

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2016

№ 3(41)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменичкин, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С. Раскрой сетеполотна для офсетного рефлектора.....	5
Малютина А.Н., Алипова К.А. К вопросу о граничных свойствах пространственных негомеоморфных отображений с s -усредненной характеристикой	16
Тагиев Р.К., Гашимов С.А., Габиров В.М. Об одной задаче оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием и с управлениями в коэффициентах.....	31
Чехлов А.Р. Вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп конечного ранга и их соизмеримость.....	42

МЕХАНИКА

Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потеряева В.А., Либин Э.Е. Волновая проницаемость слоя компактированных наночастиц	51
Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Усенко О.В., Тарасов Е.А. Режимы взаимодействия низкоэнергетических молекул с открытой нанотрубкой	58
Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Горение угле-метановоздушной смеси в горелке с рекуперацией тепла	65
Матвиенко О.В., Андриасян А.В., Мамадраимова Н.А., Андропова А.О. Исследование движения частицы в форме вытянутого эллипсоида вращения в закрученном потоке	74
Цыденов Б.О. Численное воспроизведение гидробиологических процессов в период развития весеннего термобара на основе модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон».....	86
Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. Задача о нагнетании холодного газа в пласт, насыщенный снегом и газом, сопровождаемом гидратообразованием	98
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	107

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S. Metallic mesh tailoring for an offset reflector	5
Malyutina A.N., Alipova K.A. On boundary properties of spatial non-homeomorphic mappings with an s -averaged characteristic	16
Tagiyev R.K., Gashimov S.A., Gabibov V.M. On an optimal control problem for a parabolic equation with an integral condition and controls in coefficients	31
Chekhlov A.R. Fully inert subgroups of completely decomposable finite rank groups and their commensurability	42

MECHANICS

Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Poteryaeva V. A., Libin E. E. The wave permeability of a compacted nanoparticle layer	51
Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Tarasov E.A. Modes of interaction between low-energy molecules and open nanotube	58
Krainov A. Yu., Moiseeva K. M. Combustion of the coal-methane-air mixture in the heat recovery burner	65
Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. Investigation of the prolate ellipsoidal particle motion in a swirling flow	74
Tsydenov B. O. Numerical simulation of hydrobiological processes during the spring thermal bar on the basis of the “nutrient – phytoplankton – zooplankton” model	86
Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. The problem of cold gas injection into the reservoir saturated with snow and gas, accompanied by hydrate formation process	98
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	107

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/41/1

М.С. Бухтяк

РАСКРОЙ СЕТЕПОЛОТНА ДЛЯ ОФСЕТНОГО РЕФЛЕКТОРА

Класс линий на параболоиде, введенный ранее автором по названием SG-линий, применен при раскрое сетеполотна для офсетного рефлектора. Рассмотрены два случая взаимного расположения осей родительского параболоида и вырезающего круглого цилиндра (оси либо параллельны, либо нет).

Ключевые слова: *параболоид, SG-линия, офсетный рефлектор.*

Антенны «раннего космического периода» своей конструкцией напоминали зонтик (и сходным образом раскрывались).

К легкому и прочному силовому каркасу (его стержни закреплены в ступице) крепятся сети из углепластиковых нитей (тыльная и фронтальная). Между ними зажат лист особой трикотажной ткани, сотканной из металлических нитей (обычно молибденовых или вольфрамовых). Эта ткань (довольно эластичная) называется «сетеполотно», она и является отражающей поверхностью.

В идеале (недостижимом) форма указанной поверхности – в точности форма куска параболоида вращения. Параболоид как математический объект (его называют «родительский параболоид») имеет бесконечную протяженность. Рефлектор же рассматривается как вырезка из родительского параболоида. Зонтичный рефлектор получается при отсечении от родительского параболоида плоскостью, ортогональной оси параболоида.

Антенны зонтичного типа имеют недостаток, который при малых размерах несуществен, однако при значительном диаметре не может быть сброшен со счетов. Спутник, несущий такую антенну, должен иметь в своей конструкции две длинные штанги: одна фиксирует положение ступицы, а на конце другой расположено принимающее (либо передающее) устройство.

Этого недостатка лишен так называемый офсетный рефлектор: плоскость, отсекающая его от родительского параболоида наклонена относительно оси симметрии параболоида. При таком подходе удастся разместить необходимые конструкции более компактно, а значит, более надежно. Антенна может состоять из нескольких секций. На рис. 1 показан рефлектор, составленный из двух секций.

Соотношение родительского параболоида и офсетного рефлектора хорошо видно на рис. 2, заимствованном из докторской диссертации одного из авторитетнейших специалистов в области космической радиосвязи Гуннара Тиберта [1].

Для параболической антенны рефлекторного типа актуальна задача прикрепления отражающего сетеполотна таким образом, чтобы как можно менее страдали радиофизические характеристики устройства. Ясно, что при различных избранных схемах раскроя указанная задача решается (всегда приближенно) разными способами.

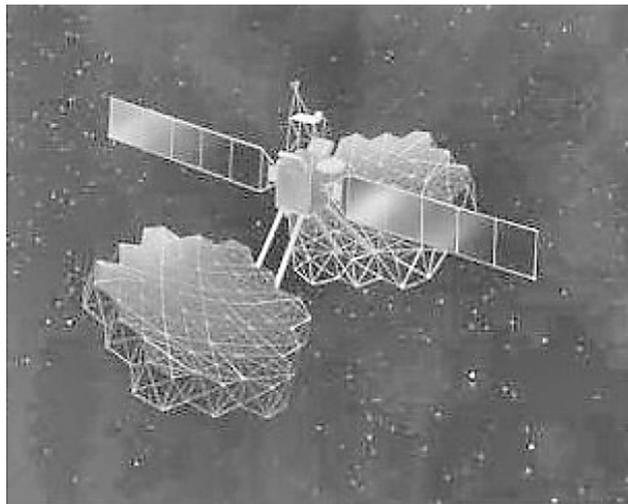


Рис. 1. Спутник с офсетным рефлектором из двух секций
Fig. 1. Satellite with offset reflector composed of two sections

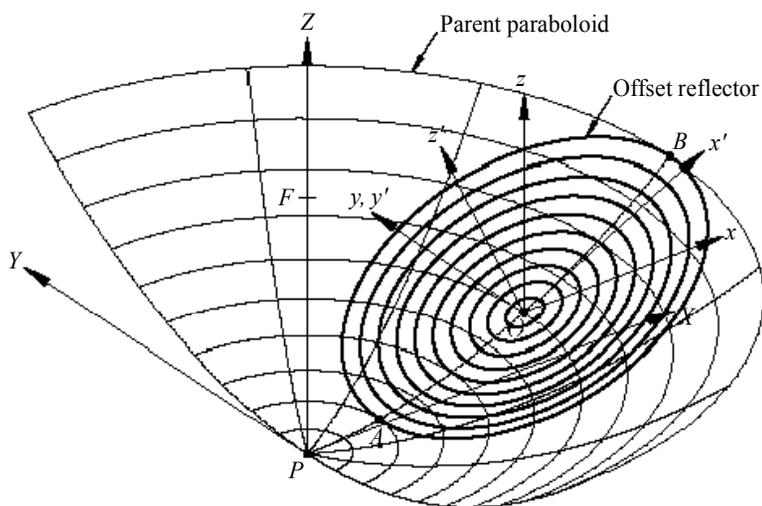


Рис. 2. Офсетный рефлектор и адаптированная к нему система координат
Fig. 2. Offset reflector and coordinate system adapted to it

1. Постановка задачи

В конструкторской практике слово «раскрой» (на наш взгляд) должно означать и «выкройку» листа сетеполотна и некоторый способ прикрепления его к несущим конструкциям, имея в виду, как правило, уменьшение среднего квадратичного отклонения (СКО) реальной поверхности рефлектора от идеальной поверхности родительского параболоида. Технологические приемы достижения желаемого результата можно проследить в работах [2–5].

В своей диссертации И.В. Рытикова [4] касается путей, ведущих к получению приемлемой объемной формы изделия. Среди прочего упомянуто и использование упрощенного геометрического контура плоской детали, что облегчает технологические операции раскроя и пошива. Правда, использование плоской детали ведет к неравномерности натяжения сетеполотна в разных частях рефлектора [6, 7]. Неслучайно там же [4] большое внимание уделено членению конструкции на детали и иные приемы (вытачки, складки, рельефы).

Есть основания признать правоту Ирины Валерьевны в её предпочтениях. Мы, в то же время, намереваемся показать, что при сравнительно малой кривизне поверхности (что характерно для офсетных рефлекторов) способ раскроя, основанный на одном лишь членении конструкции и обходящийся без вытачек, складок и рельефов, способен приводить (на наш взгляд, но квалифицированное суждение за практиками) к приемлемым результатам.

Подход к раскрою, предложенный в данной статье, опирается на использование SG-линий [8]. Алгоритм, реализующий схему раскроя, опубликован в [9].

Стоит напомнить, что SG-линии появились как решение (неформальной) задачи [10] об отыскании класса линий на параболоиде вращения, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Локально они должны быть близки к геодезическим линиям в некотором разумном смысле.

2. Их можно отнести к натуральному параметру без заметных вычислительных проблем.

3. Они должны однозначно определяться своими концевыми точками, указанными на параболоиде.

Разумеется, может быть предложено (возможно) необозримое множество решений. Автор считает, что решение, предложенное им в [8], заслуживает внимания и применения (там же, в [8], приведены доводы в пользу такого суждения).

2. Параллельность осей

Отметим, что обычно офсетный рефлектор вырезается из родительского параболоида круглым цилиндром, ось которого параллельна оси родительского параболоида (рис. 3).

Числовые параметры, характеризующие офсетный рефлектор в данном случае, следующие:

F – фокальный параметр параболоида;

R – радиус вырезающего цилиндра;

K – расстояние оси параболоида до ближайшей точки офсетного рефлектора.

Рассекая рис. 3 плоскостью, проходящей через оси симметрии параболоида и вырезающего цилиндра, приходим к схеме, изображенной на рис. 4. Прямые a и b – следы цилиндра на пересекающей плоскости. Точка C – середина хорды $[AB]$, стягивающей концы куска $[APB]$ параболы, $c = [PC]$. Смысл параметра x_0 ясен из рисунка.

Для рассмотрения конкретных примеров использованы следующие значения (в метрах):

$$F=13, R=12, K=1.8.$$

Числовые параметры, характеризующие офсетный рефлектор, объяснены на рис. 4.

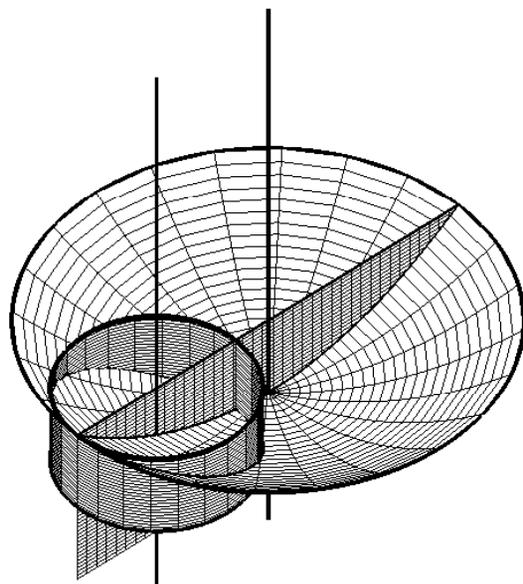


Рис. 3. Схема офсетного рефлектора при параллельных осях
Fig. 3. Offset reflector diagram with parallel axes

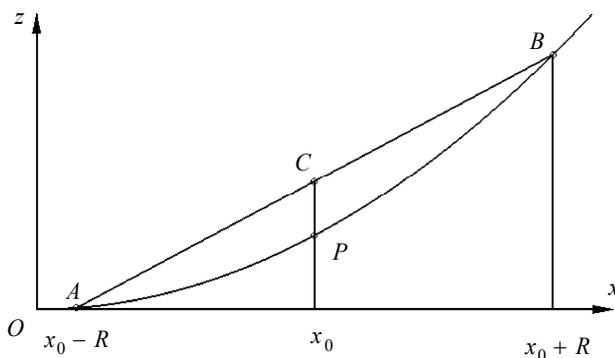


Рис. 4. Сечение офсетного рефлектора при параллельных осях
Fig. 4. Offset reflector cross section with parallel axes

Сетеполотно выпускается полосами различной ширины (в среднем около 2 м). Это позволяет покрывать поверхность рефлектора полосами – правда, переменной ширины. Принцип такого подхода объяснен на следующем рис. 5.

Полоса – криволинейный четырехугольник $A_i A_6 B_6 B_i$, в котором на длинных сторонах через равные расстояния, отмеренные на кривых, отмечены точки A_i и B_i . Криволинейные отрезки $[A_i B_i]$ имеют, вообще говоря, разную длину.

Линии, которые мы будем проводить на параболоиде, суть SG-линии, определенные в [8]. Длины отрезков на плоской выкройке суть длины указанных SG-линий (рис. 6).

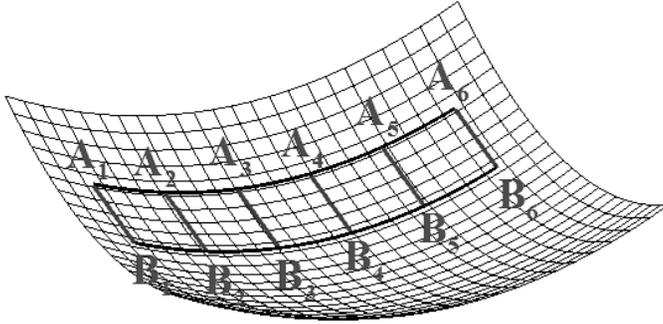


Рис. 5. Схематическое изображение полосы сетеполотна на рефлекторе
Fig. 5. Schematic drawing of a metallic mesh strip on the reflector

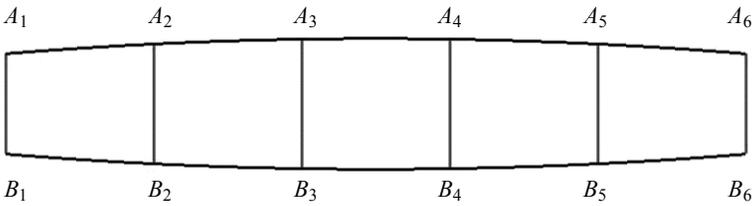


Рис. 6. Раскрой офсетного рефлектора полосами сетеполотна, идущими вдоль главного осевого сечения
Fig. 6. Offset reflector tailoring into metallic mesh stripes running along the main axial section

В основу раскрой положена схема, приведенная на рис. 7.

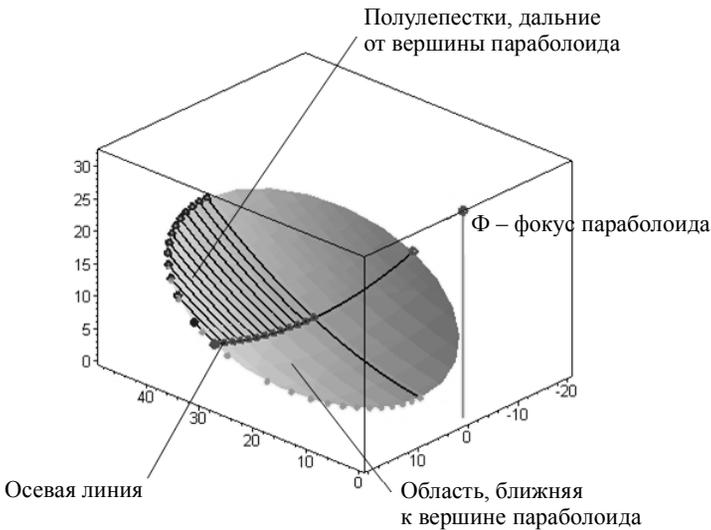


Рис. 7. Схема раскрой офсетного рефлектора
Fig. 7. Offset reflector tailoring diagram

Схема описания лепестка приведена на рис. 8.

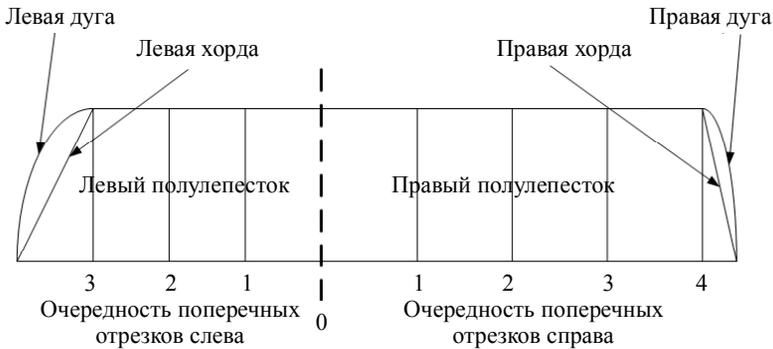


Рис. 8. Лепесток и его элементы

Fig. 8. Petal and its elements

Самый длинный лепесток (его номер 1) приведен на рис. 9.

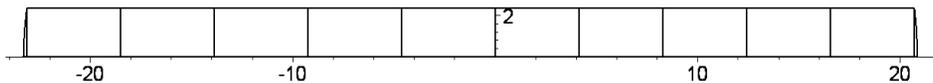


Рис. 9. Лепесток 1

Fig. 9. Petal 1

Числовые параметры первого лепестка таковы:

Длина лепестка 44159.95 мм

Длина ближнего (правого) полулепестка 20838.43 мм

Хорда ближнего (правого) полулепестка 2383.76 мм

Дуга ближнего (правого) полулепестка 2385.06 мм

Площадь ближнего (правого) полулепестка 49.499 м²

Длина дальнего (левого) полулепестка 23311.52 мм

Хорда дальнего (левого) полулепестка 2386.06 мм

Дуга дальнего (левого) полулепестка 2387.11 мм

Площадь ближнего (левого) полулепестка 55.315 м²

Длины поперечных отрезков лепестка № 1

Ближний (правый) полулепесток		Дальний(левый) полулепесток	
Расстояние от средней линии лепестка, мм	Длина отрезка, мм	Расстояние от средней линии лепестка, мм	Длина отрезка, мм
0	2380.00	0	2380.00
4141.02	2379.98	4626.80	2379.98
8282.04	2379.91	9253.60	2379.91
12423.06	2379.80	13880.40	2379.80
16564.09	2379.65	18507.20	2379.65
20705.11	2379.46	23134.00	2379.46

Наконец, располагая числовыми параметрами всех лепестков, представляем на рис. 10 в собранном виде одну из двух зеркально симметричных половин рефлектора.

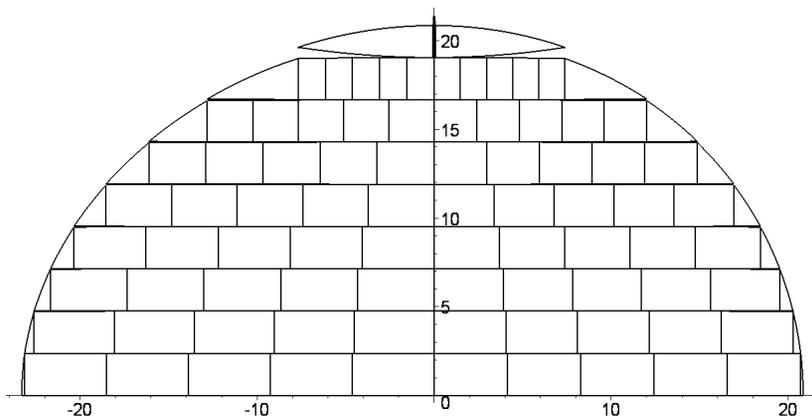


Рис. 10. Лепестки в сборе
Fig 10. Assembled petals

Числовые параметры выкройки половины рефлектора таковы:
 Истинная площадь рефлектора 1397.27 м^2
 Площадь выкройки 1402.375 м^2
 Относительное расхождение площадей в процентах 0.3653%
 Истинная длина граничного эллипса 131.476 м
 Периметр выкройки 131.574 м
 Относительное расхождение периметров в процентах 0.0745%

3. Непараллельность осей

В этом случае ось вырезающего цилиндра не параллельна оси параболоида. Расположение поверхностей, дающих в пересечении границу офсетного параболоида, показано на рис. 11.

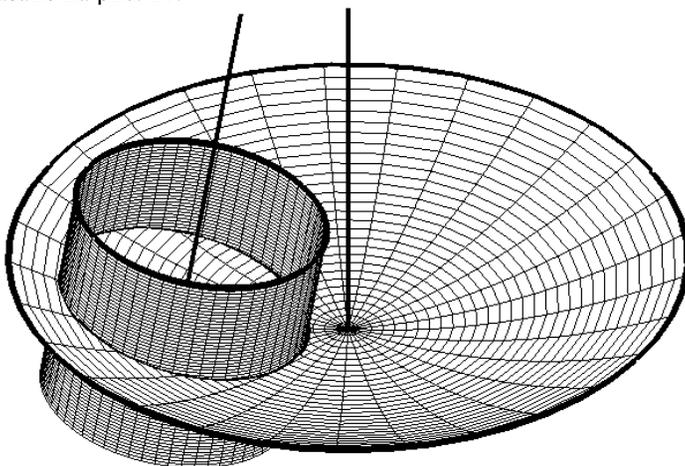


Рис 11. Офсетный рефлектор, вырезанный наклонным цилиндром
Fig 11. Offset reflector cut out by an inclined cylinder

Линия пересечения параболоида и цилиндра – существенно пространственная кривая¹. Проекция этой линии на плоскость xOy – алгебраическая кривая L , заданная уравнением

$$(1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4) \begin{pmatrix} (x_0^2 - R^2)((x_0^2 + 8F^2)^2 - R^2x_0^2) & 64F^4 - 2x_0^4 - 2R^2x_0^2 & x_0^2 \\ -16F^2x_0(x_0^2 + 8F^2 + R^2) & 16F^2x_0 & 0 \\ 64F^4 - 16F^2x_0^2 - 2x_0^2R^2 - 2x_0^4 & 2x_0^2 & 0 \\ 16F^2x_0 & 0 & 0 \\ x_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 \\ y^4 \end{pmatrix} = 0.$$

Эта кривая аппроксимируется эллипсом (рис. 12)

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{4F^2x_0^2y^2}{(8F^3 - \sqrt{64F^6 + 32F^4x_0^2 - R^2x_0^4 + 4F^2x_0^4})^2} = 1,$$

ограничивающим площадь, равную

$$\frac{\pi R \left(\sqrt{64F^6 + 32F^4x_0^2 - R^2x_0^4 + 4F^2x_0^4} - 8F^3 \right)}{2Fx_0}.$$

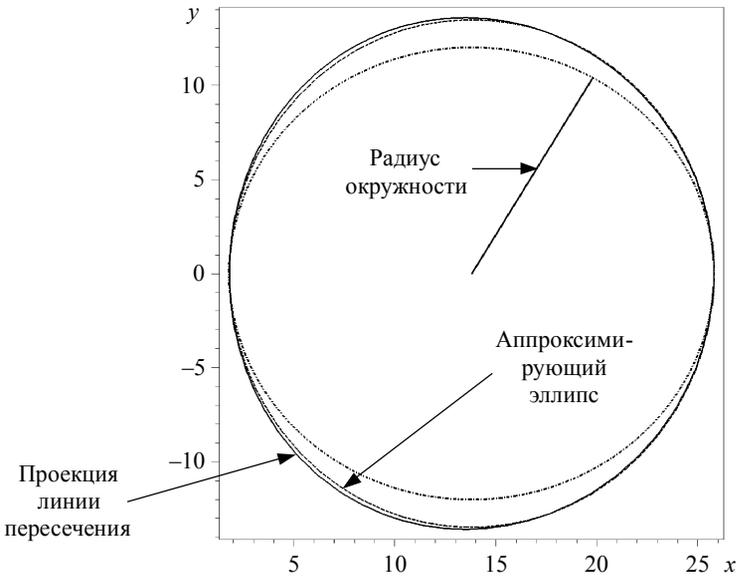


Рис. 12. Проекция линии пересечения на плоскость XOY
Fig. 12. Projection of the intersection line onto the XOY plane

Вырезая офсетный рефлектор цилиндром, ось которого параллельна оси параболоида, мы получили бы в плоскости XOY окружность радиуса R . Выигрыш в

¹ Не помещается в двумерной плоскости.

площади при использовании непараллельных осей аппроксимируется выражением

$$\Delta S \approx \frac{4Fk}{R} - 1 - \frac{4F}{R} + \frac{100F^2 - R^2 - 60F^2k - R^2k}{2R\sqrt{100F^2 - R^2}}. \quad (3.1)$$

Здесь $k = \frac{x_0}{F} - 1$. Оценим надежность аппроксимации, построив графики (рис. 13)

относительной погрешности при различных значениях параметра k , полагая

$$10 \leq F \leq 20, \quad 0.8F \leq R \leq 0.94F.$$

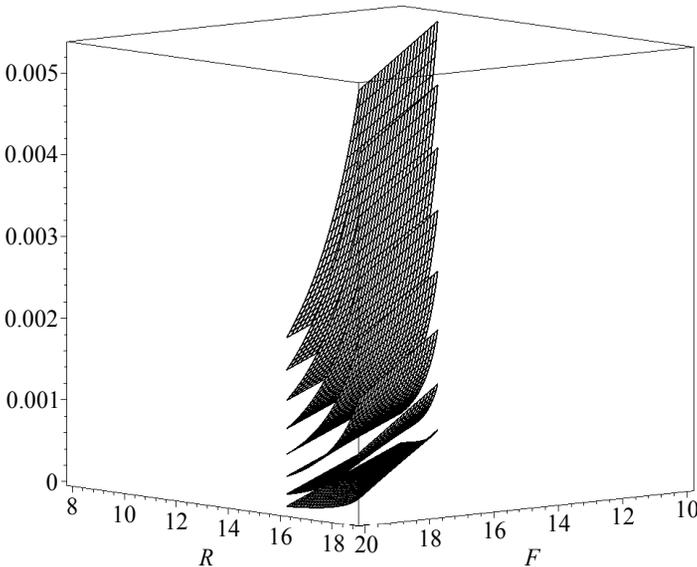


Рис. 13. Относительная погрешность аппроксимации для $k \in \{0.02, 0.04, \dots, 0.16\}$ (очередность снизу вверх)

Fig. 13. Relative approximation error for $k \in \{0.02, 0.04, \dots, 0.16\}$ (bottom-upwards ordering)

Отметим, что отличие значений F и R невелико, а при $R = F$ формула (3.1) принимает весьма простой вид:

$$\Delta S \approx 0.935k - 0.0251.$$

4. Выводы

Автор полагает, что способ выкраивания сетеполотна для офсетного рефлектора, предложенный в данной статье, опирается на методы математики, приводит к приемлемым результатам на уровне численного моделирования, и потому заслуживает внимания как в теоретическом плане, так и в практическом применении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gunnar Tibert*. Deployable Tensegrity Structures for Space Application. Doctoral Thesis. Stockholm, 2002. 220 p.
2. Патент RU 2350518 C1, 13.06.2007.
3. Патент RU 2350519 C1, 13.06.2007.
4. *Рытикова И.В.* Разработка технологии формирования сложноконструктивных изделий из металлических трикотажных полотен технического назначения: дис. ... канд. технич. наук. М.: Моск. гос. текстильный университет, 2005.
5. *Бутов В.Г., Бухтяк М.С., Пономарев С.В.* Методика оптимального раскроя отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов // *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: доклады IV Всеросс. научн. конф. Томск, 5–7 октября 2005 г.* Томск: Изд-во ТГУ, 2004. С. 180–181.
6. *Бухтяк М.С., Самылкина О.А.* О раскрое сетеполотна для осесимметричного рефлектора // *Всероссийская конференция по математике и механике: тезисы докладов. 2–4 октября 2013 г.* – Томск: ТГУ, 2013. – С. 93.
7. *Бухтяк М.С., Соломина А.В.* Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34).* С. 5–17.
8. *Бухтяк М.С.* Линии на параболоиде, близкие к геодезическим // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38).* С. 5–17.
9. *Бухтяк М.С., Пономарев С.В.* Алгоритм раскроя сетеполотна офсетного параболического рефлектора. *Федеральный институт промышленной собственности. Заявка № 69 № 2015э14446.*
10. *Бухтяк М.С.* Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37).* С. 5–19.

Статья поступила 27.02.2016 г.

Bukhtyak M.S. (2016) METALLIC MESH TAILORING FOR AN OFFSET REFLECTOR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/41/1

The term ‘tailoring’ means not only ‘cutting’ of a metallic mesh but also the method of its attachment to the supporting structures, which generally means a decrease in root-mean-square deviation (RMSD) of the reflector’s real surface from the ideal surface of the parent paraboloid. The approach of tailoring offered in this paper is based on application of SG-lines. SG-lines showed up as a solution of a (non-formal) problem to find a class of lines lying on a paraboloid of revolution and satisfying the following conditions. Locally, they should be close to geodesic lines in some reasonable sense. They can be referred to the natural parameter without significant computational problems. They should be uniquely determined by its endpoints defined on the paraboloid. These lines are used for metallic mesh tailoring for an offset reflector. An algorithm the input values of which are the design parameters of the reflector and metallic mesh has been composed. The algorithm returns a set of petals with dimensions required for tailoring. The case in which the axis of the parent paraboloid is parallel to that of the cutting cylinder is considered, as well as the case of nonparallel axes. The computational experiment carried out for specific conditions shows an error in area of 0.3653%, and the error in perimeter is of 0.0745%.

Keywords: paraboloid, honeycomb panel, covering, inner energy, minimization.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyak@mail.ru

REFERENCES

1. Gunnar Tibert (2002) *Deployable Tensegrity Structures for Space Application*. Doctoral Thesis. Stockholm.
2. Pat. RU 2350518 C1, 13.06.2007.
3. Pat. RU 2350519 C1, 13.06.2007.
4. Rytikova I.V. (2005) *Razrabotka tekhnologii formirovaniya slozhnokonstruktivnykh izdeliy iz metallicheskikh trikotazhnykh poloten tekhnicheskogo naznacheniya* [Development of technology for the formation of complex construction products from metal industrial-use fabrics]: Abstract of Technical Cand. Diss. Moscow.
5. Butov V.G., Bukhtyak M.S., Ponomarev S.V.(2005) *Metodika optimal'nogo raskroya otrazhayushchey poverkhnosti transformiruemyykh reflektorov* [Technique of optimum tailoring of the reflecting surface of transformable reflectors]. In: *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki* [Fundamental and applied problems of present-day mechanics]. Proc. of the International Conference. Tomsk: TGU Publ. pp.180–181.
6. Bukhtyak M.S., Samylkina O.A. (2013) O raskroe setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora [On tailoring of a metallic mesh for a axisymmetric reflector]. In: *Vserossiyskaya konferentsiya po matematike i mekhanike* [All-Russia conference on mathematics and mechanics]. Thes. dokl. Tomsk: TGU Publ. p. 93.
7. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI 10.17223/19988621/34/1.
8. Bukhtyak M.S.(2015) Linii na paraboloidе, blizkie k geodezicheskim.[Lines close to geodetic lines on a paraboloid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp.5-17. DOI 10.17223/19988621/38/1.
9. Bukhtyak M.S., Ponomarev S.V. *Algoritm raskroya setepolotna ofsetnogo parabolicheskogo reflektora* [Algorithm of tailoring the metallic mesh of an offset parabolic reflector]. Federal'nyy institut promyshlennoy sobstvennosti [Federal Institute of Industrial Property]. Application no. 69 №2015e14446.
10. Bukhtyak M.S. (2015) Normal'naya kongruentsiya paraboloida. Demikvadriki. [Normal congruence of a paraboloid. Demiquadrics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 5–19. DOI 10.17223/19988621/37/1.

УДК 517.518.26
DOI 10.17223/19988621/41/2

А.Н. Малюткина, К.А. Алипова

К ВОПРОСУ О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С s -УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Представлено дальнейшее развитие геометрического метода модулей семейств кривых для изучения свойств негомеоморфных пространственных отображений – отображений с s -усредненной характеристикой. Обобщается теорема, известная для случая $n = 2$ как Iversen – Tsuji's Theorem и доказываются характеристические свойства для сферического модуля семейств кривых, асимптотических для некоторого особого граничного множества.

Ключевые слова: отображения с s -усредненной характеристикой, метод модулей, устранение особенностей, оценки искажения, асимптотические поднятия.

Теорема Иверсена – Цудзи доказана для случая $n = 2$ в [1]. Для $n \geq 3$ в [2] дано ее обобщение для квазирегулярных отображений на случай, когда для особого множества I выполняется равенство $\text{Cap } I = 0$. В работе [3] М.А. Лаврентьев высказал несколько утверждений, касающихся специфики пространственного случая. Одно из них – о стирании особенностей меньшей размерности при квазиконформном отображении шара. К настоящему времени этот вопрос для гомеоморфных квазиконформных отображений в работах Ю.Г. Решетняка, В.А. Зорича, Б.В. Шабата, В.М. Миклюкова, J. Väisälä, O. Martio, S. Rickman исследован, когда f – гомеоморфизм или когда $\text{Cap } I = 0$. Для негомеоморфных квазирегулярных отображений в работе Е.А. Полецкого [4] и в работе [5] приведены примеры, которые показывают, что существуют неустранимые особенности, для которых $\Lambda_\beta(I) \neq 0$ при некотором $\beta \neq 0$, и пример, опровергающий гипотезу, что для особого множества I , для которого $\Lambda_\alpha(I) = 0$, где $\alpha \leq n - 2$, либо точки I устранимы, либо ёмкость непринимаемых значений равна нулю.

Для негомеоморфных отображений с s -усредненной характеристикой [6] нами построен пример [5], показывающий, что изолированная особенность в классе с $K_{I,s}, K_{O,s}$ -усредненной характеристикой, вообще говоря, не является устранимой.

Напомним некоторые необходимые нам определения. Пусть $I = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, – отрезок на \mathbb{R}^1 . Если кривая γ спрямляема, то кривую β назовем подкривой кривой γ , для случая если $I = [t_1, t_2]$, где $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Известно, что для кривой Жордана [4,7] величина $l(\gamma) = \sup l(\beta)$, где \sup берется над всеми такими подкривыми β кривой γ , называется длиной γ .

Определение 1 [4]. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – открытое, непрерывное, изолированное отображение. Если γ^* – кривая в $f(D)$, то поднятием γ^* в D называется кривая $\gamma \in D$,

такая, что $f \circ \gamma = \gamma^*$. Частичным поднятием γ^* назовем поднятие ее дуги. Два частичных поднятия γ_1 и γ_2 кривой γ называются существенно различными, если $\Lambda_1(\gamma_1 \cap \gamma_2) = 0$, где $\Lambda_1(s)$ – одномерная мера Хаусдорфа множества s .

Рассмотрим счетное покрытие $\{E_i\}, i = 1, 2, \dots$, множества E открытыми множествами E_i , такими, что $d(E_i) < r, r > 0$.

Пусть $\Lambda_\alpha^r(E) = \inf \sum_i d(E_i)^\alpha$, где \inf берется над всеми такими покрытиями.

Тогда Λ_α^r является убывающей функцией от r , а величина $\Lambda_\alpha(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \Lambda_\alpha^r(E)$ называется α -мерной мерой Хаусдорфа множества E .

Говорят, что отображение f принадлежит классу $ACL(U)$, $U \in \mathbb{R}^m$, если оно непрерывно в U и абсолютно непрерывно на почти всех отрезках из U , параллельных осям координат. Известно, что если $f \in ACL(U)$, то оно имеет почти всюду в U частные производные. Если, кроме того, эти частные производные принадлежат $L_p(U)$, $p \geq 1$, для любой области $U' \subset U$, то мы будем писать $f \in ACL_p(U)$ [8].

Обозначим через $N(x, f)$ кратность ветвления отображения f в точке x ([13, с. 40, (2.1)], [8, с. 262]).

Если A – компактное подмножество U , то $cap(A, U)$ – нижняя грань $\int_U |\nabla u|^n dV$ по всем непрерывным функциям класса $W_n^1(U)$, равным 0 на ∂U и 1 на A . Хорошо известно [13], что равенство $cap(A, U) = 0$ не зависит от U и поэтому можно писать $cap A = 0$ [4].

Пусть Γ – некоторое семейство кривых в \mathbb{R}^n .

Определение 2. Неотрицательную борелевскую функцию $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ [7, 10] назовем допустимой метрикой семейства Γ , если $\int_\gamma \rho d\gamma_x \geq 1$, где $d\gamma_x = \frac{dl}{1+|x|^2}$, для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. В дальнейшем, как и в [7], будем обозначать допустимость метрики $\rho \wedge \Gamma$.

Определение 3. Сферический модуль порядка p семейства Γ , где $p \in \mathbb{N}$, для удобства обозначим $M_p(\Gamma)$ и определим по формуле $M_p(\Gamma) = \inf \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$, где \inf берется над классом всевозможных метрик $\rho \wedge \Gamma$. Наиболее важным является случай, когда $p = n$, и мы полагаем $M_n(\Gamma) = M(\Gamma) = \inf \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x) \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Для неотрицательной функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1+|x|^2)^n$, где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, в [6] доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n < \infty$, выполнено

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} d\sigma_x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Заметим, что интеграл в определении сферического модуля может быть сужен до наименьшего борелевского множества E , содержащего семейство Γ , так как \inf в определении модуля достигается на метриках, обращающихся в нуль на CE .

