

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/40/9

К.Г. Охоткин

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТОДЕФОРМАЦИОННОГО ЭФФЕКТА ДЛЯ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ ФЕРРОЭЛАСТА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследована магнитоупругая задача о выпучивании тонкой гибкой прямоугольной пластины из ферроэласта под действием однородного поперечного магнитного поля в геометрически-нелинейной постановке. Получено аналитическое решение нелинейной краевой задачи в параметрическом виде с помощью введения специальных базовых функций, обобщающих эллиптические интегралы. Полученное решение позволяет проводить расчет и визуализацию форм выпучивания пластины и тестировать численные методы.

Ключевые слова: *ферроэласт, геометрическая нелинейность, магнитодеформационный эффект, специальные функции.*

Наряду с деформированием механических систем большой интерес представляют задачи изгиба и устойчивости композитных магнитоупругих систем. Одним из примеров таких систем являются гибкие упругие пластины с магнитными включениями – ферроэласты, находящиеся под действием магнитного поля. В настоящей статье рассмотрена магнитомеханическая задача деформирования гибких пластин, изготовленных из перспективных функциональных материалов – мягких ферроэластов или феррогелей. Этими понятиями обозначают композиционные системы, состоящие из низко модульной (модуль упругости $\leq 10^4$ Па) полимерной матрицы, в которую внедрён высокодисперсный (микро- или наночастицы) феррит или ферромагнетик, например железо или магнетит. Эти микрочастицы имеют малую магнитную анизотропию и в отсутствии внешнего магнитного поля не имеют намагниченности. Ферроэласты – магниточувствительный материал, способный к большим деформациям, управляемым внешним магнитным полем. Устройства с использованием мягких ферроэластов имеют широкий круг перспективного применения в приборостроении (датчики, адаптивные демпферы, микро-манипуляторы, бесконтактные виброузлы). Пластины из ферроэластов могут выступать в качестве чувствительного элемента датчиков в микроэлектромеханических устройствах (МЭМС). Проектирование таких устройств требует понимания механического поведения этих систем во внешнем магнитном поле.

В работах [1] и [2] описан эксперимент и решение методом конечных элементов задач деформирования ряда магнитоупругих систем с использованием метода конечных элементов. Основные уравнения магнитоупругости приведены в монографии [3]. Фундаментальной причиной магнитных деформаций являются пондеромоторные силы, возникающие в любом магнитном материале, помещенном в магнитное поле. Имеются два варианта действия пондеромоторных сил на тело. Первый вариант традиционный – в неоднородном поле внутри материала, способного к намагничиванию, возникают объемные силы, и тело деформируется в область максимального градиента. Второй вариант специфичен исключительно для мягких ферроэластов. Он возникает в однородном внешнем магнитном поле,

где роль объемных (градиентных) сил незначительна. В этом случае деформацию образца вызывает неоднородное распределение магнитного поверхностного давления. Магнитное поле оказывает воздействие на ферроэласты, направленное перпендикулярно силовым линиям. Эксперименты Степанова [1, 2] показали, что в силосановых ферроэластах этот эффект отчетливо выражен и достигает 10–20 %.

Авторами [1, 2] найден экспериментально и показан с помощью МКЭ пороговый эффект при деформации круговой пластины из ферроэласта в поперечном магнитном поле. В полях ниже критического пластина неподвижна и остается плоской. При достижении критического поля она начинает выгибаться, образуя купол, причем направление прогиба заранее не задано (вырождено). Так как во внешнем полю обнаружено критическое пороговое значение, то очевидно, что на пластину действуют сжимающие продольные распределенные силы (магнитное давление). В настоящей работе проводится аналогия с устойчивостью пластины в смысле Эйлера при продольном нагружении некоторой распределенной «эффективной» силой, приводятся результаты моделирования и аналитического решения задачи деформирования тонкой гибкой прямоугольной пластины из ферроэласта во внешнем магнитном поле с использованием авторского метода построения аналитических решений с учетом геометрической нелинейности. Магнитная часть модели выполнена оценочно в упрощенной постановке, а упор сделан на учет эффектов, связанных с геометрической нелинейностью в механической части модели. Аналитические решения будут построены на основе авторского подхода [4] с использованием новых специальных функций. Полученное аналитическое решение позволяет оценивать величину прогиба пластины в зависимости от величины внешнего поля и ее геометрических и физических параметров. Представленные результаты позволяют моделировать магнитоупругие системы, используемые в различных устройствах и датчиках микромеханики, в том случае, когда требуется точный учет геометрической нелинейности.

Постановка задачи

Построим точное аналитическое решение задачи о геометрически нелинейном выпучивании тонкой гибкой прямоугольной пластины из ферроэласта, помещенной во внешнее поперечное однородное магнитное поле постоянного направления (магнитодеформационный эффект). В задаче будем рассматривать магнитомягкий материал пластины с магнитной анизотропией, соответствующей расположению магнитных моментов магнитных микрочастиц в плоскости пластины. При такой анизотропии на пластину, помещенную в поперечное магнитное поле, будет действовать продольное сжимающее магнитное давление. Будем для простоты исследовать пластину с двумя свободными противоположными краями. Два другие края пластины жестко (консольно) зашпелены и могут параллельно сдвигаться при деформировании пластины. При таком закреплении формы выпучивания пластины симметричны относительно поперечной плоскости сечения и задача является одномерной и геометрически подобной изгибу тонкого стержня в плоскости.

