_{ij}^N = -p\delta_{ij} + 2\dot{e}_{ij}$  – линейная часть тензора напряжений,  $\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1-\eta)\dot{e}_{ij}] = -\frac{\partial \tau_{ij}^{NN}}{\partial x_j}$  – нелинейная векторная функция, которую будем рассматривать как

плотность источников, распределенных по области течения  $\Omega$ . Тогда, в соответствии с положениями непрямого метода граничных элементов [12], можно записать

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} G_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi) + \int_{\Omega} G_{ij}(x, z) \Psi_j(z) d\Omega(z), \quad (13)$$

где  $\phi_j(\xi)$  – плотность фиктивных источников, распределенных по границе области течения  $\Gamma$ . Функция  $G_{ij}$  является фундаментальным решением уравнений

Стокса и определяется формулой [13]

$$G_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \left( \delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + \frac{y_i y_j}{r^2} \right), \quad (14)$$

где  $y_i = x_i - \xi_i$ ,  $r = (y_i y_i)^{\frac{1}{2}}$ . Если на границе области течения  $\Gamma$  заданы значения скорости, то уравнения (13) позволяют получить значения неизвестных граничных сил  $\phi_j(\xi)$  ( $\xi \in \Gamma$ ). Это возможно сделать при известной функции  $\Psi_j(z)$  ( $z \in \Omega$ ). Так как эта функция заранее не известна, то возникает необходимость организации итерационного процесса.

Для численного решения уравнений (13) используются постоянные элементы и постоянные ячейки. Граница области течения  $\Gamma$  разбивается на  $N$  элементов. Функция  $\phi_j(\xi)$  считается постоянной на каждом элементе. Область течения разбивается на  $N^2$  ячеек. Функция  $\Psi_j(z)$  считается постоянной внутри ячейки. Тогда уравнения (13) в дискретной форме приобретут вид

$$u_i(x^p) = \sum_{q=1}^N \phi_j^q \Delta G_{ij}^{pq} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \Psi_j^{km} \Delta G_{ij}^{pkm}, \quad (15)$$

где  $\Delta G_{ij}^{pq} = \int_{\Delta\Gamma^q} G_{ij}(x^p, \xi) d\Gamma(\xi)$ ,  $\Delta G_{ij}^{pkm} = \int_{\Delta\Omega^{km}} G_{ij}(x^p, z) d\Omega(z)$ ,  $x^p$  – середина элемента  $p$  (узел).

Для вычисления  $2N$  неизвестных  $\phi_j^q$  берутся  $2N$  уравнений (15), соответствующие  $N$  элементам, на которых заданы  $u_i(x^p)$ . Коэффициенты получаемой системы линейных алгебраических уравнений  $\Delta G_{ij}^{pq}$  в случае постоянных элементов можно вычислить аналитически. Технология вычисления изложена в [14].

Для вычисления интегралов по области  $\Delta G_{ij}^{pkm}$  используются стандартные квадратурные формулы Гаусса, без выделения особенностей. Особенности в этих интегралах имеют вид  $\ln(1/r)$ . Следовательно, при интегрировании по области эти интегралы существуют в обычном смысле. Такой подход значительно упрощает алгоритм решения. При проведении расчетов использовалась квадратурная формула с 64 узлами. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (15) относительно  $\phi_j^q$  применялся метод простой итерации. На первой итерации использовались значения  $\Psi_i^{km}$ , определенные по ньютоновскому полю течения. Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений использовался метод Гаусса. Далее использовались значения  $\Psi_i^{km}$ , рассчитанные в соответствии с полем течения, полученным на предыдущей итерации. Функции  $\Psi_i^{km}$  в центре ячейки  $(k, m)$  вычислялись конечно-разностным способом с использованием рассчитанных  $(\tau_{ij}^{NN})^{km}$  в вершинах ячеек (узлах сетки).

Значения  $(\tau_{ij}^{NN})^{km}$  полностью определяются производными  $(\partial u_i / x_j)^{km}$ , значения которых находились с использованием центральных разностей во внутренних узлах и односторонних разностей в приграничных узлах в соответствии со значениями  $u_i^{km}$ , вычисленными в узлах сетки.

**Анализ полученных результатов**

Расчеты были проведены в диапазоне изменения параметра нелинейности  $n$  от 0.4 до 1.0. Результаты вычислений представлены на рис. 2 – 5 и табл. 1 и 2.

В результате решения системы уравнений (11) методом Ньютона, были получены значения  $C_1$  и  $A$ , которые представлены в табл. 1. Постоянная  $C_1$  представляет собой значение координаты  $x_2$ , где касательное напряжение  $\tau_{12}$  обращается в ноль. Полученные профили представлены на рис. 2. В случае  $n = 0.5$  найденный профиль скорости согласуется с результатом, представленным в [10]. Это согласование показано на рис. 3.