Из определения 3 следует, что $0 \leq M_p(\Gamma) \leq \infty$. Поскольку функция, тождественно равная нулю, допустима для пустого семейства, то $M_p(\emptyset) = 0$. Если класс метрик $\rho \wedge \Gamma$ пуст, то полагаем $M_p(\Gamma) = \infty$. Семейство Γ назовем исключительным, если $M_p(\Gamma) = 0$ [7 стр.20, 10]. Семейство всевозможных неспрямляемых кривых в \mathbb{R}^n исключительно [7, т. 2.13].

Определение 4. Если для некоторой метрики $\rho_0 \wedge \Gamma$ имеем $M_p(\Gamma) = \inf \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0^p \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$, то метрику ρ_0 назовем экстремальной.

Свойства сферического модуля семейства кривых Γ доказаны в свойствах 1 – 13 [9, стр.180].

Пусть D – область в \mathbb{R}^n и отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W_{n,loc}^1(D)$ и $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$), тогда будем говорить $f \in \widehat{W}_{n,loc}^1(D)$.

Пусть $f \in \widehat{W}_{n,loc}^1(D)$, как и в [7], обозначим через $K_I(x, f) = \frac{J(x, f)}{l^n(x, f)}$ внутреннюю дилатацию отображения f , где $l(x, f) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|$, а через $K_O(x, f) = \frac{L^n(x, f)}{J(x, f)}$ – внешнюю дилатацию отображения f , где $L(x, f) = \max_{|h|=1} |f'(x)h|$.

Известно [4], что

$$K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f), \quad K_O(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} \cdot \lambda(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} \cdot K_O(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} \cdot K_I^{n-1}(x, f),$$

$$K(x, f) \leq \min(K_I(x, f), K_O(x, f)) \leq K^{\frac{n}{2}}(x, f) \leq \max(K_I(x, f), K_O(x, f)) \leq K^{n-1}(x, f),$$

$$\text{где } K(x, f) = \frac{|f'(x)|}{l(x, f)}, \quad \lambda(x, f) = n^{\frac{n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x, f)|}.$$

Определение 5. Отображение f называется отображением с $K_{I,s}$ -суммируемой характеристикой, если:

1) $f \in \widehat{W}_{n,loc}^1(D)$; 2) существует постоянная $K_{I,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K_{I,s}(f) = \left(\int_D K_I^s(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq K_{I,s}, \quad \text{где } d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}.$$

Определение 6. Отображение f называется отображением с $K_{O,s}^*$ -суммируемой характеристикой, если:

1) $f \in \widehat{W}_{n,loc}^1(D)$; 2) существует постоянная $K_{O,s}^* \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K_{O,s}^*(f) = \left(\int_D K_O^s(x, f) \cdot J(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq K_{O,s}^*, \text{ где } d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}.$$

Определение 7. Отображение f называется отображением с $(s, s^*)_I$ -суммируемой характеристикой, если оно является отображением с $K_{I,s}$ и $K_{I,s}^*$ -суммируемыми характеристиками.

Определение 8. Отображение f называется отображением с $(s, s^*)_O$ -суммируемой характеристикой, если оно является отображением с $K_{O,s}$ и $K_{O,s}^*$ -суммируемыми характеристиками.

Определение 9. Пусть $f : D \rightarrow D^*$ отображение с s -усредненной характеристикой, $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma^*(t) : [0, 1] \rightarrow R^n$, для которой $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma^*(t) = y$. Пусть существует такая спрямляемая кривая γ в D , что $f \circ \gamma = \gamma^*$ и $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x$, где $x \in \partial D$. Тогда кривая γ^* называется асимптотической для точки $x \in \partial D$, γ – её асимптотическим поднятием, а y – её асимптотическим значением f в точке x . Если I – особое множество и $I_1 \subset I$, то семейство асимптотических кривых (для I_1) – это все асимптотические кривые для точек $x \in I$ ($x \in I_1$). Для квазиконформных отображений см. [4, с. 243].

Следующий пример показывает характерную особенность, отличающую произвольные отображения с s -усредненной характеристикой от квазиконформных и квазирегулярных отображений.

Пример 1. Зададим произвольное целое число $m > 0$. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Если $x_2^2 + x_3^2 = 0$, полагаем $f(x) = x$. Если же $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, то пусть $x_2 = r \cos \varphi$, $x_3 = r \sin \varphi$, где $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В этом случае полагаем $f(x) = (x_1, r \cos m\varphi, r \sin m\varphi)$. Отображение f , очевидно, непрерывно. Все точки прямой $\mathbb{R}^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 0\}$ отображением f переводятся в себя. Будем называть f закручиванием вокруг оси.

Отображение f , очевидно, принадлежит классу C^1 на открытом множестве $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$. Всякая двумерная полуплоскость, ограниченная прямой $\mathbb{R}^1(x_2 = x_3 = 0)$ отображается функцией f на другую такую же полуплоскость изометрически так, что растяжения f в каждой точке $x \notin \mathbb{R}^1$ в направлениях, лежащих на этой прямой, равны 1. Всякая окружность с центром на \mathbb{R}^1 , лежащая в двумерной плоскости, вполне ортогональной \mathbb{R}^1 при отображении f переходит в себя. При этом, когда

точка x описывает окружность, обходя ее один раз в каком-либо направлении, точка $f(x)$ обегит ту же окружность в том же направлении m раз. Коэффициент растяжения f в направлении, касательном данной окружности, равен m . Таким образом, в каждой $x \notin \mathbb{R}^1$ два главных растяжения отображения f равны 1 и одно из них равно m . Отсюда следует, что $\|f'(x)\| = m$, $\det f'(x) = m$, $K_I(x, f)[f'(x)] = m$, $K_O(x, f)[f'(x)] = 1$. Производные отображения f ограничены. Теорема 1.5 [11] позволяет заключить, что $f \in W_{n,loc}^1$. Из сказанного следует, в силу доказанной в [6]

оценки для $\int_{\mathbb{R}^n} d\sigma_n$, что отображение f является отображением с s -усредненной характеристикой, т.е. сходятся оба интеграла $\int_{\mathbb{R}^3} K_I^\alpha(x, f)J(x, f)d\sigma_x < +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K_O^\beta(x, f)d\sigma_x < +\infty, \text{ если } 0 > s > \max\left\{-\frac{1}{2\beta}, -\frac{2}{2\alpha+1}\right\}.$$

Основная особенность этого отображения такова – f является топологическим отображением в достаточно малой окрестности всякой точки $x \notin \mathbb{R}^1$ и не будет топологическим ни в какой окрестности произвольной точки $x \in \mathbb{R}^1$.

Приведем еще один пример, показывающий, что в отличие от отображений с ограниченным искажением, у которых конечны интегралы $\int_{\mathbb{R}^3} K_I^\alpha(x, f)|J(x, f)|d\sigma_x$ и $\int_{\mathbb{R}^3} K_O^\beta(x, f)d\sigma_x$, ограниченность кратности и степени на компактах, вообще говоря, не имеет места (в случае плоскости аналогичный пример построен в [12]). Приводимые ниже построения являются модификацией конструкции закручивания вокруг оси из примера 1 и примера из монографии [13].

Пример 2. В пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, рассмотрим область D , точки $x = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ которой удовлетворяют условию $|x_1| < 1, \dots, |x_{n-2}| < 1, x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1$.

В области D зададим отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, полагая $f(x) = x$, если $x_{n-1}^2 + x_n^2 = 0$. Если же $x_{n-1}^2 + x_n^2 \neq 0$, то пусть $x_{n-1} = r \cos \varphi$, $x_n = r \sin \varphi$, где $r = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, и в этом случае полагаем $f(x) = (x_1, \dots, x_{n-2}, r \cos r^p \varphi, r \sin r^p \varphi)$, где $p < 0$ – произвольное число.

Отображение f , очевидно, непрерывно и ограничено в D , при этом оно локально гомеоморфно в $x \in D$ и $r \neq 0$.

Все точки множества $D^{n-2} = \{x = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \in D : x_{n-1} = x_n = 0\}$ отображение f переводит в себя и каждая окружность с центром на D^{n-2} , лежащая в двумерной плоскости, ортогональной D^{n-2} , при отображении f переходит в себя. Отсюда легко видно, что f открыто. Далее, очевидно, отображение f непрерывно дифференцируемо в точках $x \in D \setminus D^{n-2}$ и $J(x, f) > 0$. Поскольку $(n-1)$ -мерная мера Лебега множества D^{n-2} равна нулю и сужение f на любую прямую, не про-

ходящую через D^{n-2} , непрерывно дифференцируемо, то f есть ACL -отображение. Если точка x обходит описанную выше окружность один раз в каком-либо направлении, то точка $f(x)$ обойдет ту же окружность $r^p > 1$ раз.

Для каждого натурального m можно выбрать компакт F и число $r > 0$ так, чтобы шар радиуса r с центром на D^{n-2} лежал в F и целая часть числа r^p была бы не меньше m . Это означает, что ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места.

Поскольку $J(x, f) > 0$ при $x \in D \setminus D^{n-2}$, то $N(y, fD) = \mu(y, f, G)$ для всякой подобласти G , $\bar{G} \subset D$, и $y \notin f(\partial D)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n)$, $y_{n-1}^2 + y_n^2 \neq 0$. Следовательно, ограниченность на компактах степени отображения f также не имеет места.

Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – произвольные числа. Убедимся, что можно подобрать $p < 0$ так, чтобы $\int_D K_I^\alpha(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}^3} K_O^\beta(x, f) d\sigma_x < \infty$.

Легко подсчитывается, что $K_O(x, f) = K_I(x, f) = J(x, f) = 1$, если $x \in D^{n-2}$. Если же $x \in D \setminus D^{n-2}$, то $J(x, f) = r^p$,

$$\frac{n}{2} r^{(n-1)p} \leq K_O(x, f) \leq (n + 4\pi^2 \rho^2)^{\frac{n}{2}} r^{(n-1)p},$$

$$K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f) \leq (n + 4\pi^2 \rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} r^{(n-1)^2 p}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_D K_I^\alpha(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x &\leq C_1 \int_{|x_1| < 1} \frac{dx_1}{1 + |x|^2} \int_{|x_{n-2}| < 1} dx_2 \int_{x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1} r^{\alpha(n-1)^2 p + p} dr \leq \\ &\leq C_2 \int_0^1 r^{\alpha(n-1)^2 p + p + 1} dr < \infty, \end{aligned}$$

если $0 > p > -\frac{2}{\alpha(n-1)^2 + 1}$.

Аналогично, $\int_D K_O^\beta(x, f) d\sigma_x \leq C_3 \int_0^1 r^{\beta(n-1)p + 1} dr < \infty$, если $0 > p > -\frac{2}{\beta(n-1)}$.

Таким образом, оба этих интеграла конечны одновременно, если

$$0 > p > \max \left\{ -\frac{2}{\beta(n-1)}, -\frac{2}{\alpha(n-1)^2 + 1} \right\}.$$

Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кривая, $N(\gamma, y, I)$ – функция кратности (число точек $t \in I$, таких, что $y(t) = y$) и ρ – произвольная борелевская функция. Обозначим через dl – элемент длины на кривой γ . Так как по следствию из теоремы 1.6 [7] класс множеств, измеримых по одномерной мере Хаусдорфа (Λ_1 -измеримых), включает в себя класс борелевских множеств, то функции $N(\gamma, y, I)$ и ρ являются Λ_1 -из-

меримыми. Тогда $\int_{\gamma} \rho \frac{dl}{1+|x|^2}$ совпадает с интегралом $\int_{\gamma} \rho(y)N(\gamma, y, I) \frac{d\Lambda_1}{1+|\gamma(t)|^2}$, (*) определенным посредством одномерной меры Хаусдорфа.

Если кривая γ есть кривая Жордана, то из теоремы 1.11 [7] следует, что интеграл (*) совпадает с обычным интегралом $\int_{\gamma} \rho ds$, определенным посредством длин частичных дуг.

Теорема 1. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с $K_{O,s}^*$ -суммируемой характеристикой. Пусть A – борелевское множество в D , такое, что $N(f, A) < \infty$. Если Γ – семейство кривых в A , то

$$M^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, A)(K_{O,s}^*)^s M_{\frac{n-1}{ns}}^{s-1}(f\Gamma), \text{ где } s > 1.$$

Доказательство. Предположим, что $\rho^* \wedge f\Gamma$. Определим $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\rho^*(f(x))L(x, f)(1+|x|^2)^{\frac{s-1}{s}}}{(1+|f(x)|^2)^{\frac{s-1}{s}}}, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Пусть Γ_0 – семейство всех спрямляемых кривых $\gamma \in \Gamma$, таких, что f абсолютно непрерывно на γ . Тогда если γ_0 – параметризация γ посредством ее длины дуги, то $f \circ \gamma$ абсолютно непрерывно и $M(\Gamma) = M(\Gamma_0)$ [7].

Используя теорему 5.3 [14], получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho ds_x &= \int_{\gamma} \rho \frac{ds}{1+|x|^2} = \int_{\gamma} \frac{\rho^*(f(x))L(x, f)(1+|f(x)|^2)^{\frac{s-1}{s}}}{(1+|f(x)|^2)^{\frac{s-1}{s}}} \frac{ds}{1+|x|^2} \geq \\ &\geq \int_{f \circ \gamma} \frac{\rho^*(f(x))(1+|f(x)|^2)^{\frac{1}{s}}}{(1+|f(x)|^2)^{\frac{s-1}{s}}} \frac{ds^*}{1+|f(x)|^2} = \int_{f \circ \gamma} \rho^*(y) \frac{ds^*}{1+|y|^2} \geq 1 \end{aligned}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Таким образом $\rho \wedge \Gamma_0$. Докажем оценку для сферического модуля:

$$\begin{aligned} M(\Gamma) = M(\Gamma_0) + M(\Gamma \setminus \Gamma_0) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} \rho^n \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} + \int_A \rho^n \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} = \\ &= \int_A \frac{\rho_*^n(f(x))L^n(x, f)J^{\frac{s-1}{s}}(x, f)(1+|x|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}}}{(1+|f(x)|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}} J^{\frac{s-1}{s}}(x, f)(1+|x|^2)^n} dx. \end{aligned}$$

Применим к последнему интегралу неравенство Гёльдера с показателями

$$p = \frac{s}{s-1} \text{ и } q = s, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} M(\Gamma) &\leq \left[\int_A \left(\frac{\rho_*^n(f(x)) J^{\frac{s-1}{s}}(x, f)}{(1+|f(x)|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}}} \right)^{\frac{s}{s-1}} dx \right]^{\frac{s-1}{s}} \left[\int_A \left(\frac{L^n(x, f) (1+|x|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}}}{J^{\frac{s-1}{s}}(x, f) (1+|x|^2)^n} \right)^s dx \right]^{\frac{1}{s}} = \\ &= \left[\int_A \left(\frac{\rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(f(x)) J(x, f)}{(1+|f(x)|^2)^n} \right)^{\frac{s-1}{s}} dx \right]^{\frac{s-1}{s}} \left[\int_A \frac{L^s(x, f) (1+|x|^2)^{n(s-1)}}{J^{s-1}(x, f) (1+|x|^2)^{ns}} dx \right]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как $f \in \hat{W}_{n,loc}^1(D)$, якобиан $J(x, f)$ интегрируем на каждом компактном подмножестве $A \subset D$, тогда, используя теорему 2.2 [15], получим оценку для первого интеграла

$$\begin{aligned} \int_{A \cap U} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(f(x)) \frac{J(x, f) dx}{(1+|f(x)|^2)^n} &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(y) N(y, f, A \cap D) \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} \leq \\ &\leq N(f, A) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(y) \frac{dy}{(1+|y|^2)^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

По определению класса отображений с s -усредненной характеристикой

$$\begin{aligned} \left(\int_A \frac{L^{ns}(x, f) (1+|x|^2)^{n(s-1)}}{J^{s-1}(x, f) (1+|x|^2)^{ns}} dx \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\int_A \frac{L^{ns}(x, f) (1+|x|^2)^{ns}}{J^{s-1}(x, f) (1+|x|^2)^{ns} (1+|x|^2)^n} dx \right)^{\frac{1}{s}} = \\ &= \left(\int_A \frac{L^{ns}(x, f) J(x, f) dx}{J^s(x, f) (1+|x|^2)^n} \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_A K_O^s(x, f) J(x, f) \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \right)^{\frac{1}{s}} \leq K_{O,s}^* \end{aligned} \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) имеем

$$M^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, A) (K_{O,s}^*)^s M_{\frac{ns}{n-1}}^{s-1}(f\Gamma).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим семейство кривых, асимптотических для некоторого множества I_0 . В теореме 2 докажем, что сферический модуль этого семейства кривых порядка $\frac{ns}{s-1}$ равен нулю, если равен нулю сферический модуль порядка $\frac{ns}{s-1}$ кривых из этого семейства, начинающихся на некотором множестве A , емкость кото-

рого больше нуля. Тем самым уточняется результат Ю.Г. Решетняка [13] о независимости понятия емкости нуля от границ области, доказанный для отображений с ограниченным искажением, а также обобщается результат, доказанный в теореме 2 [4] и теорема Iversen–Tsuji на класс отображений с s -усредненной характеристикой.

Пусть I – замкнутое подмножество области U , а $f : U \setminus I \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с s -усредненной характеристикой. Если A – замкнутое множество в $U \setminus I$, а $I_0 \subset I$, то обозначим через $\Gamma_*(A, I_0)$ семейство кривых $\gamma_*(t)$ в $f(U \setminus I)$, которые допускают асимптотические поднятия $\gamma(t)$ такие, что $\gamma(0) = A$, а $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x \in I_0$.

Теорема 2. Пусть $f : U \setminus I \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с s -усредненной характеристикой, $s > 1$, $U \setminus I$ связно, $\Gamma_*(I_0)$ – семейство асимптотических кривых для точек $x \in I_0$ и $\text{cap} A > 0$. Тогда $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*, I_0) = 0$ в том и только в том случае, когда

$$M_{\frac{ns}{s-1}} \Gamma_*(A, I_0) = 0.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Обобщая теорему 2 [4], рассмотрим r -окрестность множества I , такую, что $\text{cap} G > 0$, где $G = A \cap (U \setminus I_{2r})$. Возьмем функцию $\rho_*(f(x))$, допустимую для семейства $\Gamma_*(A, I_0)$, причем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}} d\sigma_y < \varepsilon,$$

где ε – некоторое число. По условию $M_{\frac{ns}{s-1}} \Gamma_*(A, I_0) = 0$, следовательно, ε можно

выбрать сколь угодно малым. Зададим функцию ρ на $U \setminus I$ следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\rho_*(f(x)) L(x, f) \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}{\left(1 + |f(x)|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}, & x \in f(U \setminus I), \\ 0, & x \notin f(U \setminus I). \end{cases}$$

Обозначим через A_ε множество точек $x \in \partial I_r$, для которых найдутся асимптотические поднятия γ , обладающие следующими свойствами:

- 1) образ γ принадлежит $\Gamma_*(A, I_0)$;
- 2) дуга γ' кривой γ , соединяющая G с точкой x , лежит в $U \setminus I_{r/2}$;
- 3) $\int_{\gamma'} \rho ds < \frac{1}{2}$.

В силу допустимости функции $\rho_*(f(x))$ аналогично теореме 1 можно доказать, что функция ρ на $U \setminus I$ также допустима для семейства, состоящего из поднятий кривых из $\Gamma_*(A, I_0)$, и поэтому для любой кривой γ_1 , идущей из $x \in A_\varepsilon$ в I_0 , будем иметь $\int_{\gamma_1} \rho(x) d\gamma_x \geq \frac{1}{2}$, если $f \circ \gamma_1 \in \Gamma_*(I_0)$.

Пусть функция кратности $N = N(U \setminus I_{r/2})$ и $D_\varepsilon = \partial I_r \setminus A_\varepsilon$. В силу определения множества D_ε для любой кривой $\gamma \subset U \setminus I_{r/2}$, соединяющей G и D_ε , будем иметь $\int_\gamma \rho d\gamma_x \geq \frac{1}{2}$, а тогда, используя теорему 2.2 [13], теорему 1 и наши допущения, получим

$$\begin{aligned} M(\Gamma(G, D_\varepsilon)) &\leq N(U \setminus I_{r/2}) \int_{\mathbb{R}^n} 2\rho(x)^n \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} = \\ &= 2^n N(U \setminus I) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\rho_*(f(x)))^n L^n(x, f) J^{\frac{s-1}{s}}(x, f) (1+|x|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}}}{(1+|f(x)|^2)^{\frac{n(s-1)}{s}} J^{\frac{s-1}{s}}(x, f) (1+|x|^2)^n} dx \leq \\ &\leq 2^n N(U \setminus I) \left[\int_{U \setminus I} \frac{(\rho_*(y))^{\frac{ns}{s-1}} J^{\frac{s-1}{s}}(x, f) dx}{1+(1+|f(x)|^2)^n} \right]^{\frac{1}{s}} \left[\int_{U \setminus I} \frac{L^{ns}(x, f) (1+|x|^2)^{n(s-1)} dx}{J^{s-1}(x, f) (1+|x|^2)^{ns}} \right]^{\frac{1}{s}} = \\ &= 2^n N(U \setminus I) \int_{U \setminus I} (\rho_*(y))^{\frac{ns}{s-1}} d\sigma_y \left(\int_{U \setminus I} K_O^s(x, f) J(x, f) \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \right)^{\frac{1}{s}} = \\ &= 2^n N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^* \varepsilon', \end{aligned}$$

где $\varepsilon' = c\varepsilon^{\frac{s-1}{s}}$, c – постоянная.

Возьмем две последовательности:

$$\varepsilon_k = \left(2^{k+n} p N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^* \right)^{\frac{s-1}{s}}, \quad \varepsilon'_k = \left(c \cdot 2^{k+n} p N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^* \right)^{-1}.$$

Перейдем теперь к семейству асимптотических кривых для $x \in I_0$ и $\text{cap} A > 0$. Для этих кривых существуют поднятия, идущие из A_ε в I_0 . Как уже доказано, сферический модуль этого семейства порядка $\frac{ns}{s-1}$ меньше, чем $2^n (K_{O,s}^*)^2 \varepsilon$, в силу того, что $\rho_*(y)$ допустима для $\Gamma_*(I_0)$ и интеграл по таким кривым от функции ρ_* больше $\frac{1}{2} (K_{O,s}^*)^{\frac{2}{n}}$.

Рассмотрим семейство множеств $A_p = \bigcup A_{\varepsilon_k}$ и $D_p = \bigcap D_{\varepsilon_k} = \partial I_r \setminus A_p$ и семейство асимптотических поднятий, соединяющих D_p и G в $U \setminus I_{r/2}$. Тогда получаем, что для сферического модуля этого семейства выполняется равенство

$M\left(\Gamma\left(D_p, G, U \setminus I_{r/2}\right)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^n N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^* \varepsilon_k' = 0$, а так как для рассматриваемого нами модуля доказано свойство 2 [9]

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i), \quad (*)$$

то тогда в силу теоремы 1 модуль семейства асимптотических кривых из $\Gamma_*(I_0)$, допускающих поднятия, которые пересекают A_p , не превосходит $\frac{1}{p^{\frac{s}{s-1}}}$ в силу выбора ε_k и ε_k' .

Возьмем множества $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_p$ и обозначим через $\tilde{A} = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p$. Заметим, что $\tilde{A} \cup D = \partial I_r$.

Так как $M\left(\Gamma\left(D_p, G, U \setminus I_{r/2}\right)\right) = 0$ и выполняется неравенство (*), то имеем в силу теоремы 1, что $M(\Gamma(G, D)) = 0$ и $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*(\tilde{A}, I_0)) = 0$.

Остается показать, что $M(\Gamma(D)) = 0$, где $\Gamma(D)$ – семейство асимптотических поднятий γ , соединяющих точки $x \in U \setminus (I_{r/2} \cup D)$ с D . Учитывая то, что $M(\Gamma(G, D)) = 0$, можем выбрать функцию $\rho \in L_n(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\int_{\gamma} \rho d\gamma_x = \infty$ по любой кривой $\gamma \in \Gamma(G, D)$. Используя теперь теорему 1 и свойства, доказанные в [9], покажем, что $M(\Gamma(D)) = 0$.

Для этого, следуя [16], рассмотрим функцию $r_\varepsilon = \varepsilon d_1(x, \partial U \cup G \cup D)$, где $\varepsilon < 1$, $d_1 = \min(d, 1)$, и по ней определим функцию $\tilde{\rho}_\varepsilon(x)$:

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \int_{B(0;1)} \rho(x + r_\varepsilon y) d\sigma_y, & \text{при } y \in B(0;1), \\ 0, & \text{при } y \notin U. \end{cases}$$

Функция $\tilde{\rho}_\varepsilon(x)$ непрерывна в $Q = U \setminus (I_{r/2} \cup G \cup D)$ и является допустимой для семейства кривых $\gamma \in \Gamma(G, D)$. Действительно, пусть $\gamma \in \Gamma(G, D)$ – некоторая спрямляемая кривая, тогда её образ γ^* при отображении $z(x) = x + r_\varepsilon y$ тоже будет спрямляемой кривой из $\Gamma(G, D)$, причем между элементами длин этих кривых имеет место соотношение $d\gamma^* \leq (1 + \varepsilon)d\gamma$ [16]. Учитывая, что $\rho(x)$ допустима для Γ , имеем в силу теоремы Фубини

$$\int_{\gamma} \tilde{\rho}_\varepsilon(x) d\gamma_x = \frac{1 + \varepsilon}{m(B_n)} \int_{\gamma} \left\{ \int_{B_n} \rho(z(x)) d\sigma_y \right\} d\gamma_x = \frac{1 + \varepsilon}{m(B_n)} \int_{B_n} \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon} \left\{ \int_{\gamma^*} \rho d\gamma_x^* \right\} \right\} d\sigma_y \geq 1.$$

Точно так же, как и в [16], можно показать, что $\int_{\gamma} \tilde{\rho}(x) d\gamma_x = \infty$ для $\gamma \in \Gamma(G, D)$.

Далее, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в [4], и в силу теоремы 1 получим, что $M(\Gamma(D)) = 0$.

Так как r можно выбрать произвольно, то рассмотрим последовательность $r_k = \frac{1}{k}$. Заметим, что любая кривая $\gamma_* \in \Gamma_*(I_0)$ имеет асимптотические поднятия, начинающиеся в $U \setminus I_{r_k}$ при некотором k . Так как $U \setminus I$ связно, то k можно выбрать настолько большим, что начало этой кривой попадает в связную компоненту $U \setminus I_{r_k}$, которая содержит часть множества A ненулевой ёмкости. Это поднятие пересекает либо \tilde{A} , либо D . В силу уже доказанной теоремы 1 и неравенства (*) мы видим, что в первом случае рассматриваемый сферический модуль порядка $\frac{ns}{s-1}$, то есть $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*(\tilde{A}, I_0)) = 0$, а во втором $M(\Gamma(D)) = 0$, а следовательно, $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*(D, I_0)) = 0$. Отсюда делаем заключение, что $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*(I_0)) = 0$.

Теорема 3. Пусть $f : U \setminus I \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с s -усредненной характеристикой, $s > 1$, где I – замкнутое подмножество U , $\dim I \leq n - 2$ и Γ_* – семейство кривых, асимптотических для точек $x \in I$. Если $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*) = 0$,

$\text{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus I)) > 0$, то f продолжается до s -непрерывного отображения на U .

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x \in I$ и найдутся две последовательности $x_i \rightarrow x, x'_i \rightarrow x, i = 1, 2, \dots$, такие, что $q(f(x_i), f(x'_i)) \geq a > 0$, где $q(x, y)$ – сферическое расстояние. По условию $\dim I \leq n - 2$, тогда существует кривая $\gamma_i \in \Gamma(x_i, x'_i)$, причем $d(\gamma_i) < 2d(x_i, x'_i)$. Обозначая через $F = \mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus I)$, получаем [17] $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma(F, \gamma_i^*)) \geq \delta > 0$. С другой стороны, под-

нятие γ кривой $\gamma_* \in \Gamma(F, \gamma_i^*)$ выходит либо на ∂U , либо на I . Во втором случае кривая $\gamma_* \in \Gamma_*$ и модуль семейства таких кривых есть нуль в силу теоремы 2, а модуль кривых, которые выходят на ∂U , как следует из теоремы 1, стремится к нулю. Следовательно, f продолжается на I непрерывно.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением, обобщающие квазирегулярные отображения. Здесь модульная техника играет ключевую роль. Профессор О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q -гомеоморфизмов, так называемые Q -отображения [18–21]. Отображения с s -усредненной характеристикой – негомеоморфные пространственные отображения, являются естественным обобщением класса отображений с искажением, ограниченным в

среднем на случай произвольной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. В то же время теорема об оценке модуля, доказанная в [6], указывает на непосредственную связь исследуемых нами отображений с вышеназванными классами Q -отображений [19–20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vuorinen M.* On the Iversen–Tsuji theorem for quasiregular mappings // *Mathematica Scandinavica*. 1977. V. 41. P. 90–98.
2. *Martio O. and Rickman S.* Boundary behavior of quasiregular mappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 1972. Ser. A I 507. P. 1–17.
3. *Лаврентьев М.А.* Об одном дифференциальном признаке гомеоморфности отображений трехмерных областей // *ДАН СССР*. 1938. Т. 20. № 4. С. 241–242.
4. *Полецкий Е.А.* О стирании особенностей квазиконформных отображений // *Матем. сб.* 1973. Т. 92 (134). № 2 (10). С. 242–256.
5. *Алипова К.А., Elizarova M.A., Malyutina A.N.* Examples of the mappings with s -averaged characteristic // *Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской Междунар. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В.В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17. ISBN: 978-5-8021-2121-4.*
6. *Malyutina A., Elizarova M.* Mappings with s -averaged characteristic. Definition and properties. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 121 p. ISBN: 978-3-8484-1319-5.
7. *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
8. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // *Матем. сб.* 1970. Т. 83(125). № 2(10). С. 261–273.
9. *Малютина А.Н., Кривошеина И.И., Баталова Н.Н.* Искажение сферического модуля семейств кривых // *Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 179–195.*
10. *Väisälä J.* Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings (Lecture Notes in Mathematics 229). Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.
11. *Väisälä Ju.* Removable sets for quasiconformal mappings in space // *J. Mech.* 1969. V. 19. No. 1. P. 49–51.
12. *Кругликов В.И., Пайков В.И.* Непрерывные отображения с конечным интегралом Дирихле // *ДАН СССР*. 1979. Т. 249. № 5. С. 1049–1052.
13. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 286 с.
14. *Väisälä J.* Two new characterization for quasiconformality // *Ann. Acad. Sci. Fenn. A1*. 1965. V. 362. P. 1–12.
15. *Малютина А.Н., Elizarova M.A.* Оценки искажения модулей для отображений с s -усредненной характеристикой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2010. № 2(10). С. 5–15.
16. *Асеев В.В.* Об одном свойстве модуля // *ДАН СССР*. 1971. Т. 200. № 3. С. 513–514.
17. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities for quasiregular mappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1*. 1970. No. 455. P. 1–13.
18. *Игнатъев А.А., Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // *Український математичний вісник*. 2005. Т. 2. № 3. С. 395–417.
19. *Мартіо О., Рязанов В., Сребро У. и Якубов Э.* К теории Q -гомеоморфизмов // *ДАН России*. 2001. Т. 381. № 1. С. 20–22.
20. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // *J. d'Anal. Math.* 2004. V. 93. P. 215–236.
21. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равнотепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // *Сиб. матем. журн.* 2011. Т. 52. № 3. С. 665–679.

Malyutina A.N., Alipova K.A. (2016) ON BOUNDARY PROPERTIES OF SPATIAL NON-HOMEOMORPHIC MAPPINGS WITH AN s -AVERAGED CHARACTERISTIC. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 16–30

DOI 10.17223/19988621/41/2

In this paper, we continue to develop the geometric method of modules of curve families for studying analytical and geometrical properties of nonhomeomorphic mappings with s -averaged characteristic. We consider the question of the erasure of special sets under mappings with s -averaged characteristic. In this work, in contrast to previous results which require that the mapping is homeomorphic or the capacity of singular points is zero, nonhomeomorphic mappings with s -averaged characteristic are considered and a weaker condition is taken as constraints. We generalize the theorem which is known in the case $n = 2$ as Iversen–Tsuji’s theorem for the case $n \geq 3$. There are well-known examples demonstrating the existence of essential singularities for which Hausdorff’s measure $\Lambda_\beta \neq 0$ at some $\beta \neq 0$ for mappings with an s -averaged characteristic. The work presents some examples which illustrate distinctive properties of the considered class of mappings. A theorem about the module distortion for families of curves under mappings with allowance for multiplicity and, as a consequence, the characteristic property of the spherical module of families of curves asymptotic to a special boundary set is proved. The mappings are extended to continuous ones if the dimension of the set of singular points $I \dim I \leq n-2$ and $s > 1$. The results are applicable to many classes of mappings of subclasses $W_n^1(U)$.

Keywords: spatial mappings with s -averaged characteristics, method of modules, desingularization, estimates of the distortion, asymptotic lifts.

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: nmd@math.tsu.ru

ALIPOVA Kseniya Aleksandrovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: ksusha_ast@mail.ru

REFERENCES

1. Vuorinen M. (1977) On the Iversen – Tsuji theorem for quasiregular mappings. *Mathematica Scandinavica*. V. 41. pp. 90–98.
2. Martio O. and Rickman S. (1972) Boundary behavior of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I* 507. pp. 1–17.
3. Lavrentyev M. A. (1938) Ob odnom differentsial'nom priznake gomeomorfnosti otobrazheniy trekhmernykh oblastey [On a certain differential characteristic of homeomorphic mappings of three-dimensional domains]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 20(4). pp. 241–242.
4. Poleckii E.A (1973) On the removal of singularities of quasiconformal mappings. *Mathematics of the USSR – Sbornik*. 21(2), pp. 240–254. DOI 10.1070/SM1973v021n02ABEH002015
5. Alipova K.A., Elizarova M.A., Malyutina A.N. (2014) Examples of the mappings with s -averaged characteristic. *Kompleksnyy analiz i ego prilozheniya* [Complex Analysis and Its Applications]. Proc. of the International Conference. Petrozavodsk: PetrGU Publ. pp. 12–17. URL: http://piccana.karelia.ru/_docs/2014/atezis14.pdf (Accessed 14.05.2016).
6. Malyutina A., Elizarova M. (2013) *Mappings with s-averaged characteristic. Definition and properties*. LAP LAMBERT Academic Publishing.
7. Sychev A.V. (1983) *Moduli i prostranstvennye kvazikonformnye otobrazheniya* [Modules and spatial quasiconformal mappings]. Novosibirsk: Nauka.
8. Poleckii E.A. (1970) The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings. *Mathematics of the USSR – Sbornik*. 12(2). pp. 260–270.
9. Malyutina A.N., Krivosheina I.I., Batalova N.N. (2001) Iskazhenie sfericheskogo modulya semeystv krivykh [Distortion of the spherical module of families of curves]. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre – Researches on Mathematical Analysis and Algebra*. 3. Tomsk: TGU Publ. pp. 179–195.

10. Väisälä J. (1971) *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings* (Lecture Notes in Mathematics 229). Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
11. Väisälä Ju. (1969) Removable sets for quasiconformal mappings in space. *J. Mech.* 19(1). pp. 49–51.
12. Kruglikov V.I., Paykov V.I. (1979) Nепрерывные отображения с конечным интегралом Дирихле [Continuous mappings with a finite Dirichlet integral]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 249(5). pp. 1049–1052.
13. Reshetnyak Yu.G. (1982) Пространственные отображения с ограниченным искажением [Spatial mappings with bounded distortion]. Novosibirsk: Nauka.
14. Väisälä Ju. (1965) Two new characterizations for quasiconformality. *Ann. Acad. Sci. Fenn. AI.* 362. pp. 1–12.
15. Malyutina A.N., Elizarova M.A. (2010) Otsenki iskazheniya moduley dlya otobrazheniy s s -usrednennoy kharakteristikoy [Estimations of distortion of the modules for the mappings with s -average characteristic]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2(10). pp. 5–15.
16. Aseev V.V. (1971) Ob odnom svoystve modulya [On a property of the modulus]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 200(3). pp. 513–514.
17. Martio O., Rickman S., Väisälä J. (1970) Distortion and singularities for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI.* 455. pp. 1–13.
18. Ignat'ev A.A., Ryazanov V.I. (2005) Konechnoe srednee kolebanie v teorii otobrazheniy [Finite mean oscillation in the theory of mappings]. *Ukrains'kiy matematichnyi visnik – Ukrainian mathematical bulletin.* 2(3). pp. 395–417.
19. Martio O. et al. (2001) K teorii Q -gomeomorfizmov [A contribution to the theory of Q -homeomorphisms]. *Dokl. Ross. Akad. Nauk.* 381(1). pp. 20–22.
20. Martio O. et al. (2004) Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math.* 93. pp. 215–236.
21. Ryazanov V.I., Sevost'yanov E.A. (2011) Equicontinuity of mean quasiconformal mappings. *Siberian Mathematical Journal.* 52(3). pp. 524–536. DOI 10.1134/S0037446611030153.