Рассмотрим тонкую гибкую прямоугольную пластину из ферроэласта со следующими геометрическими и физическими параметрами: длина L , ширина a , толщина h , модуль упругости E , магнитная восприимчивость материала χ . Выберем декартову систему координат XYZ так, чтобы изначально плоская пластина была расположена на плоскости XOY (рис. 1). Два противоположных края

пластины, параллельных оси OY , жестко защемлены. Левый край закреплен и находится в начале координат, правый край имеет подвижное защемление и может сдвигаться параллельно оси OY . Два других края пластины, параллельных оси OX , свободны.

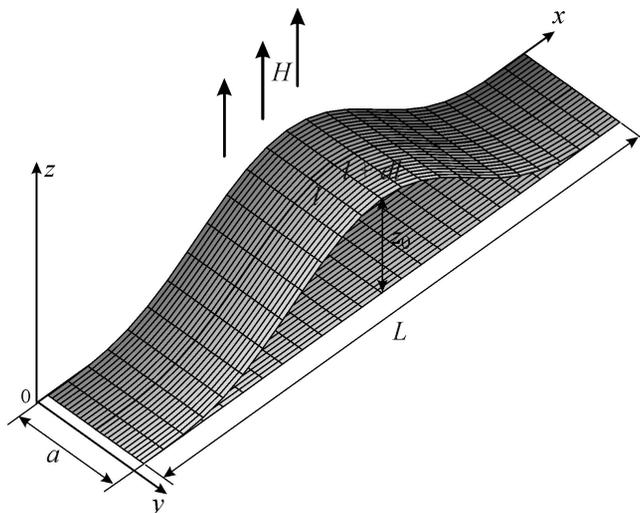


Рис. 1. Прямоугольная пластина из ферроэласта в поперечном магнитном поле в декартовой системе координат. Магнитное поле H имеет одну компоненту, параллельную оси OZ . Максимальный прогиб пластины – z_0

Введём следующие допущения в нашей модели:

- Материал пластины изотропный и линейно-упругий, т.е. нормальные и тангенциальные напряжения не зависят от направления и пропорциональны деформациям.
- Пластина тонкая, т.е. толщина её существенно (на порядок) мала по сравнению с длиной и шириной.
- Считаем материал пластины нерастяжимым и не учитываем деформации растяжения-сжатия.
- Пренебрегаем деформациями поперечного сдвига материала пластины.
- Соответственно длина, ширина и толщина пластины не изменяются при деформировании.

Внешнее магнитное поле H приложено поперек недеформированной пластины и имеет одну компоненту, параллельную оси OZ . Под воздействием магнитного поверхностного давления происходит выпучивание пластины из плоскости XOY . При этом формы профиля изогнутой пластины получаются сечениями, параллельными плоскости XOZ (рис. 2). Формы профиля изогнутой пластины в сечении будут симметричны относительно ее середины. Обозначим максимальный прогиб пластины (на половине ее длины) – z_0 . Форма изогнутого профиля в сечении XOZ будет описываться неизвестной зависимостью $z(x, H)$, которую будем далее определять.

Рассмотрим плоскую задачу в сечении XOZ (рис. 2). Введем в этой плоскости локальную касательную систему координат $\theta(l)$, где l – криволинейная координа-

та, отложенная вдоль изогнутой линии сечения профиля пластины ($0 \leq l \leq L$), $\theta(l)$ – угол между касательной в текущей точке к линии сечения профиля пластины и осью OX (локальный угол поворота малого элемента). Далее рассмотрим две связанные подзадачи – приближенную магнитоэластическую и упругую с точным учетом геометрической нелинейности.

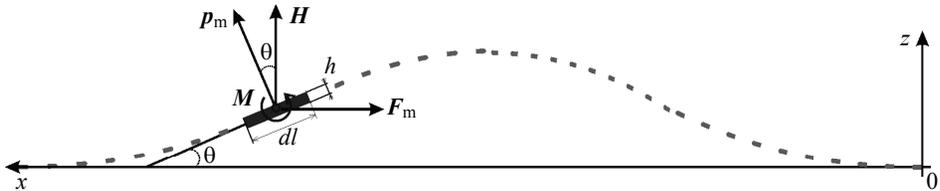


Рис. 2. Сечение (профиль) тонкой пластины и ее малый элемент в поперечном магнитном поле в касательной системе координат. Изогнутой профиль пластины показан штриховой линией. Малый элемент пластины длины dl показан синим прямоугольником. Упругий изгибающий момент M направлен поперек плоскости рисунка. Магнитный момент малого элемента p_m и сила магнитного давления F_m , вызывающая поворот малого элемента

Магнитная часть модели

Сформулируем приближенную магнитную модель в упрощенной постановке для определения оценки силы магнитного давления, действующую на прямоугольную пластину из ферроэласта в поперечном магнитном поле. Рассмотрим малый элемент пластины длины dl (рис. 2). Обозначим его объем dV и площадь dS . Тогда имеем геометрические соотношения:

$$dV = dSh = ahdl . \tag{1}$$

Обозначим собственный магнитный момент малого элемента пластины – dp_m , действующий на него изгибающий упругий момент – dM и связанную с ним силу магнитного давления, вызывающую поворот малого элемента – dF_m . Запишем простые магнитные соотношения, связывающие изгибающий момент dM и магнитный момент dp_m для малого магнитного элемента, помещенного во внешнее поле с индукцией B :

$$dM = [Bdp_m] ,$$

или в компонентах:

$$dM = dF_m h = Bdp_m \sin\theta , \tag{2}$$

где θ – угол между векторами магнитного поля и магнитного момента малого элемента. Векторы напряженности и индукции магнитного поля имеют одну компоненту и направлены вдоль оси OZ . Сила магнитного давления F_m , вызывающая поворот малого элемента, направлена параллельно пластине, против оси OX . Вектор изгибающего момента dM направлен вдоль оси OY .

