

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2016

№ 2 (35)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.



EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof., Head of the Operation Research Department, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics.
Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof. of the Operation Research Department.
Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Cand. of Science, Associate Prof. of the Operation Research Department. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Science, Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department

Gennady Koshkin – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Cybernetics Department

Yury Kostyuk – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Informatics Department

Anjela Matrosova – Doctor of Science, Prof., Head of the Programming Department

Anatoly Nazarov – Doctor of Science, Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department

Sergey Sushchenko – Doctor of Science, Prof., Head of the Applied of Information Department, Dean of the Faculty of Informatics

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
Doctor of Science, Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orzinger
PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Science, Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Nina Yevtushenko
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. каф. исследования операций, декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ.
Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. каф. исследования операций ТГУ.
Тел. +72822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – отв. секретарь, доц., канд. техн. наук, доц. каф. исследования операций ТГУ.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и математического моделирования ТГУ

Коскин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. каф. программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. каф. прикладной информатики, декан факультета информатики ТГУ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали
д-р философии, проф.
Университет VII
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет
Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
д-р техн. наук, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
д-р философии,
гл. науч. сотр. фирмы
«Синописис», США

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031).

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России». Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» входит в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии, а также входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте: <http://journals.tsu.ru/informatics/>

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Домбровский В.В., Ларина Т.М. Стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем с учетом торговых издержек и ограничений на вложения в финансовые активы	4
--	---

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий	13
Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание коллективной ренты статуса совместной жизни	30
Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю. Вероятность разорения страховой компании при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат для различных моделей страхования	37
Моисеева С.П., Панкратова Е.В., Убонова Е.Г. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления	46
Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы	54
Шуленин В.П. Асимптотические свойства робастных оценок масштабного параметра	62

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Сенченко П.В., Ознабихин Д.А., Тарасенко В.Ф. Задача автоматической калибровки проектора и сенсора глубины	71
Янковская А.Е., Разин В.В. Система управления обучением на основе смешанных диагностических тестов с использованием технологии Semantic Web	78

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ,
ПЕРСОНАЛИИ

75 лет профессору Матросовой Анжеле Юрьевне	89
Сведения об авторах	91

CONTENTS

CONTROL
OF DYNAMICAL SYSTEMS

Dombrovskii V.V., Larina T.M. Predictive control strategies for investment portfolio subject to constraints and trading costs	4
---	---

DATA PROCESSING

Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Maximum likelihood estimation of unextendable dead time period duration in the modulated semi-synchronous generalized flow of events	13
Gubina O.V., Koshkin G.M. Collective annuity estimation of the joint-life status	30
Livshits K.I., Suhotina L.Yu. Ruin probability of an insurance company with hyperexponential distribution of insurance premiums and insurance payments for different insurance models	37
Moiseeva S.P., Pankratova E.V., Ubonova E.G. Queuing system with renewal arrival process and two type of customers	46
Podkur P.N., Smolentsev N.K. Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms	54
Shulenin V.P. Asymptotic properties of robust estimators of scale parameters	62

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Senchenko P.V., Oznabihin D.A., Tarasenko V.F. The task of automatic calibration of the projector and the sensor depth	71
Yankovskaya A.E., Razin V.V. Learning management system based on Mixed Diagnostic Tests and Semantic Web technology	78

MEMOIRS, MEMORABLE DATE,
PERSONALITIS

75 years to Prof. A.Yu. Matrosova	89
Brief information about the authors	91

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5

DOI: 10.17223/19988605/35/1

В.В. Домбровский, Т.М. Ларина

СТРАТЕГИИ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ С УЧЕТОМ ТОРГОВЫХ ИЗДЕРЖЕК И ОГРАНИЧЕНИЙ НА ВЛОЖЕНИЯ В ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ

Работа посвящена построению и исследованию модели динамического управления самофинансируемым инвестиционным портфелем с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы вложений. Предполагается, что ставка по безрисковым вложениям отлична от ставки по займам. Для решения задачи управления портфелем используется метод управления с прогнозирующей моделью. Для подтверждения работоспособности модели приводятся результаты численного моделирования на основе реальных данных валютного рынка «Forex».

Ключевые слова: инвестиционный портфель; управление с прогнозирующей моделью; валютные пары; транзакционные издержки.

Проблема оптимизации и управления инвестиционным портфелем является одной из основных в управлении финансами и представляет большой теоретический и практический интерес.

Инвестиционный портфель (ИП) – это набор рисковых и безрисковых финансовых активов, которые инвестор включает в портфель. Рисковыми активами считают финансовые активы со случайной меняющейся доходностью (например, акции, валютные пары). Безрисковыми являются финансовые активы с известной заранее доходностью (государственные обязательства, казначейские векселя, банковские депозиты). Управление ИП осуществляется при помощи перераспределения капитала – купли-продажи различных рисковых и безрисковых активов.

Начало современной портфельной теории было положено революционной работой Г. Марковица [2] 1952 г. Результаты Марковица были развиты и дополнены не менее известными работами В. Шарпа [1], Д. Тобина [3, 4], Р. Мертона [5] и других исследователей.

Подход Марковица, а также его модификации основаны на предположениях о том, что инвестор стремится либо максимизировать доходность портфеля, минимизировав риск портфеля, либо минимизировать риск портфеля и получить при этом желаемую доходность. Проблема оптимизации структуры портфеля в зависимости от выбора функции риска и способов учета неопределенности сводится к решению задач квадратичного, линейного или стохастического программирования.

Практическая реализация большинства существующих на данный момент методов оптимизации портфеля включает два этапа:

1. Оценка параметров модели с использованием исторических данных.
2. Оптимизация портфеля с использованием вместо истинных значений параметров их оценок.

Результат оптимизации существенно зависит от точности оценок. Кроме того в большинстве методов, представленных в литературе, отсутствуют ограничения на объемы торговых операций и не учитываются транзакционные издержки.

В настоящей работе рассматривается построение и исследование модели динамического управления самофинансируемым инвестиционным портфелем с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы вложений. Кроме того, предполагается, что ставка по безрисковым вложениям отлична от ставки по займам.

Задача управления инвестиционным портфелем формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой доходностью. Управление ИП осуществляется при помощи перераспределения капитала на каждом этапе управления в зависимости от состояния рынка. Для решения задачи управления портфелем используется метод управления с прогнозирующей моделью, который позволяет эффективно учитывать ограничения [6–10].

Рассматриваемая в данной работе модель обладает следующими преимуществами:

1. Возможность учета ограничений на объемы вложений, квадратичные транзакционные издержки.
2. Не требуется каких-либо предположений относительно вероятностных свойств цен финансовых активов.
3. Алгоритм управления не использует статистических методов оценивания параметров модели.
4. Возможность адаптироваться к изменяющимся рыночным условиям путем введения новой информации в процессе управления.

Для подтверждения работоспособности модели было проведено численное моделирование на основе реальных данных международного валютного рынка «Forex».

1. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с учетом ограничений

Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из n видов рисковых финансовых активов и одного вида безрискового актива – банковского счета. Капитал, помещенный в рисковый актив i -го вида в момент времени k , равен $u_i(k)$, ($i=\overline{1,n}$), в безрисковый – $u_0(k) \geq 0$.

Рассматриваемый нами ИП является самофинансируемым, т.е. деньги извне на банковский счет не поступают, а снимаются только с целью вложения в ценные бумаги, входящие в данный ИП, но предполагается, что в случае необходимости инвестор может заимствовать капитал. Объем займа равен $u_{n+1}(k) \geq 0$.

Тогда общий объем вложений в момент времени k будет равен

$$V(k) = \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_0(k) - u_{n+1}(k). \quad (1)$$

Пусть $P_i(k)$ – цена i -го рискового актива в момент времени k , $\eta_i(k+1)$ – доходность рискового актива за период $[k, k+1]$, которая вычисляется по формуле

$$\eta_i(k+1) = \frac{P_i(k+1) - P_i(k)}{P_i(k)}. \quad (2)$$

Динамика изменения ИП имеет следующий вид [6, 7]:

$$V(k+1) = \sum_{i=1}^n [1 + \eta_i(k+1)]u_i(k) + [1 + r_1]u_0(k) - [1 + r_2]u_{n+1}(k), \quad (3)$$

где r_1 – ставка доходности безрискового актива; r_2 – ставка заимствования, причем $r_1 < r_2$. С учетом того, что $u_0(k) = V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k)$, уравнение (3) можно представить в виде

$$V(k+1) = [1 + r_1]V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r_1]u_i(k) - [r_2 - r_1]u_{n+1}(k). \quad (4)$$

Используя векторно-матричные обозначения, получим

$$V(k+1) = [1 + r_1]V(k) + b[\eta(k+1), k+1]u(k), \quad (5)$$

где $b[\eta(k+1), k+1] = [\eta_1(k) - r_1 \dots \eta_n(k) - r_1 \ r_1 - r_2]$ – вектор доходностей рисковых активов, $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ \dots \ u_{n+1}(k)]^T$ – вектор управлений.

На практике необходимо учитывать ограничения на объемы вложений и займов [6, 7]:

$$u_i^{\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k) (i=\overline{1,n}),$$

$$0 \leq V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}, \quad (6)$$

$$0 \leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k).$$

Если нижняя граница $u_i^{\min}(k) < 0 (i = \overline{1, n})$, то для рискового актива i -го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не больше, чем $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0 (i = \overline{1, n})$, то операции «продажа без покрытия» для рискового актива i -го вида запрещены; $u_i^{\max}(k) (i = \overline{1, n})$, определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в рисковые активы i -го вида; $u_0^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный размер капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив; $u_{n+1}^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный размер займа. Стоит отметить, что $u_i^{\min}(k)$ и $u_i^{\max}(k) (i = \overline{1, n})$, на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma_i V(k)$, $u_i^{\max}(k) = \beta_i V(k)$, где γ_i и β_i являются некоторыми параметрами, задающими так называемое кредитное плечо. Финансовым, или кредитным, плечом для участников маржинальной торговли на валютном рынке «Форекс» называют отношение заёмных средств к собственным. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета.