УДК 517.977.56
DOI 10.17223/19988621/41/3

Р.К. Тагиев, С.А. Гашимов, В.М. Габитов

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ
УСЛОВИЕМ И С УПРАВЛЕНИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ**

Рассматривается задача оптимального управления для параболического уравнения с интегральным граничным условием и с управлениями в коэффициентах. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, найдено выражение для его градиента и установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: *оптимальное управление, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, условие оптимальности.*

Многие физические и биологические процессы описываются нелокальными краевыми задачами для уравнений параболического типа [1–3]. Нелокальные краевые задачи для уравнений параболического типа активно изучаются в настоящее время. Среди них особое место занимают задачи с интегральными граничными условиями [4–7].

Задачи оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа с управлениями в коэффициентах и с классическими краевыми условиями, изучены в работах [8–14] и др. Однако задачи управления, в которых процессы описываются уравнениями параболического типа с нелокальными краевыми условиями и с управлениями в коэффициентах исследованы существенно слабее.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для уравнения параболического типа с интегральным граничным условием и с управлениями в коэффициентах. Исследованы вопросы корректности задачи в слабой топологии пространства управлений. Найдено выражения для градиента функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности управления.

1. Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \int_0^{\ell} |u(x, T; v) - y(x)|^2 dx \tag{1}$$

на решениях $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ краевой задачи

$$u_t - (k(x, t)u_x)_x + q(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T\}; \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell; \tag{3}$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad k(\ell, t)u_x(\ell, t) = \int_0^{\ell} H(x)u_x(x, t)dx + g(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{4}$$

соответствующих всем допустимых управлениям $v = v(x, t) = (k(x, t), q(x, t))$ из множества

$$V = \{v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, \\ |k_x(x, t)| \leq \mu_1, |k_t(x, t)| \leq \mu_2, |q(x, t)| \leq \mu_3 \text{ п.в. на } Q_T\}. \quad (5)$$

Здесь $l, T, v, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ – заданные числа; $y(x), \varphi(x) \in W_2^1(0, \ell)$, $H(x) \in W_2^1(0, \ell)$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $g(t) \in W_2^1(0, T)$ – известные функции, $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ – решение краевой задачи (1) – (3), соответствующее управлению $v = v(x, t)$.

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствуют [15, с. 23–26]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются через M_i ($i = 1, 2, \dots$).

Под решением краевой задачи (2) – (4), для каждого фиксированного допустимого управления $v(x, t) \in V$, понимается обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функция $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$, которая для любой функции $\eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} (-u\eta_t + k(x, t)u_x\eta_x + q(x, t)u\eta) dxdt = \iint_{Q_T} f(x, t)\eta dxdt + \\ + \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x, 0)dx + \int_0^T \int_0^\ell H(x)u_x(x, t)dx + g(t)\eta(\ell, t)dt. \quad (6)$$

Используя результаты работ [15, с.165–171], [7], можно показать, что при сделанных предположениях, каждое допустимое управления $v(x, t) \in V$ определяет единственное обобщенное решение $u(x, t; v) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (2) – (4) и для нее справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t; v)\|_{L_2(0, \ell)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} \leq \\ \leq M_1 (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{L_2(0, \ell)} + \|g\|_{L_2(0, T)}). \quad (7)$$

Более того, обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (2) – (4) принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_2 (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0, \ell)} + \|g\|_{W_2^1(0, T)}). \quad (8)$$

Оценка (7) показывает, что функционал (1) определен на V и принимает конечные значения.

2. Корректность постановки задачи

Следующая теорема показывает, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства H .

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда множество оптимальных управлений задачи (1)–(5) $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf \{J(v) : v \in V\}\}$ непусто, V_* слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{v_n = (k_n(x, t), q_n(x, t))\} \subset V$ функционала $J(v)$ слабо в H сходится к множеству V_* .

Доказательство. Покажем, что функционал $J(v)$ слабо непрерывен на V . Пусть $v = (k(x, t), q(x, t)) \in V$ – произвольный фиксированный элемент и $\{v_n = (k_n(x, t), q_n(x, t))\} \subset V$ – произвольная последовательность, такая, что $v_n \rightarrow v$ слабо в H , т.е.

$$k_n(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ слабо в } W_2^1(Q_T); \quad (9)$$

$$q_n(x, t) \rightarrow q(x, t) \text{ слабо в } L_2(Q_T). \quad (10)$$

Из компактности вложения $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_{r_1}(Q_T)$ при любом конечном $r_1 \geq 2$ [16, с.78] и соотношения (9) следует, что

$$k_n(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ сильно в } L_{r_1}(Q_T). \quad (11)$$

Кроме того, в силу однозначной разрешимости задачи (2) – (4) и оценки (8), каждому $v_n \in V$ соответствует единственное решение $u_n(x, t) = u(x, t; v_n) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ задачи (1) – (3) и справедлива оценка

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_3, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

т.е. последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена в $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Известно, что вложение $W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_{r_2}(Q_T)$ компактно при любом конечном $r_2 \geq 2$ [17, с. 33, 39]. Кроме того, следы элементов $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ определены при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ как элементы $W_2^1(0, \ell)$ и справедлива оценка [15, с. 98]

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{W_2^1(0, \ell)} \leq M_4 \|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}. \quad (13)$$

Отсюда и из компактности вложения $W_2^1(0, \ell) \rightarrow C[0, \ell]$ [15, с. 84] следует, что отображение $u(x, t) \rightarrow u(x, T)$ пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$ в $C[0, \ell]$ компактно. Тогда в силу перечисленных фактов, из (12) следует, что из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, такую, что

$$u_{n_k}(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_{r_2}(Q_T); \quad (14)$$

$$u_{n_k}(x, T) \rightarrow u(x, T) \text{ сильно в } C[0, \ell], \quad (15)$$

где $u = u(x, t)$ – некоторый элемент из $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Покажем, что $u(x, t) = u(x, t; v)$, т.е. $u(x, t)$ является решением задачи (2) – (4), соответствующим управлению $v \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} (-u_{n_k} \eta_t + k_{n_k}(x, t) u_{n_k x} \eta_x + q_{n_k}(x, t) u_{n_k} \eta) dx dt = \\
& = \iint_{Q_T} f(x, t) \eta dx dt + \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^T \left[\int_0^\ell H(x) u_{n_k x}(x, t) dx + g(t) \right] \eta(\ell, t) dt, \\
& \quad \forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T), \quad \eta(x, T) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (16)
\end{aligned}$$

Используя соотношения (11), (14), оценки (12) и неравенство (1.8) из [16, с. 75], имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{Q_T} k_{n_k}(x, t) u_{n_k x} \eta_x dx dt - \iint_{Q_T} k(x, t) u_x \eta_x dx dt \right| \leq \\
& \leq \left| \iint_{Q_T} k(x, t) [u_{n_k x} - u_x] \eta_x dx dt \right| + \left| \iint_{Q_T} [k_{n_k}(x, t) - k(x, t)] u_{n_k x} \eta_x dx dt \right| \leq \\
& \leq \left| \iint_{Q_T} k(x, t) [u_{n_k x} - u_x] \eta_x dx dt \right| + \|k_{n_k} - k\|_{L_3(Q_T)} \|u_{n_k x}\|_{L_6(Q_T)} \|\eta_x\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

Кроме того, используя соотношения (10), (14) и оценки (12), получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{Q_T} q_{n_k}(x, t) u_{n_k} \eta dx dt - \iint_{Q_T} q(x, t) u \eta dx dt \right| \leq \\
& \leq \left| \iint_{Q_T} q_{n_k}(x, t) [u_{n_k} - u] \eta dx dt \right| + \left| \iint_{Q_T} [q_{n_k}(x, t) - q(x, t)] u \eta dx dt \right| \leq \\
& \leq q_1 \|u_{n_k} - u\|_{L_2(Q_T)} \|\eta\|_{L_2(Q_T)} + \left| \iint_{Q_T} [q_{n_k}(x, t) - q(x, t)] u \eta dx dt \right| \rightarrow 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Наконец, используя соотношение (14), имеем

$$\iint_{Q_T} H(x) u_{n_k x}(x, t) \eta(l, t) dx dt \rightarrow \iint_{Q_T} H(x) u_x(x, t) \eta(l, t) dx dt; \quad (19)$$

$$\iint_{Q_T} u_{n_k}(x, t) \eta_t dx dt \rightarrow \iint_{Q_T} u \eta_t dx dt. \quad (20)$$

Тогда переходя к пределу при $n_k \rightarrow \infty$ в тождестве (16) и учитывая соотношения (17) – (20), получаем, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (6), т.е. является решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (2) – (4), соответствующим управлению $\upsilon \in V$.

Отсюда и из включения $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ следует, что $u(x, t) = u(x, t; \upsilon)$.

Используя единственность решения краевой задачи (2) – (4), соответствующим управлению $\upsilon \in V$, нетрудно показать, что соотношения (14), (15) справедливы с функцией $u(x, t) = u(x, t; \upsilon)$ не только для подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$, но и для всей последовательности $\{u_n\}$, т.е.

$$u_n(x, t) = u(x, t; \upsilon_n) \rightarrow u(x, t) = u(x, t; \upsilon) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T); \quad (21)$$

$$u_n(x, T) = u(x, T; \upsilon_n) \rightarrow u(x, T) = u(x, T; \upsilon) \text{ сильно в } C[0, \ell]. \quad (22)$$

Тогда, используя соотношение (22) и равенство (1), получаем, что $J(\upsilon^{(n)}) \rightarrow J(\upsilon)$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, установлено, что функционал $J(v)$ слабо непрерывен на V . Кроме того, множество V , определяемое равенством (5), выпукло, замкнуто и ограничено в гильбертовом пространстве H и поэтому слабо компактно в H [18, с. 51]. Тогда применяя результат из [18, с. 49], устанавливаем, что справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что задача (1) – (5) имеет хотя бы одно решение. Следующий пример показывает, что решение задачи (1) – (5) может быть не единственным.

Пример 1. Пусть в задаче (1) – (5) $l = T = 1$, $v = 1/2\pi$, $\mu = 2/\pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = \pi$, $f(x, t) = 3\pi \cos \pi x \sin \pi t$, $H(x) \equiv 1$, $g(t) = 2 \sin \pi t$, $\varphi(x) \equiv 0$, $y(x) \equiv 0$.

Тогда нетрудно проверить, что минимальное значение функционала достигается на управлениях

$$v_*^{(1)}(x, t) = (k_*^{(1)}(x, t) \equiv 4\pi, \quad q_*^{(1)}(x, t) \equiv \pi), \quad \text{и} \quad v_*^{(2)}(x, t) = (k_*^{(2)}(x, t) \equiv 2/\pi, \quad q_*^{(2)}(x, t) \equiv 0)$$

$$\text{и} \quad J(v_*^{(1)}) = J(v_*^{(2)}) \equiv J_* = 0, \quad u(x, t; v_*^{(1)}) = u(x, t; v_*^{(2)}) = \cos \pi x \sin \pi t, \quad (x, t) \in Q_T,$$

т.е. решение (1) – (5) не единственно.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что задача (1) – (5) корректно поставлена в слабой топологии пространства H . Однако, вообще говоря, это задача некорректна в метрике пространства H , т.е. могут существовать минимизирующие последовательности функционала $J(v)$, не сходящиеся к множеству V_* по норме пространства H . Следующий пример показывает, что минимизирующая последовательность функционала $J(v)$ может не иметь предела в пространстве H .

Пример 2. Пусть в задаче (1) – (5) $l = T = 1$, $v = 1$, $\mu = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = \pi^2 + 1$, $f(x, t) = -\exp(t) \sin \pi t$, $H(x) \equiv 1$, $g(t) = \pi \exp(t)$, $\varphi(x) = -\sin \pi x$, $y(x) = -\exp \sin \pi x$.

Тогда $v_* = (k_*(x, t) \equiv 1, \quad q_*(x, t) \equiv -\pi^2)$ – оптимальное управление и $u(x, t; v_*) = -\exp(t) \sin \pi x$, $(x, t) \in Q_T$, $J_* = J(v_*) = 0$. Рассмотрим последовательность управлений $v^{(m)}(x, t) = (k^{(m)}(x, t) \equiv 1, \quad q^{(m)}(x, t) = -\pi^2 + \sin \pi m x) \in V$ ($m = 1, 2, \dots$). Тогда $v^{(m)} \rightarrow v$ слабо в H , и поэтому из теоремы 1 следует, что $J(v^{(m)}) \rightarrow J(v) = J_* = 0$, т.е. последовательность $\{v^{(m)}\}$ является минимизирующей для функционала $J(v)$. Однако эта последовательность не имеет предела в H , так как $\{\sin \pi m x\}$ сильно не сходится в $L_2(Q_T)$.

3. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности

Для задачи (1) – (5) введем сопряженную краевую задачу [18, с.128]

$$\psi_t + (k(x, t)\psi_x)_x - q(x, t)\psi - H'(x)\psi(\ell, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (23)$$

$$\psi(x, T) = -2[u(x, T; v) - y(x)], \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (24)$$

$$\psi_x(0, t) = 0, \quad \psi_x(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (25)$$

Под решением краевой задачи (23) – (25), соответствующим управлению $v \in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (\psi \eta_t + k(x, t) \psi_x \eta_x + q(x, t) \psi \eta) dx dt - \int_0^T \int_0^\ell H(x) \eta_x(x, t) dx \psi(\ell, t) dt = \\ = -2 \int_0^\ell [u(x, T; v) - y(x)] \eta(x, T) dx \end{aligned} \quad (26)$$

при любой функции $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ равной нулю при $t = 0$.

Используя методики работ [15, с. 165–171], [7], можно показать, что для каждого заданного $v \in V$ краевая задача (23) – (25) имеет единственное обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Более того, это решение принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_5 \|u(x, T; v) - y(x)\|_{W_2^1(0, \ell)}. \quad (27)$$

Учитывая здесь неравенство (13) и оценки (8), имеем

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq M_6 [\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0, \ell)} + \|g\|_{W_2^1(0, T)} + \|\gamma\|_{W_2^1(0, \ell)}]. \quad (28)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда функционал (5) дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $v \in V$ при приращении $\Delta v = (\Delta k, \Delta q) \in H$ определяется равенством

$$dJ(v, \Delta v) = \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt. \quad (29)$$

Доказательство. Пусть $v, v + \Delta v \in V$ – произвольные управления и $\Delta u = \Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$, $u = u(x, t) = u(x, t; v)$. Из условий (1) – (3) следует, что Δu является решением из $W_2^{2,1}(Q_T)$ задачи

$$\Delta u_t - ((k + \Delta k) \Delta u_x)_x + (q + \Delta q) \Delta u = (\Delta k u_x)_x - \Delta q u, \quad (x, t) \in Q_T; \quad (30)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_x(0, t) = 0, \quad \Delta k(\ell, t) u_x(\ell, t) = \int_0^\ell H(x) \Delta u_x(x, t) dx - (k(\ell, t) + \Delta k(\ell, t)) \Delta u_x(\ell, t), \\ 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (32)$$

Можно показать, что для решения задачи (30) – (32) верна оценка [16, с. 164–169], [7]

$$\|\Delta u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_7 [\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)}]. \quad (33)$$

Используя ограниченность вложений $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_3(Q_T)$ [16, с.78], $W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_\infty(Q_T)$ [17, с.33], неравенство (1.8) из [16, с.75] и оценки (9), имеем

$$\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} \leq \|\Delta k\|_{L_3(Q_T)} \|u_x\|_{L_6(Q_T)} \leq M_8 \|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)},$$

$$\|\Delta qu\|_{L_2(Q_T)} \leq \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \leq M_9 \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)}.$$

Учитывая эти неравенства в (33), получаем оценку

$$\|\Delta u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_{10} \|\Delta v\|_H. \quad (34)$$

Приращение функционала (5) имеет вид

$$\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v) = 2 \int_0^\ell [u(x, T; v) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \int_0^\ell |\Delta u(x, T)|^2 dx. \quad (35)$$

С помощью решений краевых задачи (23) – (25) и (30) – (32) преобразуем приращение (35). Для решения краевой задачи (30) – (32) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} (\Delta u_t \psi + k \Delta u_x \psi_x + q \Delta u \psi) dx dt - \int_0^T \left(\int_0^\ell H(x) \Delta u_x(x, t) dx \right) \psi(\ell, t) dt = \\ & = \iint_{Q_T} \Delta k \Delta u_x \psi_x dx dt - \iint_{Q_T} \Delta u \Delta q \psi dx dt - \iint_{Q_T} \Delta k u_x \psi_x dx dt - \iint_{Q_T} u \psi \Delta q dx dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Если в тождестве (26) положим $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (36), то придем к равенству

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\ell [u(x, T; v) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \\ & = \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt + \iint_{Q_T} \Delta u \psi \Delta q dx dt - \iint_{Q_T} \Delta k \Delta u_x \psi_x dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство, (35) запишем в виде

$$\Delta J(v) = \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt + R, \quad (37)$$

где
$$R = \int_0^\ell |\Delta u(x, T)|^2 dx + \iint_{Q_T} \Delta u \psi \Delta q dx dt - \iint_{Q_T} \Delta k \Delta u_x \psi_x dx dt. \quad (38)$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части равенства (37), т.е. выражение (29), при заданном $v \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от Δv в H . Линейность функционала (29) по Δv очевидна. Используя ограниченность вложений $W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_\infty(Q_T)$ [17, с. 33, 39], $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_4(Q_T)$ [16, с. 78], оценку (13) для функции ψ , неравенство Коши – Буняковского и оценки (8), (29), получаем неравенство

$$\begin{aligned} |dJ(v, \Delta v)| &= \left| \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt \right| \leq \\ &\leq \|u_x\|_{L_4(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_2(Q_T)} \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} + \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \|\psi\|_{L_2(Q_T)} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \leq M \|\Delta v\|_H. \end{aligned}$$

Отсюда следует ограниченность функционала (29).

Кроме того, используя ограниченность вложения $W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_\infty(Q_T)$, неравенство (13) для функции Δu и оценки (28), (34), для остаточного члена R , определяемого равенством (38), получаем оценку

$$\begin{aligned}
|R| &= \left| \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)}^2 + \iint_{Q_T} \Delta u \psi \Delta q dx dt - \iint_{Q_T} \Delta u_x \psi_x \Delta k dx dt \right| \leq \\
&\leq M \|\Delta u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}^2 + \|\Delta u\|_{L_2(Q_T)} \|\psi\|_{L_\infty(Q_T)} \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} + \\
&\quad + \|\Delta u_x\|_{L_4(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_2(Q_T)} \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} \leq M \|\Delta v\|_H^2.
\end{aligned} \tag{39}$$

Учитывая в (37) эту оценку, заключаем, что функционал (5) дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал определяется выражением (29). Теорема 2 доказана.

Теперь получим явную формулу для градиента функционала (5). Поставим следующую вспомогательную краевую задачу для определения функции $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$ из условий

$$-\omega_{xx} - \omega_{tt} + \omega = u_x \psi_x, \quad (x, t) \in Q_T; \tag{40}$$

$$\omega_x|_{x=0} = \omega_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < x < l; \tag{41}$$

$$\omega_t|_{t=0} = \omega_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < T. \tag{42}$$

Под решением задачи (40) – (42) при заданном $v \in V$ будем понимать функцию $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$ из $W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} [\omega_x \eta_x + \omega_t \eta_t + \omega \eta] dx dt = \iint_{Q_T} u_x \psi_x \eta dx dt \tag{43}$$

при любой функции $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$.

Из результатов работы [16, с. 197–202] следует, что краевая задача (40) – (42) при заданном $v \in V$ однозначно разрешима в $W_2^1(Q_T)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда градиент функционала (5) в произвольной точке $v \in V$ определяется равенством

$$J'(v) = (\omega(x, t; v), u(x, t; v) \psi(x, t; v)) \tag{44}$$

и отображение $v \rightarrow J'(v)$ непрерывно действует из V в H .

Доказательство. Пусть $v, v + \Delta v \in V$ – произвольные управления, где $\Delta v = (\Delta k, \Delta q) \in H$ – приращение управления на элементе $v = (k, q) \in V$. Полагая в тождестве (43) $\eta = \Delta k$, получаем равенство

$$\iint_{Q_T} [\omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + \omega \Delta k] dx dt = \iint_{Q_T} u_x \psi_x \Delta k dx dt,$$

учитывая которое в (29), имеем

$$dJ(v, \Delta v) = \langle J'(v), \Delta v \rangle_H = \iint_{Q_T} (\omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + \omega \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt,$$

где $\langle J'(v), \Delta v \rangle_H$ – скалярное произведение элементов $J'(v), \Delta v \in H$ на H . Отсюда следует, что градиент функционала (5) определяется равенством (29).

Используя априорные оценки для краевых задач (1) – (3), (23) – (25), (40) – (42) и рассуждая аналогично выводу оценки (39), можно показать, что справедливо

неравенство $\|J'(v + \Delta v) - J'(v)\|_H \leq M \|\Delta v\|_H$. Отсюда следует непрерывность отображения $v \rightarrow J'(v)$ из V в H . Теорема 3 доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1) – (5) устанавливает

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для оптимальности управления $v_* = (k_*, q_*) \in V$ в задаче (1) – (5) необходимо, чтобы неравенство

$$\iint_{Q_T} [\omega_{*x}(k_x - k_{*x}) + \omega_{*t}(k_t - k_{*t}) + \omega_*(k - k_*) + u_* \psi_*(q - q_*)] dx dt \geq 0 \quad (45)$$

выполняюсь для любого $v = (k, q) \in V$, где $u_* = u(x, t; v_*)$, $\psi_* = \psi(x, t; v_*)$, $\omega_* = \omega(x, t; v_*)$ – решения задач (1) – (3); (23) – (25); (40) – (42) соответственно, при $v = v_*$.

Доказательство. Множество V , определяемое равенством (4), выпукло в H . Кроме того, согласно теоремам 2 и 3, функционал (5) непрерывно дифференцируем по Фреше на V . Тогда в силу теоремы 5 из [18, с. 28] на элементе $v_* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(v), v - v_* \rangle_H \geq 0$ при всех $v \in V$. Отсюда и из (44) следует справедливость неравенства (45). Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионкин Н.И.* Решение краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
2. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
3. *Нахушев А.З.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
4. *Иванцов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 547–564.
5. *Кожанов А.Н.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 30. С. 63–69. DOI 10.14498/vsgtu308.
6. *Пулкина Л.С.* Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат. СО РАН, 2005. С. 231–239.
7. *Данилкина О.Ю.* Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 1(14). С. 5–9.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
9. *Серовайский С.Я.* Задачи оптимального управления в коэффициентах для уравнения параболического типа // Изв. вузов. Сер. матем. 1982. № 12. С. 44–50.
10. *Искендеров А.Д., Тагиев Р.К.* Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1324–1334.
11. *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1492–1501.
12. *Тагиев Р.К.* Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 380–392. DOI 10.1134/S0374064113030138.
13. *Hem R.J.* Optimal control of the convective velocity coefficient in a parabolic problem // Nonlinear Anal. 2005. V. 63. P. 1383–1390.
14. *Тагиев Р.К., Гашимов С.А.* Задача оптимального управления в коэффициентах параболического уравнения при наличии фазовых ограничений // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 27–45.

15. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
 16. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
 17. Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Мир, 1987. 368 с.
 18. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

Статья поступила 15.02.2016 г.

Tagiyev R.K., Gashimov S.A., Gabibov V.M. (2016) ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION AND CONTROLS IN COEFFICIENTS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 31–41

DOI 10.17223/19988621/41/3

In this paper, an optimal control problem for a parabolic equation with an integral boundary condition and controls in coefficients is considered. Let it be required to minimize the functional

$$J(v) = \int_0^{\ell} |u(x, T; v) - y(x)|^2 dx$$

on the solutions $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ of the boundary value problem

$$u_t - (k(x, t)u_x)_x + q(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T\}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad k(l, t)u_x(\ell, t) = \int_0^{\ell} H(x)u_x(x, t)dx + g(t), \quad 0 < t \leq T,$$

corresponding to all allowable controls $v = v(x, t) = (k(x, t), q(x, t))$ from the set

$$V = \{v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, \\ |k_x(x, t)| \leq \mu_1, |k_t(x, t)| \leq \mu_2, |q(x, t)| \leq \mu_3 \text{ a.e. on } Q_T\}.$$

Here, $l, T, v, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ are given numbers and $y(x), \varphi(x) \in W_2^1(0, \ell)$, $H(x) \in W_2^1(0, \ell)$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, and $g(t) \in W_2^1(0, T)$ are known functions.

The work deals with problems of correctness in formulating the considered optimal control problem in the weak topology of the space $H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T)$. Examples showing that this problem is incorrect in the general case in the strong topology of the space H are presented. The objective functional is proved to be continuously Frechet differentiable and a formula for its gradient is found. A necessary condition of optimality is established in the form of a variational inequality.

Keywords: optimal control, parabolic equation, integral boundary condition, optimality condition.

TAGIYEV Rafiq Kalandar (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Azerbaijan)

E-mail: r.tagiyev@list.ru

HASHIMOV Sadiq Akif (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Azerbaijan)

E-mail: s.hashimov@list.ru

GABIBOV Vaxab Mexti (Senior Lecturer, Lenkaran State University, Azerbaijan)

E-mail: vahab.hebibov@mail.ru

REFERENCES

1. Ionkin N.I. (1977) Reshenie kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem [The solution of the boundary problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 13(2). pp. 294–304.
2. Samarskii A.A. (1980) O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy [On some problems of the theory of differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 16(11). pp. 1925–1935.
3. Nakhushiev A.Z. (1995) *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow: Vysshaya Shkola.
4. Ivanchov N.I. (2004) Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Differentsial'nye uravneniya*. 40, no. 4. pp. 591–609.
5. Kozhanov A.N. (2004) O razreshimosti kraevoy zadachi s nelokal'nym granichnym usloviem dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy [On solvability of the boundary value problem with a nonlocal boundary condition for linear parabolic equations]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 30. pp. 63–69. DOI 10.14498/vsgtu308.
6. Pulkkinen L.S. (2005) *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki* [Non-classical equations of mathematical physics]. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ. pp. 231–239. (in Russian)
7. Danilkina O.Yu. (2007) Ob odnoy nelokal'noy zadache dlya uravneniya teploprovodnosti s integral'nym usloviem [A nonlocal problem for the heat conduction equation with an integral condition] *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 1(14). pp. 5–9.
8. Lions J.L. (1968) *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles* [Optimal control of systems governed by partial differential equations]. Paris, Dunod, Gauthier-Villars. (In French).
9. Serovayskiy S.Ya. (1982) Zadachi optimal'nogo upravleniya v koeffitsientakh dlya uravneniya parabolicheskogo tipa [Optimal control problems in coefficients for a parabolic type equation]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 12. pp. 44–50.
10. Iskenderov A.D., Tagiev R.K. (1983) Zadachi optimizatsii s upravleniyami v koeffitsientakh parabolicheskogo uravneniya [Optimization problems with controls in coefficients of a parabolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 19(8). pp. 1324–1334.
11. Tagiev R.K. (2009) Optimal coefficient control in parabolic systems. *Differential Equations*. 45(10). pp. 1526–1535. DOI 10.1134/S0012266109100164.
12. Tagiev R.K. (2013) Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints. *Differential Equations*. 49(3). pp. 369–381. DOI 10.1134/S0012266113030129.
13. Hem R.J. (2005) Optimal control of the convective velocity coefficient in a parabolic problem. *Nonlinear Anal.* 63. pp. 1383–1390.
14. Tagiev R.K., Gashimov S.A. (2015) The optimal control problem for the coefficients of a parabolic equation under phase constraints. *Automation and Remote Control*. 7(8). pp. 1347–1360. DOI 10.1134/S0005117915080020.
15. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
16. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. (1967) *Lineinye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of the parabolic type]. Moscow: Nauka.
17. Lions J.L. (1983) *Contrôle des systèmes distribués singuliers*. Paris: Gauthier-Villars. (In French).
18. Vasil'ev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/41/4

А.Р. Чехлов

**ВПОЛНЕ ИНЕРТНЫЕ ПОДГРУППЫ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП
КОНЕЧНОГО РАНГА И ИХ СОИЗМЕРИМОСТЬ**

Показано, что каждая вполне инертная подгруппа вполне разложимой группы G конечного ранга соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда типы прямых слагаемых ранга 1 группы G либо равны, либо несравнимы, причем все прямые слагаемые ранга 1 группы G не делятся ни на одно простое число p .

Ключевые слова: фактор-группа, вполне инвариантная подгруппа, соизмеримые подгруппы, делимая оболочка, ранг группы.

Все группы, если специально не оговорено, предполагаются абелевыми. Напомним, что подгруппа H группы G называется *чистой*, если $H \cap nG = nH$ для каждого натурального n ; *вполне инвариантной*, если $\varphi H \subseteq H$ для всякого φ из кольца эндоморфизмов $E(G)$ группы G . Подгруппа H группы G называется *вполне инертной*, если фактор-группа $(H + \varphi H)/H$ конечна (эквивалентно подгруппа $H \cap \varphi H$ имеет конечный индекс в φH) для всякого $\varphi \in E(G)$; если это свойство выполнено только для фиксированного φ , то подгруппа H называется *φ -инертной*. Ясно, что каждая конечная подгруппа и подгруппа, имеющая конечный индекс в некоторой вполне инвариантной подгруппе, являются вполне инертными. Если H – чистая подгруппа группы без кручения G , то фактор-группа G/H также является группой без кручения. Отсюда следует, что все чистые вполне инертные подгруппы групп без кручения вполне инвариантны. Сумма и пересечение двух вполне инертных подгрупп снова являются вполне инертными подгруппами [1, лемма 2.2]; в случае же бесконечного семейства вполне инертных подгрупп ни их сумма, ни их пересечение вполне инертными подгруппами в общем случае не являются [1, пример 2.7]. Подгруппы H, K произвольной (в том числе и некоммутативной) группы G называются *соизмеримыми*, если подгруппа $K \cap H$ имеет конечный индекс в H и в K . Ясно, что в группе без кручения чистые соизмеримые подгруппы совпадают.

Вполне инертные подгруппы абелевых групп изучались в [1–3]. Соизмеримость является отношением эквивалентности [2, лемма 2.3]. Ясно, что подгруппа H группы G вполне инертна тогда и только тогда, когда H соизмерима с $H + \varphi H$ для каждого $\varphi \in E(G)$. Подгруппа, соизмеримая с некоторой вполне инертной подгруппой, сама является вполне инертной [1, следствие 2.9]. Согласно [2], всякая вполне инертная подгруппа свободной группы соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; а в [3] показано, что всякая вполне инертная подгруппа p -группы, разложимой в прямую сумму циклических групп, также соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; делимые группы таким свойством в общем случае не обладают [1]. В [3, теорема 4.2] построен пример сепарабельной p -группы континуальной мощности, содержащей вполне инертные подгруппы, не соизмеримые с вполне инвариантными подгруппами.

В [4–7] и в др. работах исследовались *инертные* подгруппы некоммутативных групп (согласно [4], термин *инертная подгруппа* предложен профессором О. Кегелем), т.е. такие подгруппы H группы G , что $H \cap H^g$ имеет конечный индекс в H для любого $g \in G$, где H^g – подгруппа, сопряженная с H при помощи элемента g . Интересный пример инертной подгруппы – подгруппа $SL(n, \mathbb{Z})$ в $SL(n, \mathbb{Q})$ [4]. Каждая нормальная подгруппа инертна; всякая подгруппа конечного индекса из нормальной подгруппы инертна; и, более общо, подгруппы, соизмеримые с инертными подгруппами, сами инертны.

Отметим также, что в [8] изучались такие автоморфизмы φ абелевой группы G , что H и φH соизмеримы для всякой подгруппы H группы G .

Если B, G – группы и X – непустое подмножество в B , то через $\text{Hom}(B, G)X$ обозначим подгруппу в G , порожденную всеми подмножествами fX , где $f \in \text{Hom}(B, G)$.

Некоторые примеры вполне инертных подгрупп построены в [1–3], приведем также следующие.

Пример 1 [1, лемма 2.3]. В группе без кручения G конечного ранга всякая конечно порожденная подгруппа H максимального ранга вполне инертна.

Действительно, фактор-группа G/H периодична, поэтому если $\varphi \in E(G)$, то фактор-группа $\varphi H / (H \cap \varphi H)$ как конечно порожденная периодическая группа конечна.

Пример 2. Пусть A – группа без кручения, p, q – различные простые числа, $pA \neq A, qA \neq A$, и $G = (\oplus_{\alpha} A) \oplus (\oplus_{\beta} A)$, где α и β – равные бесконечные кардиналы. Тогда подгруппа $H = (\oplus_{\alpha} pA) \oplus (\oplus_{\beta} qA)$ не является вполне инертной.

Имеем $|G/H| \geq \aleph_0$, и легко строится эндоморфизм φ группы G со свойством $H + \varphi H = G$.

Пример 3. В группе без кручения G ранга 1 каждая ее подгруппа H является вполне инертной.

Действительно, всякий эндоморфизм φ группы G действует как умножение на некоторое рациональное число m/n . Поэтому $n(H + \varphi H) \subseteq H$. Значит, фактор-группа $(H + \varphi H)/H \cong \varphi H / (H \cap \varphi H)$ конечна как ограниченный гомоморфный образ группы φH ранга ≤ 1 .

В [1, определение 1.3] абелева группа называется *инертной*, если она вполне инертна в своей делимой оболочке. Поскольку группа существенна в своей делимой оболочке, то из инъективности делимых групп следует, что инертные группы совпадают с классом групп, являющихся вполне инертными подгруппами в каждом своем существенном расширении. Пример 3 отражает тот факт, что всякая группа без кручения ранга 1 инертна [1, пример 4.7]. Группа без кручения инертна тогда и только тогда, когда она является однородной вполне разложимой группой конечного ранга [1, теорема 4.9].

Пример 4. Пусть G – группа без кручения ранга 1. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) всякая вполне инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой;

б) всякая подгруппа группы G является вполне инвариантной;

с) $pG \neq G$ для каждого простого числа p .

а) \Rightarrow с). Если $pG = G$, то всякая ненулевая вполне инвариантная подгруппа группы G также p -делима, поэтому она не может быть соизмеримой с циклической подгруппой группы G , которая согласно примеру 3 вполне инертна. с) \Rightarrow б).

Если $pG \neq G$ для всякого простого числа p , то кольцо эндоморфизмов группы G изоморфно кольцу целых чисел \mathbb{Z} , поэтому всякая подгруппа группы G вполне инвариантна. Импликация $b) \Rightarrow a)$ очевидна.

Итак, во всякой группе без кручения ранга 1, p -делимой хотя бы для одного простого числа p , имеются вполне инертные подгруппы, не соизмеримые с вполне инвариантными подгруппами.

Пример 5. Пусть H – вполне инертная подгруппа группы A , не соизмеримая ни с одной ее вполне инвариантной подгруппой; B – такая группа, что $\text{Hom}(B, A) = 0$. Тогда $H \oplus B$ – вполне инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, не соизмеримая ни с одной вполне инвариантной подгруппой группы G .

Хорошо известно, что делимая часть $D = D(G)$ всякой группы G всегда выделяется прямым слагаемым $G = D \oplus R$ (R – редуцированная часть группы G); D определяется однозначно, а R – с точностью до изоморфизма. Если X – вполне инвариантная подгруппа в G , то $X = (D \cap X) \oplus (R \cap X)$. Из инъективности делимых групп следует, что если хотя бы одна из подгрупп $D \cap X$ или $R \cap X$ не является периодической, то $D \cap X = D$. Для вполне инертных подгрупп это свойство уже не справедливо.

Пример 6. а) Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus R$, где \mathbb{Q} – аддитивная группа рациональных чисел (т.е. делимая группа без кручения ранга 1), R – редуцированная группа без кручения ранга 1, $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ и $0 \neq b \in R$. Тогда подгруппа $H = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ является вполне инертной.

б) Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, где \mathbb{Z}_{p^∞} – квазициклическая p -группа (т.е. делимая p -группа ранга 1), $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ и X – нетривиальная подгруппа в \mathbb{Z}_{p^∞} . Тогда подгруппа $H = \langle a \rangle \oplus X$ является вполне инертной.

с) Пусть $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}$, где \mathbb{Z} – аддитивная группа целых чисел и X – нетривиальная подгруппа в \mathbb{Z}_{p^∞} . Тогда подгруппа $H = X \oplus \mathbb{Z}$ является вполне инертной.

д) Пусть $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus A$, где группа A не имеет ненулевых p -делимых факторгрупп. Тогда подгруппа A вполне инертна в G .

Действительно, во всех трех первых случаях подгруппа H существенна в G , и в случае а) H – прямая сумма двух бесконечных циклических групп, в случаях б) и с) – прямая сумма бесконечной циклической группы и циклической p -группы. Поэтому для всякого $\varphi \in E(G)$ фактор-группа $\varphi H / (H \cap \varphi H)$ является ограниченной группой конечного ранга, такая группа конечна. д) Следует из того, что fA – конечная подгруппа в \mathbb{Z}_{p^∞} для каждого $f \in \text{Hom}(A, \mathbb{Z}_{p^\infty})$.