Закон намагничивания ферроэласта $J(H)$ предполагаем линейным:

$$J = \chi H = \frac{dp_m}{dV} . \tag{3}$$

Соотношения между векторами магнитного поля в системе СИ:

$$B = \mu_0 (H + J) = \mu_0 (H + \chi H) = \mu_0 (1 + \chi) H . \tag{4}$$

Из соотношений (1) – (4) последовательными подстановками выразим величину продольного магнитного давления q_x на малый элемент пластины в системе СИ:

$$q_x \equiv \frac{dF_m}{dS} = \frac{dF_m}{adl} = \mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 \sin \theta. \quad (5)$$

В нашей задаче с расположением магнитных моментов магнитных микрочастиц в плоскости пластины будем иметь магнитодеформационный эффект – выпучивание пластины под действием продольного сжимающего магнитного давления q_x , направленного против оси OX .

В экспериментах [1, 2] по исследованию пластин из ферроэластов в поперечном магнитном поле найден пороговый эффект и обнаружено критическое значение внешнего поля, только при превышении которого пластина начинает выпучиваться. Это значит, что на пластину действует продольная «эффективная» нагрузка, в случае наличия поперечной составляющей – выпучивание началось бы сразу при любом отличном от нуля значении поперечной составляющей нагрузки. Поэтому в модели учитывается одна продольная компонента магнитного давления q_x , которая рассматривается в качестве распределенной «эффективной» силы.

Механическая часть модели

Запишем кинематические соотношения для малого элемента пластины:

$$\frac{dx}{dl} = \cos \theta(l), \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta(l). \quad (6)$$

Запишем уравнение равновесия моментов для элемента пластины в деформированном состоянии

$$\frac{dM}{dl} = F_n = -F_x \sin \theta + F_z \cos \theta, \quad (7)$$

где M – изгибающий момент, F_n – нормальная компонента внутренней упругой силы, отвечающая за изгиб пластины.

Выпишем уравнения равновесия сил для малого прямоугольного элемента пластины:

$$\frac{dF_x}{dl} = q_x, \quad \frac{dF_y}{dl} = q_y, \quad \frac{dF_z}{dl} = q_z, \quad (8)$$

где q_x, q_y, q_z – декартовы компоненты внешнего распределенного давления на поверхность пластины. В нашем случае давление имеет одну ненулевую продольную компоненту q_x , определяемую оценочным выражением (5), $q_y = q_z = 0$. Рассмотренная магнитомеханическая модель геометрически подобна задаче изгиба стержня под действием распределенного по нормали гидростатического давления, за исключением равной нулю одной из декартовых компонент давления $q_z = 0$.

В нашей модели будем использовать линейный закон Гука. Выражение для изгибающего момента в соответствии с законом Гука в геометрически нелинейном случае для выпученного (изогнутого в плоскости XOZ) состояния имеет следующий вид:

$$M = EI_z d\theta/dl,$$

где E – модуль упругости Юнга, $I_z = bh^3/12$ – поперечный момент инерции малого элемента пластины, EI_z – его изгибная жесткость, $d\theta/dl$ – кривизна сечения изогнутой поверхности пластины.

Выпишем систему уравнений, описывающих изогнутое состояние пластины для случая одномерного изгиба в плоскости XOZ , используя выражения (5) – (9):

$$\begin{aligned} \frac{dF_x}{dl} &= \mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 \sin \theta, \quad \frac{dF_z}{dl} = 0, \\ EI_z \frac{d^2 \theta}{dl^2} &= -F_x \sin \theta + F_z \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Проводя интегрирование системы уравнений (10) и учитывая, что $\sin \theta dl = dz$, имеем

$$\begin{aligned} F_x &= C_1 + \mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 z, \quad F_z = C_2, \\ EI_z \frac{d^2 \theta}{dl^2} &= -F_x \sin \theta + F_z \cos \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования, имеющие смысл внешних сосредоточенных сил действующих на пластину. Так как в нашем случае они отсутствуют, то без ограничения общности можно положить $C_1 = C_2 = 0$, и систему (11) перепишем в виде одного нелинейного уравнения равновесия второго порядка:

$$EI_z \frac{d^2 \theta}{dl^2} = -\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 z \sin \theta = 0. \quad (12)$$

Решив это уравнение, можно найти неизвестную функцию угла поворота элемента $\theta(l)$ и далее с помощью интегрирования кинематических соотношений (6) определить форму изогнутой пластины в зависимости от приложенного внешнего поля H .