Стратегия управления портфелем определяется таким образом, чтобы капитал реального управляемого ИП с наименьшими отклонениями следовал траектории эталонного портфеля с желаемой доходностью $\mu_0 > r_1$, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k). \quad (7)$$

В начальный момент времени $V^0(0) = V(0)$. Заметим, что $V^0(k)$ – величина детерминированная, известна для всех моментов k и ее можно рассматривать как известный параметр. Доходность μ_0 задается инвестором исходя из анализа состояния финансового рынка и склонности инвестора к риску.

Предположим, что единственным источником информации в момент времени k являются исторические значения доходностей и текущее значение портфеля $V(k)$. В данной работе для получения оптимальной стратегии управления используем метод управления с прогнозирующей моделью.

Основная идея управления с прогнозирующей моделью заключается в том, что решается задача оптимизации критерия со скользящим горизонтом в каждый момент времени k :

$$\begin{aligned} \min_{u(k/k) \dots u(k+m-1/k)} J(k+m/k) = E \{ \sum_{i=1}^m [V(k+i/k) - V^0(k+i)]^2 / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N) \} + \\ + E \sum_{i=0}^{m-1} \{ [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]^T R(k, i) \times \\ \times [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)] / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N+1) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где m – горизонт прогнозирования; $u(k+i/k) = [u_1(k+i/k), \dots, u_n(k+i/k)]^T$ – вектор прогнозных значений управлений; $R(k, i) > 0$ – положительно определенная симметричная матрица; $V(k+i/k)$ – предполагаемые значения портфеля; N – количество исторических данных; I – единичная матрица размерности $(n+1)$; $Q[\eta(k+i)] = \text{diag}\{\eta_1(k+i), \eta_2(k+i), \dots, \eta_n(k+i), 0\}$ – матрица доходностей; $E\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания. В качестве управления в момент времени k обозначим $u(k) = u(k/k)$. Для получения управлений на следующем $(k+1)$ шаге горизонт управления сдвигается на один шаг и процедура повторяется.

Можно отметить, что первое слагаемое в критерии представляет собой квадратичную ошибку и отражает качество слежения, второе слагаемое накладывает штраф, если реальная траектория идет ниже заданной траектории, третье учитывает транзакционные издержки и накладывает штраф на слишком большие транзакции.

2. Синтез стратегий управления с прогнозирующей моделью

Критерий (8) можно представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = & E\left\{\sum_{i=1}^m V^2(k+i/k) - 2V^0(k+i)V(k+i/k)\right\} + \\ & + E\left\{\sum_{i=0}^{m-1} [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]^T R(k,i) \times \right. \\ & \left. \times [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)] / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N+1)\right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где исключены слагаемые, не зависящие от управления.

Определим прогнозные значения портфеля следующим уравнением:

$$\begin{aligned} V(k+i/k) = & A^i V(k) + A^{i-1} b[\theta(k)]u(k/k) + A^{i-2} b[\theta(k)]u(k+1/k) + \\ & + \dots + b[\theta(k)]u(k+i-1/k) \quad (i = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $A = 1 + r_1$, $b[\theta(k)] = [\theta(k) - e_n r_1 \dots \theta(k) - e_n r_1 r_1 - r_2]$, $\theta(k) = \alpha_1 \eta(k) + \alpha_2 \eta(k-1) + \dots + \alpha_N \eta(k-N+1)$,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ – некоторые параметры.

Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ являются настраиваемыми и определяются таким образом, чтобы достичь наилучших результатов при управлении. Стоит отметить, что никаких предположений относительно параметров мы не делаем.

Заметим, что (5) определяет реальные значения ИП, а уравнение (10) определяет предсказанные значения портфеля. Таким образом, в отличие от других известных моделей в данной работе не прогнозируются будущие значения доходностей, а предсказываются будущие значения портфеля в целом.

Прогнозное значение критерия (9) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} K(k+m/k) = & \sum_{i=1}^m \{V^2(k+i/k) - 2V^0(k+i)V(k+i/k)\} + \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} \{[u(k+i/k) - (I + Q[\theta(k)])u(k+i-1/k)]^T R(k,i)[u(k+i/k) - (I + Q[\theta(k)])u(k+i-1/k)]\} + \\ & + [u(k/k) - (I + Q[\eta(k)])u(k-1/k)]^T R(k,0)[u(k/k) - (I + Q[\eta(k)])u(k-1/k)], \end{aligned} \quad (11)$$

где $Q[\theta(k)] = \text{diag}\{\theta_1(k), \theta_2(k), \dots, \theta_n(k), 0\}$, $(i = \overline{1, m-1})$, θ_i – компоненты вектора θ . Заметим, что при $i = 0$ $Q[\theta(k)] = Q[\eta(k)]$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X(k+1) = & \begin{bmatrix} V(k+1/k) \\ V(k+2/k) \\ \dots \\ V(k+m/k) \end{bmatrix}, \Phi[\theta(k)] = \begin{bmatrix} b[\theta(k)] & 0_{1 \times n+1} & \dots & 0_{1 \times n+1} \\ Ab[\theta(k)] & b[\theta(k)] & \dots & 0_{1 \times n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m-1}b[\theta(k)] & A^{m-2}b[\theta(k)] & \dots & b[\theta(k)] \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \dots \\ A^m \end{bmatrix}, \\ U(k) = & \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \dots \\ u(k+m-1) \end{bmatrix}, \Delta_1(k+1) = 2[V^0(k+1) \quad V^0(k+2) \quad \dots \quad V^0(k+m)]. \end{aligned}$$

Тогда критерий (11) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} K(k+m/k) = & X^T(k+1)X(k+1) - \Delta_1(k+1)X(k+1) + \\ & + U^T(k)\overline{R}(k)U(k) - 2u(k/k)^T R(k,0)(I + Q[\eta(k)])u(k-1) + \\ & + u^T(k-1)(I + Q[\eta(k)])R(k,0)(I + Q[\eta(k)])u(k-1), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\overline{R}_{t,t}(k) = R(k,t) + R(k,t+1)(I + 2Q[\theta(k)]) + Q[\theta(k)]^T R(k,t+1)Q[\theta(k)]$ ($t = \overline{0, m-2}$),

$\overline{R}_{m,m}(k) = R(k, m-1)$, $\overline{R}_{t+1,t}(k) = \overline{R}_{t,t+1}(k) = -R(k,t+1)(I + Q[\theta(k)])$ ($t = \overline{0, m-1}$).

Используя $X(k+1) = \Psi V(k) + \Phi[\theta(k)]U(k)$, представим (12) в виде

$$K(k+m/k) = V^2(k)\Psi^T\Psi + [2V(k)\Psi^T - \Delta_1(k+1)]\Phi[\theta(k)]U(k) + U^T(k)\Phi^T[\theta(k)]\Phi[\theta(k)]U(k) + U^T(k)\bar{R}(k,i)U(k), \quad (13)$$

где не учитываются слагаемые, которые не зависят от управления – $u(k+i/k)$.

Критерий (13) можно записать в следующем виде:

$$K(k+m/k) = [2V(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)[H(k) + \bar{R}(k)]U(k), \quad (14)$$

где $H(k), G(k), F(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k) = [H_{t,f}(k)], \quad G(k) = [G_t(k)], \quad F(k) = [F_t(k)], \quad t, f = \overline{1, m},$$

$$H(k) = \Phi^T[\theta(k)]\Phi[\theta(k)], \quad (15)$$

$$G(k) = \Psi^T\Phi[\theta(k)], \quad F(k) = \Delta_1(k+1)\Phi[\theta(k)] + L(k),$$

$$L(k) = [-2u(k-1)(I + Q[\eta(k)])^T R(k, 0) \quad 0_{1 \times (n+1)} \quad \dots \quad 0_{1 \times (n+1)}].$$

Управление осуществляется при следующих ограничениях:

$$U_{\min}(k) \leq \bar{S}U(k) \leq U_{\max}(k),$$

где $U_{\min}(k) = [u_{\min}^T(k), 0_{n+2 \times 1}, \dots, 0_{n+2 \times 1}]^T$, $U_{\max}(k) = [u_{\max}^T(k), 0_{n+2 \times 1}, \dots, 0_{n+2 \times 1}]^T$,

$$U_{\min}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\min}(k) \\ u_2^{\min}(k) \\ \dots \\ u_n^{\min}(k) \\ -V(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_{\max}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\max}(k) \\ u_2^{\max}(k) \\ \dots \\ u_n^{\max}(k) \\ u_0^{\max}(k) - V(k) \\ u_{n+1}^{\max}(k) \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{S} = \text{diag}\{S, 0_{n+2 \times n+1}, \dots, 0_{n+2 \times n+1}\},$$

где $0_{(n+2) \times (n+1)}$ – нулевая матрица размерности $(n+2) \times (n+1)(m-1)$.

Оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий (12), определяется уравнением

$$u(k) = [I_{n+1} \quad 0_{n+1} \quad \dots \quad 0_{n+1}]U(k), \quad (16)$$

где I_{n+1} – единичная матрица размерности $(n+1)$, 0_{n+1} – нулевая матрица размерности $(n+1)$.

3. Численное моделирование с использованием реальных данных международного валютного рынка «Forex»

Для подтверждения работоспособности представленной модели было проведено численное моделирование на основе реальных данных международного валютного рынка «Forex». Для моделирования использовались данные котировок шести видов валютных пар: USDJPY (доллар – йена), USDDDEM (доллар – немецкая марка), EURJPY (евро – йена), EURUSD (евро – доллар), GBPUSD (фунт–доллар), CHFJPY (франк – йена), в период с 16.02.2001 г. – 13.11.2003 г., всего 1000 торговых дней, и один вид безрискового актива – банковский вклад с доходностью $r_1 = 0,015\%$. Также нам доступна услуга кредитования со ставкой по займу $r_2 = 0,03\%$.