Пример 7. Пусть $A \not\cong \mathbb{Z}$ – группа без кручения ранга 1, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно \mathbb{Z} . Тогда если $0 \neq a \in A$ и $H = \langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}$, то H является вполне инертной подгруппой в $G = A \oplus \mathbb{Z}$, не соизмеримой ни с какой вполне инвариантной подгруппой группы G .

Подгруппа H вполне инертна согласно примеру 1. Если теперь F – вполне инвариантная подгруппа, соизмеримая H , то $H / (F \cap H)$ – конечная группа, поэтому $n\mathbb{Z} \subseteq F$ для некоторого натурального n . Откуда $nG \subseteq F$. Имеем $nG \cap H = (nA \cap \langle a \rangle) \oplus n\mathbb{Z}$, поэтому $nG / (nG \cap H) \cong nA / (nA \cap \langle a \rangle)$. Фактор-группа $nA / (nA \cap \langle a \rangle)$ бесконечна, при этом $nG / (nG \cap H)$ вкладывается в $F / (F \cap H)$.

Отметим следующие простые свойства, на которые будем ссылаться.

1. Если H – вполне инертная подгруппа группы G , то для любых $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E(G)$ подгруппа $H + \varphi_1(H) + \dots + \varphi_n(H)$ соизмерима с H .

2. Если подгруппа H соизмерима с подгруппой K , то H соизмерима с $H \cap K$ и с $H + K$, если к тому же $H \subseteq F$, то H соизмерима с $K \cap F$.

3. Если подгруппа H соизмерима с подгруппами $H_i, i = 1, \dots, n$, то H соизмерима с $H_1 + \dots + H_n$ и с $H_1 \cap \dots \cap H_n$.

Фактор-группа $(H + H_1 + \dots + H_n)/H = (H + H_1)/H + \dots + (H + H_n)/H$ конечна как сумма конечного числа конечных групп $(H + H_i)/H$; в частности, конечна и фактор-группа $(H + H_1 \cap \dots \cap H_n)/H$. А фактор-группа

$$(H + H_1 + \dots + H_n)/(H_1 + \dots + H_n) \cong H/(H \cap (H_1 + \dots + H_n))$$

конечна как гомоморфный образ конечной группы $H/(H \cap H_1)$. Осталось установить конечность фактор-группы $H/(H \cap (H_1 \cap \dots \cap H_n))$ и достаточно проверить это для $n = 2$. По условию фактор-группы $H/(H \cap H_1)$ и $H/(H \cap H_2)$ конечны. Конечна и фактор-группа $(H \cap H_2)/(H \cap H_1 \cap H_2)$. В силу изоморфизма

$$H/(H \cap H_2) \cong (H/(H \cap H_1 \cap H_2))/((H \cap H_2)/(H \cap H_1 \cap H_2))$$

если $H/(H \cap H_1 \cap H_2)$ была бы бесконечной, то бесконечной была бы и $H/(H \cap H_2)$.

4. Если подгруппа H соизмерима с подгруппой K , то для всякого гомоморфизма f подгруппа fH соизмерима с fK , если к тому же F соизмерима с U , то $H + F$ соизмерима с $K + U$, а $H \cap F$ соизмерима с $K \cap U$.

Если H имеет конечный индекс в $H + K$, то fH также имеет конечный индекс в $f(H + K) = fH + fK$. Откуда следует, что подгруппа fH соизмерима с fK . Далее по условию фактор-группы $K/(H \cap K)$ и $U/(F \cap U)$ конечны. Поэтому конечны фактор-группы

$$(K \cap U)/(H \cap K \cap U) \text{ и } (H \cap K \cap U)/(H \cap K \cap F \cap U).$$

Имеем

$$(K \cap U)/(H \cap K \cap U) \cong ((K \cap U)/(F \cap H \cap K \cap U))/((H \cap K \cap U)/(F \cap H \cap K \cap U)).$$

Поэтому если бы фактор-группа $(K \cap U)/(F \cap H \cap K \cap U)$ была бы бесконечной, то была бы бесконечной и фактор-группа $(K \cap U)/(H \cap K \cap U)$. Конечность фактор-группы $(H \cap F)/(F \cap H \cap K \cap U)$ доказывается аналогично. Несложно проверить и соизмеримость $H + F$ с $K + U$.

5. Если H – вполне инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то подгруппа $H \cap A$ вполне инертна в A , подгруппа $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ соизмерима с H , а если $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$, то подгруппа $H \cap A + \varphi(H \cap B)$ соизмерима с $H \cap A$.

Первое утверждение доказано в [3, лемма 3.2]. Если теперь $\pi: G \rightarrow A$ и $\theta: G \rightarrow B$ – проекции, то $H \subseteq (\pi H) \oplus (\theta H)$, поэтому по свойству 1 подгруппа $(\pi H) \oplus (\theta H)$ соизмерима с H . Далее $H + \pi H$ и $H + \theta H$ соизмеримы с H , а так как

$$(H + \pi H)/H \cong \pi H/(H \cap \pi H) \text{ и } (H + \theta H)/H \cong \theta H/(H \cap \theta H),$$

где $H \cap \pi H = H \cap A$ и $H \cap \theta H = H \cap B$, то $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ соизмерима с $(\pi H) \oplus (\theta H)$ и, значит, с H , а πH соизмерима с $H \cap A$. Подгруппа $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ ввиду вполне инертности соизмерима с $(H \cap A + \varphi(H \cap B)) \oplus (H \cap B) = (H \cap A) \oplus (H \cap B) + \varphi(H \cap B)$, поэтому $H \cap A = \pi((H \cap A) \oplus (H \cap B))$ соизмерима с $H \cap A + \varphi(H \cap B) = \pi((H \cap A + \varphi(H \cap B)) \oplus (H \cap B))$.

6. Если H – вполне инертная подгруппа группы без кручения G , то $\varphi H \subseteq H_*$ для всякого $\varphi \in E(G)$, где H_* – чистая оболочка подгруппы H в G . В частности, подгруппа H_* вполне инвариантна в G [1, лемма 2.1].

Это свойство вытекает из того, что H_*/H совпадает с периодической частью фактор-группы G/H . В частности, в неприводимой группе без кручения G ненулевая вполне инертная подгруппа будет существенной в G . Неприводимыми, например, являются однородные вполне разложимые группы без кручения.

Напомним, что если H – подгруппа группы G , то $E(G)H = \sum_{\varphi \in E(G)} \varphi H$ является наименьшей вполне инвариантной подгруппой, содержащей H ; а $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n H$ – наименьшая φ -инвариантная подгруппа, содержащая H .

7. *Вполне инертная подгруппа H группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу конечного индекса K , имеющую конечный индекс в $E(G)K$.*

Достаточность следует из транзитивного свойства соизмеримости. *Необходимость.* Пусть H соизмерима с вполне инвариантной подгруппой F . Тогда $K = H \cap F$ имеет конечный индекс в F , а так как $E(G)K \subseteq F$, то K имеет конечный индекс в $E(G)K$.

8. *Если вполне инертная подгруппа H группы G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения, то H содержит делимую часть $D = D(G)$ группы G ; а если H содержит подгруппу, изоморфную \mathbb{Z}_{p^∞} , то H содержит p -компоненту группы D .*

Делимая часть $D(H)$ группы H выделяется прямым слагаемым в G . Всякая делимая группа ранга 1 является гомоморфным образом группы \mathbb{Q} . Поэтому если $D(H)$ группа непериодическая, то она содержит прямое слагаемое, изоморфное \mathbb{Q} . Получаем, что для каждой делимой подгруппы D' ранга 1 группы D существует такой эндоморфизм φ группы G , что $H \cap \varphi H$ является подгруппой конечного индекса в D' . Делимые группы не имеют собственных подгрупп конечного индекса, поэтому $D \subseteq H$. В случае подгруппы \mathbb{Z}_{p^∞} рассуждения аналогичны.

Через G_p обозначим p -компоненту группы G .

9. *Если $G = D \oplus R$, где $D = F \oplus (\oplus_p D_p)$ – делимая часть группы G , F – делимая часть без кручения, $\oplus_p D_p$ – периодическая часть группы D и H – такая вполне инертная подгруппа группы G , что подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то подгруппа $H \cap F$ существенна в F , причем $D \subseteq H$, если ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен. Если же подгруппа $H \cap R_p$ не является ограниченной, то $D_p \subseteq H$.*

Если подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то она содержит бесконечную циклическую подгруппу. Поскольку делимые группы инъективны, то отсюда следует, что $H \cap D' \neq 0$ для всякой делимой подгруппы без кручения D' ранга 1, в частности $H \cap F$ существенна в F . Если же ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен, то она содержит свободную группу K бесконечного ранга, всякая счетная группа является гомоморфным образом группы K ; откуда следует, что H содержит каждую подгруппу ранга 1 группы D , значит, $D \subseteq H$. Если группа $H \cap R_p$ неограниченная, то существует эпиморфизм $H \cap R_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$, откуда следует, что $D_p \subseteq H$.

Очевидно, что если A – вполне инвариантное прямое слагаемое группы G , то всякая вполне инертная подгруппа группы A будет вполне инертной подгруппой группы G . Справедливость следующего свойства также очевидна.

10. 1) Пусть $G = A \oplus B$. Вполне инертная подгруппа H группы A является вполне инертной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда fH – конечная группа для каждого $f \in \text{Hom}(A, B)$. В частности, если A – вполне инертное прямое слагаемое в G , то $\text{Hom}(A, B)A$ – периодическая подгруппа в B .

2) Если B – группа без кручения, а H – существенная вполне инертная подгруппа группы A , то H будет вполне инертной подгруппой группы $G = A \oplus B$ тогда и только тогда, когда A – вполне инвариантное прямое слагаемое в G .

Напомним следующие понятия. Если $\chi_1 = (k_1, k_2, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, l_2, \dots)$ – характеристики, то их произведением называется характеристика $\chi_1 \chi_2 = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \dots)$, где ∞ плюс нечто есть ∞ . Частное $\chi_1 : \chi_2$ двух характеристик $\chi_1 \geq \chi_2$ определяется как наибольшая характеристика χ , для которой $\chi \chi_2 \leq \chi_1$. Исходя из этих понятий, определяют произведение и частное типов.

Предложение 1 [9, предложение 85.4]. Пусть A и C – группы без кручения ранга 1. Если неравенство $t(A) \leq t(C)$ не имеет места, то $\text{Hom}(A, C) = 0$. Если же $t(A) \leq t(C)$, то $\text{Hom}(A, C)$ является группой без кручения ранга 1 и имеет тип $t(C) : t(A)$.

Теорема 2. Пусть $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, где $r(G_i) = 1$, – вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Каждая вполне инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG_i \neq G_i$ для всякого $i = 1, \dots, n$ и для всякого простого числа p , причем при всех $i, j = 1, \dots, n$ типы $t(G_i), t(G_j)$ либо равны, либо несравнимы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть вполне инертная подгруппа $H = \langle g_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle$, где $0 \neq g_i \in G_i$, соизмерима с вполне инвариантной подгруппой F . Из соизмеримости H и F следует $r(F) = r(H) = n$. Отсюда можно вывести, что для всякого i найдётся ненулевой элемент $f_i \in F \cap G_i$. Пусть $pG_i = G_i$. Тогда вполне инвариантная подгруппа $E(G_i) \langle f_i \rangle$ группы G_i тоже p -делима, причём она содержится в группе $E(G)F = F$. По свойству 4 подгруппа $\pi_i F$ соизмерима с $\pi_i H$. Но так как $\pi_i F$ содержит ненулевую p -делимую группу, то $(\pi_i F + \pi_i H) / \pi_i H$ есть бесконечная группа – противоречие. Пусть $t(G_i) < t(G_j)$. Тогда $\text{Hom}(G_i, G_j) \langle f_i \rangle$ – это подгруппа типа $t(G_j) : t(G_i)$, содержащаяся и в G_j и в F . По свойству 4 подгруппа $\pi_j F$ соизмерима с $\pi_j H$. Но так как $\pi_j F$ содержит подгруппу типа $t(G_j) : t(G_i)$, строго большего, чем тип группы $\langle g_j \rangle$, то $(\pi_j F + \pi_j H) / \pi_j H$ есть бесконечная группа – противоречие.

Достаточность. Пусть H – вполне инертная подгруппа группы G . Согласно свойству 5, достаточно показать, что подгруппа $(H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n)$ соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой. Поскольку $pG_i \neq G_i$ для всякого простого числа p и для всех $i = 1, \dots, n$, то группа $\text{Hom}(G_i, G_j)$ либо изоморфна группе целых чисел \mathbb{Z} (если тип группы G_i равен типу группы G_j), либо $\text{Hom}(G_i, G_j) = 0$ (если тип группы G_i не сравним с типом группы G_j). Поэтому для всякой подгруппы $X \subseteq G_i$ имеет место равенство $\text{Hom}(G_i, G_j)X = fX$, где f – гомоморфизм, порождающий группу $\text{Hom}(G_i, G_j)$ (все другие гомоморфизмы этой группы являются целыми кратными гомоморфизма f). А поскольку $\text{Hom}(G, G) \cong \text{Hom}(G_1, G_1) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(G_n, G_n)$, то отсюда следует, что если $\underline{H}_i = \text{Hom}(G, G_i)((H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n))$, то $H \cap G_i \subseteq \underline{H}_i$ и $H \cap G_i$ соизмерима с \underline{H}_i . Значит, $\underline{H} = \underline{H}_1 \oplus \dots \oplus \underline{H}_n$ соизмерима с $(H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n)$. Ясно, что \underline{H}_i – вполне инвариантная подгруппа группы G_i и поскольку $\text{Hom}(G_i, G_j)\underline{H}_i \subseteq \underline{H}_j$, то подгруппа \underline{H} вполне инвариантна в G .

Следствие 3.1) Если G – однородная вполне разложимая группа конечного ранга, то всякая ее вполне инертная подгруппа соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG \neq G$ для всякого простого числа p .

2) В однородной вполне разложимой группе G конечного ранга вполне инертная подгруппа H соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pH = H$ для всякого простого числа p со свойством $pG = G$.

Представляет интерес изучение вполне инертных подгрупп групп, исследуемых в [10–15]. Отметим, что в ряде случаев автор получил ответ, когда каждая вполне инертная подгруппа вполне разложимой группы без кручения бесконечного ранга соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой.

В заключение отметим, что в [16] изучались *сильно инвариантные* подгруппы, т.е. такие подгруппы N группы G , что $fN \subseteq N$ для всякого $f \in \text{Hom}(N, G)$. А *сильно инертной* (S. Breaz, G. Călugăreanu) называется подгруппа N группы G такая, что $fN \cap N$ имеет конечный индекс в fN для каждого $f \in \text{Hom}(N, G)$. В каждой группе G ее подгруппа $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$ сильно инертна, семейство сильно инертных подгрупп замкнуто относительно конечных сумм, но не пересечений. Если всякий гомоморфизм из $\text{Hom}(N, G)$ продолжается до эндоморфизма группы G (например, если N – прямое слагаемое в G), то вполне инертная подгруппа N будет сильно инертной. Вышеупомянутыми двумя авторами получен также ряд других интересных свойств сильно инертных подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. Fully inert subgroups of divisible Abelian groups // J. Group Theory. 2013. V. 16. No 6. P. 915–939.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar. 2014. V. 69. No 1. P. 69–78. DOI 10.1007/s10998-014-0041-4.
3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of Abelian p -groups // J. of Algebra. 2014. V. 419. P. 332–349.
4. Беляев В.В. Инертные подгруппы в бесконечных простых группах // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 4. С. 17–23.
5. Беляев В.В. Локально конечные группы с конечной неотделимой подгруппой // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 2. С. 23–41.
6. Belyaev V.V., Kuzucuoglu M., Seçkin E. Totally inert groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 151–156.
7. Dixon M.R., Evans M.J., Tortora A. On totally inert simple groups // Cent. Eur. J. Math. 2010. V. 8. No 1. P. 22–25. DOI 10.2478/s11533-009-0067-7.
8. Dardano U., Rinauro S. Inertial automorphisms of an abelian group // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2012. V. 127. P. 213–233. DOI 10.4171/RSMUP/127-11.
9. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 417 с.
10. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
11. Чехлов А.Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 2. С. 451–464.
12. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
13. Чехлов А.Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1157–1165.
14. Чехлов А.Р. Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17. № 8. С. 183–219.

15. Chekhlov A.R., Danchev P.V. On Abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // *Comm. Algebra*. 2015. V. 43. No. 12. P. 5059–5073. DOI 10.1080/00927872.2015.1008011.
16. Călușăreanu G. Strongly invariant subgroups // *Glasg. Math. J.* 2015. V. 57. No. 2. P. 431–443. DOI 10.1017/S0017089514000391.

Статья поступила 21.03.2016 г.

Chekhlov A.R. (2016) FULLY INERT SUBGROUPS OF COMPLETELY DECOMPOSABLE FINITE RANK GROUPS AND THEIR COMMENSURABILITY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 42–50

DOI 10.17223/19988621/41/4

A subgroup H of an Abelian group G is said to be fully inert in G if the subgroup $H \cap \varphi H$ has a finite index in φH for any endomorphism φ of the group G . Subgroups H and K of the group G are said to be commensurable if the subgroup $K \cap H$ has a finite index in H and in K . Some properties of fully inert and commensurable groups in the context of direct decompositions of the group and operations on subgroups are proved. For example, if a subgroup H is commensurable with a subgroup K , then H is commensurable with $H \cap K$ and with $H + K$; if a subgroup H is commensurable with a subgroup K , then the subgroup fH is commensurable with fK for any homomorphism f . The main result of the paper is that every fully inert subgroup of a completely decomposable finite rank torsion-free group G is commensurable with a fully invariant subgroup if and only if types of rank 1 direct summands of the group G are either equal or incomparable, and all rank 1 direct summands of the group G are not divisible by any prime number p .

Keywords: factor group, fully invariant subgroup, commensurable subgroups, divisible hull, rank of the group.

CHEKHOV *Andrey Rostislavovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. (2013) Fully inert subgroups of divisible Abelian groups *J. Group Theory*. 16(6). pp. 915–939.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of free Abelian groups. *Period. Math. Hungar.* 69(1). pp. 69–78. DOI 10.1007/s10998-014-0041-4.
3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of Abelian p -groups. *J. of Algebra*. 419. pp. 332–349.
4. Belyaev V.V. (1993) Inert subgroups in infinite simple groups. *Sib. Math. J.* 34(4). pp. 606–611. DOI 10.1007/BF00975160.
5. Belyaev V.V. (1993) Locally finite groups containing a finite inseparable subgroup. *Sib. Math. J.* 34(2). pp. 218–232.
6. Belyaev V.V., Kuzucuoğlu M., Seçkin E. (1999) Totally inert groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 102. pp. 151–156.
7. Dixon M.R., Evans M.J., Tortora A. (2010) On totally inert simple groups. *Cent. Eur. J. Math.* 8(1). pp. 22–25. DOI 10.2478/s11533-009-0067-7.
8. Dardano U., Rinauro S. (2012) Inertial automorphisms of an abelian group. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 127. pp. 213–233. DOI 10.4171/RSMUP/127-11.
9. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups. Vol. II*. New York and London: Academic Press.
10. Chekhlov A.R. (2001) On a class of endotransitive groups. *Math. Notes*. 69(5-6). pp. 863–867. DOI 10.4213/mzm709.
11. Chekhlov A.R. (2012) On the projective commutant of Abelian groups. *Sib. Math. J.* 53(2). pp. 361–370. DOI 10.1134/S0037446612020188.

12. Chekhlov A.R. (2012) Abelian groups with nilpotent commutators of endomorphisms. *Russian Math.* 56(10), pp. 50–61. DOI 10.3103/S1066369X12100052.
13. Chekhlov A.R. (2012) On projectively soluble abelian groups. *Sib. Math. J.* 53(5), pp. 927–933. DOI 10.1134/S0037446612050175.
14. Chekhlov A.R. (2014) On Abelian Groups Close to E-Solvable Groups. *J. Math. Sci.* 197(5), pp. 708–733. DOI 10.1007/s10958-014-1755-9.
15. Chekhlov A.R., Danchev P.V. (2015) On Abelian Groups Having All Proper Fully Invariant Subgroups Isomorphic. *Comm. Algebra.* 43(12), pp. 5059–5073. DOI 10.1080/00927872.2015.1008011.
16. Călugăreanu G. (2015) Strongly invariant subgroups. *Glasg. Math. J.* 57(2), pp. 431–443. DOI 10.1017/S0017089514000391.

МЕХАНИКА

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/41/5

**А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков,
В.А. Потеряева, Э.Е. Либин**

ВОЛНОВАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СЛОЯ КОМПАКТИРОВАННЫХ НАНОЧАСТИЦ

Применительно к движению молекул гелия через слой компактированных алмазных наночастиц рассмотрена одномерная задача волновой динамики. Предложена вычислительная технология для интегрирования уравнения Шредингера, основанная на выделении двух фундаментальных численных решений задачи о прохождении волн через барьер. Линейная комбинация этих решений определяет искомую волновую функцию, а ее сшивка с асимптотическими граничными условиями позволяет определить коэффициенты прохождения и отражения частиц от барьера, в роли которого выступает энергия компактированных наночастиц.

Ключевые слова: *поле потенциальных сил, наночастицы, движение молекул, численные методы, проницаемость, уравнение Шредингера.*

Классические гамильтоновы системы, используемые в молекулярной динамике в качестве математической модели, не позволяют решать задачи о накоплении частиц даже в случае изучения проницаемости сверхтонких нанопористых слоев, где, несмотря на их малые размеры, все равно речь идет о нахождении миллионов молекул в представительных объемах, примыкающих к наноразмерному слою. Если воспользоваться дебройлевским представлением частицы и шредингеровской волновой динамикой, то плотность молекул в окрестности и внутри слоя будет находиться автоматически в процессе решения задачи. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что плотность вероятности нахождения частиц есть квадрат модуля волновой функции.

В работе Глазера [1] показано, что уравнение Шредингера получается из положений классической механики посредством применения формализма Гамильтона – Якоби. Опираясь на классическое квантово-механическое описание в настоящей работе мы попытались оценить величину проницаемости сверхтонкого нанопористого слоя, полученную с учетом накопления молекул в окрестности мембраны, составленной сферическими алмазными наночастицами.

Для исследования задачи прохождения частиц с массой m и энергией E через разные потенциальные барьеры, т. е. через слой вещества определенной толщины, заполненного источниками энергии, можно решить одномерное стационарное уравнение Шредингера.

Классическое уравнение Шредингера имеет вид [2–4]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь ψ – волновая функция, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – постоянная Планка, U – потенциальная энергия, i – мнимая единица.

Зная функцию ψ из решения уравнения (1), можно найти плотность распределения частиц:

$$\rho = |\psi|^2. \quad (2)$$

Если потенциальная энергия U не зависит от времени, то решение (1) ищется в виде

$$\psi = \Psi \exp(-iEt / \hbar). \quad (3)$$

Тогда для функции Ψ имеем стационарное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(z)) \Psi = 0. \quad (4)$$

Применим уравнение Шредингера к задаче о прохождении частицами нанопористого слоя. Вместо постоянной Планка возьмем величину, пропорциональную размеру слоя $\hbar = l\sqrt{m\varepsilon}$, где l – поперечный размер слоя; ε – глубина потенциальной ямы в парном взаимодействии молекул структуры слоя и фильтруемой компоненты; m – масса частицы, проходящей через слой. Таким образом, уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + (K^2 - \tilde{U}(z)) \Psi = 0, \quad (5)$$

где $K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\tilde{U}(z) = \frac{2m}{\hbar^2} U(z)$.

На удалении от барьера, как слева, так и справа, $\tilde{U}(z) = 0$, поэтому в этих зонах уравнение (5) редуцируется к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + K^2 \Psi = 0. \quad (6)$$

Частными решениями уравнения (6) являются функции e^{iKz} и e^{-iKz} , причем первая частная функция представляет падающую на барьер волну, а вторая – отраженную. Их комбинация должна обеспечивать необходимый физический результат, поэтому в качестве математических граничных условий для функции $\Psi(z)$ можно записать

$$\Psi(z) = e^{iKz} + b e^{-iKz}, \quad \Psi'(z) = a e^{iKz}. \quad (7)$$

Эти условия можно назвать асимптотическими. Они должны выполняться на удалении от барьера, таком, что влиянием самого барьера уже можно было пренебречь. Здесь же мы воспользовались локальным характером влияния барьера как источника возмущений на волновую картину в его окрестности.

Первая функция в (7) определяет значение плотности вероятности нахождения частицы слева от барьера, а вторая – справа. Коэффициенты a и b имеют смысл коэффициентов прохождения и отражения в направлении оси z . Для их нахождения представим волновую функцию $\Psi(z)$ как суперпозицию двух независимых решений $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ с начальными условиями

$$\Psi_1(0) = 0, \left. \frac{\partial \Psi_1(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 1; \quad \Psi_2(0) = 1, \left. \frac{\partial \Psi_2(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (8)$$

$$\Psi(z) = C_1 \Psi_1(z) + C_2 \Psi_2(z), \quad \Psi'(z) = C_1 \Psi_1'(z) + C_2 \Psi_2'(z). \quad (9)$$

Функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ находятся в результате последовательного интегрирования уравнения (4) с двумя группами начальных условий (8) по технологии Рунге-Кутты высокого порядка точности. После решения двух задач Коши приравниваем значения функции $\Psi(z)$ и её производной $\Psi'(z)$, полученные численным интегрированием с асимптотическими значениями (7). В результате получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad & 1 + b = C_2, \\ & iK - biK = C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } z = z_n \quad & ae^{ikz_n} = C_1 \Psi_1(z_n) + C_2 \Psi_2(z_n), \\ & aike^{ikz_n} = C_1 \Psi_1'(z_n) + C_2 \Psi_2'(z_n). \end{aligned}$$

Разрешая систему, найдем неизвестные коэффициенты C_1 , C_2 , a и b . В общем случае все найденные величины оказываются комплексными.

Можно убедиться, что решение уравнения (4) имеет колебательный характер с переменной амплитудой, и коэффициент прохождения D молекул определяется как отношение амплитуд колебаний функции $|\Psi|^2(z)$ после барьера и до него. На рис. 1 представлен график плотности распределения частиц гелия для барьера U/k порядка 390 К. Здесь k – постоянная Больцмана.

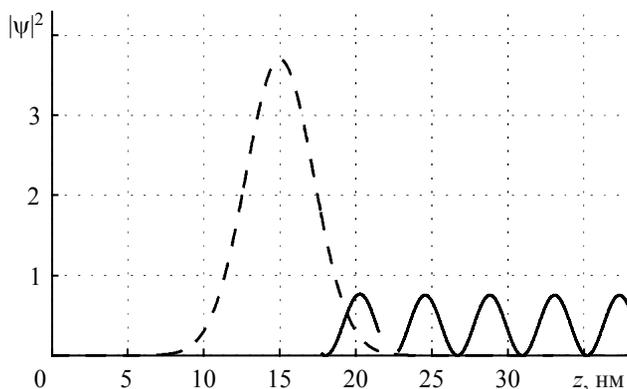


Рис. 1. Плотность распределения частиц до и после барьера
Fig. 1. Density of particle distribution before and after the barrier

На рис. 2 представлена зависимость проницаемости слоя от величины энергии частицы гелия E/k при фиксированной высоте барьера $U/k = 400$ К. Для исследования был выбран сглаженный барьер шириной около 10 нм. Как видно из рис. 2, для рассмотренного барьера полученное решение близко к аналитическому.

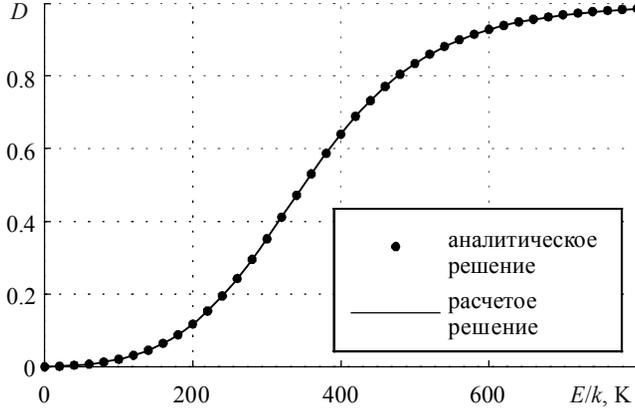


Рис. 2. Сравнение аналитического [5] и расчетного решений для сглаженного барьера
Fig. 2. Comparison of analytical [5] and designed solutions for the smoothed barrier

Определим величину барьера $U(z)$ в случае, когда слой составлен сферическими наночастицами одинакового размера. В рассмотренном ниже примере частицы алмазные и имеют диаметр $d = 1$ нм. Потенциал взаимодействия от отдельной сферической однородной наночастицы на молекулу имеет вид [6]

$$U(r) = 2\pi q \int_0^\pi \sin \theta \int_0^R r'^2 \Pi_1(\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta}) dr' d\theta, \quad (10)$$

где q – количество молекул в единице объема вещества, R – радиус частицы,

$\Pi_1(\rho) = 4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{\rho}\right) \text{th} \left(\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{11} - \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^5 \right)$ – модифицированный потенциал парных молекулярных взаимодействий, построенный на основе классического LJ-потенциала.

Здесь σ и ε – параметры этого потенциала, которые определяются как средние величины от соответствующих параметров мономолекулярных взаимодействий:

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22})^{1/2}. \quad (11)$$

Причем $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}$ определяют углерод-углеродные взаимодействия; $\sigma_{22}, \varepsilon_{22}$ – взаимодействия атомов гелия между собой.

Пусть слой представляет собой некоторую совокупность N частиц, центры которых лежат в одной плоскости. Движение молекул будем рассматривать в плоскости центров частиц (y, z) , причем ось z направлена перпендикулярно слою (рис. 3).

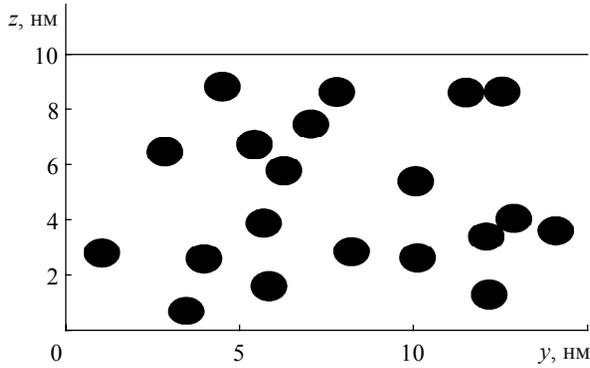


Рис. 3. Слой компактированных алмазных наночастиц
Fig. 3. The layer of compacted diamond nanoparticles

Тогда для атомов гелия, перемещающихся в плоскости (y, z) , энергия воздействия от всей совокупности частиц будет равна простой сумме потенциалов (10):

$$U(y, z) = \sum_{j=1}^N U(r_j), \tag{12}$$

где $r_j = \sqrt{(y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$ – расстояние от центра j -й наночастицы до рассматриваемой точки. Осредняя (12) по ширине слоя, найдем

$$U(z) = \frac{1}{L} \int U(y, z) dy, \tag{13}$$

где L – некоторый представительный участок слоя в направлении оси Oy .

Потенциальный барьер слоя наночастиц с энергией поля (13) имеет сложную форму, представленную на рис. 4. На рис. 5 показана зависимость проницаемости слоя от его пористости.

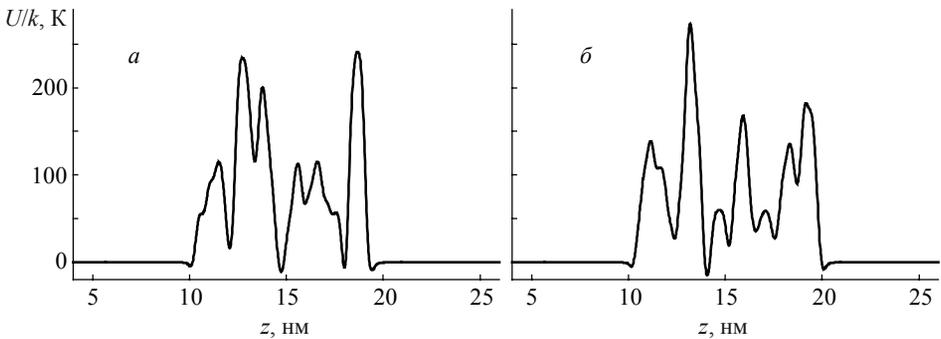


Рис. 4. Разные потенциальные барьеры слоя наночастиц, определенные различным характером расположения частиц в слое, $U_1(z)$ – распределение потенциала в исходном варианте расположения частиц (а), $U_2(z)$ – частицы смещены относительно своего исходного положения, $\sigma = 0.8953$ (б)

Fig. 4. Different potential nanoparticle layer barriers characterised by various arrangements of particles in the layer, (a) $U_1(z)$ is the potential distribution in the original version of the particle arrangement, (b) $U_2(z)$, the particles are shifted from the initial position, $\sigma = 0.8953$

Попадая в каждую из энергетических ям (портрет слоя – рис. 4), изучаемая частица переходит в связанные состояния. Здесь она имеет возможность участвовать в колебательных движениях с определенными частотами, присущими конкретной энергетической впадине. Поскольку частица, в роли которой выступает атом гелия, сама является волной, имеющей определенную частоту, в рассматриваемой динамической системе возможны резонансные явления. Однако выполненное осреднение по ширине слоя сгладило энергетическую неоднородность мембраны, исходный вид которой полностью определяет характер резонансных явлений. Более строгое изучение вклада этого эффекта на способность гелия преодолевать барьер в рамках плоской постановки задачи может быть проведено для случая проникаемости параллельного пучка нанонитей. Расчетами была выявлена зависимость проникаемости слоя от формы барьера при одинаковой загруженности слоя частицами (рис. 5).

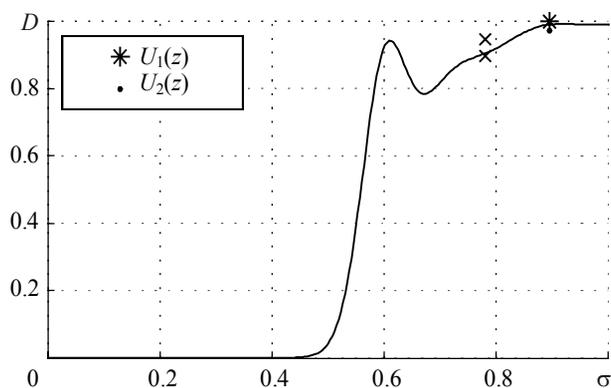


Рис. 5. Зависимость проникаемости слоя от пористости
Fig. 5. Layer permeability as a function of porosity

Составляющие слой алмазные частицы являются слишком плотными, поэтому энергия от углеродных атомов этих частиц, размазанная по объему слоя, все равно является очень большой. В связи с этим, как видно из рис. 5, проникаемость порядка 50 % достигается лишь при высокой пористости слоя порядка 55 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазер В. Основы электронной оптики: пер. с нем. М.: Гостехиздат, 1957. 764 с.
2. Мотт Н., Снеддон И. Волновая механика и её применения. М.: Наука, 1966. 428 с.
3. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Квантовая физика: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2004. 496 с.
4. Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики: в двух томах. Т. 2. М.: Книга по Требованию, 2012. 942 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Теоретическая физика. Т. 3. 4-е изд. М.: Наука, 1989. 766 с.
6. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потекаев А.И., Либин Э.Е., Худобина Ю.П. Потенциальное поле углеродных тел как основа сорбционных свойств барьерных газовых систем // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 7. С. 10–15.

Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Poteryaeva V.A., Libin E.E. (2016) THE WAVE PERMEABILITY OF A COMPACTED NANOPARTICLE LAYER. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 51–57

DOI 10.17223/19988621/41/5

The simplest example of the porous filtering system is a compacted material obtained by pressing spherical nanoparticles. Filtration characteristics of this material depend on mobility of molecules in the field of van der Waals forces.

A one-dimensional wave dynamic problem of the helium molecules motion through the ultrathin porous layer of compacted diamond nanoparticles is considered. These layers of matter make a potential barrier obstructing the passage of molecules. The permeability of the layer is derived by solving the Schrödinger equation.

The calculation technology for integration of the Schrödinger equation is suggested. It is based on two fundamental numerical solutions of the problem of waves passing through the barrier of potential forces. A linear combination of these solutions determinates the wave function. The square of this function is a probability of detecting molecules in a particular place. Linking this representation of wave function with asymptotic boundary conditions makes it possible to determine the coefficients of passing and reflecting of molecules from the barrier. The barrier is the energy of compacted nanoparticles.

This technology provides with results close to the analytical solution in particular cases. This fact allows to generalize the method to the case of molecular movement through the layer of nanoparticles and to determine the dependence between permeability and porosity of the layer.

Keywords: potential force field, nanoparticles, molecular motion, numerical method, permeability, Schrödinger equation.