Краевые условия

Запишем краевые условия для уравнения (12). Жесткое защемление левого края пластины, расположенного вдоль оси OY , требует

$$\theta = 0, \quad z = 0 \quad \text{при } l = 0. \quad (13)$$

Граничное условие подвижного защемления правого параллельного края пластины имеет вид

$$\theta = 0, \quad z = 0 \quad \text{при } l = L. \quad (14)$$

Аналитическое решение

Решим уравнение (12) с краевыми условиями (14), переходя для удобства интегрирования к декартовым координатам. В этом случае уравнение (12) допускает простое интегрирование. Выполним интегрирование уравнения (12):

$$\begin{aligned} EI_z \frac{d\theta}{dl} &= -\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 \int z \sin \theta dl, \\ \sin \theta \frac{d\theta}{dz} &= -\frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2}{EI_z} \int z dz, \\ -\frac{d \cos \theta}{dz} &= C_3 - \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2}{EI_z} \frac{z^2}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Выполним второе интегрирование (15) и получим общее решение:

$$\cos \theta = C_4 - C_3 z + \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 z^3}{EI_z 6}. \quad (16)$$

Введем безразмерные координаты:

$$\begin{aligned} s &= l / L, \quad 0 \leq s \leq 1; \\ x_1 &= x / L, \quad 0 \leq x_1 \leq 1; \\ z_1 &= z / L, \quad 0 \leq z_1 \leq 1. \end{aligned}$$

В новых переменных решение (16) примет вид

$$\cos \theta = C_4 - C_3 L z_1 + \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 L^3 z_1^3}{EI_z 6}.$$

Введем параметр q – собственное число уравнения (12):

$$q^3 = \frac{\mu_0 (1 + \chi) \chi h H^2 L^3}{EI_z}, \quad (17)$$

определяемое внешним полем, геометрическими, упругими и магнитными свойствами пластины. Введем новое обозначение k для константы интегрирования:

$$C_3 L = 2kq.$$

Используя первое краевое условие (13) при $l = 0$, найдем значение константы C_4 :

$$\cos \theta = C_4 = 1.$$

Далее из второго краевого условия можно будет найти связь между параметрами k и q . В новых обозначениях решение (16) примет вид

$$\cos \theta = 1 - 2kqz_1 + \frac{q^3 z_1^3}{6}. \quad (18)$$

Соответственно синус угла поворота

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{6} \sqrt{qz_1 (q^2 z_1^2 - 12k) (12kqz_1 - 12 - q^3 z_1^3)}.$$

Введем новую безразмерную переменную $0 \leq t \leq 1$ с помощью замены:

$$qz_1 = 2k(1 - t), \quad t = 1 - qz_1/2k \quad (19)$$

и запишем решение (18) в виде

$$\cos \theta = 1 - 4k^2(1 - t) + \frac{4k^3(1 - t)^3}{3}. \quad (20)$$

Соответственно синус угла поворота

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}k}{3} \times \\ &\times \sqrt{(1 - t)(kt^2 - 2kt + k - 3)(2k^3 t^3 - 6k^3 t^2 + 6k^2(k - 1)t - 2k^3 + 6k^2 - 3)}, \quad (21) \end{aligned}$$

Из выражений (6) и (18) можно найти профиль изогнутой пластины в квадратурах:

$$\frac{x(z)}{L} = \int \frac{\cos \theta dl}{L} = \int \cos \theta ds = \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dz_1 = -\frac{2k}{q} \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dt, \quad (22)$$

или
$$\frac{x(z)}{L} = 6 \int_0^{z/L} \frac{1 - 2kqz_1 + q^3 z_1^3 / 6}{\sqrt{qz_1 (q^2 z_1^2 - 12k) (12kqz_1 - 12 - q^3 z_1^3)}} dz_1, \quad (23)$$

$$\frac{x(t)}{L} = \frac{3k}{q\sqrt{2k}} \int_t^1 \frac{1 - 4k^2 + 4/3k^3 - 4k^2(k-1)t + 4k^3t^2 - 4/3k^3t^3}{\sqrt{(1-t)(kt^2 - 2kt + k - 3)(2k^3t^3 - 6k^3t^2 + 6k^2(k-1)t - 2k^3 + 6k^2 - 3)}} dt.$$

Из выражений (6) и (20) найдем соотношение между декартовой и криволинейной координатами:

$$s = \frac{l}{L} = \frac{1}{L} \int \frac{dz}{\sin \theta} = \int \frac{dz_1}{\sin \theta} = -\frac{2k}{q} \int \frac{dt}{\sin \theta},$$

$$s = \frac{3k}{q\sqrt{2k}} \int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(kt^2 - 2kt + k - 3)(2k^3t^3 - 6k^3t^2 + 6k^2(k-1)t - 2k^3 + 6k^2 - 3)}}. \quad (24)$$

Введение специальных функций

Исходя из структуры выражений (23) и (24) целесообразно ввести новые функции по аналогии с эллиптическими интегралами. Сделаем в интегралах (23) и (24) замену $t = \cos \varphi$ и введем новые функции:

$$Fn(\varphi, k) = \frac{3k}{\sqrt{2k}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(1-c)(kc^2 - 2kc + k - 3)(2k^3c^3 - 6k^3c^2 + 6k^2(k-1)c - 2k^3 + 6k^2 - 3)}},$$

где $c = \cos \varphi$,

(25)

$$En(\varphi, k) = \frac{3k}{\sqrt{2k}} \int_0^\varphi \frac{(1 - 4k^2 + 4/3k^3 - 4k^2(k-1)c + 4k^3c^2 - 4/3k^3c^3) \sin \varphi}{\sqrt{(1-c)(kc^2 - 2kc + k - 3)(2k^3c^3 - 6k^3c^2 + 6k^2(k-1)c - 2k^3 + 6k^2 - 3)}} d\varphi.$$