Таблица 1

**Значения  $C_1, A$**

$n$	$C_1$	$A$
0.4	0.37	3.41
0.6	0.35	4.10
0.8	0.34	4.96
1.0	0.33	6.00

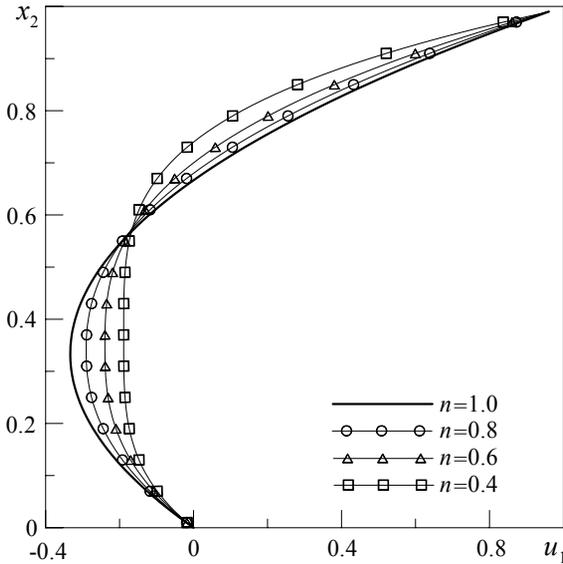


Рис. 2. Профили составляющей скорости  $u_1(x_1 = 0)$  для  $n = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4$

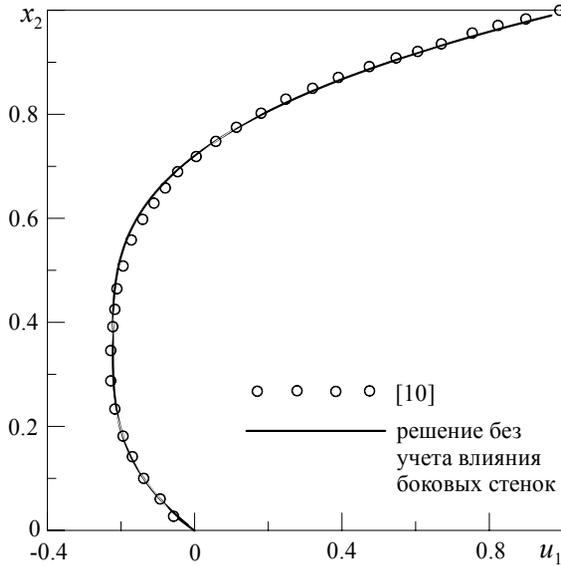


Рис. 3. Сравнение профиля составляющей скорости  $u_1$  ( $x_1 = 0$ ) с данными [10] для  $n = 0.5$

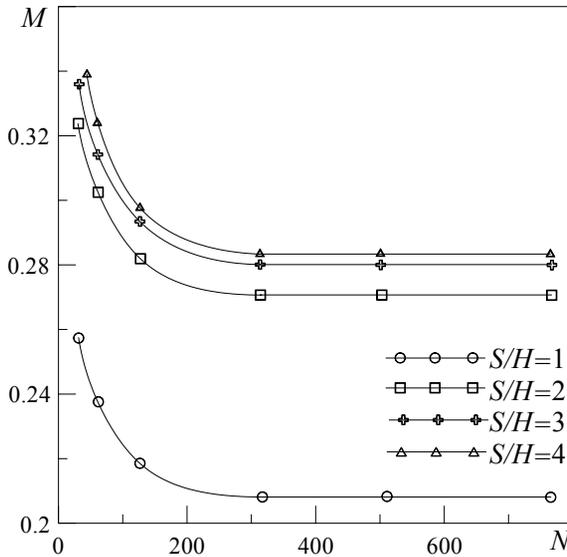


Рис. 4. Зависимость нормы скорости  $M$  от числа элементов  $N$  при  $n = 0.4$  для  $S/H = 1, 2, 3, 4$

Для решения задачи о циркуляционном течении степенной жидкости в шнековом канале с учетом влияния боковых стенок был использован непрямой метод граничных элементов, описанный выше и успешно примененный для решения задачи о течении степенной жидкости в квадратной камере [9]. Для исследования

аппроксимационной сходимости метода использовалась величина  $M$ , которая является нормой  $L_2$  профиля скорости в сечении  $x_1 = 0$ :

$$M = \|u_1^{cm}(x_2)\| = \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^K (u_i^{cm})^2}, \quad K = 100, \quad (16)$$

где  $u_1^{cm}(x_2)$  – профиль скорости, полученный при помощи МГЭ.