BUBENCHIKOV *Aleksey Mikhaylovich* (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: alexy121@mail.ru

BUBENCHIKOV *Mikhail Alekseevich* (Candidate of Physics and Mathematics, GazpromTransgaz Tomsk, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: michael121@mail.ru

POTERYAEVA *Valentina Aleksandrovna* (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: valentina.poteryaeva@gmail.com

LIBIN *Eduard Ephimovich* (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Von Dr. Walter Glaser (1952) *Grundlagen der Elektronenoptik*. Wien: Springer-Verl. (In German).
2. Mott I.N., Sneddon N.F. (1963) *Wave Mechanics and Its Applications*. Dover: Notations edition.
3. Martinson L.K., Smirnov E.V. (2004) *Kvantovaya fizika* [Quantum physics]. Moscow: MGТУ Publ.
4. Morse F.M., Feshbach G. (1953) *Methods of Theoretical Physics. Vol. 2*. New York: McGraw-Hill.
5. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1989) *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory. Vol. 3*.
6. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Libin E.E., Khudobina Yu.P. (2015) The Potential Field of Carbon Bodies as a Basis for Sorption Properties of Barrier Gas Systems. *Izv. vuzov. Fizika. – Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 882–888. DOI 10.1007/s11182-015-0586-6.

УДК 532.5
DOI 10.17223/19988621/41/6

**М.А. Бубенчиков, А.М. Бубенчиков,
О.В. Усенко, Е.А. Тарасов**

РЕЖИМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ С ОТКРЫТОЙ НАНОТРУБКОЙ

Оценивается состояние низкоэнергетических молекул, находящихся вблизи кристаллической структуры открытой нанотрубки. Систематические расчеты проведены для трубок малых размеров, для которых установлено, что адсорбция молекул газа поверхностными кристаллами это не захват их частью поверхности нанообъекта, а вовлечение молекул в сложное орбитальное движение около частицы.

Ключевые слова: *молекулярная динамика, нанотрубка, численные модели сорбционных механизмов, энергия наноразмерного объекта.*

В современной литературе углеродные нанотрубки чаще всего упоминаются в связи с фильтрацией газов и жидкостей через пористые структуры, содержащие эти нанообъекты. Установлено [1], что проницаемость открытых трубок непосредственно связана с взаимодействиями молекул фильтруемой среды и стенок трубки. Молекулярные расчеты [2] показали, что присутствие трех и более кислотных групп на входе в трубку значительно уменьшают поток двуокиси углерода через наноканал. В [3] анализируются вопросы включения многослойных углеродных нанотрубок в миксатричные структуры. В [4] показывается, что данные структуры имеют наиболее многообещающие результаты в отношении выделения CO_2 из различных смесей газов. Авторами [5] проведено экспериментальное исследование разделения смесей H_2S и CH_4 с помощью фильтрационных слоев из вертикальных нанотрубок, расположенных на подложке из анодного оксида алюминия. В статье [6] описано применение миксатричных структур к выделению CO_2 из смесей, содержащих выделяемую компоненту и водород. В [7] сообщается о результатах сравнительного анализа сорбции метана тремя различными типами углеродных нанопористых сред: нанотрубок, углеродного волокна и карбида кремния.

Взаимодействие с дискретной структурой нанотрубки

Нанотрубку можно рассматривать как скрученную и замкнутую на себя графеновую пластинку (рис. 1). Гексагональная сеть графена составлена правильными шестиугольниками, таким, что если в центр каждого гексагонального элемента поставить точку и соединить ее с вершинами, то получим сеть из правильных треугольников со стороной 0.141 нм. Положения узлов в гексагональной сети контролируется C–C-связями, такими же, как в кристаллической структуре алмаза.

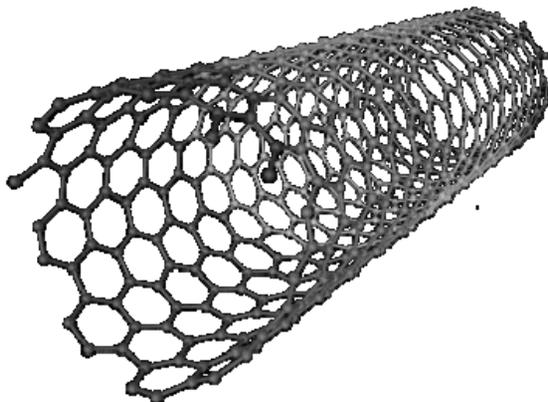


Рис. 1. Открытая нанотрубка
Fig. 1. Nanotube with open tips

Потенциал от дискретной совокупности молекул углерода, составляющих нанотрубку, определяется простым суммированием потенциалов парных взаимодействий:

$$U(x, y, z) = 4\epsilon \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \right], \quad (1)$$

где $\rho_j = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}$ – расстояние между пробной молекулой с координатами x, y, z и j -й молекулой структуры с координатами x_j, y_j, z_j ; N – число молекул структуры; σ и ϵ – параметры потенциала Леннарда – Джонса (LJ -потенциала).

Для потенциала взаимодействия вида (1) уравнения движения пробной молекулы можно записать следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{x-x_j}{\rho_j}, \quad \frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{y-y_j}{\rho_j}, \quad \frac{dw}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{z-z_j}{\rho_j}. \quad (2)$$

Здесь $a_j = 24 \frac{\epsilon}{\rho_j m} \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \left[2 \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 - 1 \right]$ – модуль ускорения, определяемого j -й молекулой графеновой структуры.

Для численного интегрирования уравнений (2) их необходимо дополнить кинематическими соотношениями, определяющими компоненты скорости точки:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (3)$$

Систему уравнений (2), (3) с начальными условиями, определяющими положение и скорость пробной молекулы, можно интегрировать с использованием пошаговых схем высокого порядка точности.

Континуальная модель трубки

Нанотрубки, имеющие значительные линейные размеры, могут содержать миллионы атомов углерода. В этом случае суммирование в (1) целесообразно заменить интегрированием, однако, предварительно используемый здесь LJ -потенциал должен быть модифицирован таким образом, чтобы при сплошном интегрировании по поверхности 2D-материала мы получили бы сходящуюся величину интегрального воздействия. Упомянутая модификация может быть следующей [8]:

$$dU(\rho) = 4q\varepsilon \left(\frac{\sigma}{\rho}\right) \text{th} \left[\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{11} - \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^5 \right] ds, \quad (4)$$

где ρ – расстояние между центром пробной молекулы и центром элементарной площади на поверхности 2D-материала, q – плотность распределения источников энергии на поверхности, ds – элементарная площадка на поверхности трубки. Для плоской или цилиндрической графеновой структуры легко найти, что $q \approx 28 \text{ нм}^{-2}$. Естественным образом вводя цилиндрические координаты и интегрируя (4) по боковой поверхности открытой нанотрубки, получим

$$U(r, z) = 4\varepsilon a q \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\frac{\sigma}{\rho}\right) \text{th} \left[\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{11} - \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^5 \right] d\varphi' dz'. \quad (5)$$

Причем $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi' + (z - z')^2}$, a – радиус нанотрубки, h – ее длина. Двукратное интегрирование в (5) можно выполнить численно, применяя для каждого из интегралов последовательно формулу трапеций.

Когда интегрирование в (5) выполнено, скорость движения пробной молекулы может быть найдена из интеграла энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + U = \frac{mv_0^2}{2} + U_0. \quad (6)$$

Или же в результате численного решения основного уравнения динамики

$$m \frac{dv}{dt} = -\text{grad } U. \quad (7)$$

Для интегрирования последнего уравнения вполне пригодным является стандартный вариант схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Результаты расчетов

Глобально во взаимодействии молекул с наноразмерными структурами и даже с макроскопическими телами можно выделить режим быстрого взаимодействия и сорбционный режим. Все представленные здесь результаты относятся к последнему случаю. Молекулы, обладающие высокой энергией, либо проходят через трубку, либо отражаются от нее. Низкоэнергетические молекулы захватываются наноразмерной структурой и существуют в связке с ней до тех пор пока не получают необходимую дополнительную энергию от других высокоэнергетичных молекул. Вопросы проницаемости трубок анализируются в режиме быстрого взаимодействия, и они не являются предметом настоящего исследования. Ниже мы рассматриваем примеры совместного пребывания молекулы и наночастицы в не-

котором, зависящем от поля частицы объеме, то есть примеры относятся к сорбционному режиму взаимодействия.

Расчеты взаимодействия нанотрубки с молекулами выполнены для случая трубки длиной 1.136 нм и радиуса 0.36 нм. Ось ox совпадает с осью трубки, а начало декартовой системы координат находится на ее левом конце. Низкоэнергетическая молекула метана, имеющая начальную скорость $v_0 = 50$ м/с, запускается с внешней стороны трубки перпендикулярно ее боковой поверхности в ее середине ($x = l/2, y = 5$ нм, $z = 0$). Приближаясь к трубке на расстояние порядка ее радиуса, молекула попадает в энергетическое поле трубки и начинает кружиться вокруг нее. При этом траектории молекулы обвивают трубку, как нитки катушку и даже проникают внутрь открытой трубки (рис. 2). По результатам проведенных вычислений можно выделить два локальных режима взаимодействия молекул: рассеянный (рис. 2) и компактный (рис. 3). Первый характеризуется проникновением молекул во все пределы наноструктуры. Второй режим отличается наличием

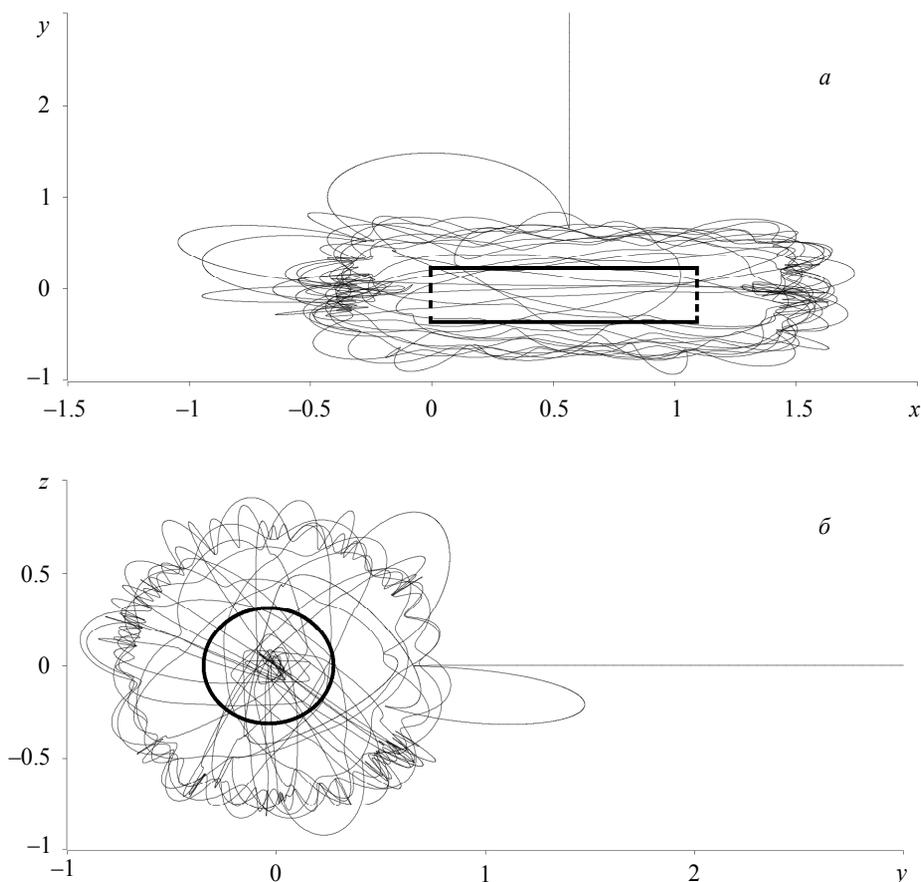


Рис. 2. Проекция траектории молекулы метана в режиме рассеянного взаимодействия с трубкой

Fig. 2. Projections of methane molecule trajectories in the mode of diffuse interaction with a nanotube

очевидных зон преимущественного пребывания молекул. Если первоначально в этом режиме движения в плоскости, перпендикулярной оси, траектория выписывала ромашку, то после двух оборотов молекула выходит на круговую орбиту. В пространстве (см. также другую проекцию) это означает, что траектория выходит на линию, похожую на винтовую, причем молекула не попадает внутрь трубки. Таким образом, несмотря на дискретный характер расположения энергетических центров (узлов кристаллической структуры графенового листа), взаимодействие молекулы с трубкой осуществляется так, как будто энергия по поверхности трубки распределена достаточно равномерно. Все это делает оправданным континуальный подход в определении энергии воздействия от графеновых структур, в частности от трубок, причем очень малых размеров, энергию которых мы задали дискретным способом.

Как видно из рис. 2, 3, низкоэнергетические молекулы, захваченные трубкой, имеют финитные траектории в виде сложных орбит, которые не являются кепле-

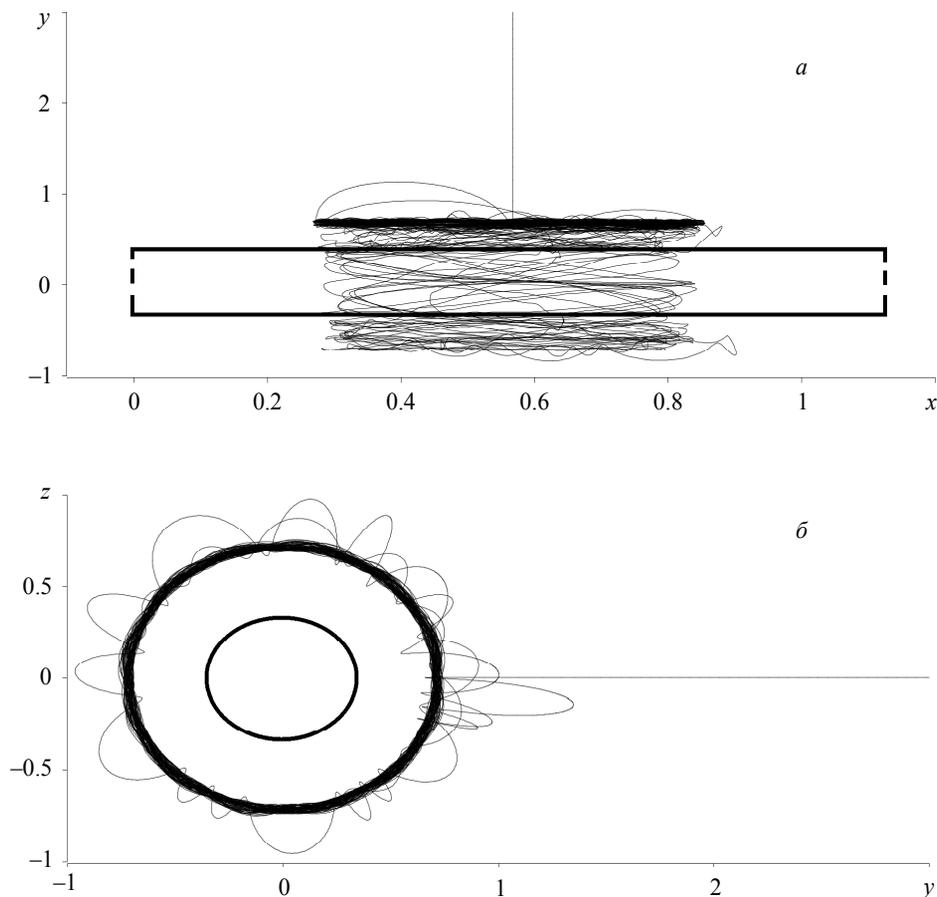


Рис. 3. Проекция траектории молекулы метана в режиме компактного взаимодействия с трубкой

Fig. 3. Projections of methane molecule trajectories in the mode of compact interaction with a nanotube

ровскими, то есть плоскими из-за того, что сила, действующая на молекулы, определяется влиянием ближайшего участка поверхности трубки и не является центральной. Анализируя результаты вычислений, мы не обнаружили периодичности движения в рассеянном режиме. Это объясняется тем, что даже при континуальном описании энергии взаимодействия с однородным распределением плотности источников энергии система, состоящая из двух элементов нанотрубка – молекула, является сложной и проявляет стохастические свойства.

Проведенные расчеты позволяют оценить сорбционный объем, зная который, в свою очередь, можно найти присоединенную массу, составленную низкоэнергетическими молекулами. Представленная численная модель позволяет также найти предельную энергию, превышение которой обеспечивает молекуле выход из поля тяготения наночастицы. По значениям предельной энергии в осях энергии частицы – энергия молекулы нетрудно построить сорбционную кривую, разделяющую два глобальных режима взаимодействия молекул с частицами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mattia D., Leese H., Lee K.P.* Carbon nanotube membranes: From flow enhancement to permeability // *Journal of Membrane Science*. 2015. V. 475. P. 266–272.
2. *Surapathi A., Chen H., Marand E., Johnson J.K., Sedlakova Z.* Gas sorption properties of zwitterions-functionalized carbon nanotubes // *Journal of Membrane Science*. 2013. V. 429. P. 88–94.
3. *Zhao D., Ren J., Li H., Li X., Deng M.* Gas separation properties of poly(amide-6-b-ethylene oxide)/amino modified multi-walled carbon nanotubes mixed matrix membranes // *Journal of Membrane Science*. 2014. V. 467. P. 41–47.
4. *Ahmad A.L., Jawad Z.A., Low S.C., Zein S.H.S.* A cellulose acetate/multi-walled carbon nanotube mixed matrix membrane for CO₂/N₂ separation // *Journal of Membrane Science*. 2014. V. 451. P. 55–66.
5. *Gilani N., Towfighi J., Rashidi A., Mohammadi T., Omidkhal M.R., Sadeghian A.* Investigation of H₂S separation from H₂S/CH₄ mixtures using functionalized and nonfunctionalized vertically aligned carbon nanotube membranes // *Applied Surface Science*. 2013. V. 270. P. 115–123.
6. *Zhao Y., Jung B.T., Ansaloni L., Winston Ho W.S.* Multiwalled carbon nanotube mixed matrix membranes containing amines for high pressure CO₂/H₂ separation // *Journal of Membrane Science*. 2014. V. 459. P. 233–243.
7. *Liu L., Nicholson D., Bhatia S.K.* Adsorption of CH₄ and CH₄/CO₂ mixtures in carbon nanotubes and disordered carbons: A molecular simulation study // *Chemical Engineering Science*. 2015. V. 121. P. 268–278.
8. *Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потеев А.И., Либин Э.Е., Худобина Ю.П.* Потенциальное поле углеродных тел как основа сорбционных свойств барьерных газовых систем // *Изв. вузов. Физика*. 2015. Т. 58. № 7. С. 10–15.

Статья поступила 03.03.16 г.

Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., Tarasov E.A. (2016) MODES OF INTERACTION BETWEEN LOW-ENERGY MOLECULES AND OPEN NANOTUBE. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 58–64

DOI 10.17223/19988621/41/6

In this paper, the state of low-energy molecules in the vicinity of an open nanotube's crystal structure is assessed. A considerable attention is paid to the correlation of the discrete and the continual approaches in the description of the interaction energy from carbon graphene structures. The small size tubes are conveniently modeled using the discrete approach. However, there exist

big tubes containing hundreds of thousands of nodes in their crystal lattice, as well as systems of nanotubes including about a million carbon atoms. In this case, it is reasonable to use the continuum approach. In order to get that done, the energy of large tubes is obtained in the work by means of integration. However, the systematic calculations are carried out for tubes of smaller dimension for which it is found that adsorption of gas molecules by surface crystals is not a case of capturing them by a part of the nanoobject's surface but that of involving the molecules in a complex orbital motion around the particle.

Keywords: molecular dynamics; nanotube; numerical models of sorption mechanisms; energy of nanoscale objects.

BUBENCHIKOV Aleksey Michailovich (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: alexy121@mail.ru

BUBENCHIKOV Mikhail Alexeyevich (Candidate of Physics and Mathematics, GazpromTransgaz Tomsk, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: michael121@mail.ru

USENKO Olesya Vadimovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

TARASOV Egor Alexandrovich (Tomsk State University of Architecture and Building)

E-mail: diomedis@mail.ru

REFERENCES

1. Mattia D., Leese H., Lee K.P. (2015) Carbon nanotube membranes: From flow enhancement to permeability. *Journal of Membrane Science*. 475. pp. 266–272. DOI 10.1016/j.memsci.2014.10.035.
2. Surapathi A., Chen H., Marand E., Johnson J.K., Sedlakova Z. (2013) Gas sorption properties of zwitterions-functionalized carbon nanotubes. *Journal of Membrane Science*. 429. pp. 88–94. DOI 10.1016/j.memsci.2012.11.021.
3. Zhao D., Ren J., Li H., Li X., Deng M. (2014) Gas separation properties of poly(amide-6-b-ethylene oxide)/amino modified multi-walled carbon nanotubes mixed matrix membranes. *Journal of Membrane Science*. 467. pp. 41–47. DOI 10.1016/j.memsci.2014.05.009.
4. Ahmad A.L., Jawad Z.A., Low S.C., Zein S.H.S. (2014) A cellulose acetate/multi-walled carbon nanotube mixed matrix membrane for CO₂/N₂ separation. *Journal of Membrane Science*. 451. pp. 55–66. DOI 10.1016/j.memsci.2013.09.043.
5. Gilani N., Towfighi J., Rashidi A., Mohammadi T., Omidkhan M.R., Sadeghian A. (2013) Investigation of H₂S separation from H₂S/CH₄ mixtures using functionalized and nonfunctionalized vertically aligned carbon nanotube membranes. *Applied Surface Science*. 270. pp. 115–123. DOI 10.1016/j.apsusc.2012.12.131.
6. Zhao Y., Jung B.T., Ansaloni L., Winston W.S. (2014) Ho Multiwalled carbon nanotube mixed matrix membranes containing amines for high pressure CO₂/H₂ separation. *Journal of Membrane Science*. 459. pp. 233–243. DOI 10.1016/j.memsci.2014.02.022.
7. Liu L., Nicholson D., Bhatia S.K. (2015) Adsorption of CH₄ and CH₄/CO₂ mixtures in carbon nanotubes and disordered carbons: A molecular simulation study. *Chemical Engineering Science*. 121. pp. 268–278. DOI 10.1016/j.ces.2014.07.041.
8. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Libin E.E., Khudobina Yu.P. (2015) The Potential Field of Carbon Bodies as a Basis for Sorption Properties of Barrier Gas Systems. *Izv. vuzov. Fizika. – Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 882–888. DOI 10.1007/s11182-015-0586-6.

УДК 536.46
DOI 10.17223/19988621/41/7

А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева

ГОРЕНИЕ УГЛЕ-МЕТАНОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В ГОРЕЛКЕ С РЕКУПЕРАЦИЕЙ ТЕПЛА¹

Сформулирована математическая постановка задачи горения угле-метано-воздушной смеси в щелевой горелке с инертной внутренней вставкой. Определена граница устойчивого горения угле-метано-воздушной смеси с содержанием метана 2 % по объему в щелевой горелке с инертной внутренней вставкой в зависимости от скорости подачи смеси. Определено влияние размеров частиц на границу устойчивости горения.

Ключевые слова: *угле-метано-воздушная смесь, монодисперсная угольная пыль, щелевая горелка, бедная метано-воздушная смесь, устойчивость горения.*

Проблема сжигания бедных (с низким содержанием горючего) газовых смесей в горелочных устройствах находится в зоне внимания современной физики горения и взрыва и актуальна для задач современной энергетики. В частности, задача эффективного сжигания бедных метановоздушных смесей возникает в процессах дегазации угольных пластов и проветривания шахт. Исследования по проблеме расширения концентрационных пределов воспламеняемости газов, эффективному сжиганию бедных газовых смесей и полезной утилизации шахтного метана привлекают внимание крупных специалистов из научных институтов России и зарубежья. Так, в работе [1] предложено поддерживать горение бедных смесей за счет теплообмена газа с пористым фильтрующим слоем. В [2] проанализирована устойчивость горения газовых смесей в противоточной горелке и показано, что при горении смеси во встречных потоках расширяются концентрационные пределы существования пламени. Авторами [3, 4] проведены исследования особенностей горения газовых смесей в U-образных горелках с рекуперацией тепла. Для случая горения газовой смеси в U-образной трубке определены верхнее и нижнее значения скорости подачи смеси, при которых становится невозможно поддерживать устойчивое горение. В работе [5] представлены результаты исследования горения бедных метановоздушных смесей в щелевой горелке с внутренней вставкой. Показано, что за счет тепловой рекуперации возможно организовать и поддерживать горение метано-воздушной смеси с содержанием метана не ниже 2.3 %, в то время как в обычных условиях для поддержания горения требуется не менее 5.2 % метана в смеси [6].

Метановоздушная смесь, являющаяся продуктом шахтного производства, содержит в себе частицы угольной пыли, которые могут существенно повлиять на характеристики горения смеси. В работе [7] экспериментально и аналитически показано, что горение газозвеси воздух – уголь при нормальных условиях невозможно без добавления небольшого количества метана либо без предварительного подогрева стенок реакционного сосуда. Добавка метана в смесь воздух – уголь

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-38-00188 мол_a.

приводит к стабилизации фронта пламени. Авторами [8] проведено моделирование зажигания и распространения пламени в гибридной газозвеси, являющейся аналогом взвеси частиц угольной пыли в метановоздушной смеси. Получены закономерности распространения фронта горения в зависимости от свойств дисперсной фазы и концентрации газового горючего в газовой смеси. В [7, 8] упор сделан на определение критических условий возникновения опасных ситуаций в угольных шахтах. Однако присутствие реагирующих частиц может оказаться полезным для поддержания горения бедных метановоздушных смесей.

В настоящей работе выполнено численное исследование задачи горения метановоздушной смеси со взвешенной угольной пылью в щелевой горелке с инертной внутренней вставкой. Постановка задачи основана на физико-математических постановках [5, 8]: учитывается влияние теплового расширения, зависимость коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры, расход кислорода на две параллельные реакции: в газовой фазе и на поверхности частиц. Целью работы является определение условий устойчивого горения угле-метано-воздушной смеси с содержанием метана 2 % по объему.

Модель горелки соответствует работе [5] и представляет собой щелевую горелку с внутренней вставкой. Холодная угле-метано-воздушная смесь с массовым содержанием метана $a_{\text{CH}_4, \nu}$, массой частиц угля $\rho_{k, \nu}$ и температурой газовой фазы $T_{g, \nu}$ подается со скоростью u_ν в предварительно разогретую щелевую горелку со стороны $x = 0$. Смесь проходит через верхнюю часть горелки и на границе $x = L$ меняет направление движения, на границе $x = 2L$ газ вытекает. Протекая через устройство, реакционная смесь обменивается теплом с внутренней вставкой по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена α . Предполагается, что внешние стенки горелки теплоизолированы.

При постановке задачи приняты следующие допущения: расход реакционной смеси через входное сечение щелевой горелки постоянен; учитывается распределение температуры смеси и выгорание только вдоль направления движения смеси; температура в поперечном направлении внутренней вставки считается однородной; давление в горелке постоянно. В уравнении изменения плотности окислителя учитывается расход окислителя на две реакции: гетерогенную на поверхности частиц и гомогенную в газе. Экзотермические химические реакции в газе определяются по закону Аррениуса с кинетикой второго порядка. Гетерогенная реакция на частицах задается реакцией первого порядка.

С учетом сделанных допущений математическая постановка задачи имеет следующий вид:

Уравнение энергии для газовой фазы:

$$c_g \rho_g \frac{\partial T_g}{\partial t} + c_g \rho_g u \frac{\partial T_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T_g) \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_S}{h} (T_{1,S} - T_g)_k + G c_k T + \alpha_k n_k S_k (T_k - T_g) + Q_1 \rho_g^2 a_{\text{CH}_4} a_{\text{O}_2} k_{01} \exp \left(-\frac{E_1}{R_u T_g} \right),$$

$$T_{1,S}(x, t) = \begin{cases} T_S(x, t), & x < L, \\ T_S(2L - x, t), & x \geq L. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение энергии для внутренней перегородки:

$$c_S \rho_S \frac{\partial T_S}{\partial t} = \lambda_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} - \frac{\alpha_S}{h_S} (T_S - T_g(x, t)) - \frac{\alpha_S}{h_S} (T_S - T_g(2L - x, t)). \quad (2)$$

Уравнение энергии для частиц:

$$c_k \rho_k \frac{\partial T_k}{\partial t} + u c_k \rho_k \frac{\partial T_k}{\partial x} = \alpha_k S_k n_k (T_g - T_k) + Q_2 G - G c_k T_k. \quad (3)$$

Уравнение баланса массы метана в смеси:

$$\frac{\partial a_{\text{CH}_4}}{\partial t} + u \frac{\partial a_{\text{CH}_4}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(T_g) \frac{\partial a_{\text{CH}_4}}{\partial x} \right) - k_{01} \rho_g a_{\text{CH}_4} a_{\text{O}_2} \exp \left(-\frac{E_1}{R_u T_g} \right). \quad (4)$$

Уравнение баланса массы окислителя в смеси:

$$\frac{\partial a_{\text{O}_2}}{\partial t} + u \frac{\partial a_{\text{O}_2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(T_g) \frac{\partial a_{\text{O}_2}}{\partial x} \right) - \frac{\mu_{\text{O}_2} \nu_{\text{O}_2}}{\mu_{\text{CH}_4} \nu_{\text{CH}_4}} k_{01} \rho_g a_{\text{CH}_4} a_{\text{O}_2} \exp \left(-\frac{E_1}{R_u T_g} \right) - \frac{G}{\rho_g}. \quad (5)$$

Уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho_g R_g T_g = \text{const}. \quad (6)$$

Уравнение неразрывности для газа:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g u)}{\partial x} = G. \quad (7)$$

Уравнение баланса массы частиц:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_k u)}{\partial x} = -G. \quad (8)$$

Уравнение счетной концентрации частиц:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial n_k u}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Уравнение изменения радиуса частиц:

$$r_k = 3 \sqrt{\frac{3 \rho_k}{4 \pi \rho_k^0 n_k}}. \quad (10)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} T_g(x, 0) &= T_{g,b}(x), \quad T_S(x, 0) = T_{S,b}(x), \quad T_k(x, 0) = T_{k,b}(x), \\ \rho_k(x, 0) &= \rho_{k,b}(x), \quad a_{\text{CH}_4}(x, 0) = a_{\text{CH}_4,b}(x), \quad a_{\text{O}_2}(x, 0) = a_{\text{O}_2,b}(x), \\ u(x, 0) &= u_{g,b}(x), \quad n_k(x, 0) = n_{k,b}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T_g(0, t) &= T_{g,v}, \quad T_k(0, t) = T_{k,v}, \quad a_{\text{CH}_4}(0, t) = a_{\text{CH}_4,v}, \quad a_{\text{O}_2}(0, t) = a_{\text{O}_2,v}, \\ u(0, t) &= u_v, \quad \rho_k(0, t) = \rho_{k,v}, \quad n_k(0, t) = \frac{\rho_{k,v}}{V_k \rho_k^0}, \quad \frac{\partial T_S(0, t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_S(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_g(2L, t)}{\partial x} = \frac{\partial a_{\text{CH}_4}(2L, t)}{\partial x} = \frac{\partial a_{\text{O}_2}(2L, t)}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Здесь $\lambda = \lambda_{st} \left(\frac{T}{T_v} \right)^s$ – коэффициент теплопроводности газа, $D = D_{st} \left(\frac{T}{T_v} \right)^s$ – коэффициент диффузии газа, $\alpha_s = \frac{\lambda Nu_s}{h}$ – коэффициент теплообмена газа со стенками внутренней вставки, $\alpha_k = \frac{\lambda Nu_g}{r_k}$ – коэффициент теплообмена газа с частицами, $G = n_k S_k j_1 \rho_{O_2}$, $j_1 = \frac{\beta_m k_{02} \exp(-E_2/R_u T_k)}{\beta_m + k_{02} \exp(-E_2/R_u T_k)}$ – скорость гетерогенной реакции на частицах, $\beta_m = \frac{\lambda_g(T) Nu_D}{c_g \rho_g r_k}$ коэффициент массоотдачи частиц [9]. Коэффициент теплообмена газа с внутренней вставкой вычислялся из значения числа Нуссельта, Nu_s , [5]:

$$Nu_s = \begin{cases} 0.979 \left(\frac{h Re Pr}{x} \right)^{0.33}, & \frac{h Re Pr}{x} > 1000, \\ 3.78 + (Nu_* - 3.78) \frac{\frac{h Re Pr}{x} - 100}{900}, & 100 \leq \frac{h Re Pr}{x} \leq 1000, \\ 3.78, & \frac{h Re Pr}{x} < 100. \end{cases}$$

Здесь $Pr = \frac{c \eta}{\lambda}$ – число Прандтля, $Re = \frac{\rho u h}{\eta}$ – число Рейнольдса, Nu_* – значение

числа Нуссельта, соответствующее значению $\frac{h Re Pr}{x} = 1000$, Nu_D – диффузионный

аналог числа Нуссельта. В постановке задачи использованы следующие обозначения: T – температура; c – теплоемкость; n – количество частиц в единице объема; R_u – универсальная газовая постоянная; R_g – газовая постоянная; r – радиус; S – площадь; Q – тепловой эффект реакции; E – энергия активации; k_0 – предэкспонент в законе Аррениуса; ρ – плотность; ρ_k^0 – плотность угольной частицы; a_{O_2} – массовая концентрация окислителя в смеси; a_{CH_4} – массовая концентрация горючего в смеси; μ_{CH_4} – молярная масса метана; μ_{O_2} – молярная масса кислорода; u – скорость; h – ширина канала горелки; h_1 – ширина внутренней вставки, ν_{CH_4} – количество молей метана в реакции; ν_{O_2} – количество молей кислорода в реакции. Индексы: g – параметры газа; k – параметры частиц; S – параметры внутренней вставки; b – начальные параметры, v – параметры на входе в горелку; st – значения параметров при $T_g = 300$ К, 1 – параметры реакции в газовой фазе, 2 – параметры реакции на поверхности частиц.

Задача (1) – (14) решалась численно. Уравнения энергии (1), (2) и уравнения баланса массы метана (4) и кислорода (5) решались конечно-разностным методом с использованием преобразования Самарского со вторым порядком точности. Уравнения неразрывности газа (7), энергии (3), счетной концентрации (9) и баланса массы частиц (8) решались явно с использованием конечных разностей про-

тив потока. Шаг по пространству задавался аналогично [5] и был равен 10^{-5} м. Шаг по времени вычислялся согласно условию устойчивости Куранта.

В качестве начальных условий (11) задавались установившиеся распределения параметров, соответствующие устойчивому горению 6 %-й метановоздушной смеси с частицами радиуса 10^{-7} м при скорости подачи смеси 0.23 м/с и массе пыли в единице объема $\rho_{k,b} = 7 \cdot 10^{-5}$ кг/м³. Начальное условие соответствовало существованию фронта горения в слабо запыленной метановоздушной смеси. В расчетах полагалось, что начальное условие вытесняется более запыленным газом с меньшим содержанием метана. На рис. 1 представлены температурные профили, соответствующие начальному условию.

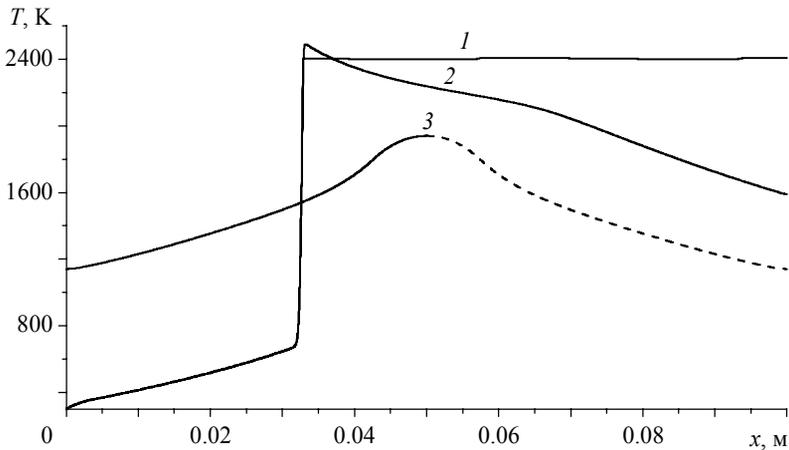


Рис. 1. Распределения температуры частиц (кр. 1), газа (кр. 2) и внутренней стенки (кр. 3) по пространству, соответствующие начальному условию (11)
Fig. 1. Distribution of the temperature of particles (curve 1), gas (curve 2), and inner wall (curve 3) in the space according to the initial condition (11)

Расчеты проводились для параметров [5]:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 55.7 \text{ МДж/кг}, Q_2 = 29 \text{ МДж/кг}, E_1 = 239 \text{ кДж/моль}, E_2 = 135 \text{ кДж/моль}, \\ k_{01} &= 1.125 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}), k_{02} = 7.9 \cdot 10^4 \text{ м/с}, R_u = 8.31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \\ R_g &= 296.8 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), c_g = 1065 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), c_k = 1464.4 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \\ c_s &= 687 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \lambda_{g,st} = 0.025 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \lambda_s = 30.04 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \rho_{g,st} = 1.179 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_s &= 7500 \text{ кг/м}^3, \rho_k^0 = 1400 \text{ кг/м}^3, s = 2/3, D_v = 1.992 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, p = 0.10132 \text{ МПа}, \\ \eta &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \mu_{\text{CH}_4} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \mu_{\text{O}_2} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, T_{g,b} = 300 \text{ К}, \\ T_{k,b} &= 300 \text{ К}, a_{\text{O}_2,b} = 0.208, Nu_g = 1, Nu_D = 1. \end{aligned}$$

Массовое содержание метана на входе в горелку $a_{\text{CH}_4,b} = 0.011$ (соответствует объемному содержанию метана $a_{\text{CH}_4,\text{vol}} = 2\%$). Геометрические характеристики щелевой горелки: размер щели $h = 6 \cdot 10^{-3}$ м, толщина вставки $h_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м, общая протяженность канала $2L = 0.1$ м. Масса угольной пыли на единицу объема задавалась равной $\rho_{k,b} = 0.054$ кг/м³, при такой массе частиц адиабатическая температура горения смеси не превышает 2000 К:

$$T_{g,\text{ad}} = T_{g,b} + \frac{Q_1 \rho_{g,\text{st}} a_{\text{CH}_4,\text{vol}} + Q_2 \rho_{k,b}}{c_g \rho_{g,\text{st}} + c_k \rho_{k,b}} < 2000 \text{ К}.$$

Размер частиц варьировался в диапазоне от 0.1 до 10 мкм, $r_k = 10^{-7} - 10^{-5}$ м. Скорость подачи газа на входе в горелку варьировалась в диапазоне $u_{g,b} = 0.1 - 0.5$ м/с. Результаты расчетов представлены на рис. 2 – 4.