Введенные новые функции $F_n(\varphi, k)$ и $E_n(\varphi, k)$ являются обобщением неполных эллиптических интегралов I и II рода, записанных в стандартной форме Лежандра. Особенностью новых функций является наличие в подынтегральном выражении полинома шестой степени в отличие от эллиптических интегралов, имеющих полином четвертой степени. $F_n(0, k) = E_n(0, k) = 0$. Аналогично целесообразно ввести полный эллиптический интеграл:

$$Kn(k) = Fn(\pi/2, k). \quad (26)$$

Для функций (25) будет выполняться свойство периодичности

$$mFn(\pi, k) = Fn(m\pi, k), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Область значений параметра k – модуля интегралов – можно найти, исследовав свойства подынтегрального полинома в (25) и потребовав положительность подкоренного выражения:

$$0 \leq k < 3/4. \quad (27)$$

Свойства введенных функций при $k = 0$:

$$Kn(0) = \sqrt{2}, \quad mFn(\pi, 0) = Fn(m\pi, 0) = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$Fn(\varphi, 0) = \sqrt{2 - 2\cos \varphi}, \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (28)$$

При малых k справедливо разложение:

$$Kn(k) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{30}k + \frac{73\sqrt{2}}{216}k^2 + \dots$$

Значения модуля k , близкие к 0, будут описывать случай малых отклонений от положения равновесия исследуемой системы – линейную задачу. Значения модуля k близкие к предельному значению $3/4$, будут описывать состояния системы с большими деформациями и с сильно нелинейными свойствами.

По аналогии с эллиптическими функциями Якоби, которые являются обращениями эллиптических интегралов, введем обращение (амплитуду) нового интеграла $F_n(\varphi, k)$ как функции верхнего предела φ :

$$u = F_n(\varphi, k), \quad \varphi = Amn(u, k), \quad F_n(Amn(u, k), k) = u. \quad (29)$$

Новая введенная функция $Amn(u, k)$ также будет зависеть от модуля k . Аналогом этой функции является эллиптическая амплитуда Якоби. Графики амплитуды $Amn(u, k)$ при разных значениях модуля k представлены на рис. 3, а). Пунктирной линией на рисунке показана биссектриса прямого угла – линейная функция u .

Введем для удобства также новые функции – синус и косинус амплитуды: $\sin(Amn(u, k))$ и $\cos(Amn(u, k))$, которые будут являться аналогами эллиптических синуса и косинуса Якоби. Графики синуса амплитуды $\sin(Amn(u, k))$ при разных значениях модуля k представлены на рис. 3, б). Из рисунка видно, что при увеличении значения модуля k увеличивается период синуса амплитуды.

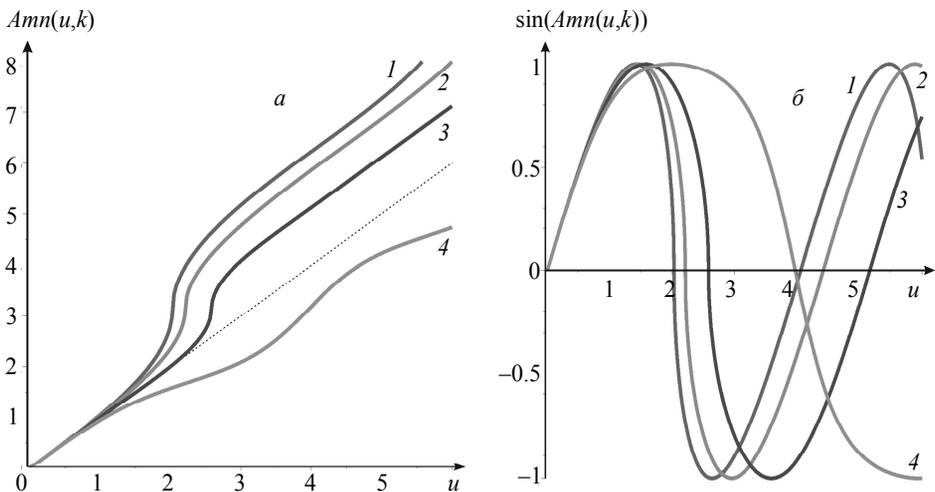


Рис. 3. Специальные функции: $Amn(u, k)$ – аналог эллиптической амплитуды Якоби (а) и $\sin(Amn(u, k))$ – аналог эллиптического синуса Якоби (б) при различных значениях модуля k : 1 – $k = 0,1$; 2 – $k = 0,3$; 3 – $k = 0,5$; 4 – $k = 0,75$. Штриховой линией обозначена линейная функция u

Введенные функции $Amn(u, k)$ и $\sin(Amn(u, k))$ являются неперiodическими мероморфными функциями. Новые специальные функции заданы в виде квадратур – интегралов, которые легко и быстро вычисляются в любом математическом пакете аналитических вычислений с любой наперед заданной точностью. Обра-

шение интегралов – вычисление амплитуды – можно выполнить численным методом арифметико-геометрического среднего. Нули функции $\sin(Amn(u, k))$ задаются с помощью первого интеграла в (25):

$$\sin(Amn(u_n, k)) = 0 \text{ при } u_n = Fn(\pi n, k).$$

Периодом функций $\sin(Amn(u, k))$ и $\cos(Amn(u, k))$ является $Fn(2\pi, k)$. Все вычисления специальных функций выполнены в математическом пакете Maple.