При моделировании предполагалось, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = \alpha$. Поэтому параметр $\theta(k)$ определялся следующим образом:

$$\theta(k) = \alpha \sum_{t=1}^N \eta(k-t+1).$$

Рассматриваемый ИП состоял из шести валютных пар; период «скользящего окна» $N = 10$; параметр $\alpha = 0,5$; размер кредитных плеч $\gamma_i = \beta_i = 2$; желаемая доходность $\mu_0 = 0,0015$.

Результаты моделирования представлены на рис. 1–3. На рис. 1 представлена динамика капитала управляемого ИП относительно эталонной траектории. На рис. 2 показана динамика вложений в валютную пару EURUSD. На рис. 3 представлена доходность валютной пары EURUSD.

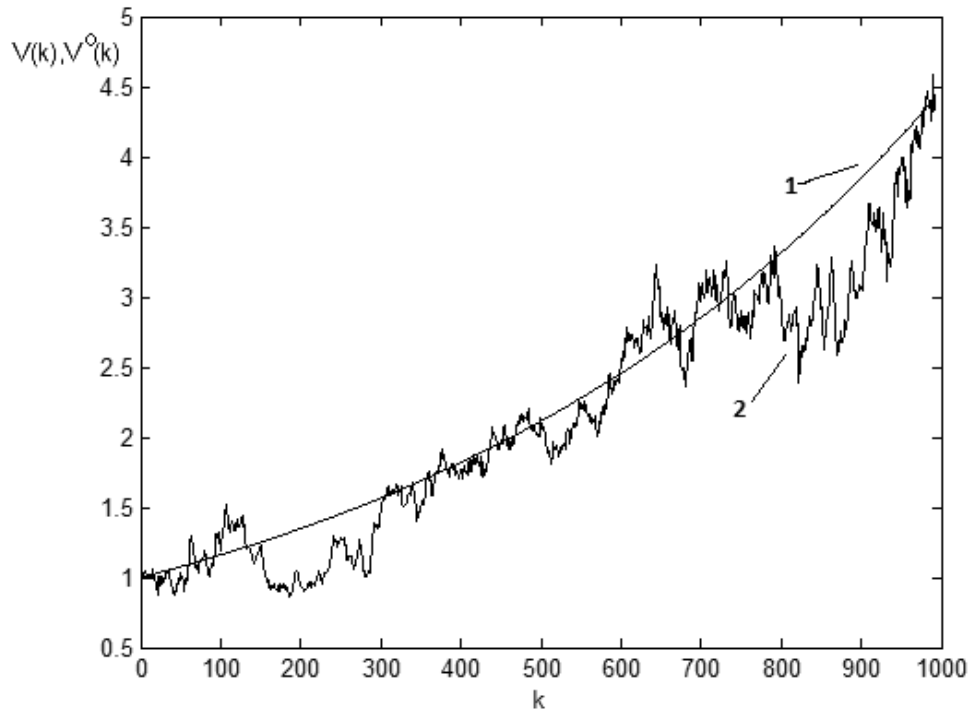


Рис. 1. Динамика капитала, управляемого ИП относительно эталонной траектории:
1 – эталонная траектория; 2 – динамика капитала управляемого ИП

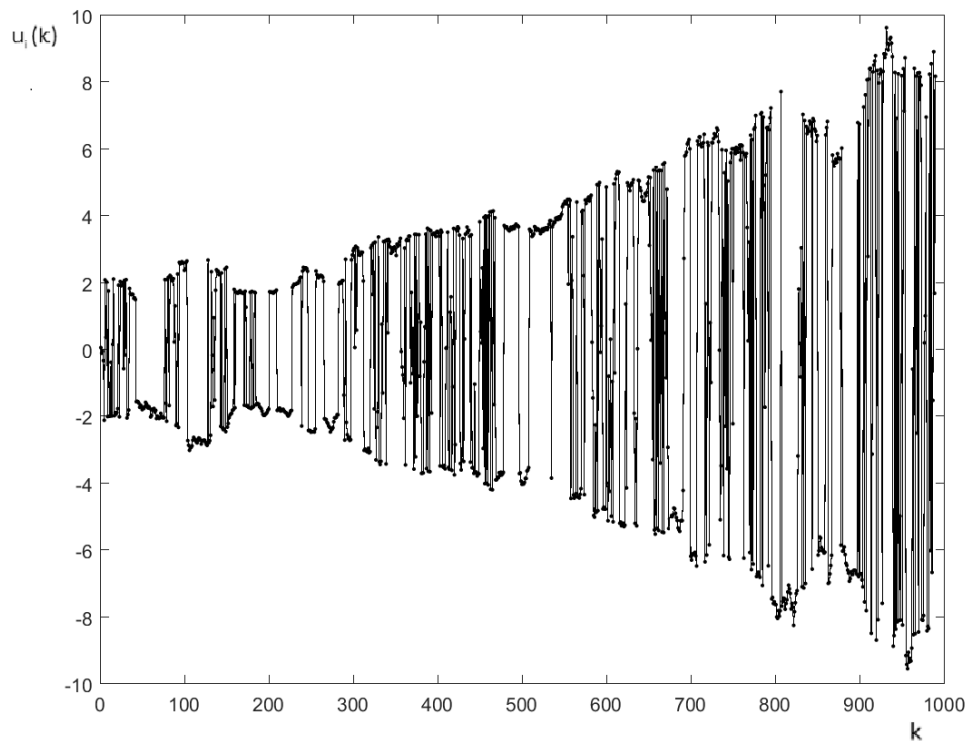


Рис. 2. Динамика вложений в валютную пару EURUSD

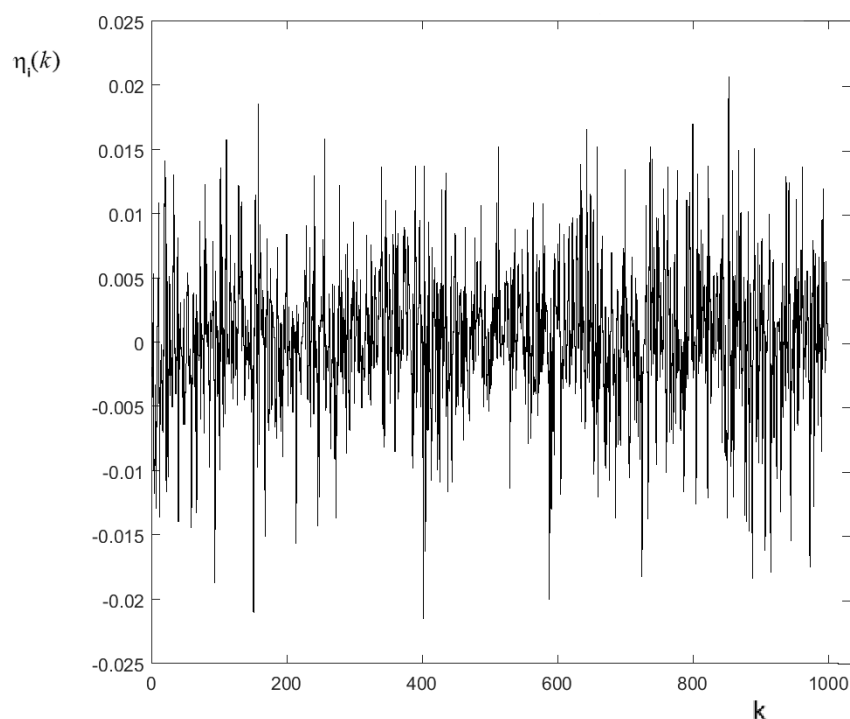


Рис. 3. Динамика доходности валютной пары EURUSD

Заключение

В данной работе рассмотрена задача оптимизации инвестиционного портфеля с учетом транзакционных издержек, ограничений на объемы вложений в финансовые активы и различия ставок на вложения и заем. Получена стратегия управления с обратной связью с использованием метода управления с прогнозирующей моделью. Результаты численного моделирования, проведенные на основе реальных данных международного валютного рынка «Fogex», подтверждают работоспособность, эффективность предложенной модели и возможность ее реального применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Д.В. Инвестиции. М. : Инфра-М, 1997. 1028 с.
2. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. Vol. 7, No. 1. P. 77–91.
3. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Review of Economic Studies. 1958. Vol. 25, No. 2. P. 65–86.
4. Tobin J. The theory of portfolio selection. N. Y. : Macmillan, 1965.
5. Merton R.C. Continuous-time finance. Cambridge : Blackwell, 1990.
6. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71–85.
7. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Y. Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Transaction Costs and Different Rates for Borrowing and Lending // Electronic copy Available at SSRN. URL: <http://ssrn.com/abstract=2516364>
8. Домбровский Д.В. Динамические модели управления инвестиционным портфелем на нестационарном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек и ограничений : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008. 188 с.
9. Dombrovskii V.V. Adaptive data-driven portfolio optimization in the non stationary financial market under constraints // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 5–13.
10. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Y. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. No. 54. P. 325–331.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

Ларина Татьяна Михайловна. E-mail: latami@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 февраля 2016 г.

Consider an investment portfolio consisting of n risky assets and one risk-free asset (e.g., a bank account or a government bond). Let $u_i(k)$, $(i = \overline{1, n})$ denote the amount of money invested in the i -th asset at time k ; $u_0(k) \geq 0$ is the amount invested in a risk-free asset. Investor also can borrow the capital in case of need. The volume of the borrowing of the risk-free asset is equal to $u_{n+1}(k) \geq 0$. If $u_i(k) < 0, (i = \overline{1, n})$, then we use short position with the amount of shorting $|u_i(k)|$. Let $\eta_i(k+1)$ denote the (simple) return of the i -th risky asset per period $[k, k+1]$. It is a stochastic unobservable at time k .

By considering the self-finance strategies, the wealth process at the time $k+1$ is given by

$$V(k+1) = [1 + r_1]V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r_1]u_i(k) - [r_2 - r_1]u_{n+1}(k),$$

where r_1 is the riskless lending rate, r_2 is the riskless borrowing rate, $r_1 < r_2$.