На рис. 2 показано изменение положения фронта горения x_f во времени при различных скоростях подачи газа u_b и радиусах частиц r_k . Координата фронта горения определялась как значение координаты x , где концентрация метана равна половине концентрации на входе в горелку. На рис. 3 представлены распределения температуры газа в горелке после установления. Кривые на рис. 3 соответствуют

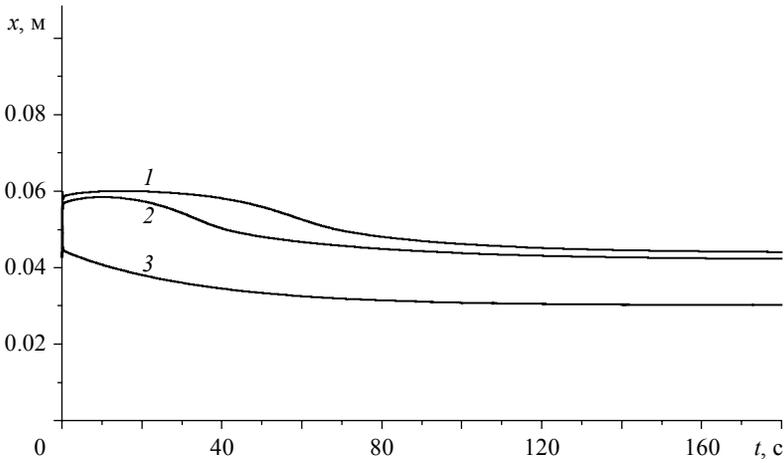


Рис. 2. Зависимость положения фронта горения от времени: 1 – $u_b = 0.35$ м/с, $r_k = 2 \cdot 10^{-7}$ м; 2 – $u_b = 0.24$ м/с, $r_k = 2 \cdot 10^{-6}$ м; 3 – $u_b = 0.25$ м/с, $r_k = 10^{-6}$ м

Fig. 2. Dependence of the flame front position on time: 1 – $u_b = 0.35$ m/s, $r_k = 2 \cdot 10^{-7}$ m; 2 – $u_b = 0.24$ m/s, $r_k = 2 \cdot 10^{-6}$ m; 3 – $u_b = 0.25$ m/s, $r_k = 10^{-6}$ m

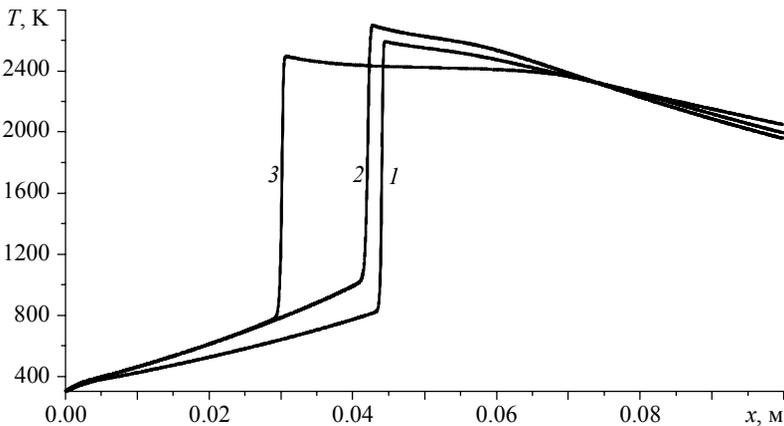


Рис. 3. Распределения температуры газа по траектории течения газа: 1 – $u_b = 0.35$ м/с, $r_k = 2 \cdot 10^{-7}$ м; 2 – $u_b = 0.24$ м/с, $r_k = 2 \cdot 10^{-6}$ м; 3 – $u_b = 0.25$ м/с, $r_k = 10^{-6}$ м

Fig. 3. Distributions of the gas temperature along the trajectory of the gas flow: 1 – $u_b = 0.35$ m/s, $r_k = 2 \cdot 10^{-7}$ m; 2 – $u_b = 0.24$ m/s, $r_k = 2 \cdot 10^{-6}$ m; 3 – $u_b = 0.25$ m/s, $r_k = 10^{-6}$ m

кривым рис. 2. Максимальная температура газа на рис. 3 превышает адиабатическое значение, это объясняется тепловой рекуперацией. За счет подогрева через внутреннюю вставку газ на входе в горелку повышает начальную температуру, что приводит к увеличению адиабатической температуры.

Кривые 1, 2 на рис. 2 соответствуют предельным случаям устойчивого горения смеси по скорости подачи. Это значит, что малое увеличение скорости подачи газа u_b для выбранных размеров частиц r_k приводит к вытеснению фронта горения за пределы горелки. Из расчетов, путем варьирования параметров r_k и u_b , была определена граница устойчивого горения угле-метано-воздушной смеси в координатах $(r_k, u_{g,b})$. Граница устойчивого горения представлена на рис. 4. Область выше кривой на рис. 4 соответствует области затухания горения, область под кривой – режиму распространения пламени. Точки 1, 2, 3 на рис. 4 соответствуют кривым рис. 3. Точка 3 на рис. 4 находится в области устойчивого горения, точки 1 и 2 – вблизи кривой, определяющей границу устойчивого горения.

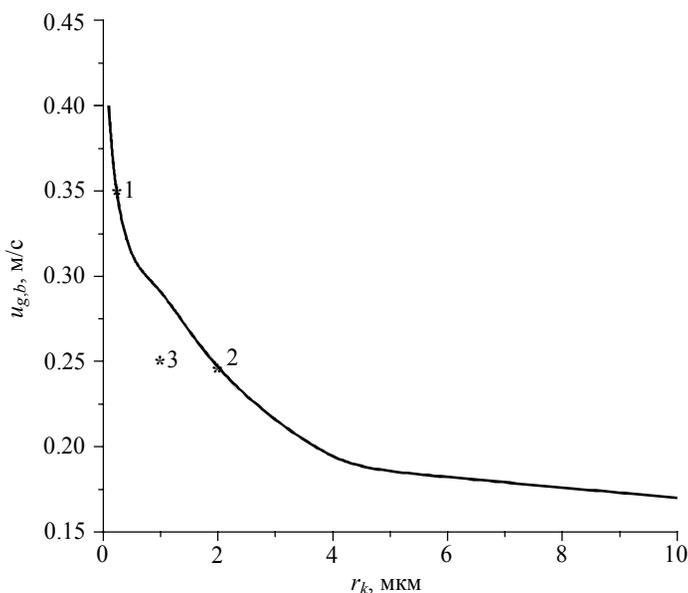


Рис. 4. Граница устойчивого режима горения угле-метано-воздушной смеси

Fig. 4. Boundary of the stable mode of coal-methane-air mixture combustion

Согласно рис. 4, с увеличением радиуса частиц уменьшается максимальное значение скорости подачи газа на входе в горелку, для которого возможно установление устойчивого режима горения. Это объясняется тем, что с увеличением размеров частиц увеличивается время, необходимое для прогрева частицы до температуры начала химической реакции. И при одной и той же скорости подачи смеси на входе в горелку мелкие частицы успевают прогреться и вступают в реакцию, более крупные частицы не успевают нагреться до температуры реакции, и свежая смесь вытесняет существующий фронт горения (определенный начальным условием (11)) за пределы горелки.

Выводы

Выполнено численное исследование горения угле-метано-воздушной смеси в горелке с рекуперацией тепла. Показано, что за счет тепловой рекуперации и за счет присутствия реагирующих частиц возможно поддержание устойчивого горения смеси с объемным содержанием метана 2 %. Полученный результат демонстрирует возможность расширения пределов воспламеняемости и горения метано-воздушных смесей по сравнению с известными литературными данными о горении метана в обычных условиях. Показано влияние размеров частиц на характер горения угле-метано-воздушной смеси. Согласно полученным результатам, для крупных частиц характерно существенное влияние недостаточного содержания метана в смеси. И наоборот, мелкие частицы компенсируют недостаток метана в газе и позволяют поддержать устойчивое горение угле-метано-воздушной смеси в широком диапазоне скорости подачи газа на входе в горелку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Манжос Е.В., Рычков А.Д., Вьюн А.В. Иницирование горения газа в пористой среде внешним источником // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2013. № 2(5). С. 189–196.
2. Фурсенко Р.В., Минаев С.С. Устойчивость пламени в системе с противоточным теплообменом // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41. № 2. С. 17–25.
3. Ronney P.D. Analysis of non-adiabatic heatrecirculating combustors // Combust. Flame. 2003. V. 135. No. 4. P. 421–439.
4. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Влияние скорости подачи газа на устойчивость горения метановоздушной смеси в щелевой горелке с внутренней вставкой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 63–71
5. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Горение бедных метановоздушных смесей в щелевой горелке с адиабатическими внешними стенками // Физика горения и взрыва. 2016. Т. 52. № 1. С. 45 – 52.
6. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968.
7. Bradley D., Lawes M., Scott M. J., Usta N. The Structure of coal-air-CH₄ laminar flames in a low-pressure burner: CARS measurements and modeling studies // Combust. Flame. 2001. V. 124. No. 1-2. P. 82–105.
8. Крайнов А.Ю. Моделирование распространения пламени в смеси горючих газов и частиц // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36. № 2. С. 3–9.
9. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.

Статья поступила 05.03.16 г.

Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. (2016) COMBUSTION OF THE COAL-METHANE-AIR MIXTURE IN THE HEAT RECOVERY BURNER. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(41). pp. 65–73

DOI 10.17223/19988621/41/7

In this article, the research of the combustion of methane-air mixture with coal dust particles in the heat recovery burner is performed. The burner consists of two parallel plates with a thin internal partition (U-shaped burner). The mixture which flows into the inlet is warmed up via the thin internal partition by heat reaction products from the outlet.

The mathematical statement of the problem includes the equations of energy conversation for gas, coal particles, and internal partition, mass balance equations of methane, oxygen and coal particles, continuity equation, particle number concentration equation, particle size equation, and gas equation. The numerical simulation is carried out using an implicit difference scheme with a four-point template.

The coal dust particle size and the gas flow rate at the inlet varied for each calculation. The stability boundary of the coal-methane-air mixture combustion is determined as a function of the inlet rate of gas depending on coal-dust particle size. The obtained results demonstrate that the heat recovery and coal dust particles burning can support the combustion of full lean methane-air mixtures.

Keywords: coal-methane-air mixture, monodisperse coal dust, slot burner, lean methane-air mixture, stable combustion.

KRAINOV Aleksey Yurevich (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

MOISEEVA Ksenia Mikhaylovna (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

REFERENCES

1. Kakutkina N.A., Korzhavin A.A., Manzhos E.V., et al. (2013) Initsirovanie goreniya gaza v poristoy srede vneshnim istochnikom [Initiation of gas combustion in a porous medium with an external source]. *Interesno Geo-Sibir'*. 2(5). pp. 189–196.
2. Fursenko R.V. and Minaev S.S. (2005) Flame stability in a system with counter flow heat exchange. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 41(2). pp. 133–139. DOI 10.1007/s10573-005-0015-1.
3. Ronney P.D. (2003) Analysis of non-adiabatic heatrecirculating combustors. *Combust. Flame*. 135(4). pp. 421–439.
4. Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. (2015) Rezhimy goreniya bednoy metanovozdushnoy smesi v U-obraznoy gorelke [The influence of gas flow rate on the methane-air mixture burning in a flat burner with an inert body]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 69–76.
5. Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. (2016) Combustion of lean methane-air mixtures in a slot burner with adiabatic outer walls. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 52(1). pp. 45–52. DOI 10.1134/S0010508216010068.
6. Lewis B. and Von Elbe G. (1987) *Combustion, Flames and Explosions of Gases*. Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich Publ.
7. Bradley D., Lawes M., Scott M.J., Usta N. (2001) The Structure of coal-air-CH₄ laminar Flames in a low-Pressure burner: CARS measurements and modeling studies. *Combust. Flame*. 124(1-2). pp. 82–105.
8. Krainov A.Yu. (2000) Modeling of flame propagation in a mixture of combustible gases and particles. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 36(2). pp. 157–163. DOI 10.1007/BF02699353.
9. Frank-Kamenetskiy D.A. (1987) *Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike* [Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics]. Moscow: Nauka.

УДК 532.529:662.62
DOI 10.17223/19988621/41/8

**О.В. Матвиенко, А.В. Андриасян,
Н.А. Мамадраимова, А.О. Андропова**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ФОРМЕ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

Проведено исследование движения частицы в форме вытянутого эллипсоида вращения в закрученном потоке. Установлено, что в зависимости от ориентации частицы в пространстве возможно как ее восходящее, так и нисходящее движение. С использованием модели дрейфа определены условия восходящего и нисходящего движения. Предложены зависимости, позволяющие определить компоненты вектора скорости частицы.

Ключевые слова: *механика жидкости, частицы, дисперсная фаза, закрученный поток, сепарация.*

В пылеочистительной технике большое распространение получили циклоны различных конструкций, однако принцип их работы одинаков и основан на использовании центробежной силы [1 – 3].

При центробежном разделении выбросу придается вращательное движение внутри циклонного аппарата, при этом твердые частицы отбрасываются центробежной силой на периферию аппарата к его стенке, так как центробежное ускорение в циклоне на несколько порядков больше ускорения силы тяжести, что позволяет удалить из выброса даже весьма мелкие частицы [4].

Для определения эффективности сепарации необходимо учитывать, помимо условий работы, свойства разделяемой смеси, дисперсность твердых частиц, вязкость дисперсионной среды, разницу плотностей разделяемых фаз, концентрацию вещества в жидкой фазе.

Отметим, что подавляющее большинство публикаций относится к изучению процессов разделения частиц сферической формы [5 – 9]. Однако в реальных ситуациях форма частицы может существенно отличаться от сферической. В результате распределения скорости жидкости и давления вблизи сферической и несферической частицы будет различным. И, как следствие этого, силы гидродинамического сопротивления, действующие на несферическую частицу, будут отличаться от сил, действующих на частицу сферической формы. Это, в свою очередь, приведет к изменению траекторий движения частиц в аппарате и повлияет на сепарационные характеристики.

Целью работы является исследование движения в закрученном потоке неизометрических твердых частиц, имеющих форму вытянутого эллипсоида вращения.

Поле течения жидкости

Рассмотрим движение жидкости в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами разного размера. Оба цилиндра могут как вращаться с постоянными угловыми скоростями, так и покоиться. Поскольку рассматриваемое течение жидкости

можно считать плоским и осесимметричным, то уравнения гидродинамики в цилиндрических координатах примут вид [10]

$$\frac{d}{dr} \left[r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{v_{l\varphi}}{r} \right) \right] = 0, \quad \frac{dp}{dr} = \rho_l \frac{v_{l\varphi}^2}{r}. \quad (1)$$

Здесь r – радиальная координата; $v_{l\varphi}$ – тангенциальная скорость жидкости; ρ_l – плотность жидкости; p – давление.

В качестве граничных условий используются условия прилипания на стенках:

$$r = r_i : v_{l\varphi} = \omega_i r_i, \quad r = r_e : v_{l\varphi} = \omega_e r_e. \quad (2)$$

В уравнениях (2) r_i , r_e – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно ω_i , ω_e – угловые скорости их вращения.

Проинтегрировав уравнение (1) с граничными условиями (2), получим радиальное распределение тангенциальной скорости жидкости:

$$v_{l\varphi} = \frac{\omega_e r_e^2 - \omega_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} r - \frac{r_e^2 r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{\omega_e - \omega_i}{r}. \quad (3)$$

Если внешний и внутренний цилиндры вращаются с одной угловой скоростью $\omega_e = \omega_i = \omega$, то распределение тангенциальной скорости соответствует закону вращения твердого тела $v_{l\varphi} = \omega r$.

Уравнения движения частицы

При движении частицы в потоке жидкости или газа на нее действует сила сопротивления со стороны несущей среды. Если вектор скорости частицы направлен в сторону большей полуоси эллипсоида или перпендикулярно ей, то сила сопротивления будет направлена в сторону, противоположную вектору скорости [3]. Если частица движется в направлении, перпендикулярном большей полуоси эллипсоида, то и в этом случае вектор скорости и вектор силы сопротивления будут направлены в противоположные стороны. При этом величина силы сопротивления в первом и втором случае будет различной. Если же вектор скорости центра масс частицы направлен под углом к главным осям эллипсоида, то векторы скорости и силы сопротивления перестают быть коллинеарными. Величина силы сопротивления будет определяться скалярным произведением тензора сопротивления K и вектора скорости частицы относительно несущего потока:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu a K \cdot (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_p), \quad (4)$$

где μ – вязкость несущей среды, a – характерный размер частицы, \mathbf{v}_l – скорость несущего потока, \mathbf{v}_p – скорость частицы.

В декартовой систем координат с использованием индексной формы записи и соглашения о суммировании Эйнштейна уравнение (4) может быть записано в виде

$$F_{Di} = -6\pi\mu a K_{ij} (v_{lj} - v_{pj}). \quad (5)$$

В случае сферической симметрии все 3 диагональные компоненты тензора сопротивления будут равны между собой и закон сопротивления естественным образом переходит в хорошо известный закон Стокса.

В том случае, если частица является ортотропной, т.е. имеет 3 взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то тензор сопротивления в главных осях характеризуется главными значениями K_1 , K_2 и K_3 . В случае осевой симметрии две из трех диагональных компонент тензора будут равны между собой, что имеет место для эллипсоида вращения [3]:

$$K_1 = \frac{\text{Re}}{18} \frac{(\beta^2 - 1)^{3/2}}{(2\beta^2 - 1) \ln(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) - \beta \sqrt{\beta^2 - 1}} C_D; \quad (6)$$

$$K_2 = K_3 = \frac{\text{Re}}{9} \frac{(\beta^2 - 1)^{3/2}}{(2\beta^2 - 3) \ln(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) + \beta \sqrt{\beta^2 - 1}} C_D, \quad (7)$$

где C_D – коэффициент сопротивления твердой сферической частицы, $\beta = b/a$ характеризует отношение полярного и экваториального диаметра частицы. Формулы (6), (7) справедливы для вытянутых эллипсоидов вращения $\beta > 1$.

Коэффициент сопротивления одиночной твердой частицы C_D в простейшем случае является однозначной функцией относительного числа Рейнольдса $\text{Re} = \rho |v_l - v_p| d / \mu$. В качестве характерного размера, необходимого для построения числа Рейнольдса, можно использовать эффективный диаметр частицы, равный диаметру сферической частицы того же самого объема. Для вытянутого эллипсоида вращения эффективный диаметр частицы равен $d = 2a^3 \sqrt{\beta}$. При низких числах Рейнольдса $\text{Re} < 1$ коэффициент сопротивления сферической частицы определяется формулой Стокса: $C_D = 24/\text{Re}$. В переходной области кривая сопротивления описывается различными формулами. В частности, стандартную кривую сопротивления можно аппроксимировать степенными зависимостями Бабухи – Шрайбера [11]: $C_D = A \text{Re}^{-n}$. Значения параметров в диапазоне изменения числа Рейнольдса $1 < \text{Re} < 10$ равны: $A = 26.3$, $n = 0.8$. Для чисел Рейнольдса, лежащих

в диапазоне $10 < \text{Re} < 1000$ рекомендуется использовать следующие значения [12]: $A = 12.3$, $n = 0.5$. При $\text{Re} > 10^3$ картина обтекания стабилизируется, что в первом приближении приводит к независимости C_D от Re : $C_D = 0.44$. Последнее соотношение известно как закон сопротивления Ньютона.

Движение частицы в закрученном потоке удобно рассматривать в цилиндрической системе координат с базисными векторами e_r , e_φ , e_z . Построим единичный вектор n , направление которого совпадает с направлением большей полуоси частицы. Тогда ориентацию частицы в пространстве можно задать через углы прецессии ψ и нутации θ (рис. 1).

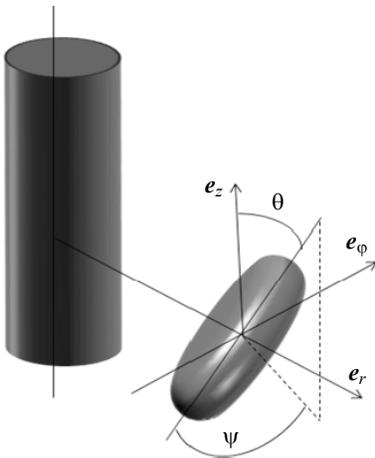


Рис. 1. Ориентация частицы в потоке
Fig. 1. Particle orientation in the flow

Предполагается, что в процессе движения частицы углы ψ и θ остаются неизменными. Последнее возможно при стабилизации заряженной частицы электромагнитным полем [13].

При таком выборе координат компоненты тензора сопротивления определяются следующим образом:

$$K_{rr} = (K_1 - K_2) \cos^2 \psi \cdot \sin^2 \theta + K_2, \quad K_{\varphi\varphi} = (K_1 - K_2) \sin^2 \psi \cdot \sin^2 \theta + K_2,$$

$$K_{zz} = (K_1 - K_2) \cos^2 \theta + K_2, \quad K_{r\varphi} = \frac{1}{2}(K_1 - K_2) \sin(2\psi) \cdot \sin^2 \theta,$$

$$K_{rz} = \frac{1}{2}(K_1 - K_2) \cos \psi \cdot \sin(2\theta), \quad K_{z\varphi} = \frac{1}{2}(K_1 - K_2) \sin \psi \cdot \sin(2\theta).$$

С использованием теоремы об изменении количества движения скорость центра масс частицы может быть найдена из решения системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_{pz}}{dt} = \frac{9}{2} \pi \frac{\mu}{\rho_p a^2} [K_{rz} (v_{lr} - v_{pr}) + K_{z\varphi} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) + K_{zz} (v_{lz} - v_{pz})] - \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p} g \quad (8)$$

$$\frac{dv_{p\varphi}}{dt} = \frac{9}{2} \pi \frac{\mu}{\rho_p a^2} [K_{r\varphi} (v_{lr} - v_{pr}) + K_{\varphi\varphi} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) + K_{z\varphi} (v_{lz} - v_{pz})] - \frac{v_{p\varphi} v_{pr}}{r} \quad (9)$$

$$\frac{dv_{pr}}{dt} = \frac{9}{2} \pi \frac{\mu}{\rho_p a^2} [K_{rr} (v_{lr} - v_{pr}) + K_{r\varphi} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) + K_{rz} (v_{lz} - v_{pz})] + \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p} \frac{v_{p\varphi}^2}{r}. \quad (10)$$

Для определения траектории центра масс частицы используются кинематические соотношения [14]

$$v_{pr} = \frac{dr_p}{dt}, \quad v_{pz} = \frac{dz_p}{dt}, \quad v_{p\varphi} = r_p \frac{d\varphi_p}{dt}. \quad (11)$$

Система уравнений (7 – 10) замыкается начальными условиями

$$t = 0 : v_{pz} = v_{pz0}, \quad v_{pr} = v_{pr0}, \quad v_{p\varphi} = v_{p\varphi0}, \quad z_p = z_{p0}, \quad r_p = r_{p0}, \quad \varphi_p = \varphi_{p0}.$$

Анализ результатов

Рассмотрим движение эллипсоидальных вытянутых частиц в закрученном потоке. Движение мелких частиц относительно несущей жидкости достаточно мало. В результате этого самые мелкие частицы движутся по винтовой траектории практически по цилиндрической поверхности. Крупные частицы, отесняемые центробежной силой, движутся к стенкам внешнего цилиндра по конической поверхности. С увеличением скорости вращения внешнего цилиндра число витков, увеличивается, шаг винтовой линии уменьшается. С увеличением угловой скорости вращения цилиндров происходит рост значений центробежной силы, которая интенсифицирует радиальное движение частицы к внешнему цилиндру. В результате происходит увеличение угла конусности.

На рис. 2 показаны траектории частицы для различных значений угла нутации. Из рисунка видно, что в зависимости от ориентации частицы в пространстве возможно как ее восходящее, так и нисходящее движение.

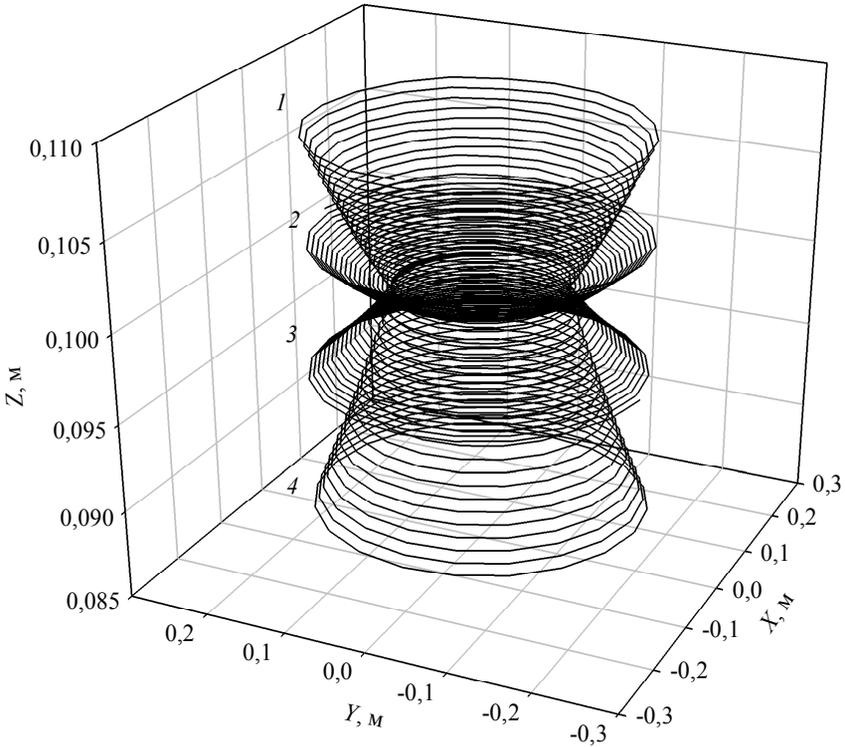


Рис. 2. Траектории движения вытянутых эллипсоидальных частиц:
 $d = 10^{-4}$ м, $\beta = 10$, $\omega_i = \omega_e = 10$ рад/с; $\psi = 0$, $1 - \theta = 60^\circ$, $2 - 75^\circ$, $3 - 90^\circ$, $4 - 105^\circ$;

Fig. 2. Motion trajectories of prolate ellipsoidal particles:
 $d = 10^{-4}$ m, $\beta = 10$, $\omega_i = \omega_e = 10$ rad/s; $\psi = 0$, $1 - \theta = 60^\circ$, $2 - 75^\circ$, $3 - 90^\circ$, $4 - 105^\circ$

Такое движение объясняется особенностями действия на частицу силы сопротивления. Сила сопротивления, действующая на эллипсоидальную частицу, со стороны несущей жидкости характеризуется наличием горизонтальной и вертикальной составляющих. Горизонтальная составляющая силы сопротивления для тяжелых частиц, плотность которых превосходит плотность несущей среды, направлена к оси симметрии. Направление вертикальной составляющей силы сопротивления зависит от ориентации частицы в пространстве.

Влияние угла нутации θ на движение частицы представлено на рис. 3, где показаны меридиональные проекции траектории, определенные для различных значений угла нутации. Для значений угла $0 < \theta < 15^\circ$ и $15^\circ < \theta < 85^\circ$ движение частиц происходит по нисходящей траектории, для $15^\circ < \theta < 85^\circ$ – по восходящей. Максимальная высота подъема достигается при $\theta = 43^\circ$, наибольшая глубина – при $\theta = 142^\circ$.

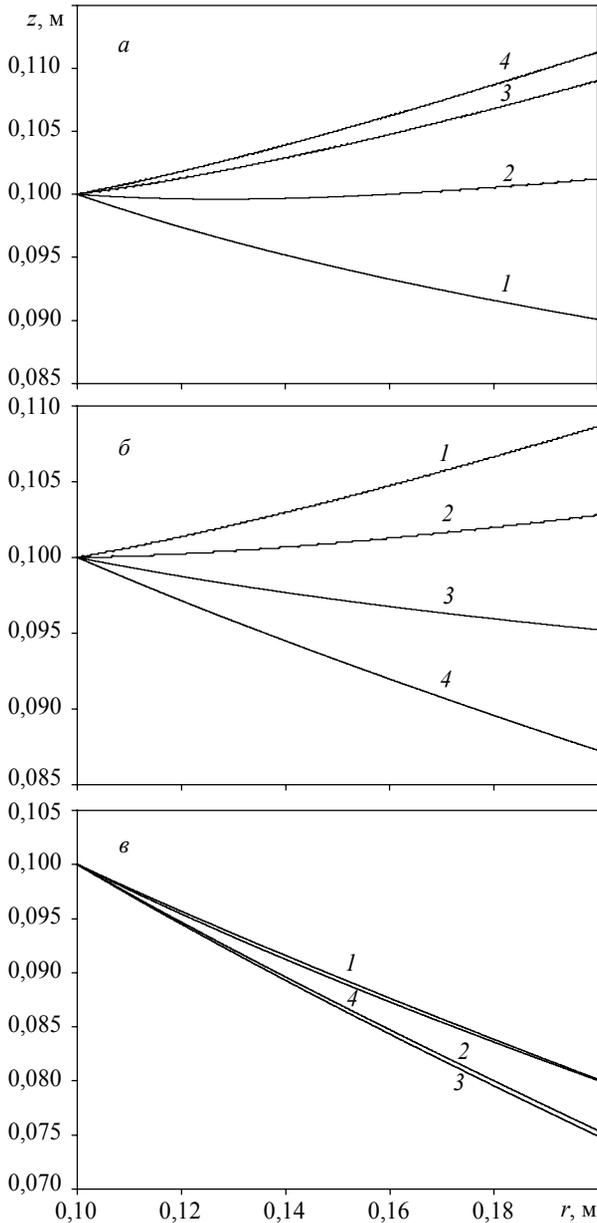


Рис. 3. Меридиональные проекции траектории движения вытянутых эллипсоидальных частиц: $d=10^{-3}$ м, $\psi=0$, $\beta=10$, $\omega_i=\omega_e=10$ рад/с; а: 1 – $\theta=0^\circ$, 2 – 15° , 3 – 30° , 4 – 45° ; б: 1 – $\theta=60^\circ$, 2 – 75° , 3 – 90° , 4 – 105° ; в: 1 – $\theta=120^\circ$, 2 – 135° , 3 – 150° , 4 – 165°

Fig. 3. Meridional projections of the motion trajectory of prolate ellipsoidal particles: $d=10^{-3}$ m, $\psi=0$, $\beta=10$, $\omega_i=\omega_e=10$ rad/s; а: 1 – $\theta=0^\circ$, 2 – 15° , 3 – 30° , 4 – 45° ; б: 1 – $\theta=60^\circ$, 2 – 75° , 3 – 90° , 4 – 105° ; в: 1 – $\theta=120^\circ$, 2 – 135° , 3 – 150° , 4 – 165°

Определим условия, при которых движение частицы является восходящим, а при каких – нисходящим.

Из анализа уравнений движения (8 – 10) следует, что на начальном участке происходит достаточно резкое изменение скорости частицы от начального значения до некоторого равновесного значения, определяемого балансом сил, действующих на частицу и не зависящего от начальных условий. Время выхода на равновесный режим движения может быть найдено как

$$t_{\text{eq}} = \frac{\rho_p a^2}{\pi \mu K_2}. \quad (12)$$

Для мелких частиц время достижения динамического равновесия намного меньше характерного гидродинамического времени $t_{\text{dyn}} = \omega r_e / g$, что позволяет для анализа движения использовать модель дрейфа частиц [9]. При этом скорость частиц определяется в предположении малости инерционных членов. Таким образом, компоненты вектора скорости частицы могут быть найдены из решения системы алгебраических уравнений:

$$\frac{9}{2} \pi \frac{\mu}{\rho_p a^2} [K_{rz} (v_{lr} - v_{pr}) + K_{z\varphi} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) + K_{zz} (v_{lz} - v_{pz})] = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p} g; \quad (13)$$

$$\frac{9}{2} \pi \frac{\mu}{\rho_p a^2} [K_{r\varphi} (v_{lr} - v_{pr}) + K_{\varphi\varphi} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) + K_{z\varphi} (v_{lz} - v_{pz})] = 0; \quad (14)$$

$$\frac{9}{2} \pi \frac{\mu}{\rho_p a^2} [K_{rr} (v_{lr} - v_{pr}) + K_{r\varphi} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) + K_{rz} (v_{lz} - v_{pz})] = -\frac{(\rho_p - \rho_l) v_{p\varphi}^2}{\rho_p r}. \quad (15)$$

Система уравнений (13) – (15) является системой нелинейных алгебраических уравнений. Преобразование этой системы приводит к кубическому уравнению, решение которого можно осуществить, например, методом Кардано. Однако полученное решение является достаточно громоздким. Поэтому остановимся на анализе нескольких частных случаев.

В первом случае будем полагать, что угол прецессии $\psi = 0$. Для квазитвердого вращения жидкости: $v_{lz} = 0$, $v_{lr} = 0$, $v_{l\varphi} = \omega r$, система уравнений (13) – (15) примет вид

$$K_{rz} v_{pr} + K_{zz} v_{pz} = -\frac{2}{9} t_{\text{eq}} K_2 \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p} g; \quad (16)$$

$$v_{l\varphi} - v_{p\varphi} = 0; \quad (17)$$

$$K_{rr} v_{pr} + K_{rz} v_{pz} = \frac{2}{9} t_{\text{eq}} K_2 \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p} \omega^2 r. \quad (18)$$

Решение системы (16) – (17) позволяет определить компоненты скорости частицы:

$$v_{pr} = v_* (\text{Fr} \cdot K_{zz} - K_{rz}), \quad v_{pz} = v_* (K_{rr} - \text{Fr} \cdot K_{rz}), \quad v_{p\varphi} = \omega r, \quad (19)$$

где $v_* = \frac{2}{9} t_{\text{eq}} \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p K_1} g$ – стационарная скорость осаждения частицы, большая

ось которой является вертикальной, $\text{Fr} = \omega^2 r / g$ – число Фруда.

На рис. 4 показаны зависимости радиальной и осевой составляющих скорости от угла нутации θ , рассчитанные как с использованием дифференциальной модели (8) – (10), так и модели дрейфа (19). Сравнение полученных результатов позволяет сделать вывод о возможности применения модели дрейфа для анализа движения частиц. Как видно из рисунков, максимальная скорость радиального

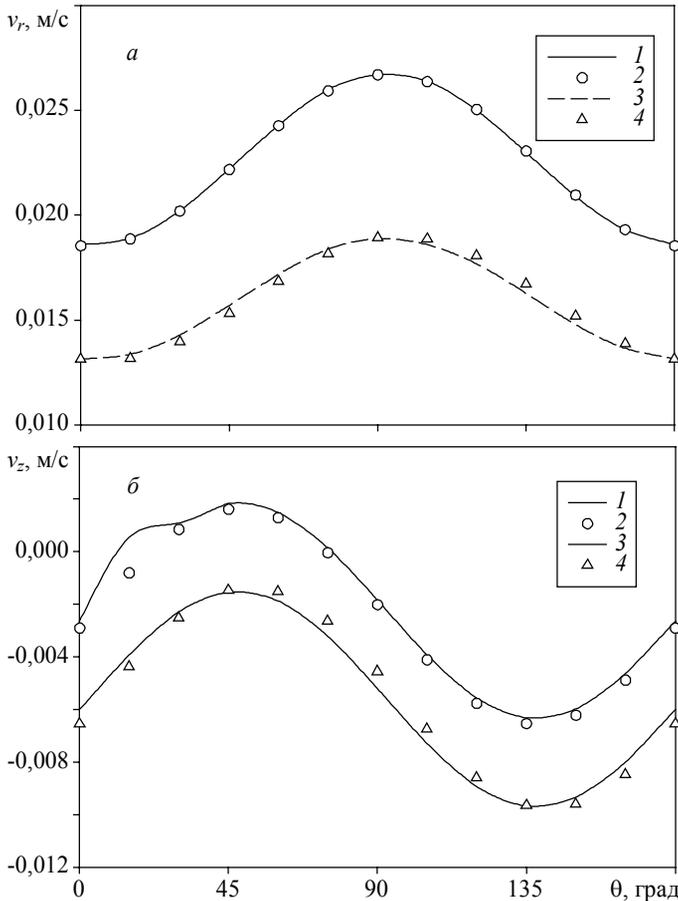


Рис. 4. Зависимость радиальной (а) и осевой (б) составляющих скорости от угла нутации θ : $d = 10^{-3}$ м, $\psi = 0$, $\beta = 10$, $\omega_i = \omega_e = 10$ рад/с; 1, 3 – расчет с использованием модели (10) – (13), кр. 2, 4 – с использованием модели дрейфа, кр. 1, 2 – $\text{Fr} = 5$, кр. 3, 4 – $\text{Fr} = 2$

Fig. 4. Dependence of the (a) radial and (б) axial velocity components on nutation angle θ : $d = 10^{-3}$ m, $\psi = 0$, $\beta = 10$, $\omega_i = \omega_e = 10$ rad/s; 1, 3 – calculations according to models (10) – (13), 2, 4 – drift model is used, 1, 2 – $\text{Fr} = 5$, 3, 4 – $\text{Fr} = 2$

движения частицы к стенке достигается при значении угла $\theta = 90^\circ$. В этом случае большая ось частицы ориентирована вдоль радиуса камеры, поэтому при движении в радиальном направлении частица испытывает наименьшее сопротивление. Напротив, при $\theta = 0$ сопротивление радиальному движению со стороны несущего потока становится максимальным. Это приводит к уменьшению значений v_{pr} . С увеличением скорости вращения несущего потока эффект центробежной сепарации становится более значимым, поэтому с ростом значений числа Фруда Fr возрастает радиальная составляющая скорости движения частицы v_{pr} .