Представление аналитического решения с помощью новых специальных функций

Запишем выражение (24) с помощью новых функций (25)

$$s = \frac{1}{q} Fn(\arccost, k). \tag{30}$$

Обращая выражение (30), получим с помощью (29) обратную зависимость

$$t = \cos(Amn(qs, k)). \tag{31}$$

Возвращаясь к декартовой переменной с помощью замены (19), получим зависимость прогибов пластины от криволинейной координаты

$$\frac{z(s)}{L} = \frac{2k}{q} [1 - \cos(Amn(qs, k))]. \tag{32}$$

Запишем теперь выражение (23) с помощью новых функций

$$\frac{x(s)}{L} = \frac{1}{q} En(\arccost, k) = \frac{1}{q} En(Amn(qs, k), k). \tag{33}$$

Выражения (32) и (33) вместе образуют систему уравнений, описывающих профиль изогнутой пластины в параметрическом виде с параметром – криволинейная координата s :

$$\begin{cases} \frac{x(s)}{L} = \frac{1}{q} En(Amn(qs, k), k), \\ \frac{z(s)}{L} = \frac{2k}{q} [1 - \cos(Amn(qs, k))]. \end{cases} \tag{34}$$

По своей структуре система (34) совпадает с параметрической системой уравнений, описывающих формы изгиба стержня с обоими защемленными концами при действии продольного сжатия [4]. Только в нашем случае использованы новые специальные функции вместо эллиптических функций Якоби. Выполняется полная аналогия между функциями $Amn(u, k) \leftrightarrow Am(u, k)$.

Система ветвей решения и определение порогов

Теперь, для того чтобы определить форму изогнутой пластины с помощью системы (34), нужно найти модуль k , используя второе краевое условие (14). Применим его к уравнению (20) – в точке $l = L$ прогиб $z_1 = 0$, параметр t , по определению (19), автоматически равен $t = 1$ и $\theta = 0$. Следовательно уравнение (20) тождественно удовлетворяет второму краевому условию. Применим это условие к

выражению (31) в точке $l = L$: $1 = \cos(Ann(q, k))$ при $s = 1$. По свойству периодичности функции $\cos(Ann(u, k))$:

$$q_n(k) = nFn(2\pi, k), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Здесь n – номер моды (ветви) решения. Выражение (35) задает в неявном виде соотношение между параметром внешнего поля и модулем k . На первой основной моде пластина не будет иметь точек перегиба. Это соотношение для первой моды показано на рис. 4. Значение $k = 0$ соответствует прямолинейному состоянию пластины, когда $z = 0$. Из (34) с помощью свойства новых функций (28) найдем пороговые значения параметра:

$$q_n(0) = nFn(2\pi, 0) = 4n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

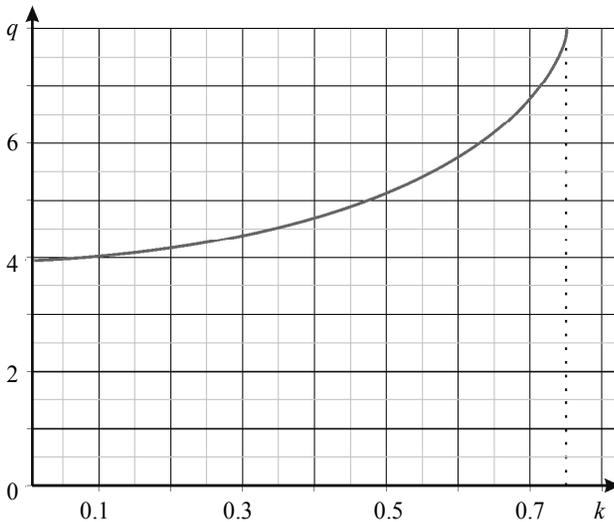


Рис. 4. Соотношение между параметром внешнего магнитного поля q и модулем k (35)

Соответственно найдем из (17) критическое значение внешнего магнитного поля

$$H_n^{\text{cr}} = \sqrt{\frac{q_n^3(0)EI_z}{\mu_0(1+\chi)\chi hL^3}}, \quad q_n(0) = 4n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Для частного случая квадратной пластины ($L = b$, $I_z = bh^3/12$) первое пороговое значение напряженности магнитного поля

$$H_1^{\text{cr}} = \frac{h}{L} \sqrt{\frac{16E}{3\mu_0(1+\chi)\chi}} \quad (37)$$

Таким образом, пластина остается плоской при помещении в магнитное поле до тех пор, пока поле не превысит критическую величину (36). При превышении критического поля пластина выпучивается, причем направление выпучивания (по полю или против) вырождено. Рассмотренная магнитомеханическая задача аналогична задаче Эйлера о потере устойчивости стержня при продольном нагружении.

Формы профиля деформированной пластины

Определим величины прогиба центральной точки пластины z_0 и перемещения ее правого края $x(L)/L$. В центре пластины при $s = 1/2$ будем иметь $q_m = mFn(\pi, k)$, $m = 1, 3, 5$, и логичное условие $\theta(1/2) = 0$ – следующее из симметрии задачи, которое тоже автоматически выполняется. Это позволяет найти выражение для стрелы прогиба пластины (в ее центре) для первой моды $z_0(q)$ в параметрическом виде:

$$\frac{z_0(k)}{L} = \frac{2k}{Fn(\pi, k)}, \quad q(k) = Fn(2\pi, k). \quad (38)$$

Зависимость (38) для первой моды приведена на рис. 5 в безразмерном виде и для заданных абсолютных значений параметров квадратной пластины и поля. Из рисунка и выражения (37) видно, что величина критического поля уменьшается при увеличении размера пластины при фиксированной толщине.