We impose the following constraints on the decision variables (a borrowing limit on the total wealth invested in the risky assets, and long- and short-sale restrictions on all risky assets):

$$u_i^{\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k) (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

$$0 \leq V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}, \quad (2)$$

$$0 \leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k). \quad (3)$$

Our objective is to control the investment portfolio, via dynamic asset allocation among the n stocks and the risk-free asset, by tracking, as closely as possible, a desired deterministic reference trajectory (reference portfolio)

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k),$$

where μ_0 is a given parameter representing the growth factor and the initial state is $V^0(0) = V(0)$.

We use the model predictive control methodology in order to design feedback predictive control strategies for optimal dynamic allocation of a portfolio.

We define the following objective with receding horizon (risk function) which is to be minimized at each time k :

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = & E \left\{ \sum_{i=1}^m [V(k+i/k) - V^0(k+i)]^2 / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N) \right\} + \\ & + E \sum_{i=0}^{m-1} \{ [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]^T R(k, i) \times \\ & \times [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)] / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k-N+1) \}, \end{aligned}$$

over the sequence of predictive control inputs $u(k/k), u(k+1/k), \dots, u(k+m-1/k)$ dependent on the portfolio wealth and the market information at the current time k , under constraints (1)–(3), where m is the prediction horizon. The first term represents the conditional mean-square error between the investment portfolio value and a reference (benchmark) portfolio, the second term penalizes for transaction costs associated with trading amount. At the time k , $u(k) = u(k/k)$ is assumed to be control $u(k)$. To obtain the control at the next step $k+1$, the procedure is repeated, and the control horizon is one step shifted.

Our approach is direct in that it uses directly the observed historical data to construct an adaptive algorithm for online portfolio selection. The main features of our approach are (a) the ability to adapt to non-stationary market environments by dynamically incorporating new information into the decision process; (b) no stochastic assumptions are needed regarding the stock prices, and (c) the flexibility of dealing with portfolio constraints. We also present the numerical modeling results based on currency pairs traded on the international currency market FOREX that give evidence of capacity and effectiveness of proposed approach.

REFERENCES

1. Sharpe, W., Alexander, G. & Bailey, J. (1997) *Investitsii* [Investments]. Translated from English. Moscow: Infra-M.
2. Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 7(1). pp. 77-91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
3. Tobin, J. (1958) Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*. 25(2). pp. 65-86. DOI: 10.2307/2296205
4. Tobin, J. (1965) *The theory of portfolio selection*. New York: Macmillan.
5. Merton, R.C. (1990) *Continuous-time finance*. Cambridge: Blackwell.
6. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 67(12). pp. 71-85. DOI: 10.1134/S000511790612006X

7. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Y. (2014) *Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Transaction Costs and Different Rates for Borrowing and Lending*. [Online] Available from: <http://ssrn.com/abstract=2516364>.
8. Dombrovskii, D.V. (2008) *Dinamicheskie modeli upravleniya investitsionnym portfelem na nestatsionarnom finansovom rynke s uchetom tranzaktsionnykh izderzhek i ogranicheniy* [Dynamic portfolio management models in the non-stationary financial markets under constraints and transaction costs]. Physics and Mathematics cand. Diss. Tomsk.
9. Dombrovskii, V.V. (2013) Adaptive data-driven portfolio optimization in the non stationary financial market under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 5-13. (In Russian).
10. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Y. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325-331.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/35/2

М.А. Бахолдина, А.М. Горцев

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МОДУЛИРОВАННОМ ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. В статье приводятся аналитические результаты по нахождению оценки максимального правдоподобия длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; непродлевающееся мертвое время; функция правдоподобия; оценка максимального правдоподобия; длительность мертвого времени.

Условия функционирования реальных систем массового обслуживания таковы, что если в отношении параметров обслуживаемых устройств, как правило, можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем; часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs) [1–9]. Интерес к рассмотрению дважды стохастических потоков событий проявляется неслучайно. Все это находит широкое применение в различных отраслях науки и техники, таких как теория сетей, Р2Р-сети и адаптивное вещание видео, системы оптической связи, статистическое моделирование, финансовая математика и др. [10–16]. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо, что еще более ухудшает ситуацию, изменяются со временем случайным образом. Поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий) [17–26]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [27–33].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока выступает мертвое время регистрирующих приборов. Необходимость рассмотрения случая мертвого времени вызвана тем, что на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживаемый прибор, порождает период так называемого мертвого времени [34–42], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки»; в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных

вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В настоящей работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [43–46] и обобщенного полусинхронного потока событий [47–49] и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий с кусочно-постоянной интенсивностью. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [21, 22, 50, 51], при этом в [50] показано, что данные потоки могут быть представлены в виде моделей МАР-потоков событий. Настоящая статья является непосредственным развитием работ [51–55], где решается задача нахождения совместной плотности вероятности длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени. В данном исследовании приводятся аналитические результаты по нахождению оценки максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток или поток событий), интенсивность которого является кусочно-постоянным стационарным случайным процессом $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_1$, и второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_2$. В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i ($\lambda(t) = \lambda_i$), имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 , при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе также возможен в произвольный момент времени, не совпадающий с моментом наступления события, при этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β : $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен и может осуществляться только в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α : $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. Отметим, что события пуассоновских потоков и дополнительные события неразличимы для наблюдателя. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. При этом матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ \alpha(1 - \delta) & -(\lambda_2 + \alpha) \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} (1 - p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha\delta & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\beta = 0$, то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [47–49].

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где 1, 2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквами δ ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые $t_1, t_2, \dots$ – белыми.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Поскольку процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то говорить о состоянии потока можно только в вероятностном смысле. Вся доступная информация о потоке – это моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k$ с начала наблюдения t_0 до момента t .

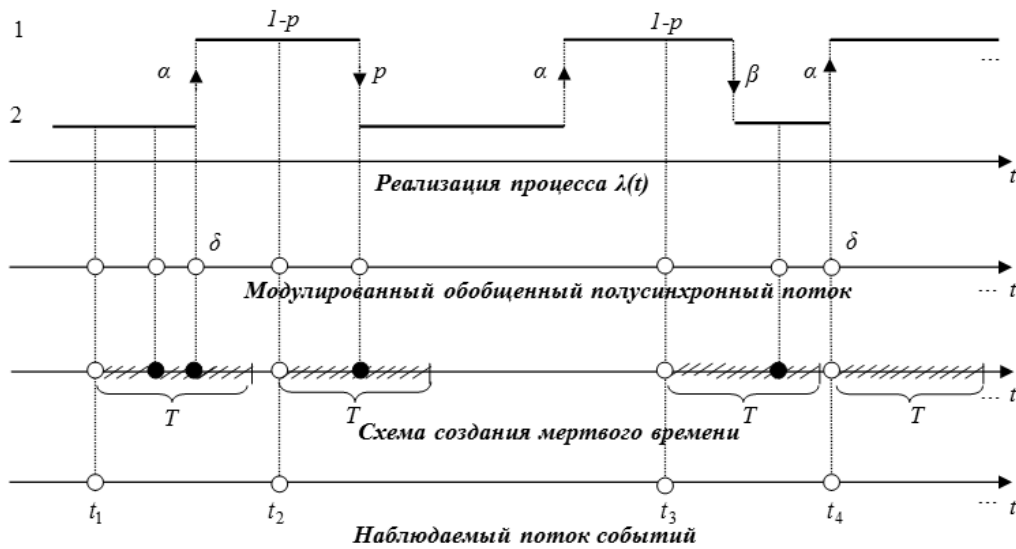


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Параметры потока $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ полагаются известными, длительность мертвого времени T неизвестна. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) на основании выборки $t_1, t_2, \dots, t_k$ наблюдаемых моментов наступления событий потока осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда одномерная плотность вероятности $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, примет вид [51, 55]:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$f(T) = \lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \{ (p\lambda_1 + \beta)[\lambda_1(1-p+p\delta) - \lambda_2 + \delta\beta] - p\lambda_1\alpha \} \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T)},$$

$$F(T) = z_1 z_2 - q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad \beta_1 = p\lambda_1 + \beta, \quad \beta_2 = \alpha, \quad q = \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)],$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1-\delta)} \right), \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, ..., $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, ..., $\tau_k \geq 0$, – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t]$ значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины $\tau_1, \dots, \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда функция правдоподобия с учетом (1) запишется в виде

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}; \quad L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad T > \tau_{\min}.$$

Поскольку задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени в предположении, что все параметры потока $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ известны, то согласно методу максимального правдоподобия ее реализация есть решение оптимизационной задачи

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0, \quad (2)$$

где $p_T(\tau^{(j)})$ определена в (1) для $\tau = \tau^{(j)}$. Значение T , при котором функция правдоподобия (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи (2)

Произведем переобозначение: $\tau_m = \tau_{\min}$. В силу того что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0 \leq T \leq \tau_m$, положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0$, $j = \overline{2, k}$, при $T > \tau_m$ ($\tau_m > 0$). В дальнейшем изложенная ситуация, когда принимается $\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Перейдем к исследованию $p_T(\tau_m)$ как функции переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m$). Отметим, что $p_T(\tau_m) \geq 0$, так как $p_T(\tau_m)$ есть одномерная плотность вероятности. Исследуем производную $p'_T(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p'_T(\tau_m) = \frac{1}{(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)} \left\{ z_1 e^{-z_1 \tau_m} [z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) - z_1 f(T) - f'(T)] e^{-z_1 T} - z_2 e^{-z_2 \tau_m} [z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) - \right. \\ \left. - z_2 f(T) - f'(T)] e^{-z_2 T} \right\}, \quad (3)$$

$$f'(T) = -\alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)(\beta_1 + \beta_2) z_1 z_2 \{ (p\lambda_1 + \beta)[\lambda_1(1-p+p\delta) - \lambda_2 + \delta\beta] - p\lambda_1\alpha \} \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^2(T)}, \quad 0 \leq T \leq \tau_m,$$

где $f(T)$, $F(T)$ определены в (1); $f'(T)$ – производная функции $f(T)$ по T .