Рис. 4 иллюстрирует зависимость значения нормы профиля скорости от числа граничных элементов  $N$  при различных значениях отношения  $S/H$  для случая  $n = 0.4$ . Норма профиля скорости не изменяет своего значения, начиная с  $N = 320$ . Представленные далее расчеты были проведены при  $N = 512$ . Профили составляющей скорости  $u_1(x_2)$ , полученные с учетом влияния боковых стенок, показаны на рис. 5.

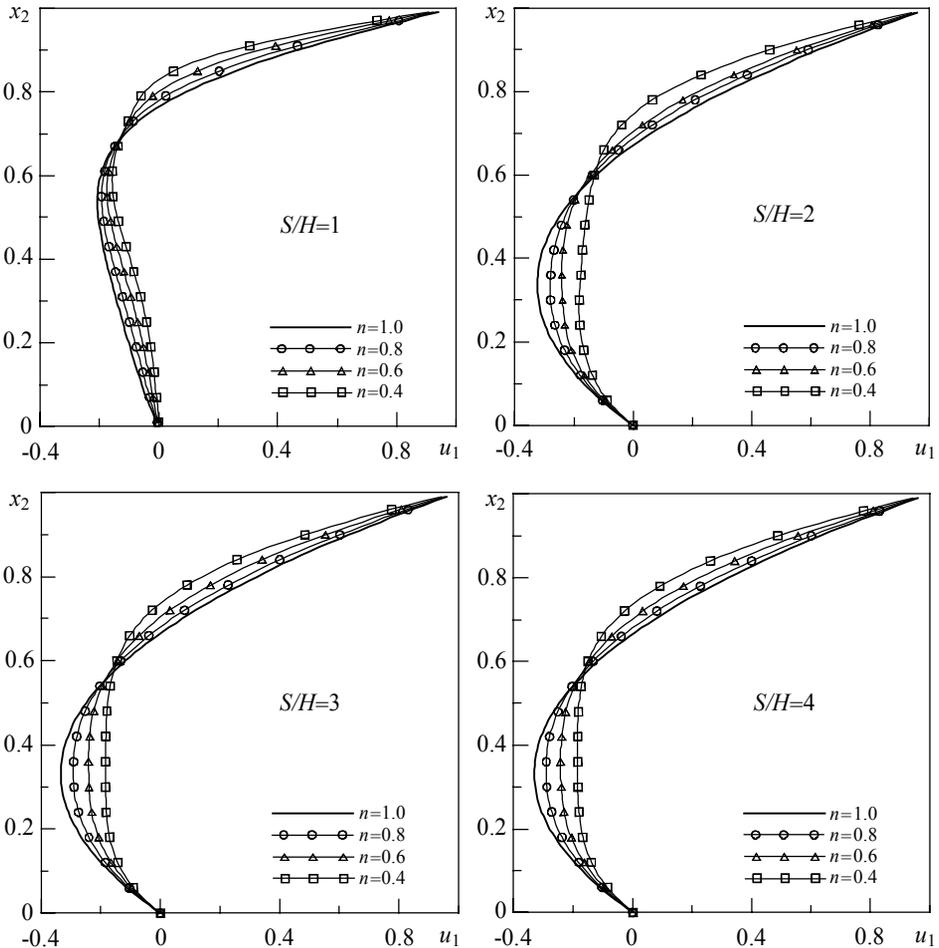


Рис. 5. Профили составляющей скорости  $u_1$  вдоль линии  $x_1 = 0$  для  $0.4 \leq n \leq 1.0$

Относительное отклонение  $E$  решений, полученных с учетом влияния боковых стенок и без него, рассчитано в норме  $L_2$  по формуле

$$E = \frac{\|u_1\| - \|u_1^{cm}\|}{\|u_1\|} \cdot 100 \%, \quad (17)$$

где  $\|u_1\|$  – норма скорости без учета влияния боковых стенок. Результаты приведены в табл. 2. Видно, что для всех  $n$  отклонение составляет менее 1 % при  $S/H = 3$  и более. Таким образом, можно сказать, что при моделировании течения в канале одношнекового экструдера можно не учитывать влияние боковых стенок на циркуляционное течение при  $S/H \geq 3$ . При этом относительное отклонение  $E$  будет гарантированно менее 1 % в указанном диапазоне значений показателя нелинейности.