Скорость гравитационного осаждения уменьшается при значениях угла нутации $0 < \theta < 45^\circ$, $135^\circ < \theta < 180^\circ$ и возрастает при $45^\circ < \theta < 135^\circ$. При этом максимальная скорость осаждения частицы достигается при $\theta = 135^\circ$, минимальная – $\theta = 45^\circ$. С увеличением значений числа Фруда Fr скорость гравитационного осаждения частицы уменьшается. При достаточно сильной закрутке потока движение частицы станет восходящим. С помощью уравнения (19) определим критическое значение числа Фруда Fr_* , разделяющее режим восходящего и нисходящего движений: $Fr_* = K_{rr} / K_{rz}$.

Если угол прецессии составляет $\psi = 90^\circ$, то компоненты скорости частицы будут

$$v_{pz} = -\frac{K_1}{K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta} v_*, \quad v_{p\varphi} = v_{l\varphi}, \quad v_{pr} = \frac{K_1}{K_2} Fr \cdot v_* . \quad (20)$$

При такой ориентации частицы возможно только нисходящее движение. Скорость гравитационного осаждения зависит от значений угла θ . При $\theta = 0$ достигается максимальная скорость осаждения, при $\theta = 90^\circ$ – минимальная.

Рассмотрим теперь случай, когда угол нутации $\theta = 0$. В этом случае равновесные значения составляющих скорости частицы будут равны:

$$v_{pz} = -\frac{2}{9} t_{eq} \frac{K_2 (\rho_p - \rho_l)}{K_1 \rho_p} g = -K_2 v_*, \quad v_{p\varphi} = v_{l\varphi},$$

$$v_{pr} = \frac{2}{9} t_{eq} \frac{(\rho_p - \rho_l)}{\rho_p} \omega^2 r = \frac{Fr}{K_1} v_* . \quad (21)$$

Как следует из (21)? движение частицы для заданной ориентации осей всегда будет нисходящим. При угле нутации $\theta = 0$ скорость движения частицы не зависит от значения угла φ .

При значении угла $\theta = 90^\circ$ компоненты вектора скорости частицы будут

$$v_{pz} = -K_1 v_*, \quad v_{p\varphi} = -\frac{1}{2Fr} \frac{v_{l\varphi}^2}{v_*} \left(1 - \sqrt{1 + 4Fr \frac{v_*}{v_{l\varphi}}} \right), \quad v_{pr} = \frac{K_{\varphi\varphi}}{K_{r\varphi}} (v_{l\varphi} - v_{p\varphi}) . \quad (15)$$

Скорость гравитационного осаждения не зависит от величины угла прецессии и определяется только размером и формой частицы. Скорость движения частицы в тангенциальном направлении оказывается отличной от скорости движения жидкости и зависит от размеров, формы частицы и угловой скорости вращения жидкости. При этом, чем больше число Фруда, тем больше скорость движения частицы в тангенциальном направлении отличается от скорости несущего потока. Ско-

рость радиального движения частицы определяется не только размером и формой частицы, а также ее ориентацией в пространстве.

Таким образом, проведенные исследования показали, что движение частиц существенно определяется их положением в потоке, и для создания расчетных методик сепарации и пылеулавливания необходимо учитывать этот факт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. Multiphase Flows with Droplets and Particles. CRC Press, 1998. 472 p.
2. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
3. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запрянов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996.
4. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 2. С. 230–238.
5. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops and particles. NY: Academ Press, 1978. 380 p.
6. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid // J. of Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385–400.
7. Матвиенко О.В., Данейко А.М. Исследование ударного взаимодействия частиц в потоке // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9-3. С. 190–192.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О. Исследование движения частицы в потоке жидкости вблизи подвижной стенки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4. С. 85–92.
9. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В., Андропова А.О. Применимости модели дрейфа частиц для моделирования переноса дисперсной фазы в потоке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5 (37). С. 76–83.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
11. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Агафонцева М.В. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2012. № 4 (37). С. 144–156.
12. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
13. Böttner C.U., Sommerfeld M. Numerical calculation of powder painting using the Euler/Lagrange approach // Powder Technology. 2002. V. 125. P. 206–216.
14. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В. Численное исследование процесса дегазации в гидроциклонах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 107–118.

Статья поступила 11.02.2016 г.

Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. (2016) INVESTIGATION OF THE PROLATE ELLIPSOIDAL PARTICLE MOTION IN A SWIRLING FLOW. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(41). pp. 74–85.

DOI 10.17223/19988621/41/8

In this paper, the investigations of the prolate ellipsoidal particles movement in a swirling flow were carried out.

The motion of small particles relative to the carrier fluid flow is insignificant. As a result, the smallest particles move along a helical path at an approximately cylindrical surface. Large particles affected by centrifugal force move to the walls of the outer cylinder along a conical surface. Increasing of the angular velocity of the cylinders leads to an increase in the centrifugal force which intensifies the radial motion of the particles to the outer cylinder. It is found that, depending on the particle orientation in the space, both upward and downward motions are possible.

The movement is caused by particular drag force influence on the ellipsoidal particle. The drag force is characterized by the horizontal and vertical components. The horizontal component for heavy particles with density value greater than that of the carrier medium is directed towards the axis of symmetry. The direction of the vertical component of the drag force depends on the orientation of the particles in the space.

Utilizing the particle slip velocity model, the regimes of upward and downward movement are defined. Dependencies for the determination of particle velocity components are proposed. It is found that the gravitational settling velocity of the particle decreases with an increase in the value of the Froude number. In the case of a strong swirling flow, the motion of the particle becomes upward.

Keywords: mechanics of fluid, particles, dispersed phase, swirling flow, separation.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: matvolegv@mail.ru

ANDROPOVA Antonina Olegovna (Tomsk State University)

E-mail: a.o.andropova@gmail.com

ANDRIASYAN Alina Valerrievna (Tomsk State University of Architecture and Building)

E-mail: alina-andriasyan@yandex.ru

MAMADRIMOVA Nazira Abdairimovna (Tomsk State University of Architecture and Building)

E-mail: alina-andriasyan@yandex.ru

REFERENCES

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. (1998) *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. CRC Press.
2. Ostrovsky G.M. (2000) *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred* [Applied mechanics of heterogeneous media]. Saint Petersburg: Nauka.
3. Kutepov A.M., Polyanin L.D., Zapryanov Z.D. (1996) *Khimicheskaya gidrodinamika* [Chemical Hydrodynamics]. Moscow: Byuro Kvantum.
4. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V. (2011) Mathematical study of hydrocyclone dispersed phase separation in clearing viscoplastic drilling fluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(2). pp 241–250. DOI 10.1007/s10891-011-0466-z.
5. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. (1978) *Bubbles, drops and particles*. NY: Academ Press.
6. Rubinow S.I., Keller J.B. (1965) The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. of Fluid Mech.* 22. pp. 385–400.
7. Matvienko O.V., Daneiko A.M. (2013) Issledovanie udarnogo vzaimodeystviya chastits v potoke [Investigation of shock interaction of particles in a stream]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika. – Russian Physical Journal*. 56(9/3). pp. 190–192.
8. Matvienko O.V., Andropova A.O. (2015) Issledovanie dvizheniya chastitsy v potoke zhidkosti vblizi podvizhnoy stenki [Studying the particle motion in a fluid flow in the vicinity of a movable wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 85–92. DOI 10.17223/19988621/36/10.
9. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V., Andropova A.O. (2015) Issledovanie primenimosti modeli dreyfa chastits dlya modelirovaniya perenosa dispersnoy fazy v potoke [Studying the applicability of the algebraic slip model for predicting the dispersed phase motion in the flow]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5 (37). pp. 76–83. DOI 10.17223/19988621/37/7.
10. Shlikhting G. (1964) *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag. (In German).
11. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Agafontseva M.V. (2012) Issledovanie dinamiki puzyr'ka v zakruchennom potoke nelineyno-vyazkoy zhidkosti [Investigation of the dynamics of a bub-

- ble in a swirling flow of nonlinear-viscous liquid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Bulletin of the Tomsk State Architectural University*. 4(37). pp. 144–156.
12. Happel J., Brenner H. (1965) *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*. Prentice-Hall.
 13. Böttner C.U., Sommerfeld M. (2002) Numerical calculation of powder painting using the Euler/Lagrange approach. *Powder Technology*. 125. pp. 206–216.
 14. Matvienko O.V., Agafontseva M.V. (2012) Chislennoe issledovanie protsessa degazatsii v gidrotsiklonakh [Numerical study of the degassing process in hydrocyclones]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 107–118.

УДК 519.6:532.516
DOI 10.17223/19988621/41/9

Б.О. Цыденов

ЧИСЛЕННОЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ГИДРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЕРИОД РАЗВИТИЯ ВЕСЕННЕГО ТЕРМОБАРА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ «НУТРИЕНТ – ФИТОПЛАНКТОН – ЗООПЛАНКТОН»¹

Описывается биологическая модель для воспроизведения динамики биомасс планктона в период развития весеннего речного термобара в глубоком озере. Численное моделирование гидробиологических процессов осуществляется с помощью модели Франкса и др. «нутриент – фитопланктон – зоопланктон». Проведена верификация разработанной модели на основе имеющихся в литературе результатов расчётов других авторов. На примере канадского озера Камлупс исследовано влияние притока отдельных биологических составляющих модели планктона за счёт стока реки Томпсон на их пространственно-временное распределение в водоёме.

Ключевые слова: *планктон, термобар, математическая модель, численный эксперимент, озеро Камлупс.*

Весной и осенью в озёрах умеренных широт возникает природное явление, представляющее собой узкую зону, в которой происходит погружение воды, имеющей наибольшую плотность, от поверхности до дна. Такой феномен впервые обнаружил швейцарский лимнолог Франсуа Форель на Женевском озере в 1880 году и назвал термобаром (франц. *barre thermique* – температурная преграда) [1]. Результаты исследований этого уникального явления отражены в публикациях как отечественных [2–6 и др.], так и зарубежных [7–9 и др.] учёных.

Термобар оказывает огромное влияние на экосистему озера, так как он препятствует горизонтальному перемешиванию между двумя циркуляционными ячейками с разными характеристиками воды (температурой, минерализацией, скоростью течения и т.д.) и формирует барьер между областями с благоприятными (с теплой водной массой) и менее благоприятными (с холодной водной массой) условиями для роста планктонных сообществ. Известно, что благодаря нисходящему течению термобар может аккумулировать в себе планктон и другие организмы на поверхности с локальным максимумом популяции [10, 11]. Кроме того, некоторые виды планктона (в частности, диатомовые водоросли), несмотря на значительную скорость погружения воды внутри фронта термобара, имеют тенденцию оставаться в эвфотической зоне [12], в то время как нисходящий перенос органических веществ ведёт к росту микробиологической активности в глубоководной части озера [10]. Исследование роли термобара на жизнедеятельность планктонных сообществ имеет неопределимое научное и практическое значение, поскольку планктон служит важным индикатором для оценки качества воды в озере, продуктивности и жизнеспособности водной экосистемы. Важно также отметить, что

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60041 мол_а_дк.

планктон – основа пищевой базы для многих видов рыбы, поэтому информация о распространении планктона и времени его роста и убыли в определенных районах водоёма важна в планировании и выборе оптимальных сроков вылова рыбы рыбопромысловыми организациями.

Единственными исследователями, занимавшимися численным исследованием эффектов термобара на популяцию планктона, являются В. Ботт, Э. Кай, П.Р. Холланд [13, 8].

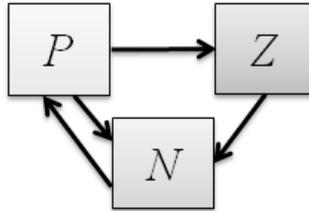


Рис. 1. Концептуальное представление модели Франкса и др. [14]. Стрелками показаны пути потока питательных веществ между P (фитопланктоном), Z (зоопланктоном) и N (нутриентом)

Fig. 1. Conceptual view of the model of Franks et al. [14]. The arrows indicate the direction of the nutrient flow between P (phytoplankton), Z (zooplankton), and N (nutrient)

Целью данной работы является разработка и верификация математической модели на основе модели Франкса и др. «нутриент – фитопланктон – зоопланктон» [14] (рис. 1) для исследования распределения биомасс планктона во время весенней эволюции термобара на примере озера Камлупс, а также анализ влияния речной концентрации биологических компонентов на их распределение в водоёме.

Математическая модель

Уравнения термогидродинамической модели

Негидростатическая модель для воспроизведения термогидродинамических процессов в глубоком озере, учитывающая влияние силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и записанная в приближении Буссинеска, включает в себя следующие уравнения [15]:

а) уравнения количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \cdot \Omega_z v - 2 \cdot \Omega_y w;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \cdot \Omega_x w - 2 \cdot \Omega_z u;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \cdot \frac{\rho}{\rho_0} + 2 \cdot \Omega_y u - 2 \cdot \Omega_x v;$$

б) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

в) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{sol}}{\partial z};$$

г) уравнение баланса солёности в озере

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial wS}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right),$$

где u , v – горизонтальные компоненты скорости; w – вертикальная компонента скорости; Ω_x , Ω_y и Ω_z – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; g – ускорение свободного падения; c_p – удельная теплоёмкость; T – температура; S – солёность; p – давление; ρ_0 – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, температуре T_L и солёности S_L (T_L и S_L – характерная температура и солёность озера соответственно). Коротковолновая солнечная радиация, проникающая в воду, рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра

$$H_{sol} = H_{Ssol,0} \cdot \exp(-\varepsilon_{abs} d),$$

где $H_{Ssol,0}$ – поток солнечной радиации на свободной поверхности, ε_{abs} – коэффициент поглощения, $d = |L_z - z|$ – глубина.

Для замыкания системы уравнений используется двухпараметрическая k – ω -модель турбулентности Уилкокса [16], состоящая из уравнений для кинетической энергии и частоты турбулентных пульсаций и алгебраических соотношений для определения турбулентной диффузии [17].

В качестве уравнения состояния $\rho = \rho(T, S, p)$ выбрано уравнение Чена – Миллера [18], принятое UNESCO. Данное уравнение состояния связывает плотность воды с температурой, солёностью, давлением и справедливо в диапазоне $0 \leq T \leq 30$ °C, $0 \leq S \leq 0.6$ г/кг, $0 \leq p \leq 180$ бар.

Уравнения модели планктона

Перенос биомасс планктона описывается с помощью конвективно-диффузионных уравнений вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial u\Psi}{\partial x} + \frac{\partial w\Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + S_\Psi,$$

где Ψ – концентрация биологического компонента (нутриента, фитопланктона, зоопланктона); S_Ψ – источниковый член для соответствующей биологической составляющей, которая представляет результат взаимодействия с остальными биокомпонентами модели. Для численного исследования динамики планктонных популяций в данной работе используется модель «нутриент (N) – фитопланктон (P) – зоопланктон (Z)» Франкса и др. [14]. Расчетные формулы, определяющие значения источниковых членов в N–P–Z-модели, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Взаимодействие фитопланктона (P), зоопланктона (Z) и нутриента (N)

Обозначение	Расчетная формула
S_P	$(G - m_p)P - IZ$
S_Z	$[(1 - \gamma)I - m_z]Z$
S_N	$(-G + m_p)P + (\gamma I + m_z)Z$

Интенсивность питания зоопланктона I в модели основана на формулировке Мейзо и Пуле [19] с модификацией Франкса и др. [14]:

$$I = R_m \Lambda P (1 - e^{-\Lambda P}).$$

Переменная G представляет скорость первичного продуцирования фитопланктона и рассчитывается по формуле

$$G = V_m e^{-\eta d} [N/(N+k_s)].$$

Все параметры, связанные с вычислением биологических компонентов в модели планктона, приведены в табл. 2 [8].

Таблица 2

Значения параметров «нутриент – фитопланктон – зоопланктон»-модели

Параметр	Наименование	Значение
V_m	Максимальная скорость роста фитопланктона	2.0 сут^{-1}
η	Коэффициент ослабления света	0.1 м^{-1}
k_s	Константа полунасыщения для поглощения питательных веществ	$0.2 \text{ ммоль} \cdot \text{м}^{-3}$
m_p	Смертность фитопланктона	0.1 сут^{-1}
R_m	Максимальная интенсивность питания зоопланктона	0.5 сут^{-1}
Λ	Константа Йвлева для питания зоопланктона	$0.5 \text{ ммоль} \cdot \text{м}^{-3}$
γ	Доля неусвоенного питания зоопланктона	0.3
m_z	Смертность зоопланктона	0.2 сут^{-1}

Следует заметить, что размерность некоторых параметров (k_s , Λ) в табл. 2 указана в единицах азота, т.е. символ N в $[\text{ммоль} \cdot \text{м}^{-3}]$ обозначает химический элемент азот.

Начальные и граничные условия

Начальные условия для уравнений модели задаются в виде

$$u = 0; v = 0; w = 0; T = T_L; S = S_L; \Psi = \Psi_L \text{ при } t = 0,$$

где T_L , S_L , Ψ_L – температура, солёность и концентрация биологического компонента (нутриента, фитопланктона, зоопланктона) в озере соответственно; t – время. Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности $p = p_a$ методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности.

Граничные условия имеют следующий вид:

а) на поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \frac{\partial v}{\partial z} = 0; w = 0; D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{H_{net}}{\rho_0 \cdot c_p}; \frac{\partial S}{\partial z} = 0; \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

где тепловой поток H_{net} включает в себя длинноволновую радиацию, а также потоки скрытого и чувствительного тепла [20].

б) на твёрдых границах (на дне)

$$u = 0; v = 0; w = 0; \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \frac{\partial S}{\partial n} = 0; \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на границе входа реки (левой границе)

$$u = u_R; v = 0; w = 0; T = T_R; S = S_R; \Psi = \Psi_R,$$

где u_R – скорость речного притока; T_R, S_R, Ψ_R – температура, солёность и концентрация биологического компонента (нутриента, фитопланктона, зоопланктона) в устье реки соответственно.

г) на открытой границе задаются условия радиационного типа [21]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\phi = u, v, T, S, \Psi)$$

и простые градиентные условия

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Численный метод решения уравнений модели

Решение задачи основано на методе конечного объёма, согласно которому скалярные величины (концентрация фитопланктона, зоопланктона, нутриента, теплофизические характеристики воды и т.д.) определяются в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости – в средних точках на границах ячеек. В целях приближения расчётной области к прибрежному профилю озера применяется метод блокировки фиктивных областей [22]: приравниваются нулю компоненты скорости в выключенной зоне за счёт использования больших значений коэффициентов вязкости в этой зоне.

Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка – Николсон. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме QUICK [23] второго порядка. Для согласования рассчитываемых полей скорости и давления разработана процедура SIMPLED (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations with Density correction) для течений с плавучестью [24], представляющая собой модификацию метода SIMPLE Патанкара [22]. Алгоритм SIMPLED корректирует поля скорости и давления с учетом вариации плотности в гравитационном члене уравнения количества движения для вертикальной составляющей. Системы разностных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом релаксации.

Область исследования и условия для численных экспериментов

В качестве исследуемой области выбрано вертикальное сечение озера Камлупс, соответствующее направлению впадения р. Томпсон, начало системы координат совпадает с устьем реки (см. рис. 2, а). Озеро Камлупс находится на юго-западе Канады (провинция Британская Колумбия) в 340 км северо-восточнее Ванкувера и расположено между $50^\circ 26' - 50^\circ 45'$ с. ш. и $120^\circ 03' - 120^\circ 32'$ з. д. по течению реки Томпсон, имеет вытянутую форму (см. рис. 2, а). Упрощенная геометрия расчётной области имеет протяженность 10 км и глубину 150 м (см. рис. 2, б). Глубина участка на границе раздела река – озеро составляет 15 м.

Начальное распределение температуры в озере Камлупс имеет постоянное значение, равное 2.4°C , в то время как температура воды в реке соответствует 3.6°C и нагревается на 0.2°C в сутки. Река Томпсон впадает в озеро со скоростью 0.01 м/с, минерализация воды в озере и реке составляет 0.1 г/кг. Поток тепла, поступающий на водную гладь, принят равным 170 Вт/м² [8], коэффициент погло-

печения проникающей в воду солнечной радиации – 0.3 м^{-1} . Начальная концентрация фитопланктона, зоопланктона и нутриента в озере составляет 1.0, 1.0 и $4.0 \text{ ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$ соответственно [8]. Расчётная область (см. рис. 2, б) покрывается равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25 \text{ м}$ и $h_z = 3 \text{ м}$. Шаг по времени равен 60 с.

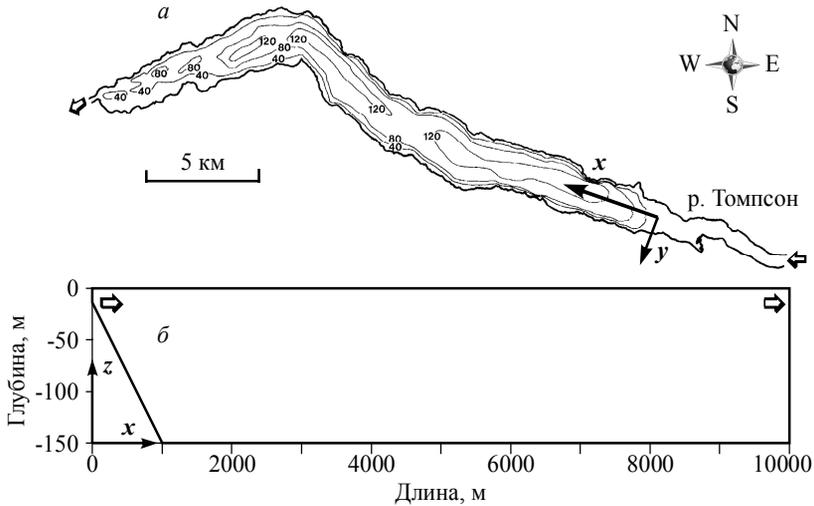


Рис. 2. Морфометрия оз. Камлупс: *а* – батиметрия оз. Камлупс, *б* – расчётная область (продольное сечение)

Fig. 2. Kamloops Lake morphometry: (*a*) bathymetry and (*b*) computational domain (longitudinal section)

Результаты моделирования

С целью оценки влияния концентрации биомасс в устье реки проведена серия вычислительных экспериментов с переменными значениями одного из биологических компонентов в модели планктона при фиксированных значениях остальных составляющих (см. табл. 3).

Таблица 3

Концентрация нутриента (N_R), фитопланктона (P_R) и зоопланктона (Z_R) в устье реки при численных экспериментах

№ вычислительного эксперимента	N_R	P_R	Z_R
1	4.0	1.0	1.0
2	увеличивается на $0.05 \text{ ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$ в сутки	1.0	1.0
3	4.0	увеличивается на $0.05 \text{ ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$ в сутки	1.0
4	4.0	1.0	увеличивается на $0.05 \text{ ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$ в сутки

В качестве базового случая рассматривается эксперимент №1, при котором речная концентрация фитопланктона, зоопланктона и нутриента на протяжении всего моделируемого периода имеет постоянное значение, совпадающее с озёрной [8]. Для верификации разработанной модели построены горизонтальные профили составляющих модели планктона на 8, 16 и 24 сутки численного эксперимента (рис. 3).

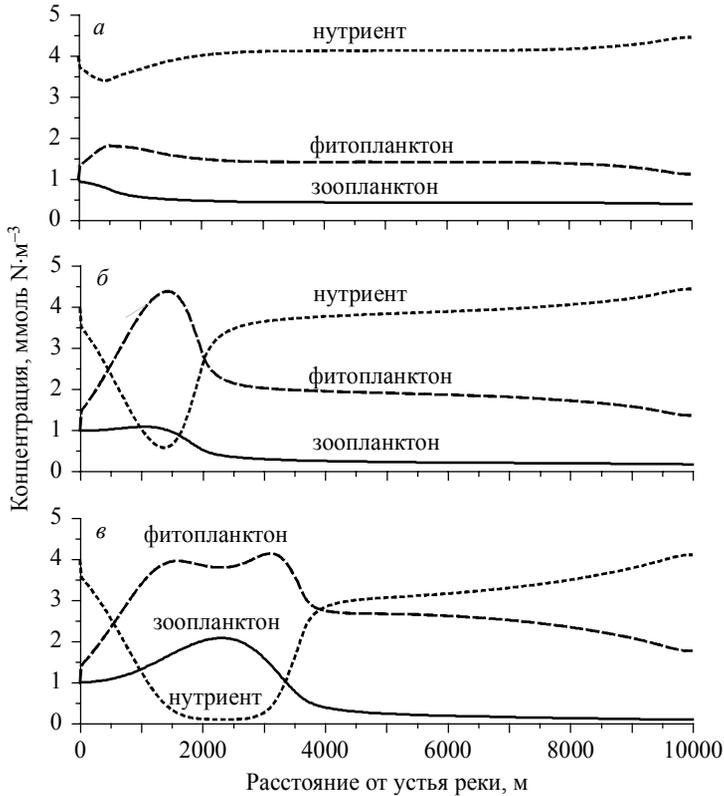


Рис. 3. Профили биологических компонентов на глубине 4.5 м, полученные на 8 (а), 16 (б) и 24 (в) сутки моделирования в вычислительном эксперименте № 1

Fig. 3. Profiles of biological components at 4.5 m depth after 8 (a), 16 (b), and 24 (v) days in simulation 1

Сравнение полученных значений концентрации биологических компонентов на глубине 4.5 м с результатами расчетов Холланда и др. (рис. 11 в [8]) показывает качественное согласование. Однако следует также заметить, что имеет место незначительное количественное различие, связанное с эффектом минерализации речного притока [25] (в работе [8] отсутствует точное значение солености в реке Томпсон). Видно, что на 8 сутки моделирования в области расположения термобара (рис. 4, а) происходит уменьшение нутриента (рис. 4, б) вследствие роста популяции фитопланктона (рис. 4, в). Весенний прогрев озера приводит к тому, что наибольшая концентрация фитопланктона сосредоточена в поверхностном слое водной толщи вблизи температуры максимальной плотности, в то время как опускное течение внутри фронта термобара увлекает зоопланктон в глубинную

часть (рис. 4, *з*). Однако по мере развития термобара и бурного цветения фитопланктона наблюдается локальный максимум концентрации зоопланктона в приповерхностной области (рис. 3, *б* и *в*). В финальной стадии моделирования истощение нутриента и активный рост численности зоопланктона ограничивают дальнейшее увеличение биомассы фитопланктона. Вследствие интенсивного выедания зоопланктоном популяций фитопланктона концентрация последнего в районе термобара сокращается, слева и справа термического фронта формируются новые области с локальными максимумами (рис. 3, *в*).

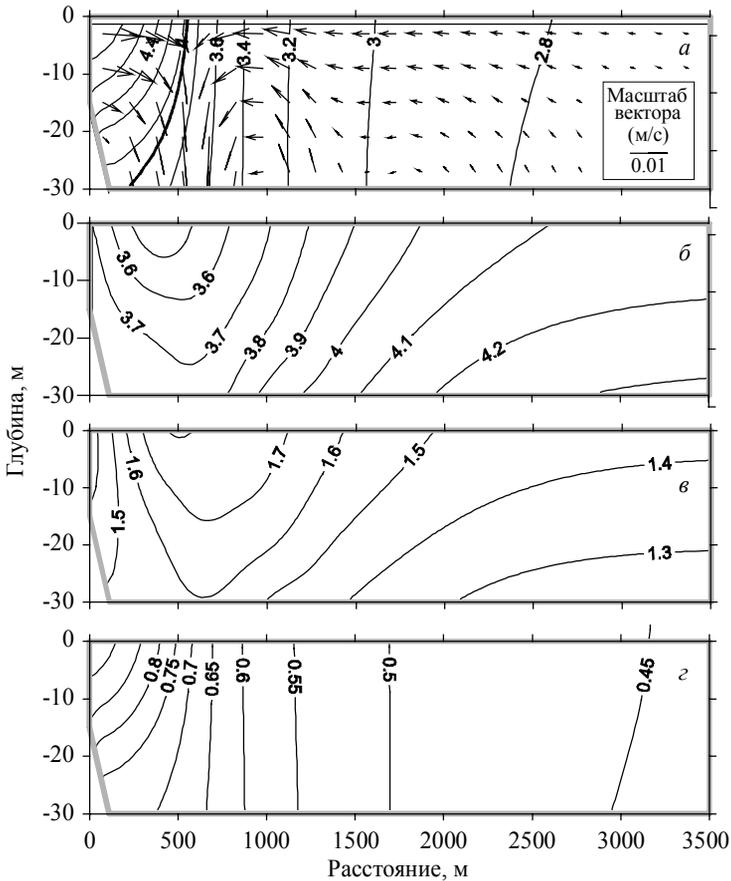


Рис. 4. Термодинамическая и гидробиологическая картина на 8 сутки вычислительного эксперимента № 1: *а* – векторное поле скорости [м/с], изотермы [°С] и температура максимальной плотности [жирная линия]; *б* – концентрация нутриента [ммольN·м⁻³], *в* – концентрация фитопланктона [ммольN·м⁻³], *з* – концентрация зоопланктона [ммольN·м⁻³]

Fig. 4. Thermodynamic and hydrobiological pattern after 8 days of simulation 1: (*a*) velocity vector field [m/s], isotherms [°C], and temperature of maximum density [bold line]; (*б*) nutrient concentrations [mmolN·m⁻³], (*в*) phytoplankton concentrations [mmolN·m⁻³], and (*з*) zooplankton concentrations [mmolN·m⁻³]

Результаты вычислительных экспериментов с переменными значениями концентрации нутриента, фитопланктона и зоопланктона, поступающих в озеро Камлупс из реки Томпсон, представлены на рис. 5. На основе полученных численных данных установлено, что согласно модели Франкса и др. более высокая речная концентрация нутриента не играет существенной роли на динамику биомасс фитопланктона и зоопланктона (рис. 5, а). Увеличение фитопланктона в реке приводит к снижению нутриента в области расположения термобара и незначительному росту зоопланктона в водоёме (рис. 5, б). Монотонно растущее поступление зоопланктона из реки оказывает отрицательное влияние на популяцию фитопланктона, что способствует сохранению количества нутриента в зоне термобарической неустойчивости (рис. 5, в).

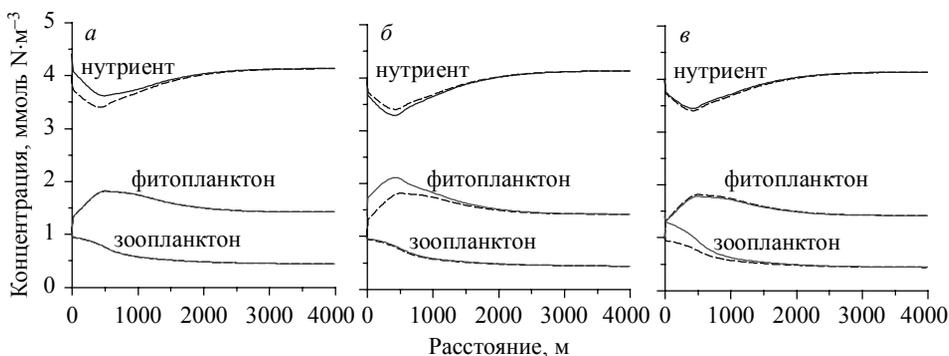


Рис. 5. Профили биологических компонентов на глубине 4.5 м, полученные на 8 сутки моделирования в вычислительных экспериментах № 2 (а), № 3 (б) и № 4 (в). Пунктиром показаны профили, соответствующие эксперименту №1

Fig. 5. Profiles of biological components at 4.5 m depth after 8 days in simulations 2 (а), 3 (б), and 4 (в). Dash line indicates the results of simulation 1

Заключение

Разработана биологическая модель взаимодействия нутриента, фитопланктона и зоопланктона для исследования влияния речного термобара в глубоком озере. Осуществлено сопряжение построенной биологической модели с гидродинамической моделью расчёта термобара. Проведена апробация модели на примере хорошо изученного канадского озера Камлупс. Исследовано влияние речной концентрации биологических компонентов на их распределение в озере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Forel F.A. La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879-1880. Lac Léman. L'Écho des Alpes. 1880. No. 3. P. 149–161.
2. Тихомиров А.И. О термическом баре в Якимварском заливе Ладожского озера // Изв. ВГО. 1959. № 91(5). С. 424–438.
3. Шерстянкин П.П. Динамика вод Селенгинского мелководья в начале лета по данным распределения оптических характеристик и температуры воды // Элементы гидрометеорологического режима озера Байкал. М.-Л.: Наука, 1964. Т. 5(25). С. 29–37.
4. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savel'eva O.S. Model of formation and development of spring thermal bar // Water Resources. 2001. No. 28(2). P. 201–204.

5. Naumenko M.A., Gyzivaty V.V., Karetnikov S.G., Petrova T.N., Protopopova E.V., Kryuchkov A.M. Natural experiment "Thermal Front in Lake Ladoga, 2010" // *Doklady Earth Sciences*. 2012. No. 444(1). P. 601–605.
6. Tsvetova E.A. Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics // *Hydrobiologia*. 1999. No. 407. P. 37–43.
7. Rodgers G.K. A Note on thermocline development and the thermal bar in Lake Ontario // *Symposium of Garda, Int. Assoc. Scientific Hydrology*. 1966. No. 1(70). P. 401–405.
8. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. No. 43(1–2). P. 61–81.
9. Farrow D.E. A model for the evolution of the thermal bar system // *EJAM*. 2013. No. 24(2). P. 161–177.
10. Parfenova V.V., Shimaraev M.N., Kostornova T.Y., Domysheva V.M., Levin L.A., Dryukker V.V., Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Y., Tsekhanovskii V.V., Logacheva N.F. On the vertical distribution of microorganisms in Lake Baikal during spring deep-water renewal // *Microbiology*. 2000. No. 69. P. 357–363.
11. Mortimer C.H. Lake hydrodynamics // *Mitteilugen Int. Ver. Limnol.* 1974. No. 20. P. 124–197.
12. Kelley D.E. Convection in ice-covered lakes: effects on algal suspension // *J. Plankton Res.* 1997. No. 19(12). P. 1859–1880.
13. Botte V., Kay A. A numerical study of plankton population dynamics in a deep lake during the passage of the Spring thermal bar // *J. Mar. Sys.* 2000. No. 26(3). P. 367–386.
14. Franks P.J., Wroblewski, J.S., Flierl G.R. Behavior of a simple plankton model with food-level acclimation by herbivores // *Marine Biology*. 1986. No. 91. P. 121–129.
15. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Численная модель взаимодействия систем «река – озеро» на примере весеннего термобара в озере Камлупс // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2013. № 5(25). С. 102–115.
16. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA Journal*. 1988. No. 26(11). P. 1299–1310.
17. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Применение двухпараметрической $k-\omega$ -модели турбулентности для исследования явления термобара // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 5(31). С. 104–113.
18. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. No. 31(3). P. 657–662.
19. Mayzaud P., Poulet S.A. The importance of the time factor in the response of zooplankton to varying concentrations of naturally occurring particulate matter // *Limnol. Oceanogr.* 1978. No. 23(6). P. 1144–1154.
20. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake // *Proc. SPIE 9680, 21st International Symposium Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*, 2015. P. 1–8.
21. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. No. 21(3). P. 251–269.
22. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 214 p.
23. Leonard B. A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979. No. 19(1). P. 59–98.
24. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Алгоритм SIMPLED согласования полей скорости и давления для численного моделирования термобара в глубоком озере // *Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям: материалы конференции*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. С. 109–113.
25. Цыденов Б.О. Численное моделирование эффекта весеннего термобара в глубоком озере: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2013. 145 с.