Лемма 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ является положительной функцией переменной τ_m при $T = 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$ ($p'_{T=0}(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число ($\tau_m \geq 0$), то $p'_{T=0}(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m . Подставляя $T = 0$ в (3) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p'_{T=0}(\tau_m) = \frac{C}{A^2(z_2 - z_1)} [z_2(C - z_1 A)e^{-z_2 \tau_m} - z_1(C - z_2 A)e^{-z_1 \tau_m}], \quad \tau_m \geq 0, \quad (4)$$

$$C = \lambda_1 \alpha [\lambda_1(1 - p + p\delta) + \delta\beta] + (\lambda_2 + \alpha\delta) [\lambda_2(p\lambda_1 + \beta) + p\lambda_1 \alpha] = -z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) + (z_1 + z_2) A > 0,$$

$$A = \lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) = z_1 z_2 - q > 0.$$

Рассмотрим на предмет существования корней уравнение $p'_{T=0}(\tau_m) = 0$, которое с учетом (4) преобразуется к виду

$$B = e^{-(z_2 - z_1)\tau_m}, \quad B = \frac{z_1(z_2 A - C)}{z_2(z_1 A - C)}. \quad (5)$$

Из (4) находим

$$p'_{T=0}(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0, \quad \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'_{T=0}(\tau_m) = \pm 0. \quad (6)$$

Подставляя в (5) выражения для z_1, z_2 , определенные в (1), получаем

$$B = \frac{z_1^2 \left[-2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)} \right]}{z_2^2 \left[-2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) - (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)} \right]} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Тогда имеем

$$B_1 = z_1^2 \left[-2A + (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta) + (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)} \right] \geq z_1^2 \left[-2A + (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta) + (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2} \right] \geq 2z_1^2 [p\lambda_1 \alpha(1 - \delta) + \alpha\beta(2 - \delta)] > 0$$

вне зависимости от знака выражения $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta$ ($\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta > 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta = 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta < 0$). Для выражения (5) имеем два варианта:

1) $B_1 = z_1(z_2 A - C) > 0$; $B_2 = z_2(z_1 A - C) > 0$. Тогда $B > 0$ и разность $B_1 - B_2 = C(z_2 - z_1) > 0$. Следовательно, $B_1 > B_2$ и $B > 1$. Тогда уравнение (5) решения не имеет, следовательно, $p'_{T=0}(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$, так как в силу (6) $p'_{T=0}(\tau_m = 0) > 0$, при этом $\lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'_{T=0}(\tau_m) = +0$;

2) $B_1 = z_1(z_2 A - C) > 0$; $B_2 = z_2(z_1 A - C) < 0$. Тогда $B < 0$ и уравнение (5) решения не имеет, следовательно, $p'_{T=0}(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$, аналогично варианту 1.

Осталось рассмотреть особый случай $z_1 A - C = 0$. Подставляя $z_1 A - C = 0$ в (4), получаем

$$p'_{T=0}(\tau_m) = \frac{C}{A^2(z_2 - z_1)} (z_2 A - C) z_1 e^{-z_1 \tau_m} > 0, \quad \tau_m \geq 0,$$

так как $B_1 = z_1(z_2 A - C) > 0$ всегда и, следовательно, $z_2 A - C > 0$ всегда.

Таким образом, если $z_2(z_1 A - C) \geq 0$ либо $z_2(z_1 A - C) < 0$, то $p'_{T=0}(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. $q > q_1$ всегда.

Доказательство. В лемме 1 показано, что $z_2 A - C > 0$ всегда. Можно показать, что $z_2 A - C = z_1(q - q_1)$, следовательно, $q > q_1$ всегда.

Лемма 2. Производная $p'_T(\tau_m)$ строго больше нуля при $T = \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$ ($p'_{T=\tau_m}(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Подставляя $T = \tau_m$ в (3), получаем

$$p'(\tau_m) = p'_{T=\tau_m}(\tau_m) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + \varphi(q) \psi(\tau_m) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}}{F^2(\tau_m)} \right\}, \quad \psi(\tau_m) = C + (z_1 + z_2) q [1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}], \quad (7)$$

$$\varphi(q) = (\beta_1 + \beta_2)C - A^2 = -q^2 + [2z_1z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)]q - z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2),$$

где q , $F(\tau_m)$ определены в (1), A , C – в (4). Можно показать, что $\varphi(q) = -(q - q_1)(q - q_2)$, где $q_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)$, $q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$ – корни уравнения $\varphi(q) = 0$. Отметим, что

$$p'(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0, \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'(\tau_m) = \frac{C}{\beta_1 + \beta_2} > 0, p'(\tau_m = 0) - \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'(\tau_m) = \frac{C}{A^2(\beta_1 + \beta_2)} \varphi(q). \quad (8)$$

В силу того что $C > 0$, $\psi(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$, то знак производной $p'(\tau_m)$ определяется знаком $\varphi(q)$. Тогда если $\varphi(q) \geq 0$, то производная (7) строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$) для $\tau_m \geq 0$.

Пусть $\varphi(q) < 0$. Введем в рассмотрение вторую производную $p''(\tau_m)$ по переменной T в точке $T = \tau_m$. Используя (3), находим

$$p''(\tau_m) = -z_1z_2 \frac{\varphi(q)}{F^3(\tau_m)} e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} [z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}], \tau_m \geq 0,$$

где q , $F(\tau_m)$ определены в (1), $\varphi(q)$ определена в (7). По условию имеем $\left[-z_1z_2 \frac{\varphi(q)}{F^3(\tau_m)} e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} \right] > 0$,

следовательно, знак производной $p''(\tau_m)$ определяется знаком функции

$$y(\tau_m) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}, \tau_m \geq 0.$$

Исследуем функцию $y(\tau_m)$ как функцию переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$). Имеем

$$y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2), \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} y(\tau_m) = y(\infty) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) = z_1z_2[\lambda_1(1 - p) + \lambda_2] > 0,$$

где q определена в (1), C – в (4). Здесь возможны следующие варианты:

1) $q < 0$ и, следовательно, $y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2) > 0$. Тогда функция $y(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$); убывает от $y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2) > 0$ до $y(\infty) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$. Следовательно, $y(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Отсюда следует, что $p''(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$, и функция $p'(\tau_m)$ является возрастающей функцией переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$). Таким образом, в силу (8) $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$;

2) $q = 0$. Тогда $y(\tau_m) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Результат идентичен результату предыдущего пункта;

3) $q > 0$. Тогда $y(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$); возрастает от $y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2)$ до $y(\infty) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$. В данном случае имеют место три варианта: а) $y(0) > 0$; б) $y(0) = 0$; в) $y(0) < 0$. Рассмотрим более подробно каждый из вариантов.

Вариант а. Пусть $y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2) > 0$. Тогда $y(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Отсюда следует, что $p''(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$, и функция $p'(\tau_m)$ является возрастающей функцией переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$). Таким образом, в силу (8) $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$.

Вариант б. Пусть $y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2) = 0$. Тогда $y(\tau_m) \geq 0$, $\tau_m \geq 0$, причем равенство нулю ($y(\tau_m) = 0$) достигается в единственной точке $\tau_m = 0$. Результат идентичен результату варианта а.

Вариант в. Пусть $y(0) = C - q(\beta_1 + \beta_2) < 0$. Тогда: 1) $y(\tau_m) < 0$, $0 \leq \tau_m < \tau_m^*$; 2) $y(\tau_m) = 0$, $\tau_m = \tau_m^*$; 3) $y(\tau_m) > 0$, $\tau_m^* < \tau_m < \infty$. Следовательно, в точке $\tau_m = \tau_m^*$ производная $p'(\tau_m)$ достигает минимального значения $p'(\tau_m^*)$. Точка минимума τ_m^* находится из уравнения $p'(\tau_m) = 0$:

$$\tau_m^* = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln \frac{z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)q}, \frac{z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)q} > 0.$$

Вычислим значение $p'(\tau_m)$ в точке τ_m^* :

$$p'(\tau_m^*) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + \varphi(q) \frac{(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{4(\beta_1 + \beta_2)q} \right\}.$$

Тогда имеем

$$p'(\tau_m^*) > \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + \varphi(q) \frac{(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{4C} \right\} = \frac{1}{4C(\beta_1 + \beta_2)} \{ 3C^2 + (\beta_1 + \beta_2) [C(\lambda_1^2(1-p)^2 + \lambda_2^2 + 2p\lambda_1\alpha\delta) - q^2(\beta_1 + \beta_2)] \} > \frac{1}{4C(\beta_1 + \beta_2)} \{ 3C^2 + (\beta_1 + \beta_2) [(\lambda_1^2\alpha(1-p) + \lambda_2^2\beta + \lambda_1\lambda_2p(\lambda_2 + \alpha))(\lambda_1^2(1-p)^2 + \lambda_2^2) - (\lambda_1\lambda_2(1-p))^2(\beta_1 + \beta_2)] \} = \lambda_1^4\alpha(1-p)^3 + \lambda_1\lambda_2p\alpha[\lambda_1\lambda_2(1-p) + \lambda_1^2(1-p)^2 + \lambda_2^2] + \lambda_2^4\beta_1 > 0.$$

Отсюда следует, что $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Таким образом, если $\varphi(q) < 0$, то производная $p'(\tau_m)$ строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$) для $\tau_m \geq 0$. Лемма 2 доказана.

Перейдем к исследованию производной $p'_T(\tau_m)$ как функции переменной T , $0 \leq T \leq \tau_m$. Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_T(\tau_m) = 0$, которое с учетом (3) приводится к виду

$$e^{-(z_2 - z_1)(\tau_m - T)} = f_1(T) / f_2(T), \quad 0 \leq T \leq \tau_m, \quad (9)$$

$$f_1(T) = z_1[z_1z_2(\beta_1 + \beta_2) - z_1f(T) - f'(T)], \quad f_2(T) = z_2[z_1z_2(\beta_1 + \beta_2) - z_2f(T) - f'(T)].$$

При этом функция $\chi(T) = e^{-(z_2 - z_1)(\tau_m - T)}$ есть возрастающая функция переменной T , $0 \leq T \leq \tau_m$; возрастает от $\chi(0) = e^{-(z_2 - z_1)\tau_m}$ до $\chi(T = \tau_m) = 1$, ее максимальное значение есть 1.