Таблица 2

Относительное отклонение решений, рассчитанное в норме  $L_2$ 

	$n = 1.0$				$n = 0.8$			
$S/H$	1	2	3	4	1	2	3	4
$E, \%$	24	1	0.2	0.08	24.7	1.9	0.07	0.03
	$n = 0.6$				$n = 0.4$			
$S/H$	1	2	3	4	1	2	3	4
$E, \%$	26	3.5	0.67	0.2	25.4	3.8	0.6	0.05

### Заключение

Рассмотрен вопрос о том, при какой величине отношения ширины шнекового канала экструдера к его глубине является допустимым предположение об отсутствии влияния боковых стенок на профиль скорости циркуляционного течения в середине канала. Предложена методика получения решения для профиля вектора скорости псевдопластичной жидкости без учета влияния боковых стенок. Согласно проведенному исследованию, влиянием боковых стенок на циркуляционное течение в середине канала можно пренебречь для  $S/H > 3$ , поскольку относительное отклонение решений, полученных с учетом влияния боковых стенок и без него, в этом случае составляет менее 1 % в диапазоне изменения показателя нелинейности  $n$  от 0.4 до 1.0.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Микулёнок И.О. К вопросу моделирования процесса червячной экструзии // Известия высших учебных заведений. Химия и химическая технология. 2011. Т. 54. № 12. С. 96–100.
2. Остриков А.Н., Абрамов О.В. Математическая модель процесса экструзии при неизотермическом течении вязкой среды в одношнековых экструдерах // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. 1999. № 1. С. 49–52.
3. Сагиров С.Н. Исследование и моделирование процесса движения полимера в одношнековом экструдере // Технические науки. Фундаментальные исследования. 2011. № 12. С. 179–183.
4. Хаметова М.Г. Описание стационарного, неизотермического течения неньютоновской жидкости в одношнековом экструдере // Вестник СГТУ. Проблемы естественных наук. 2012. № 1(64). С. 15–19.

5. Covas J.A., Costa P.A. A miniature extrusion line for small scale processing studies // Polymer Testing. 2004. No. 23. С. 763–773.
6. Соколов М.В., Клинков А.С., Ефремов О.В. Автоматизированное проектирование и расчет шнековых машин. М.: Машиностроение-1, 2004.
7. Керженцев В.А., Курсеитов С.И., Курсеитова Э.С. Выбор геометрии канала шнека для продвижения массы в шнековом экструдере // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий: сб. науч. тр. Керченского морского технологического института. Керчь: Изд-во КМТИ, 2006. Вып. 7. С. 130–136.
8. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984.
9. Пономарева М.А., Филина М.П., Якутенок В.А. Течение неньютоновской жидкости в квадратной камере при малых числах Рейнольдса // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 90–100.
10. Янков В.И., Боярченко В.И., Первадчук В.П. Переработка волокнообразующих полимеров. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. Т. 2.
11. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 57. P. 289–304. DOI: 10.2495/BE370241.
12. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
13. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
14. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Мат. моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 62–70.

Статья поступила 19.02.2016 г.

*Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A.* CIRCULATORY HIGH-VISCOSITY NON-NEWTONIAN FLUID FLOW IN A SINGLE-SCREW EXTRUDER CHANNEL

DOI 10.17223/19988621/40/10

This paper is devoted to definition of a width-to-depth ratio of a single-screw extruder channel when sidewalls do not affect the velocity profiles of circulatory high-viscosity non-Newtonian fluid flow at the mid of the channel. The channel has a rectangular cross-section. Power-law model is used to describe fluid behavior. The indirect boundary element method is used for numerical solution taking into account of sidewalls. Comparing of obtained velocity profiles with the known results showed a good agreement. Research is performed in the range of power-law index from 0.4 to 1.0. The method for obtaining the velocity component profiles for the case of shear-thinning fluid flow without considering influence of sidewalls is presented. The width-to-depth ratio of a single-screw extruder channel when it is acceptable to neglect influence of sidewalls on flow at the mid of the channel is defined.

Keywords: single-screw extruder, non-Newtonian fluid, Indirect Boundary Element Method, flow in lid-driven cavity.