Найдем перемещение правого края пластины $x(L)/L$ для первой моды в параметрическом виде с помощью выражений (33) и (35) при $s = 1$:

$$\frac{x(L)}{L} = \frac{En(2\pi, k)}{Fn(2\pi, k)}, \quad q(k) = Fn(2\pi, k). \quad (39)$$

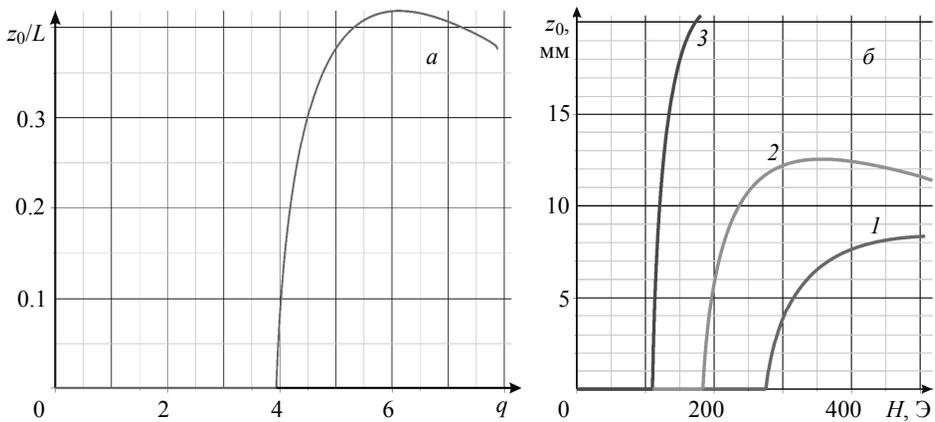


Рис. 5. Безразмерная стрела прогиба пластины из ферроэласти в магнитном поле в зависимости от безразмерного параметра q , определяемого величиной внешнего магнитного поля (а). Стрела прогиба квадратной пластины ($L = b$) в зависимости от величины напряженности магнитного поля (СГС) при ее толщине $h = 2$ мм, восприимчивости материала $\chi = 1$, модуле Юнга $E = 25$ кПа и трех разных размерах: кр. 1 – $L = 20$ мм, $H^{cr} \approx 275$ Э; кр. 2 – $L = 30$ мм, $H^{cr} \approx 184$ Э; кр. 3 – $L = 50$ мм, $H^{cr} \approx 110$ Э (б)

Формы профиля изогнутой пластины для первой моды можно построить в параметрическом виде с помощью системы уравнений (34) и (35):

$$\begin{cases} \frac{x(s)}{L} = \frac{En(Amn(Fn(2\pi, k)s, k), k)}{Fn(2\pi, k)}, \\ \frac{z(s)}{L} = \frac{2k}{Fn(2\pi, k)} [1 - \cos(Amn(Fn(2\pi, k)s, k))]. \end{cases} \quad (40)$$

Формы профиля, построенные в соответствии с системой (40) приведены на рис. 6 для различных значений модуля k . Связь модуля k с величиной внешнего поля можно определить с помощью выражений (35) и (17).

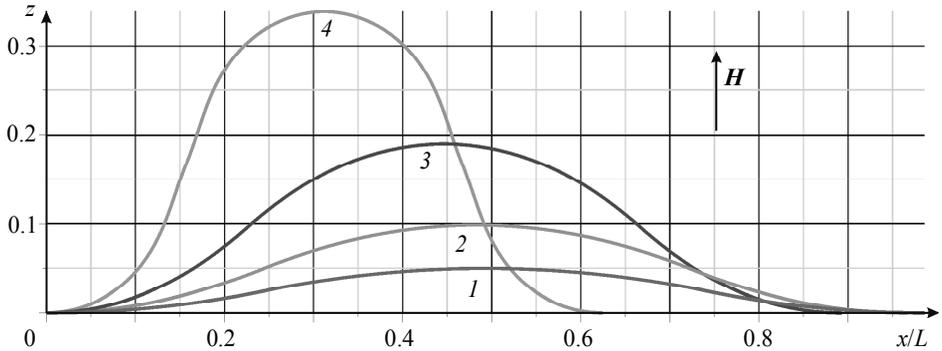


Рис. 6. Формы профиля изогнутой пластины из ферроэласта при различных значениях внешнего магнитного поля (40), соответствующих следующим значениям модуля k : кр. 1 – 0,05; кр. 2 – 0,1; кр. 3 – 0,2; кр. 4 – 0,4

В работах [1, 2] приведен ряд экспериментальных результатов по исследованию деформирования круговой пластины из ферроэласта в поперечном магнитном поле. На рис. 5, б приведены полученные автором аналитические результаты для квадратной пластины со сторонами, равными диаметру круговой пластины, и с такими же упругими и магнитными параметрами материала, как в работах [1, 2]. Имеется полное качественно и близкое количественное соответствие по пороговому значению магнитного поля. При этом надо учитывать, что величина Эйлера классического порога для квадратной пластины меньше примерно в полтора раза, чем у соответствующей круговой пластины при продольном обжатии. Проведем подобную оценку. Величина Эйлера порогового значения продольной нагрузки для квадратной пластины со стороной L :

$$P_{\text{КВ}} = \pi^2 \frac{4EI}{hL^2} = \pi^2 \frac{Eh^2}{3L^2}.$$

Величина Эйлера порогового значения продольной нагрузки для круговой пластины с диаметром d

$$P_{\text{КР}} = \tau^2 \frac{4D}{hd^2} = \tau^2 \frac{Eh^2}{3(1-\mu^2)d^2}, \quad \tau \approx 3,83.$$

Отношение пороговых значений для круглой и квадратной пластинок при $L = d$ и $\mu = 0,25$:

$$\frac{P_{\text{КР}}}{P_{\text{КВ}}} \approx 1,6.$$

Выводы

Исследована и промоделирована смешанная магнитоупругая задача о выпучивании тонкой прямоугольной пластины из ферроэласти под действием однородного поперечного магнитного поля в геометрически-нелинейной постановке. Построено аналитическое решение задачи в квадратурах, в параметрическом виде путем введения специальных функций, обобщающих эллиптические интегралы. Во введенной интегральной функции в подинтегральном выражении под знаком корня стоит полином шестой степени, в отличие от обычного эллиптического интеграла.