Так как τ_m , в принципе, может равняться бесконечности, то изучим функции $f_1(T)$, $f_2(T)$ как функции переменной T , $T \geq 0$.

Утверждение 1. Для функции $f_1(T) = z_1[z_1z_2(\beta_1 + \beta_2) - z_1f(T) - f'(T)]$, $T \geq 0$, справедливо:

- 1) $f_1(0) = (\beta_1 + \beta_2) \frac{z_1C}{A^2} (z_2A - C) = (\beta_1 + \beta_2) \frac{z_1^2C}{A^2} (q - q_1) > 0$, $q_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)$, $q > q_1$;
- 2) $f_1(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_1(T) = z_1(z_2A - C) = z_1^2(q - q_1) > 0$;
- 3) $f_1'(T) = \frac{z_1^2z_2(\beta_1 + \beta_2)}{F^3(T)} \varphi(q) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} [z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)T}]$, $T \geq 0$;
- 4) точка $T_1(q)$ – точка экстремума (либо точка перегиба) функции $f_1(T)$:

$$T_1(q) = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln \frac{z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + \beta_1 + \beta_2)q}, \quad \frac{z_1 - \beta_1 - \beta_2}{q} > 0; \quad (10)$$

$$5) f_1(T_1(q)) = \frac{z_1(z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2}{4(\beta_1 + \beta_2)q} \left[q - z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) \right] \left[q - \frac{z_1(z_1 - \beta_1 - \beta_2)^2(z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2} \right], \quad \frac{z_1 - \beta_1 - \beta_2}{q} > 0,$$

где $q_{11} = q_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)$, $q_{12} = \frac{z_1(z_1 - \beta_1 - \beta_2)^2(z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2}$ – корни уравнения $f_1(T_1(q)) = 0$. Здесь q ,

$F(T)$ определены в (1); A , C – в (4); $\varphi(q)$ – в (7).

Лемма 3. Функция $f_1(T)$ является положительной функцией ($f_1(T) > 0$) переменной T , $T \geq 0$.

Доказательство. Пусть $q = q_1$, тогда $f_1(T, q = q_1) = z_1^2[z_2(\beta_1 + \beta_2) - z_1z_2 + z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)] = 0$; пусть $q = q_2$, тогда $f_1(T, q = q_2) = z_1^2(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2) > 0$. Точки $q = q_1$, $q = q_2$ из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как в этих точках $\varphi(q) = 0$. Рассмотрим далее возможные случаи.

Случай 1. $\varphi(q) > 0$, $0 < q_1 < q < q_2$. Знак производной $f_1'(T)$ функции $f_1(T)$ определяется знаком функции $y_1(T) = z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является возрастающей функцией переменной T , $T \geq 0$; возрастает от $y_1(T = 0, q) < 0$ до $y_1(\infty) = z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$, т.е. один раз пересекает ось абсцисс в точке $T_1(q)$, определенной выражени-

ем (10). Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется единственный минимум функции $f_1(T)$. Можно показать, что $f_1(T_1(q)) > 0$, тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $0 < q_1 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 2. $\varphi(q) > 0$, $q_1 = 0 < q < q_2$. Имеем $y_1(T) = -(z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$, т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T , $T \geq 0$; убывает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 = 0 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 3. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < 0 < q < q_2$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$; далее ход доказательства аналогичен случаю 2. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < 0 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 4. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q = 0 < q_2$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) = \text{const} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$; далее ход доказательства аналогичен случаю 2. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q = 0 < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 5. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < 0 < q_2$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Рассмотрим $y_1(T=0, q) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)q$, $q_1 \leq q \leq 0$. Тогда: а) $y_1(T=0, q=q_1) = -z_2(\beta_1 + \beta_2)(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$; б) $y_1(T=0, q=0) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$; в) $y_1(T=0, q=q_1^*) = 0$, $q_1^* = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) / (z_1 + \beta_1 + \beta_2)$, $q_1 < q_1^* < 0$. Тогда для $q_1 < q < q_1^* < 0$ имеем: 1) $y_1(T) > 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $y_1(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $y_1(T) < 0$, $T > T_1(q)$, где $T_1(q)$ определяется выражением (10). Следовательно, для $q_1 < q < q_1^* < 0$ имеем: 1) $f_1'(T) > 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $f_1'(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $f_1'(T) < 0$, $T > T_1(q)$. Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется единственный максимум функции $f_1(T)$, в силу этого $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_1^* < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Для $q = q_1^*$ имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) [1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}] < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$, т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T , $T \geq 0$; убывает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q = q_1^* < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Для $q_1^* < q < 0$ экстремальной точки $T = T_1(q)$ не существует ($T \geq 0$), при этом $y_1(T=0, q) < 0$, следовательно, $y_1(T) < 0$, $T \geq 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 2. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1^* < q < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 6. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 = 0$. Имеем $y_1(T) = -z_1 z_2 (z_2 - z_1) - (z_1 + z_2)qe^{-z_2 T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q)$ до $y_1(\infty) = -z_1 z_2 (z_2 - z_1) < 0$. Рассмотрим $y_1(T=0, q) = -[z_1 z_2 (z_2 - z_1) + (z_1 + z_2)q]$, $q_1 \leq q \leq q_2 = 0$. Тогда: а) $y_1(T=0, q=q_1) = -z_2^2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$; б) $y_1(T=0, q=q_2=0) = -z_1 z_2 (z_2 - z_1) < 0$; в) $y_1(T=0, q=q_1^*) = 0$, $q_1^* = -z_1 z_2 (z_2 - z_1) / (z_1 + z_2)$, $q_1 < q_1^* < 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 5. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 = 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 7. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 < 0$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Рассмотрим $y_1(T=0, q) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)q$, $q_1 \leq q \leq q_2 < 0$. Тогда: 1) $y_1(T=0, q=q_1) = -z_2(\beta_1 + \beta_2)(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$; 2) $y_1(T=0, q=q_2) = -z_1(\beta_1 + \beta_2)[z_2 - z_1 + (z_2 - \beta_1 - \beta_2)]$, здесь $z_2 - \beta_1 - \beta_2 < 0$. Далее возможны варианты: а) $y_1(T=0, q=q_2) > 0$; б) $y_1(T=0, q=q_2) = 0$; в) $y_1(T=0, q=q_2) < 0$.

Вариант а: $y_1(T=0, q=q_2) > 0$. В данном варианте функция $y_1(T)$ один раз пересекает ось абсцисс в точке $T_1(q)$, определенной выражением (10). Тогда поведение производной $f_1'(T)$ будет выглядеть следующим образом: 1) $f_1'(T) > 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $f_1'(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $f_1'(T) < 0$, $T > T_1(q)$. Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется единственный максимум функции $f_1(T)$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$, так как $f_1(0) > 0$, $f_1(\infty) > 0$, $f_1(0) > f_1(\infty)$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 < 0$, $y_1(T=0, q=q_2) > 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Вариант б: $y_1(T=0, q=q_2) = 0$. Результат идентичен результату варианта а.

Вариант в: $y_1(T=0, q=q_2) < 0$. Результат идентичен результату в случае 5.

Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Суммируя результаты случаев 1–7, получаем: если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2$, где $q_1 = z_1 - \beta_1 - \beta_2$, $q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Перейдем к рассмотрению случаев, когда $\varphi(q) < 0$. Так как $q > q_1$, область $q \leq q_1$ отсекается.

Случай 8. $\varphi(q) < 0$, $0 < q_1 < q_2 < q$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является возрастающей функцией переменной T , $T \geq 0$; возрастает от $y_1(T=0, q)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$. Рассмотрим $y_1(T=0, q) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2) q$, $0 < q_1 < q_2 \leq q$. Тогда $y_1(T=0, q=q_2) < 0$ и: 1) $y_1(T) < 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $y_1(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $y_1(T) > 0$, $T > T_1(q)$, где $T_1(q)$ определяется выражением (10). Следовательно: 1) $f_1'(T) > 0$; $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $f_1'(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $f_1'(T) < 0$, $T > T_1(q)$. Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется максимум функции $f_1(T)$, при этом $f_1(0) > 0$, $f_1(\infty) > 0$, $f_1(0) < f_1(\infty)$. Отсюда следует, что $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $0 < q_1 < q_2 < q$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 9. $\varphi(q) < 0$, $q_1 = 0 < q_2 < q$. Имеем $y_1(T) = -(z_1 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) > 0$, $T \geq 0$, т.е. $f_1(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T \geq 0$; возрастает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 = 0 < q_2 < q$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 10. $\varphi(q) < 0$, $q_1 < 0 < q_2 < q$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) > 0$, $T \geq 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < 0 < q_2 < q$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 11. $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < 0 < q$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) > 0$, $T \geq 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < 0 < q$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 12. $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q = 0$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) = \text{const} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) > 0$, $T \geq 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q = 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 13. $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q < 0$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Рассмотрим $y_1(T=0, q) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2) q$, $q_2 \leq q \leq 0$. Тогда: 1) $y_1(T=0, q=q_2) = -z_1(\beta_1 + \beta_2)[z_2 - z_1 + (z_2 - \beta_1 - \beta_2)]$; 2) $y_1(T=0, q=0) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$.

Подслучай 13.1. $y_1(T=0, q=q_2) > 0$. Тогда возможны варианты: а) $y_1(T=0, q) > 0$, $q_2 < q < q_1^* < 0$; б) $y_1(T=0, q) = 0$, $q = q_1^* < 0$; в) $y_1(T=0, q) < 0$, $q_1^* < q < 0$, $q_1^* = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) / (z_1 + \beta_1 + \beta_2)$.