*PONOMAREVA Maria Andreevna* (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: pma@ftf.tsu.ru

*FILINA Maria Petrovna* (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: filina.mari@mail.ru

*YAKUTENOK Vladimir Albertovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: yva@ftf.tsu.ru

## REFERENCES

1. Mikulionok I.O. (2011) K voprosu modelirovaniya protsessa chervyachnoy ekstruzii [On modelling of worm extrusion]. *Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya – Chemistry and Chemical Technology*. 54(12).
2. Ostrikov A.N., Abramov O.V. (1999) Matematicheskaya model' protsessa ekstruzii pri neizotermicheskom techenii vyazkoy sredy v odnoshnekovykh ekstruderakh [Mathematical model of the extrusion process at non-isothermal viscous flow in a single-screw extruder]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Pishchevaya tekhnologiya – Food technology*. 1. pp. 49–52.
3. Sagiroy S.N. (2011) Issledovanie i modelirovanie protsessa dvizheniya polimera v odnoshnekovom ekstrudere [Analysis and modeling of polymers motion in a single screw extruder.]. *Tekhnicheskie nauki. Fundamental'nye issledovaniya – Technical science. Fundamental research*. 12. pp. 179–183.
4. Khametova M.G. (2012) Opisaniye statsionarnogo, neizotermicheskogo techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v odnoshnekovom ekstrudere [Description of steady-state, nonisothermal flow of a non-Newtonian fluid in a single-screw extruder]. *Vestnik SGTU. Problemy estestvennykh nauk – SSTU Journal of Natural Sciences Problems*. 1(64). pp. 15–19.
5. Covas J.A., Costa P.A. (2004) A miniature extrusion line for small scale processing studies. *Polymer Testing*. 23. pp. 763–773.
6. Sokolov M.V., Klinkov A.S., Efremov O.V. (2004) *Avtomatizirovannoe proektirovanie i raschet shnekovykh mashin* [Computer-aided design of screw extruders]. Moscow: Mashinostroenie-1.
7. Kerzhentsev V.A., Kurseitov S.I., Kurseitova E.S. (2006) Vybory geometrii kanala shneka dlya prodvizheniya massy v shnekovom ekstrudere [Choosing the screw channel geometry for mass extrusion in a screw extruder]. In: *Mekhanizatsiya proizvodstvennykh protsessov rybnogo khozyaystva, promyshlennykh i agrarnykh predpriyatiy* [Production Process Mechanization of Fish Farm, Industrial, and Agrarian Enterprises]. Kerch: KMIT publishing house. Iss. 7. pp. 130–136.
8. Tadmor Z., Gogos C.G. (1979) *Principles of polymer processing*. New York: John Wiley & Sons.
9. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. (2015) Techenie nen'yutonovskoy zhidkosti v kvadratnoy kaverne pri malykh chislakh Reynol'dsa [Non-Newtonian fluid flow in a lid-driven cavity at low Reynolds numbers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 90–100.
10. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchuk V.P. (2005) *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov* [Fiber-forming polymer processing]. Vol. 2. Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics.
11. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. (2014) The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 57. pp. 289–304.
12. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. Berlin, Heidelberg New York: Springer-Verlag.
13. Ladyzhenskaya O.A. (1963) *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach.
14. Yakutenok V.A. (1992) Chislennoye modelirovanie medlennykh techeniy vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu metodom granichnykh elementov [Numerical simulation of viscous, free-surface, creeping flow with boundary element method]. *Mat. modelirovanie – Mathematical Models*. 4(10). pp. 62–70.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**БУХТЯК Михаил Степанович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

**ГОЙ Тарас Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики факультета математики и информатики Прикарпатского национального университета имени Василия Стефаника (Украина, г. Ивано-Франковск). E-mail: tarasgoy@yahoo.com

**ГОЦЕВ Дмитрий Викторович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета. E-mail: rbgotsev@mail.ru

**ГУРОВА Валерия Сергеевна** – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: valery0995@mail.ru

**ДОЛГИЙ Максим Евгеньевич** – ассистент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета; ассистент кафедры физики высоких технологий в машиностроении Томского политехнического университета; аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: atikin.89@tpu.ru

**ДЬЯЧЕНКО Людмила Ивановна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Томского государственного университета. E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

**ДЬЯЧЕНКО Николай Николаевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com.

**КАГЕНОВ Ануар Магжанович** – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

**МИСЯКОВ Виктор Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: mvm@mail.tsu.ru

**ОХОТКИН Кирилл Германович** – кандидат физико-математических наук, доцент, советник генерального директора АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева» (АО «ИСС»). E-mail: okg2000@mail.ru

**ПЕРУНОВ Николай Сергеевич** – магистрант факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета. E-mail: perunovnikolays@gmail.com

**ПОНОМАРЕВА Мария Андреевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pma@ftf.tsu.ru

**РОЗОВ Алексей Вячеславович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета. E-mail: post-box023@mail.ru

**СИНЕОКАЯ София Александровна** – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sophia1994@mail.ru.

**ФИЛИНА Мария Петровна** – магистрантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: filina.mari@mail.ru

**ЯКУТЕНОК Владимир Альбертович** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: yva@ftf.tsu.ru