Продемонстрированы возможности нового метода и математического аппарата введения новых специальных функций, являющихся базовыми для исследуемой задачи и являющихся некоторым обобщением эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби.

С помощью введенных функций записано аналитическое решение нелинейной краевой задачи, найдены многозначные ветви (моды) решения, описывающие формы выпучивания пластины в зависимости от величины внешнего магнитного поля. Показан пороговый эффект и определены критические (в смысле устойчивости по Эйлеру) значения напряженности внешнего магнитного поля.

Полученное приближенное аналитическое решение по сравнению с численными (МКЭ) имеют погрешность не более 5 % вплоть до прогибов центральной точки оболочки. Полученное аналитическое решение задачи в квадратурах имеет качественное и количественное совпадение (10 %) с имеющимися экспериментальными данными (Степанов Г.В., ГНИИ ХТЭОС, г. Москва) и численным решением (Ю.Л. Райхер, ИМСС УрО РАН).

Полученные результаты могут быть распространены на случай других условий закрепления. Полученное аналитическое решение позволяет легко проводить в математических пакетах расчет и визуализацию форм выпучивания пластины и использовать его для тестирования и отработки численных методов решения нелинейных краевых задач магнитоупругости тонких пластин и других проблем механики деформируемого твердого тела.

Данная в работе формулировка уравнений позволяет ставить и решать существенно нелинейные задачи для изотропных пластин и при иных нагрузках и граничных условиях.

Гибкие пластины из ферроэласти могут быть использованы в качестве чувствительных элементов в датчиках и других перспективных микро-электромеханических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.И., Горбунов А.И., Крамаренко Е.Ю., Левина Е.Ф., Райхер Ю.Л., Степанов Г.В., Столбов О.В. Деформация плоской мембраны из ферроэласти, закрепленной по ободу, в однородном магнитном поле // Зимняя школа по механике сплошных сред. 2007. Ч. 1. С. 31–34.
2. Столбов О.В. Моделирование магнитодеформационного эффекта в ферроэластах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, ИМСС УрО РАН, 2007. 18 с.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.

Статья поступила 09.02.2016 г.

Okhotkin K. G. SIMULATION OF THE NONLINEAR MAGNETIC STRAIN EFFECT FOR A FLEXIBLE FERROELASTIC PLATE IN A UNIFORM MAGNETIC FIELD

DOI 10.17223/19988621/40/9

We studied the problem of magnetoelastic buckling of thin flexible rectangular ferroelastic plates under the action of a uniform transverse magnetic field in the geometrically nonlinear statement. A ferroelastic material is a magnetical material capable of large deformations controlled by an external magnetic field. Ferroelastic plates can act as sensitive elements of sensors in microelectromechanical systems (MEMSs). Designing these devices requires understanding the mechanical behavior of these systems in an external magnetic field.

Possibilities of the new method of introducing new special functions which are basic for studying the problem and generalize elliptic integrals and Jacobi elliptic functions are demonstrated.

Using the introduced functions, an analytical solution of the nonlinear boundary value problem has been written and multi-valued solution branches (modes) describing the shape of the plate buckling depending on the external magnetic field have been found. The threshold effect is shown and critical values of the external magnetic field strength are determined (in the sense of Euler stability).

The obtained analytical solution allows one to visualize forms of plate buckling and to estimate the magnitude of plate deflection depending on the magnitude of the external field and its geometrical and physical parameters. The presented results make it possible to simulate magnetoelastic systems used in various micromechanical devices and sensors in the case requiring an exact consideration of the geometric nonlinearity.

Keywords: Ferroelastic material, geometric nonlinearity, magnetic strain effect, special functions.

OKHOTKIN Kirill Germanovich (Candidate of Physics and Mathematics, JSC «Academician M.F. Reshetnev «Information Satellite Systems»)
E-mail: okg2000@mail.ru

REFERENCES

1. Alekseeva E.I., Gorbunov A.I., Kramarenko E.Yu., Levina E.F., Raykher Yu.L., Stepanov G.V., Stolbov O.V. (2007) Deformatsiya ploskoy membrany iz ferroelasta, zakreplennoy po obodu, v odnorodnom magnitnom pole [Deformation of a flat ferroelast membrane fixed over the rim in a uniform magnetic field]. In: *Zimnyaya shkola po mekhanike sploshnykh sred* [Winter School on Continuum Mechanics]. Pt 1. pp. 31–34.
2. Stolbov O.V. (2007) *Modelirovanie magnitodeformatsionnogo effekta v ferroelastakh* [Simulation of the magnetic strain effect in ferroelasts]. Abstract of Physics Cand. Diss. Perm: ICMM UB RAS.
3. Ambartsumyan S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V. (1977) *Magnitoprugost' tonkikh obolochek i plastin* [Magnetoelasticity of thin shells and plates]. Moscow: Nauka.
4. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G. (2002) Nonlinear bending of thin elastic rods. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 43(5). pp. 739–744.