Вариант а: $y_1(T=0, q) > 0$, $q_2 < q < q_1^* < 0$. В данном варианте функция $y_1(T)$ один раз пересекает ось абсцисс в точке $T_1(q)$, определенной выражением (10). Тогда поведение производной $f_1'(T)$ будет выглядеть следующим образом: 1) $f_1'(T) < 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $f_1'(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $f_1'(T) > 0$, $T > T_1(q)$. Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется единственный минимум функции $f_1(T)$, $T \geq 0$. Можно показать, что $f_1(T_1(q)) > 0$, $q_2 < q < q_1^* < 0$, тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_2 < q < q_1^* < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Вариант б: $y_1(T=0, q) = 0$, $q = q_1^* < 0$. В данном варианте $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q = q_1^*)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Тогда: 1) $y_1(T) < 0$, $T > 0$; 2) $y_1(T) = 0$, $T = 0$. Таким образом: 1) $f_1'(T) > 0$, $T > 0$; 2) $f_1'(T) = 0$, $T = 0$. Отсюда следует, что $f_1(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T > 0$, и неубывающая функция в точке $T = 0$; $f_1(T)$ возрастает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q = q_1^* < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Вариант в: $y_1(T=0, q) < 0$, $q_1^* < q < 0$. В данном варианте $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q) < 0$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Тогда $y_1(T) < 0$, $T \geq 0$, следовательно, $f_1'(T) > 0$, $T \geq 0$. Отсюда следует, что $f_1(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T \geq 0$; $f_1(T)$ возрастает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1^* < q < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Таким образом, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q < 0$, $y_1(T=0, q = q_2) > 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Подслучай 13.2. $y_1(T=0, q = q_2) = 0$. В данном подслучае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T , $T \geq 0$; убывает от $y_1(T=0, q) < 0$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Тогда $y_1(T) < 0$, $T \geq 0$, и дальнейший ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q < 0$, $y_1(T=0, q = q_2) = 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Подслучай 13.3. $y_1(T=0, q = q_2) < 0$. Дальнейший ход доказательства аналогичен подслучаю 13.2. Итак, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q < 0$, $y_1(T=0, q = q_2) < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Суммируя подслучаи 13.1–13.3, получаем: если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Суммируя случаи 8–13, получаем: если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q$, где $q_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)$, $q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Таким образом, 1) если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$; 2) если $\varphi(q) = 0$, $q = q_2$, то $f_1(T) = \text{const} > 0$, $T \geq 0$; 3) если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$, где $q_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)$, $q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$ – любые вещественные числа. Лемма 3 доказана.

Утверждение 2. Для функции $f_2(T) = z_2[z_1 z_2(\beta_1 + \beta_2) - z_2 f(T) - f'(T)]$, $T \geq 0$, справедливо:

- 1) $f_2(0) = (\beta_1 + \beta_2) \frac{z_2 C}{A^2} (z_1 A - C) = (\beta_1 + \beta_2) \frac{z_2^2 C}{A^2} (q - q_2)$, $q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$; при этом $f_2(0)$ может быть: а) $f_2(0) > 0$; б) $f_2(0) = 0$; в) $f_2(0) < 0$; $q > q_1$, $q_1 < q_2$;
- 2) $f_2(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_2(T) = z_2(z_1 A - C) = z_2^2(q - q_2)$; при этом $f_2(\infty)$ может быть: а) $f_2(\infty) > 0$; б) $f_2(\infty) = 0$; в) $f_2(\infty) < 0$;
- 3) $f_2'(T) = \frac{z_1 z_2^2(\beta_1 + \beta_2)}{F^3(T)} \varphi(q) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} [z_1 z_2(z_2 - \beta_1 - \beta_2) - (z_2 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}]$, $T \geq 0$;
- 4) точка $T_2(q)$ – точка экстремума (либо точка перегиба) функции $f_2(T)$;

$$T_2(q) = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln \frac{z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_2 + \beta_1 + \beta_2)q}, \quad \frac{z_2 - \beta_1 - \beta_2}{q} > 0;$$

$$5) f_2(T_2(q)) = \frac{z_2(z_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}{4(\beta_1 + \beta_2)q} \left[q - z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2) \right] \left[q - \frac{z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{(z_2 + \beta_1 + \beta_2)^2} \right], \quad \frac{z_2 - \beta_1 - \beta_2}{q} > 0,$$

где $q_{22} = q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$, $q_{21} = \frac{z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{(z_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}$ – корни уравнения $f_2(T_2(q)) = 0$. Здесь q ,

$F(T)$ определены в (1); A, C – в (4); $\varphi(q)$ – в (7).

Лемма 4. Функция $f_2(T)$ является отрицательной функцией ($f_2(T) < 0$) переменной T , $T \geq 0$, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2$, и положительной функцией ($f_2(T) > 0$) переменной T , $T \geq 0$, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q$, где $q_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)$, $q_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)$ – любые вещественные числа.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Рассмотрим функцию $\Phi(T) = f_1(T) - f_2(T)$ как функцию переменной T , $T \geq 0$.

Утверждение 3. Для функции $\Phi(T) = f_1(T) - f_2(T)$, $T \geq 0$, справедливо:

- 1) $\Phi(T) = (z_2 - z_1) \left[-z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) + (z_1 + z_2) f(T) + f'(T) \right]$, $T \geq 0$;
- 2) $\Phi(0) = (z_2 - z_1) (\beta_1 + \beta_2) (C/A)^2 > 0$, следовательно, $f_1(0) > f_2(0)$;
- 3) $\Phi(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(T) = (z_2 - z_1) C > 0$, следовательно, $f_1(\infty) > f_2(\infty)$;
- 4) $\Phi(0) - \Phi(\infty) = (z_2 - z_1) \varphi(q) C / A^2$;
- 5) $\Phi'(T) = -(z_2 - z_1) \varphi(q) \frac{z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^3(T)} \left[z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2) q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right]$, $T \geq 0$;
- 6) точка $T^*(q)$ – точка экстремума (либо точка перегиба) функции $\Phi(T)$:

$$T^*(q) = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)q}, \quad \frac{z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2}{q} > 0;$$

$$7) \Phi(T^*(q)) = (z_2 - z_1) \left[C + \varphi(q) \frac{(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{4(\beta_1 + \beta_2)q} \right], \quad \frac{z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2}{q} > 0.$$

Здесь q , $F(T)$ определены в (1); A, C – в (4); $\varphi(q)$ – в (7).

Лемма 5. Функция $\Phi(T)$ является положительной функцией ($\Phi(T) > 0$) переменной T , $T \geq 0$, т.е. $f_1(T) > f_2(T)$, $T \geq 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Леммы 1–5 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ есть положительная функция ($p'_T(\tau_m) > 0$) переменной T , $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$, при любых значениях параметров $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$.

Доказательство. Доказательство осуществляется последовательным применением лемм 1–5:

1. Если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2$, $q \neq q_2$, то $f_1(T) > 0$, $f_2(T) < 0$, $T \geq 0$. Тогда имеем $f_1(T)/f_2(T) < 0$, $T \geq 0$, в том числе и для $0 \leq T \leq \tau_m$. Таким образом, уравнение (9) решения не имеет, т.е. функция $p'_T(\tau_m)$ не достигает нуля для $0 \leq T \leq \tau_m$. Так как $p'_{T=0}(\tau_m) > 0$, $p'_{T=\tau_m}(\tau_m) > 0$, то $p'_T(\tau_m) > 0$, $0 \leq T \leq \tau_m$.

2. Если $\varphi(q) = 0$, $q = q_1$, $q \neq q_2$, то $f_1(T) = 0$, $f_2(T) < 0$, $T \geq 0$. Тогда имеем $f_1(T)/f_2(T) = 0$, $T \geq 0$, в том числе и для $0 \leq T \leq \tau_m$. Таким образом, уравнение (9) решения не имеет. Тогда $p'_T(\tau_m) > 0$, $0 \leq T \leq \tau_m$.

3. Если $\varphi(q) = 0$, $q \neq q_1$, $q = q_2$, то $f_1(T) > 0$, $f_2(T) = 0$, $T \geq 0$. Тогда в уравнении (9) имеет место деление на ноль. Преобразуем (9) к виду

$$e^{(z_2 - z_1)(\tau_m - T)} = f_2(T)/f_1(T), \quad 0 \leq T \leq \tau_m. \quad (11)$$

Тогда имеем $f_2(T)/f_1(T) = 0$, $T \geq 0$, в том числе и для $0 \leq T \leq \tau_m$. Следовательно, уравнение (11) решения не имеет, уравнение (9) также не имеет решения. Тогда $p'_T(\tau_m) > 0$, $0 \leq T \leq \tau_m$.

4. Если $\varphi(q) < 0$, $q > q_2$, то $f_1(T) > 0$, $f_2(T) > 0$, $f_1(T) > f_2(T)$, $T \geq 0$. Тогда имеем $f_1(T)/f_2(T) > 1$, $T \geq 0$, в том числе и для $0 \leq T \leq \tau_m$. Таким образом, уравнение (9) решения не имеет. Тогда $p'_T(\tau_m) > 0$, $0 \leq T \leq \tau_m$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ есть возрастающая функция переменной T , $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$, при любых значениях параметров $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ и достигает своего максимального значения в точке $T = \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказательство вытекает из результата теоремы 1.

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{2, k}$, являются возрастающими функциями переменной T , $0 \leq T \leq \tau^{(j)}$, $0 \leq \tau^{(j)} < \infty$, $j = \overline{2, k}$, при любых значениях параметров $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$.

Следствие 2. Из теоремы 2 вытекает, что функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T} = \tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценивания длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения за потоком событий (в течение временного интервала $(0, t]$) вычисляются величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_{\min} = \min \tau_k$ ($k = \overline{1, n}$), и полагается $\hat{T} = \tau_{\min}$. Подчеркнем, что по определению оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных t будет всегда смещенная ($\tau_{\min} > T$); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No 4. P. 923–930.
3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17(6). P. 66–73.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Cox D. R., Isham V. Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
7. Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. N.Y. : Springer-Verlag, 1981.
8. Last G., Brandt A. Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. N.Y. : Springer-Verlag, 1995.
9. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
10. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
11. Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A. Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science: Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011 (August 23–25, 2011, St. Petersburg, Russia). 2011. P. 428–439.
12. Bouzas P.R., Valderrama M.J., Aguilera A.M., Ruiz-Fuentes N. Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 50(10). P. 2655–2667.
13. Centanni S., Minozzo M. A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes // Journal of the American Statistical Association. 2006. V. 101. P. 1582–1597.