Tsydenov B.O. (2016) NUMERICAL SIMULATION OF HYDROBIOLOGICAL PROCESSES DURING THE SPRING THERMAL BAR ON THE BASIS OF THE NUTRIENT – PHYTOPLANKTON – ZOOPLANKTON MODEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 86–97.

DOI 10.17223/19988621/41/9

In this paper, a mathematical model for simulating the hydrodynamic and hydrobiological processes in a temperate water body during the evolution of the spring riverine thermal bar is described. A thermal bar is a narrow zone in a lake where the water, which has a maximum density, sinks from the surface to the bottom. Numerical simulation of the dynamics of plankton ecosystems in case of Kamloops Lake (British Columbia, Canada) is accomplished by using the nutrient – phytoplankton – zooplankton model of Franks et al. (1986). The hydrodynamic model, which includes the Coriolis force due to Earth's rotation, is written in the Boussinesq approximation with the continuity, momentum, energy, and salinity equations. Closure of the simultaneous equation system is performed with a two-parameter Wilcox $k-\omega$ turbulence model and algebraic relations for the coefficients of turbulent diffusion. The convection–diffusion equations are solved by a finite volume method to satisfy the integral conservation laws. The numerical algorithm for the flow and temperature fields' indication is based on a Crank Nicolson difference scheme. In the equations, the convective terms are approximated with the QUICK second-order upstream scheme. The systems of grid equations are solved by the under-relaxation method at each time step. The data from numerical experiments have shown qualitative agreement with results obtained by Holland et al. (2003). Simulations with the variable values of the concentrations of the biological components, coming from the Thompson River, have demonstrated that the high riverine nutrient concentrations do not play a significant role in dynamics of the phytoplankton and zooplankton biomasses; increasing of the phytoplankton in the river leads to a reduction of the nutrient at the location of the thermal bar, and the monotone growth of the riverine zooplankton incoming has a negative impact on the phytoplankton population.

Keywords: plankton, thermal bar, mathematical model, numerical experiment, Kamloops Lake.

TSYDENOV Bair Olegovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: btsydenov@gmail.com

REFERENCES

1. Forel F.A. (1880) La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879-1880. Lac Léman. *L'Écho des Alpes*. 3. pp. 149–161.
2. Tikhomirov A.I. (1959) O termicheskom bare v Yakimvarskom zalive Ladozhskogo ozera [On the thermal bar in Yakimvarsky Bay of Lake Ladoga]. *Izv. VGO*. 91(5). pp. 424–438.
3. Sherstyankin P.P. (1964) Dinamika vod Selenginskogo melkovod'ya v nachale leta po dannym raspredeleniya opticheskikh kharakteristik i temperatury vody [Dynamics of the Selenga shallow waters at the beginning of summer according to the distribution of optical characteristics and water temperature]. In: *Elementy gidrometeorologicheskogo rezhima ozera Baykal* [Elements of the hydrometeorological regime of Lake Baikal]. Moscow; Leningrad: Nauka. 5(25). pp. 29–37.
4. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savel'eva O.S. (2001) Model of formation and development of spring thermal bar. *Water Resources*. 28(2). pp. 201–204. DOI 10.1023/A:1010339919712.
5. Naumenko M.A., Gyzivaty V.V., Karetnikov S.G., Petrova T.N., Protopopova E.V., Kryuchkov A.M. (2012) Natural experiment “Thermal Front in Lake Ladoga, 2010”. *Doklady Earth Sciences*. 444(1). pp. 601–605. DOI 10.1134/S1028334X12030282.
6. Tsvetova E.A. (1999) Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics. *Hydrobiologia*. 407. pp. 37–43. DOI 10.1023/A:1003766220781.
7. Rodgers G.K. (1966) A Note on thermocline development and the thermal bar in Lake Ontario. *Symposium of Garda, Int. Assoc. Scientific Hydrology*. 1(70). pp. 401–405.

8. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *Journal of Marine Systems*. 43(1-2). pp. 61–81. DOI 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
9. Farrow D.E. (2013) A model for the evolution of the thermal bar system. *European Journal of Applied Mathematics*. 24(2). pp. 161–177. DOI 10.1017/S0956792512000344.
10. Parfenova V.V., et al. (2000) On the vertical distribution of microorganisms in Lake Baikal during spring deep-water renewal. *Microbiology*. 69. pp. 357–363.
11. Mortimer C.H. (1974) Lake hydrodynamics. *Jubilee symp. 50 years of limnological research, Mitt. Int. Ver. Limnol.* 20. pp. 124–197.
12. Kelley D.E. (1997) Convection in ice-covered lakes: effects on algal suspension. *Journal of Plankton Research*. 19(12). pp. 1859–1880.
13. Botte V., Kay A. (2000) A numerical study of plankton population dynamics in a deep lake during the passage of the Spring thermal bar. *Journal of Marine Systems*. 26(3). pp. 367–386. DOI 10.1016/S0924-7963(00)00046-4.
14. Franks P.J., Wroblewski, J.S., Flierl G.R. (1986) Behavior of a simple plankton model with food-level acclimation by herbivores. *Marine Biology*. 91(1). pp. 121–129. DOI 10.1007/BF00397577.
15. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2013) Chislennaya model' vzaimodeystviya sistem "reka – ozero" na primere vesennego termobara v ozere Kamlups [Numerical model of river-lake interaction in the case of a spring thermal bar in Kamloops Lake]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 102–115.
16. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*. 26(11). pp. 1299–1310.
17. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2014) Primenenie dvukhparametricheskoy $k-\omega$ modeli turbulentnosti dlya issledovaniya yavleniya termobara [Application of the two-parametric $k-\omega$ turbulence model for studying the thermal bar phenomenon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 104–113.
18. Chen C.T., Millero F.G. (1986) Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 31(3). pp. 657–662.
19. Mayzaud P., Poulet S.A. (1978) The importance of the time factor in the response of zooplankton to varying concentrations of naturally occurring particulate matter. *Limnol. Oceanogr.* 23(6). pp. 1144–1154. DOI 10.4319/lo.1978.23.6.1144.
20. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2015) To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake. *Proc. SPIE 9680, 96800H*. pp. 1–8. DOI 10.1117/12.2205687.
21. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*. 21(3). pp. 251–269. DOI 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
22. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press.
23. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 19(1). pp. 59–98. DOI 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
24. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2014) Algoritm SIMPLED soglasovaniya poley skorosti i davleniya dlya chislennogo modelirovaniya termobara v glubokom ozere [SIMPLED algorithm for harmonization of velocity and pressure fields for numerical simulation of the thermal bar in a deep lake]. *Sed'maya Sibirskaya konferentsiya po parallel'nym i vysokoproizvoditel'nym vychisleniyam* [Seventh Siberian Conference on Parallel and High Performance Computing]. Proc. of the Conference. Tomsk: TGU Publ. pp. 109–113.
25. Tsydenov B.O. (2013) *Chislennoe modelirovanie efekta vesennego termobara v glubokom ozere* [Numerical modeling of the effect of the spring thermal bar in a deep lake]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.

УДК 536.422:536.244

DOI 10.17223/19988621/41/10

В.Ш. Шагапов, А.С. Чиглинцева, А.А. Русинов**ЗАДАЧА О НАГНЕТАНИИ ХОЛОДНОГО ГАЗА В ПЛАСТ,
НАСЫЩЕННЫЙ СНЕГОМ И ГАЗОМ,
СОПРОВОЖДАЕМОМ ГИДРАТООБРАЗОВАНИЕМ¹**

Построена математическая модель нагнетания холодного газа в пласт, в исходном состоянии насыщенный снегом и газом, сопровождаемого гидратообразованием. Получено условие, при котором существует минимальный нагрев системы «газ+снег+гидрат», обеспечивающий полный переход снега в гидратное состояние. Установлено, что в зависимости от начального состояния пласта и параметров, определяющих нагнетание газа, возможны режимы полного образования гидрата в объемной области и на фронтальной поверхности, а также частичного образования гидрата. Выявлено, что с ростом начальной снегонасыщенности пласта, процесс образования гидрата происходит интенсивнее, в связи с чем протяженность прогретой зоны уменьшается.

Ключевые слова: *газогидрат, холодный газ, нагнетание, пласт, снег, равновесный режим, автомодельное решение, полное и частичное образование гидрата, объемная область, фронтальная поверхность, нагрев.*

Газогидраты представляют собой сырье не только для получения углеводородных источников энергии, но также являются хранилищем для газа. С целью уменьшения общей доли парниковых газов и их безопасного хранения, например в естественных условиях в подземных залежах, можно создавать хранилища, в которых будет законсервирован газ достаточно больших объемов, чем в резервуарах с «чистым» газом [1]. Так, известен эффект самоконсервации газогидратов, который позволяет хранить газ при отрицательной температуре и небольших значениях давлений порядка нескольких атмосфер [2].

Согласно экспериментальным данным, образование газогидратов возможно при определенных значениях давления и температуры в пределах зоны устойчивости гидрата [3–5]. Так, авторами [6, 7] построена математическая модель процесса миграции газовых пузырьков в воде в условиях стабильности гидратов, сопровождаемого образованием на их поверхности гидратной оболочки. Полученные в работах результаты нашли хорошее согласование с экспериментальными данными.

Важной особенностью гидратов метана является то, что природные термодинамические условия их существования находятся вблизи границ стабильности гидратов [8]. Так, в природных условиях газогидраты могут образовываться как в донных отложениях морей и океанов, так и в подземных залежах в поровом пространстве пород при положительных и отрицательных температурах [9–11]. Данное явление было рассмотрено в работах [12–14], в которых были представлены математические модели процесса образования газогидрата в пористом пласте, изначально насыщенном газом и льдом (или водой).

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

Установлено [11], что накопление газогидрата в поровом пространстве активно протекает не только во влажных пористых средах, но и в породах, частично насыщенных льдом.

Авторами [15] исследованы особенности процесса образования газогидрата в пористом пласте, изначально насыщенном газом и льдом, при инъекции газа. Построены решения, как с фронтальной, так и с протяженной областью фазовых переходов гидрата. Выявлены условия, при которых реализуются различные режимы образования гидрата в пористой среде.

Таким образом, анализ работ показал, что в настоящее время большой практический интерес представляет создание различных технологий консервации газа в газогидратное состояние, поскольку оно является выгодным и более безопасным.

Целью данной работы является математическое моделирование процесса образования гидрата в пласте, в исходном состоянии насыщенном снегом и газом при нагнетании холодного газа.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть в полубесконечной области ($x \geq 0$) находится снег, насыщенный газом (метаном). Исходная снегонасыщенность и газонасыщенность соответственно равны S_{i0} и S_{g0} , а давление и температура равны p_0 и T_0 . Здесь и в дальнейшем, первый индекс внизу $j = i, g, h$ означает, что значения параметров отнесены к снегу, газу и гидрату, а второй индекс (0) соответствует исходному состоянию. Причем для исходного состояния температура системы «снег+метан» выше равновесной температуры фазовых переходов $T_s(p_0)$ для системы «снег + метан + гидрат» ($T_0 > T_s(p_0)$). Вследствие этого, в исходном состоянии снег и метан находятся в равновесном состоянии ($T_{i0} = T_{g0} = T_0$).

Рассмотрим модельную задачу об инъекции холодного газа ($T_{ge} \leq 0^\circ\text{C}$) через границу $x = 0$ под давлением p_e .

В зависимости от исходного термобарического состояния системы «снег+газ», а также интенсивности нагнетания газа, определяемой значением давления p_0 , могут возникать различные характерные зоны в области фильтрации ($x > 0$). В зоне, где одновременно находятся снег, газ и гидрат, должно выполняться условие фазового равновесия, т.е. температура и текущее значение давления связаны [16, 17] как

$$T_s(p) = T + T_* \ln(p/p_*), \quad (1)$$

где T , T_* , p_* – эмпирические параметры, зависящие от вида газогидрата.

Запишем уравнения масс в зонах течения газа, где помимо снега находится гидрат. Конденсированные фазы будем считать неподвижными. Тогда уравнение сохранения массы в зоне гидратообразования для газовой фазы [15–18] запишется как

$$\frac{\partial(S_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(S_g \rho_g v_g)}{\partial x} = -\rho_h G \frac{\partial S_h}{\partial t}, \quad (2)$$

где G – массовое содержание метана в составе газогидрата, v_g – скорость фильтрации газа.

Аналогично запишем уравнение для изменения массы снега

$$\rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} = -\rho_h (1-G) \frac{\partial S_h}{\partial t}. \quad (3)$$

Фазовые насыщенности должны удовлетворять условию [16]

$$S_g + S_i + S_h = 1. \quad (4)$$

Снег и гидрат будем считать несжимаемыми, а газ – калорически совершенным

$$\rho_i, \rho_h = const, \quad p = \rho_g R_g T. \quad (5)$$

В исходном состоянии (0) гидрат отсутствует ($S_{h0} = 0$, $S_{g0} + S_{i0} = 1$). Тогда из уравнения (3) следует

$$(S_{i0} - S_i)\rho_i = S_h\rho_h(1-G). \quad (6)$$

Отсюда имеем

$$S_h = \frac{\rho_i}{\rho_h(1-G)}(S_{i0} - S_i). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получим

$$S_g = 1 - S_i - \frac{\rho_i}{\rho_h(1-G)}(S_{i0} - S_i). \quad (8)$$

Уравнение притока тепла с учетом тепловых эффектов гидратообразования запишется как [15–19]

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \rho_g S_g c_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho_h l_h \frac{\partial S_h}{\partial t} \quad (9)$$

$$(\rho c = \rho_g S_g c_g + \rho_h S_h c_h + \rho_i S_i c_i, \quad \lambda = \lambda_g S_g + \lambda_h S_h + \lambda_i S_i).$$

Здесь ρc – удельная теплоемкость единицы объема системы «снег+газ+гидрат», c_g – теплоемкость газа при постоянном объеме, λ – коэффициент теплопроводности, l_h – удельная теплота образования гидрата, отнесенная на единицу его массы.

Начальные и граничные условия

Будем полагать, что в исходном состоянии равновесная смесь ($T_{g0} = T_{i0} = T_0$)

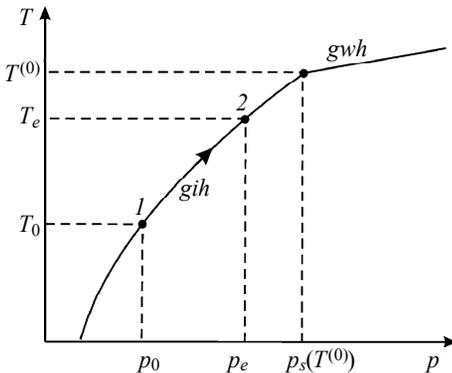


Рис. 1. Условия образования гидрата
Fig. 1. Conditions of hydrate formation

находится ниже точки плавления льда ($T_0 < T^{(0)}$, $T^{(0)} = 0^\circ \text{C}$), что проиллюстрировано на рис. 1. Рассмотрим случай, когда начальная температура T_0 равна значению температуры $T_s(p_0)$ фазового равновесия системы «газ+снег+гидрат» для исходного давления p_0 ($T_0 = T_s(p_0)$) (точка 1).

Пусть газ через границу ($x = 0$) закачивается под давлением p_e , причем значение температуры закачиваемого газа лежит на кривой фазового равновесия для системы «газ+снег+гидрат» (точка 2).

Эти условия могут быть записаны как

$$\begin{aligned} T = T_0, \quad p = p_0, \quad (T_0 = T_s(p_0)), \quad (t = 0, 0 < x < \infty), \\ T = T_e, \quad p = p_e, \quad (T_e = T_s(p_e), p_e > p_0), \quad (t > 0, x = 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Из анализа системы уравнений (2) – (9), аналогично работам [17–19], следует, что в уравнении (9), слагаемыми, отвечающими за конвективный и кондуктивный перенос тепла, в наиболее интересных для практики случаях, можно пренебречь и уравнения притока тепла (9) можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = \rho_h l_h \frac{\partial S_h}{\partial t} \quad (11)$$

Для процесса фильтрации газа через скелет из снега и гидрата примем закон Дарси [17–19] в виде

$$v_g S_g = -\frac{k}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (12)$$

где μ_g – динамическая вязкость газа, k – коэффициент проницаемости скелета.

Уравнение сохранения массы (2) с учетом (1), (11) и (12), а также уравнения состояния газа из (5) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_g p}{R_g T_s(p)} \right) + \frac{\rho c G}{l_h} \frac{\partial T_s(p)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{R_g T_s(p)} \frac{k}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Входящие сюда насыщенности фаз S_g, S_h, S_i могут быть выражены через давление. Действительно, пренебрегая переменностью объемной теплоемкости ρc всей системы, из (11) имеем

$$S_h = \frac{\rho c}{\rho_h l_h} (T_s(p) - T_0) \quad (p_0 \leq p \leq p_s(T^{(0)})). \quad (14)$$

Решение уравнения (13), являющегося нелинейным уравнением параболического типа, полностью позволяет определить поля давления и температуры, а также насыщенности фаз.

Данная задача имеет автомодельное решение. Для этого введем автомодельную переменную

$$\xi = x / 2 \sqrt{\chi_0^{(p)} t},$$

где $\chi_0^{(p)} = k p_0 / S_{g0} \mu_g$ – коэффициент пьезопроводности.

Тогда основное уравнение пьезопроводности (13) можно привести к виду

$$-2\xi f(p) \frac{dp}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F(p)}{\chi_0^{(p)}} \frac{dp}{d\xi} \right), \quad (15)$$

$$\text{где } f(p) = \frac{S_g(T_s(p) - T_*)}{R_g T_s^2(p)} + \frac{\rho c T_*}{l_h} \left(\frac{G}{p} - \frac{1 - \rho_h(1 - G)/\rho_i}{R_g T_s(p) \rho_h} \right), \quad F(p) = \frac{k p}{\mu_g R_g T_s(p)}.$$

Соответственно граничные условия (10) в автомодельных координатах запишутся как

$$\begin{aligned} T = T_e, \quad p = p_e \quad (\xi = 0), \\ T = T_0, \quad p = p_0 \quad (\xi = \infty). \end{aligned} \quad (16)$$

Результаты расчетов

Для параметров, определяющих состояние системы, были приняты следующие значения:

$$\begin{aligned} \rho_h^0 &= 910 \text{ кг/м}^3, \rho_i^0 = 900 \text{ кг/м}^3, l_h = 1.45 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}, \\ c_i &= 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, c_h = 2200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, c_g = 1650 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, \\ \mu_g &= 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}, k = 10^{-12} \text{ м}^2, R_g = 520 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, G = 0.12. \end{aligned}$$

Температура и давление пласта принимались соответственно равными $T_0 = 203 \text{ К}$ и $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$. Начальное значение снегонасыщенности принималось равным 0.7 и 0.3. Числа на кривых соответствуют 1 – 0.7, 2 – 0.3.

Согласно формуле (15) с учетом (1) и (7), минимальный нагрев системы «газ + снег + гидрат», полагая, что снег полностью переходит в гидратное состояние, составляет порядка $\Delta T^* \approx 65 \text{ К}$.

На рис. 2 приведены распределения давления и температуры, а также гидратонасыщенности, снегонасыщенности и газонасыщенности (штриховая линия) пласта при нагнетании холодного газа с температурой $T_e = 250 \text{ К}$, которое соответствует равновесному значению давления согласно формуле (1) $p_e = 1.2 \text{ МПа}$ (рис. 2, а, б). Из графика видно, что происходит частичное образование гидрата (рис. 2, в, з). Поскольку в этом случае величина нагрева ΔT меньше минимального значения ΔT^* , то снег не полностью переходит в гидратное состояние.

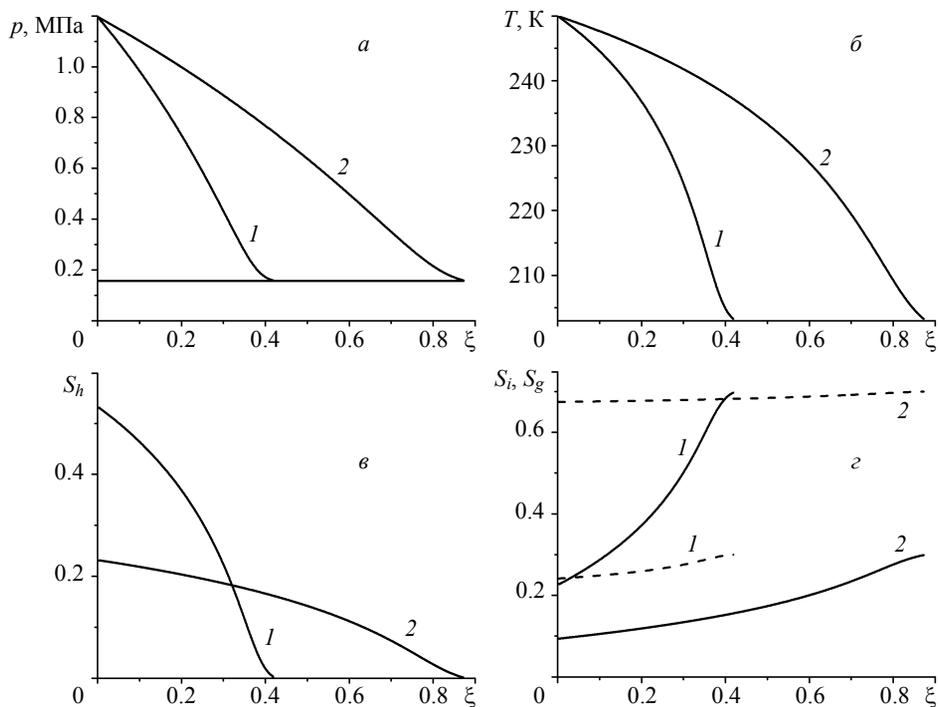


Рис. 2. Распределение давления в пласте (а), температуры пласта (б), гидрато- (в), снего- и газонасыщенности (з) в случае частичного образования гидрата

Fig. 2. Pressure distribution in the reservoir (а), temperature of the reservoir (б), hydrate saturation (в), snow and gas saturation in case of partial hydrate formation (з)

На рис. 3 приведены аналогичные распределения для случая полного образования гидрата в протяженной области при нагнетании газа с температурой $T_e = 270$ К, соответствующее давление согласно формуле (1) $p_e = 2.3$ МПа (рис. 3, а, б). Поскольку здесь $\Delta T > \Delta T^*$, то, как видно из рис. 3, в, з, образуется протяженная зона полного перехода снега в гидратное состояние. В этом случае образуются три зоны: ближняя – одновременно насыщенная фазами газа и гидрата, промежуточная – газом, снегом и гидратом, дальняя – газом и снегом.

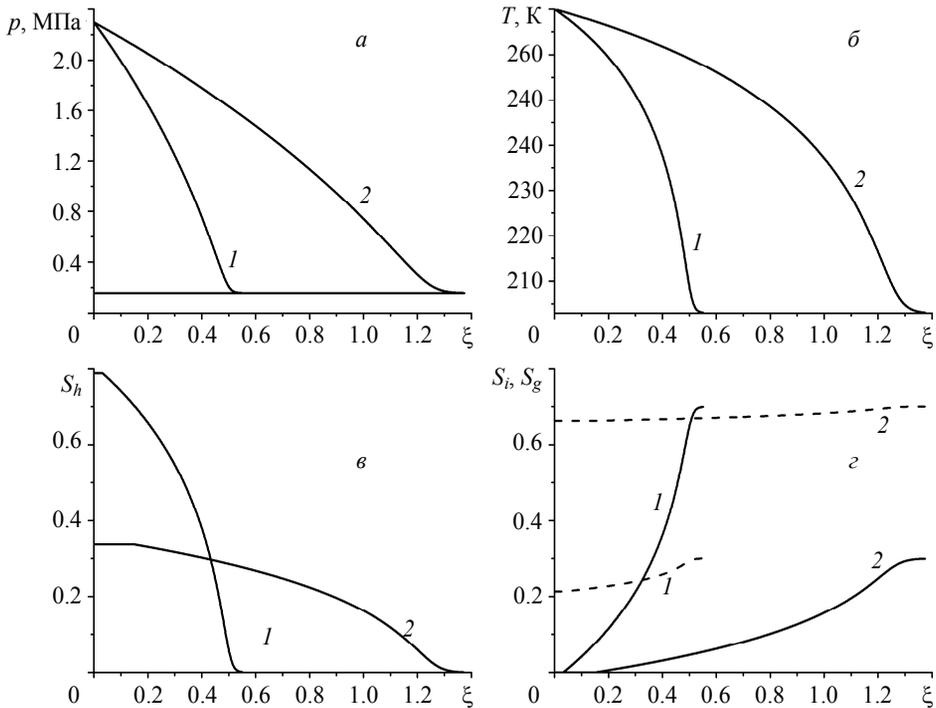


Рис. 3. Распределение давления в пласте (а), температуры пласта (б), гидрато- (в), снего- и газонасыщенности (з) в случае полного образования гидрата в протяженной области

Fig. 3. Pressure distribution in the reservoir (а), temperature of the reservoir (б), hydrate saturation (в), snow and gas saturation in case of full hydrate formation in an extended area (з)

Если величина нагрева ΔT системы «газ+гидрат» оказывается равной минимальному значению ΔT^* , то в этом случае будет происходить полное образование гидрата на фронтальной поверхности.

Установлено, что с ростом начальной снегонасыщенности пласта интенсивность образования гидрата увеличивается, вместе с тем сужается протяженность нагретой области.

Заключение

Построена математическая модель процесса нагнетания газа в пласт в начальном состоянии, насыщенном снегом и газом, сопровождаемого гидратообразованием. Построены автомодельные решения, описывающие распределения основных параметров в пласте. Установлено, что существуют решения, согласно которым обра-

зование газогидрата может происходить в трех различных режимах: полное образование гидрата в объемной области и на фронтальной поверхности, а также частичное образование гидрата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jadhawar P., Mohammadi A.H., Yang J., Tohidi B.* Subsurface carbon dioxide storage through clathrate hydrate formation // *Advances in the Geological Storage of Carbon Dioxide*. Netherlands: Springer, 2006. P. 111–126.
2. *Нестеров А.Н.* Кинетика и механизмы гидратообразования газов в присутствии поверхностно-активных веществ: дис. д-ра хим. наук. Тюмень, 2006.
3. *Макогон Ю.Ф.* Гидраты природных газов. М.: Недра, 1974. 208 с.
4. *Истомин В.А., Якушев В.С.* Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
5. *Sloan E.D., Koh C.A.* Clathrate hydrates of natural gases. 3rd ed. CRC Press, Taylor & Francis group, 2008. 119 p.
6. *Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И., Нурисламов О.Р.* К теории образования и разложения газогидратных частиц в процессе их всплытия в воде // *Вестник Томского государственного университета*. 2013. № 6 (26). С. 106–113.
7. *Шагапов В.Ш., Чиглицева А.С., Русинов А.А.* О механизмах роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих газовых пузырьков // *Вестник Томского государственного университета*. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 73–86.
8. *Чувиллин Е.М., Козлова Е.В.* Исследования формирования мерзлых гидратосодержащих пород // *Криосфера Земли*. 2005. № 1. С. 73–80.
9. *Chuvilin E.M., Kozlova E.V., Makhonina N.A., Yakushev V.S.* Experimental investigation of gas hydrate and ice formation in methane saturated sediments / *Permafrost, Phillips, Springman & Arenson (eds.)*. 2003. P. 145–150.
10. *Чувиллин Е.М., Гурьева О.М.* Экспериментальное изучение образования гидратов CO₂ в поровом пространстве промерзающих и мерзлых пород // *Криосфера Земли*. 2009. Т. 13. № 3. С. 70–79.
11. *Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г.* Образование газогидрата в пористом резервуаре, частично насыщенном водой, при инжекции холодного газа // *Прикладная механика и техническая физика*. 2008. Т. 49. № 3. С. 462–472.
12. *Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В.* Особенности образования газогидратов при нагнетании холодного газа в пористую среду, насыщенную газом и водой // *Теоретические основы химической технологии*. 2010. Т. 44. № 4. С. 442–449.
13. *Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В.* Численное моделирование образования газогидрата в пористой среде конечной протяженности при продувке газом // *Прикладная механика и техническая физика*. 2011. Т. 52. № 4. С. 116–126.
14. *Хасанов М.К.* Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенной льдом // *Теплофизика и аэромеханика*. 2015. Т. 22. № 2. С. 255–266.
15. *Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В.* Особенности разложения газовых гидратов в пористых средах при нагнетании теплого газа // *Теплофизика и аэромеханика*. 2013. Т. 20. № 3. С. 347–354.
16. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987.
17. *Нурисламов О.Р., Шагапов В.Ш.* Нагнетание газа во влажную пористую среду с образованием газогидрата // *Прикладная математика и механика*. 2009. № 5. С. 809–823.
18. *Шагапов В.Ш., Нурисламов О.Р., Хабибуллина А.Р.* Отбор газа из гидратосодержащего пласта депрессионным воздействием // *Вестник Томского государственного университета*. 2012. № 4 (20). С. 119–130.
19. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1982. 212 с.

Статья поступила 26.02.2016 г.

Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. (2016) THE PROBLEM OF COLD GAS INJECTION INTO THE RESERVOIR SATURATED WITH SNOW AND GAS, ACCOMPANIED BY HYDRATE FORMATION PROCESS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 98–106

DOI 10.17223/19988621/41/10

In this paper, the problem of cold gas injection into the reservoir initially saturated with snow and gas with simultaneous formation of hydrate is considered. The mathematical model assumes gas injection in the equilibrium state. The self-similar solutions describing the distribution of the basic parameters (pressure fields, temperature, hydrate saturation, snow and gas saturation) in the reservoir are constructed. It is found that, depending on the initial state of the system «snow + gas» and the intensity of gas injection, different zones in the filtering area, such as «gas + hydrate», «gas + hydrate + snow», and «gas + snow», can be generated. The existence condition of maximum heating of «gas + snow + hydrate» system which provides a complete transition of snow in the hydration state is obtained. It is shown that initial state of the reservoir and parameters of gas injection define the conditions of full or partial hydrate formation in a volume region and at the front surface. It is revealed that the hydrate formation is more intensive and the length of the heated area decreases with increasing initial snow saturation in the reservoir.

Keywords: gas hydrate, cold gas, injection, snow, equilibrium state, self – similar solution, full and partial hydrate formation, volume region, front surface, heat

SHAGAPOV Vladislav Shaihulagzamovich (Academician of Academy of Sciences of RB, Doctor of Physics and Mathematics, Birsky branch "Bashkir state university", Birsk, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; Researcher Institute of Mechanics, Kazan, Russian Federation)
E-mail: Shagapov@rambler.ru

CHIGLINTSEVA Angelina Sergeevna (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia; Bashkir State University, Birsk, Russia)
E-mail: changelina@rambler.ru

RUSINOV Aleksey Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Bashkir State University, Birsk, Russia)
E-mail: irtysh2009@mail.ru

REFERENCES

1. Jadhawar P., Mohammadi A.H., Yang J., Tohidi B. (2006) Subsurface carbon dioxide storage through clathrate hydrate formation. In: *Advances in the Geological Storage of Carbon Dioxide*. Netherlands: Springer. pp. 111–126. DOI 10.1007/1-4020-4471-2_11.
2. Nesterov A.N. (2006) *Kinetika i mekhanizmy gidratoobrazovaniya gazov v prisutstvii poverkhnostno-aktivnykh veshchestv* [Kinetics and mechanisms of gas hydrate formation in the presence of surface-active substances]. Chem. Doct. Diss. Tyumen'.
3. Makogon Yu.F. (1974) *Gidraty prirodnykh gazov* [Hydrates of natural gases]. Moscow: Nedra.
4. Istomin V.A., Yakushev V.S. (1992) *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviyakh* [Gas hydrates in the natural environment]. Moscow: Nedra.
5. Sloan E.D., Koh C.A. (2008) *Clathrate hydrates of natural gases*. 3rd ed. CRC Press, Taylor & Francis group.
6. Shagapov V.Sh., Tazetdinov B.I., Nurislamov O.R. (2013) K teorii obrazovaniya i razlozheniya gazogidratnykh chastits v protsesse ikh vsplytiya v vode [A contribution to the theory of gas hydrate particle formation and decomposition in the process of their ascent in water]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 106–113.

7. Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Rusinov A.A. (2015) O mekhanizmax rosta gidratnoy obolochki na poverkhnosti vsplyvayushchikh gazovykh puzyr'kov [On mechanisms of the hydrate shell growth on the surface of supernatant gas bubbles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 73–86. DOI 10.17223/19988621/35/10.
8. Chuvilin E.M., Kozlova E.V. (2005) Issledovaniya formirovaniya merzlykh gidratosoderzhashchikh porod [Research of formation of frozen gas hydrate-saturated sediment]. *Kriosfera Zemli – Earth Cryosphere*. 1. pp. 73–80.
9. Chuvilin E.M., Kozlova E.V., Makhonina N.A., Yakushev V.S. (2003) Experimental investigation of gas hydrate and ice formation in methane saturated sediments. *Proceedings of 8th International Conference on Permafrost*. pp. 145–150.
10. Chuvilin E.M., Guryeva O.M. (2009) Eksperimental'noe izuchenie obrazovaniya gidratov SO₂ v porovom prostranstve promerzayushchikh i merzlykh porod [Experimental investigation of CO₂ gas hydrate formation in porous media of frozen and freezing sediments]. *Kriosfera Zemli – Earth Cryosphere*. 13(3). pp. 70–79.
11. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G. (2008) Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 49(3). pp. 462–472. DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105.
12. Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovsky M.V. (2010) Specific features of the formation of gas hydrates during the injection of a cold gas into a porous medium saturated with a gas and water. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 44(4). pp. 424–431. DOI 10.1134/S004057951004010X.
13. Shagapov V.S., Khasanov M.K., Stolpovskii M.V., Gimaltdinov I.K. (2011) Numerical modeling of formation of a gas hydrate in a finite-length porous bed purged by a gas. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(4). pp. 599–607. DOI 10.1134/S0021894411040134.
14. Khasanov M.K. (2015) Investigation of regimes of gas hydrate formation in a porous medium, partially saturated with ice. *Thermophysics and Aeromechanics*. 22(2). pp. 245–255. DOI 10.1134/S0869864315020109.
15. Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovsky M.V. (2013) The features of gas hydrate dissociation in porous media at warm gas injection. *Thermophysics and Aeromechanics*. 20(3). pp. 339–346. DOI 10.1134/S0869864313030104.
16. Nigmatullin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
17. Nurislamov O.R., Shagapov V.Sh. (2009) Gas injection into a moist porous medium with the formation of a gas hydrate. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 5. pp. 581–591. DOI 10.1016/j.jappmathmech.2009.11.011.
18. Shagapov V.Sh., Nurislamov O.R., Khabibullina A.R. (2012) Otbor gaza iz gidratosoderzhashchego plasta depressionnym vozdeystviem [Gas extraction from a bed containing hydrates by means of depression influence]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 119–130.
19. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. (1982) *Dvizhenie zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [Motion of liquids and gases in natural beds]. Moscow: Nedra.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИПОВА Ксения Александровна – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ksusha_ast@mail.ru

АНДРОПОВА Антонина Олеговна – магистрантка Томского государственного университета. E-mail: a.o.andropova@gmail.com

АНДРИАСЯН Алина Валерьевна – студентка Томского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: alina-andriasyan@yandex.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Томского государственного университета. E-mail: alexu121@mail.ru.

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий специалист отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск. E-mail: michael121@mail.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ГАШИМОВ Садыг Акиф оглы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптимизации и управления Бакинского государственного университета (Азербайджанская Республика)

ГАБИБОВ Вахаб Мехти – старший преподаватель кафедры физики, математики и информатики Ленкоранского государственного университета (Азербайджанская Республика). E-mail: vahab.hebibov@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

ЛИБИН Эдуард Ефимович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ ПММ Томского государственного университета. E-mail: ibin@niipmm.tsu.ru.

МАМАДРАИМОВА Назира Абдираимовна – студентка Томского государственного архитектурно-строительного университета

МАЛЮТИНА Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и лаборатории математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: nmd@math.tsu.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета. E-mail: matvolegv@mail.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

ПОТЕРЯЕВА Валентина Александровна – магистрантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: valentina.poteryaeva@gmail.com

РУСИНОВ Алексей Александрович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет». E-mail: irtysh2009@mail.ru

ТАГИЕВ Рафиг Каландар оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптимизации и управления Бакинского государственного университета (Азербайджанская Республика). E-mail: r.tagiyev@list.ru

ТАРАСОВ Егор Александрович – аспирант механико–математического факультета Томского государственного университета. E-mail: diomedis@mail.ru

УСЕНКО Олеся Вадимовна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

ЦЫДЕНОВ Баир Олегович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета. E-mail: btsydenov@gmail.com

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

ЧИГЛИНЦЕВА Ангелина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет». E-mail: changelina@rambler.ru

ШАГАПОВ Владислав Шайхулагзамович – академик Академии наук РБ, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ФГБУН Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН. E-mail: shagapov@rambler.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.06.2016.
Формат 70 × 100¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 8.71. Уч.-изд. л. 9.75. Тираж 300 экз. Заказ № 17.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 1912.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru