УДК 512.541
DOI 10.17223/19988621/40/3

В.М. Мисяков

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С РЕГУЛЯРНЫМ ЦЕНТРОМ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ

Рассматриваются абелевы группы, имеющие регулярное кольцо эндоморфизмов (регулярный центр кольца эндоморфизмов).

Ключевые слова: *абелева группа*, *регулярное кольцо эндоморфизмов, регулярный центр кольца эндоморфизмов.*

Основные исследования по изучению абелевых групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, связаны с работами K.M. Rangaswamy [1], L. Fuchs и K.M. Rangaswamy [2], которые свели изучение таких групп к редуцированным группам. В теореме 4 данной работы рассматривается этот случай. Описание редуцированных групп конечного ранга без кручения, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, было предложено S. Glaz и W. Wickless в [3].

Интерес к исследованию абелевых групп, имеющих регулярный центр кольца эндоморфизмов, связан в первую очередь с проблемой, поставленной в монографии [4]: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». В работе [5] изучение таких групп было сведено к редуцированному случаю, а в теореме 2 предлагаемой работы рассматривается данный случай.

Центр кольца эндоморфизмов абелевых групп, а также связанные с этим вопросы изучались в ряде работ. Так, в [6] описание центра кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы сводится к описанию некоторых подколец центра кольца эндоморфизмов ее части без кручения. В [7] рассматривается строение аддитивной группы регулярного модуля. Изучаются абелевы группы, являющиеся регулярными модулями над своими кольцами эндоморфизмов. В [8] доказывается регулярность кольца эндоморфизмов по радикалу самой малой *sp*-группы. В [9] содержатся как известные, так и новые результаты о гомоморфизмах, близких к регулярным. В [10] изучаются абелевы группы с центральными идемпотентами, а в [11] – с перестановочными мономорфизмами.

Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми, а все кольца являются унитальными предкольцами [12]. Введем следующие обозначения: $E(G)$ – кольцо эндоморфизмов группы G; $C(E(G))$ – центр кольца $E(G)$; $T(G)$ – периодическая часть группы G; $T_p(G)$ – p-компонента периодической части группы G; прямую сумму и произведение групп обозначаем символами $\oplus$ и $\prod$ соответственно. Все понятия, которые не поясняются здесь, являются стандартными их можно найти, например, в монографиях [4, 12–14].

Напомним, что предкольцо A называется регулярным, если A – регулярная мультипликативная полугруппа (т. е. если $a \in aAa$ для любого $a \in A$) [12].

Нам потребуется следующая теорема, доказанная в [5]:

Теорема 1 [5]. Для группы G следующие условия справедливы:

1) Если G – нередуцированная группа, то $C(E(G))$ – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

а) G – делимая группа без кручения;

б) $G = A \oplus D$, где A – элементарная группа, а D – делимая группа без кручения.

2) Если G – редуцированная группа и $C(E(G))$ – регулярное кольцо, то $T(G)$ – элементарная группа, $G / T(G)$ – делимая группа и

$$\underset{p\in P}{\oplus} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p\in P} T_p(G).$$

Определение. Подкольцо B кольца A назовём регулярно разрешимым в A, если для любого $b \in B$ из того, что $b \in bAb$, следует, что $b \in bBb$.

Замечание. Очевидно, что если $\boldsymbol{B}$ – регулярное подкольцо кольца $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{B}$ регулярно разрешимо в $\boldsymbol{A}$.

В следующей теореме рассматриваются редуцированные группы, имеющие регулярный центр кольца эндоморфизмов.

Теорема 2. Если G – редуцированная группа, то $C(E(G))$ – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $T(G)$ – элементарная группа;

2) $C(E(G))$ изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца $E(T(G))$.

Доказательство. *Необходимость.* Справедливость условия 1) следует из теоремы 1. Докажем, что выполняется условие 2). Рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\varphi : E(G) \to E(T(G))$, ставящий в соответствие каждому $\alpha \in E(G)$ его ограничение на $T(G)$ Предположим, что существует ненулевой гомоморфизм $\beta \in E(G)$ такой, что $\beta \in \ker\varphi$. Тогда $im(\beta)$ является делимой группой (как эпиморфный образ делимой группы $G / T(G)$ (см. теорему 1)), что противоречит редуцированности группы G. Следовательно, φ – мономорфизм.

Пусть $i : C(E(G)) \to E(G)$ – тождественное вложение, тогда $im(\varphi i)$ – регулярно разрешимое подкольцо кольца $E(T(G))$

Достаточность. Так как $T(G)$ – элементарная группа, то $E(T(G))$ – регулярное кольцо [4, следствие 18.2] и, следовательно, $C(E(G))$ – регулярное кольцо по условию 2).

Напомним результат, полученный Фуксом и Рангасвами [1, 2] для абелевых групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов.

Теорема 3 ([1, 2]). Для группы G следующие условия справедливы:

а) Если G – периодическая группа, то кольцо $E(G)$ регулярно тогда и только тогда, когда G – элементарная группа.

б) Если G – нередуцированная группа, то $E(G)$ – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда G – прямая сумма делимой группы без кручения и элементарной группы.

в) Если G – редуцированная группа и $E(G)$ – регулярное кольцо, то $T(G)$ – элементарная группа, $G / (T(G))$ – делимая группа и

$$\underset{p\in P}{\oplus} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p\in P} T_p(G).$$

Поскольку нередуцированные группы, имеющие регулярное кольцо эндоморфизмов, в теореме 3 описаны, то в следующей теореме рассмотрим только редуцированный случай.

Теорема 4. Если G – редуцированная группа, то $E(G)$ – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $T(G)$ – элементарная группа;

2) $E(G)$ изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца $E(T(G))$.

Доказательство. При использовании условия в) теоремы 3 доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rangaswamy K.M.* Abelian groups with endomorphism images of special types // J. Algebra. 1967. V. 6. P. 271–280.
2. *Fuchs L.*, *Rangaswamy K.M.* On generalized regular rings // Math. Z. 1968. V. 107. P. 71–81.
3. *Glaz S. and Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Comm. Algebra. 1994. V. 22. No. 4. P. 1161–1176.
4. *Крылов П.А.*, *Михалёв А.В.*, *Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Томский государственный университет, 2002. 464 с.
5. *Карпенко А.В.*, *Мисяков В.М.* О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. Вып. 3. С. 39–44.
6. *Крылов П.А.*, *Классен Е.Д.* Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 5. С. 1074–1085.
7. *Крылов П.А.*, *Пахомова Е.Г.* Абелевы группы и регулярные модули // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 402–411.
8. *Крылов П.А.* Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 17–27.
9. *Абызов А.Н.*, *Туганбаев А.А.* Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 7. С. 3–38.
10. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
11. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 5. С. 1182–1187.
12. *Туганбаев А.А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
13. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.
14. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.

Статья поступила 11.02.2016 г.

Misyakov V.M. ABELIAN GROUPS WITH A REGULAR CENTER OF THE ENDOMORPHISM RING

DOI 10.17223/19988621/40/3

The article is related to the following fundamental problem: "What rings are endomorphism rings of abelian groups?", as well as to the problem of describing abelian groups for which the center of endomorphism ring possesses one or another property. In particular, we consider abelian groups whose endomorphism rings are regular. L. Fuchs and K.M. Rangaswamy described abelian groups with a regular endomorphism ring by use of the reduced case. If a group is reduced and has a regular endomorphism ring, then its periodic part is elementary, its factor group is divisible, and the group is embedded in a direct product of the p-components of its periodic part, as is shown by those authors. Similar results were obtained for groups the centers of endomorphism rings of which are regular by A. V. Karpenko and V.M. Misyakov. In this article, some necessary and sufficient conditions for the existence of a regular endomorphism ring (of a regular center of the endomorphism ring) of a reduced Abelian group are found.

Keywords: abelian group, regular endomorphism ring, regular center of the endomorphism ring.

MISYAKOV Victor Mikhajlovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: mvm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Rangaswamy K.M. (1967) Abelian groups with endomorphism images of special types. *J. Algebra*. 6. pp. 271–280.
2. Fuchs L., Rangaswamy K.M. (1968) On generalized regular rings. *Math. Z*. 107. pp. 71–81.
3. Glaz S., Wickless W. (1994) Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups. *Comm. Algebra*. 22(4). pp. 1161–1176. DOI: 10.1080/00927879408824899.
4. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. (2003) *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. DOI 10.1007/978-94-017-0345-1.
5. *Karpenko A.V.*, *Misyakov V.M.* (2008) On regularity of the center of the endomorphism ring of an abelian group. *Journal of Mathematical Sciences*. 154(3). pp. 304–307. DOI 10.1007/s10958-008-9186-0
6. Krylov P.A., Klassen E.D. (1999) The center of the endomorphism ring of a split mixed abelian group. *Siberian Mathematical Journal*. 40(5). pp. 907–916.
7. Krylov P.A., Pakhomova E.G. (2001) Abelian groups and regular modules. *Mathematical Notes*. 69(3). pp. 364–372.
8. Krylov P.A. (2007) Radikaly kolets endomorfizmov abelevykh grupp [The radicals of endomorphism rings of abelian groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1. pp. 17–27.
9. Abyzov A.N., Tuganbaev A.A. (2012) Homomorphisms close to regular and their applications. *Journal of Mathematical Sciences*. 183(3). pp. 275–298. DOI: 10.1007/s10958-012-0813-4.
10. Chekhlov A.R. (2009) *Abelian groups with normal endomorphism rings*. *Algebra and Logic*. 48(4). pp. 298–308. DOI: 10.1007/s10469-009-9056-y.
11. Chekhlov A.R. (2013) On abelian groups with commuting monomorphisms. *Siberian Mathematical Journal*. 54(5). pp. 946–950. DOI: 10.1134/S0037446613050182.
12. Tuganbaev A.A. (2009) *Teoriya kolets. Arifmeticheskie moduli i kol'tsa* [Ring Theory. Arithmetical Modules and Rings]. Moscow: MCNMO Publ.
13. Fuchs L. (1970) *Infinite Abelian Groups*. *V. I*. New York – London: Academic Press.
14. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian Groups*. *V. II*. New York – London: Academic Press.