14. Dubois J.-P. Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper) // *Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004*. 2004. P. 116–119.
15. Hossain M.M., Lawson A.B. Approximate methods in Bayesian point process spatial models // *Computational Statistics and Data Analysis*. 2009. V. 53(8). P. 2831–2842.
16. Snyder D.L., Miller M.I. *Random Point Processes in Time and Space*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // *Известия вузов. Физика*. 1993. № 12. С. 67–85.
18. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // *Automation and Remote Control*. 1999. V. 60, No. 1. P. 41–51.
19. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 1. С. 52–66.
20. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий // *Вестник ТюмГУ*. 2008. № 6. С. 107–119.
21. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2(11). С. 44–65.
22. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 1(10). С. 33–47.
23. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Solovov A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // *Automation and Remote Control*. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
24. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2(23). С. 10–21.
25. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2014. № 1(26). С. 13–24.
26. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
27. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // *Оптика атмосферы и океана*. 1997. Т. 10. № 3. С. 273–280.
28. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // *Автоматика и телемеханика*. 2002. № 3. С. 179–184.
29. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // *Радиотехника*. 2004. № 10. С. 8–16.
30. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // *Вестник Томского государственного университета*. 2004. № 284. С. 137–145.
31. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2011. № 4(17). С. 25–40.
32. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2(23). С. 54–63.
33. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий // *Известия вузов. Физика*. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
34. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 1.
35. Баруа-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М. : Наука, 1969.
36. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988.
37. Normey-Rico J.E. *Control of dead-time processes. (Advanced textbooks in control and signal processing)*. London : Springer-Verlag, 2007.
38. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // *Радиотехника*. 1991. № 12. С. 3–7.
39. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // *Радиотехника*. 1996. № 2. С. 8–11.
40. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // *Известия вузов. Физика*. 1999. № 4. С. 8–13.
41. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Известия вузов. Физика*. 2005. № 10. С. 35–49.
42. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 2005. V. 48(10). P. 1039–1054.
43. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 269. С. 95–98.

44. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
45. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
46. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при непродлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
47. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлеваемого мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
48. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
49. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 27–37.
50. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
51. Бахолдина М.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2(31). С. 4–17.
52. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
53. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий и условия его рекуррентности // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 2. С. 137–143.
54. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 фев. 2015 г. / редкол.: Н.Н. Труш [и др.]. Минск : РИВШ, 2015. С. 17–22.
55. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 13–27.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 19 февраля 2016 г.

Bakholdina Maria A., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Russian Federation).

Maximum likelihood estimation of unextendable dead time period duration in the modulated semi-synchronous generalized flow of events.

Keywords: modulated semi-synchronous generalized flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); maximum likelihood estimation; likelihood function; dead time period duration.

DOI: 10.17223/19988605/35/2

In this paper we consider the modulated semi-synchronous generalized flow of events, which is one of the mathematical models for incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states 1, 2 (first, second correspondingly). In the first state $\lambda(t) = \lambda_1$ and in the second state $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). During the time interval of a random duration when the process $\lambda(t)$ is in state λ_i ($\lambda(t) = \lambda_i$), a Poisson flow of events with intensity λ_i , $i = 1, 2$, arrives. The transition of the process $\lambda(t)$ from the first state to the second state is possible at any moment of a Poisson event occurrence in state 1 of the process $\lambda(t)$, herewith the process $\lambda(t)$ can change its state to the second one with probability p ($0 \leq p \leq 1$) or continue to stay in state 1 with complementary probability $1 - p$. The transition of the process $\lambda(t)$ from state 1 to state 2 is also possible at any moment that does not coincide with the moment of a Poisson event occurrence, herewith the duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first state is distributed according to the exponential law with parameter β : $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Then the duration of the process $\lambda(t)$ staying

in the first state is distributed according to the exponential law with distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. The transition of the process $\lambda(t)$ from the second state to the first state at the moment of a Poisson event occurrence in state 2 is impossible and can be done only at a random time moment. In this case the duration of the process $\lambda(t)$ staying in state 2 is distributed according to the exponential law with parameter α : $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. At the moment when the state changes from the second to the first one, an additional event is assumed to be initiated with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$).

The registration of the flow events is considered in conditions of a constant (unextendable) dead time. The dead time period of a constant duration T begins after every registered at the moment t_k , $k \geq 1$, event. During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next interval of a dead time of duration T and so on.

This paper contains analytical results that are devoted to finding the maximum likelihood estimate $\hat{T}$ of the dead time period duration on monitoring the time moments of the events occurrence. We assume that the flow parameters $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ are known and the duration of the dead time period T is not known. According to the maximum-likelihood technique the likelihood function $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ is maximized and the following task of optimization is solved:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0,$$

where $p_T(\tau^{(j)})$ is the one-dimensional probability density function of the interval length between two consecutive flow events. Finally, we obtain that the likelihood function $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ reaches its global maximum at the point $\hat{T} = \tau_{\min}$, where $\tau_{\min} = \min \tau_k$ ($k = \overline{1, n}$); $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$ – the sequence of the values of the intervals lengths between consecutive flow events measured during the interval of observation $(0, t]$, i.e. the solution of optimization problem is the estimate of the dead time period duration: $\hat{T} = \tau_{\min}$.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *Journal of Royal Statistical Society B*. 17. pp. 129-164. DOI: 10.2307/2983950
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1. pp. 55-61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
6. Cox, D.R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
7. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
8. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
10. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62-69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
11. Adamu, A., Gaidamaka, Y. & Samuylov, A. (2011) Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network. *Lecture Notes in Computer Science*. Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011. August 23–25, 2011. St. Petersburg, Russia. pp. 428-439.
12. Bouzas, P.R., Valderrama, M.J., Aguilera, A.M. & Ruiz-Fuentes, N. (2006) Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*. 50(10). pp. 2655-2667. DOI: 10.1016/j.csda.2005.04.015
13. Centanni, S. & Minozzo, M. (2006) A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association*. 101. pp. 1582-1597. DOI: 10.1198/016214506000000276
14. Dubois, J.-P. (2004) Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper). *Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004*. pp. 116-119.
15. Hossain, M.M. & Lawson, A.B. (2009) Approximate methods in Bayesian point process spatial models. *Computational Statistics and Data Analysis*. 53(8). pp. 2831-2842. DOI: 10.1186/1471-2288-11-133
16. Snyder, D.L. & Miller, M.I. (1991) *Random Point Processes in Time and Space*. Heidelberg: Springer-Verlag.
17. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian).
18. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41–51.

19. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66. (In Russian).
20. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2008) Optimal'naya otsenka sostoyaniy asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy [Optimal estimation of the states of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta – The Bulletin of Tyumen State University*. 6. pp. 107-119.
21. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
24. Bakholdina, M.A. (2013) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
25. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13-24. (In Russian).
26. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9(29). pp. 1433-1451. DOI: 10.12988/ams.2015.5135
27. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
28. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control* 63(3). pp. 511-515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
29. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotechnics*. 10. pp. 8-16.
30. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy s initsirovaniem lishnego sobytiya [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145.
31. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2011) Optimal estimation of parameters of an asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 25-40. (In Russian).
32. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
33. Gortsev, A.M. & Solovev, A.A. (2015) Otsenka maksimal'nogo pravdopodobiya dlitel'nosti neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni v potoke fizicheskikh sobytiy [Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 58(11). pp. 141-149.
34. Feller, W. (1950) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [An introduction to probability theory and its applications]. Translated from English. Vol. I. New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc.
35. Bharucha-Reid, A.T. (1960) *Elementy teorii markovskikh protsessov i ikh prilozheniya* [Elements of the theory of Markov processes and their applications]. Translated from English by V. Kalashnikov, Yu. Krutovskiy, M. Epelman. Moscow: Nauka.
36. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
37. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time processes. (Advanced textbooks in control and signal processing)*. London: Springer-Verlag.
38. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 12. pp. 3-7.
39. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Otsenivanie perioda nenablyudaemosti i intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy [The estimation of intensity process and period of unobservability of the Poisson flow of events]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 2. pp. 8-11.
40. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13. DOI: 10.1007/BF02509672
41. Gortsev, A.M., Nissenbaum, O.V. (2005) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 10. pp. 35-49.
42. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 48(10). pp. 1039-1054. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y

43. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
44. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
45. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
46. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
47. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2010) Optimal states estimation of generalized semi-synchronous flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 50-60. (In Russian).
48. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
49. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
50. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
51. Bakhholdina, M.A. (2015) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time and flow recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 4-17. (In Russian).
52. Bakhholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
53. Bakhholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) [Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2014)* [Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2014)]. Proc. of the 13th International Scientific Research and Practice Conference named after A.F. Terpugov. November 20-22, 2014. Tomsk: Tomsk State University. pp. 137-143. (In Russian).
54. Bakhholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density of the interval length between consecutive events of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications]. Proc. of International Scientific Conference dedicated to 80th anniversary of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences G.A. Medvedev. Minsk. February 23-26, 2015. Minsk: RIVSh. pp. 17-22. (In Russian)
55. Bakhholdina, M., Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13-27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3

О.В. Губина, Г.М. Кошкин

ОЦЕНИВАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОЙ РЕНТЫ СТАТУСА СОВМЕСТНОЙ ЖИЗНИ

Находится современная стоимость непрерывной временной пожизненной ренты для статуса совместной жизни. Для стандартных актуарных моделей выводятся аналитические формулы функционалов рент. Строятся параметрические оценки соответствующих рент.

Ключевые слова: коллективное страхование жизни; рента статуса совместной жизни; параметрические оценки.

Рассмотрим случай коллективного страхования жизни, для которого полезной абстракцией является понятие статуса [1–5]. Пусть m индивидуумов с возрастами $(x_1, \dots, x_m)$ желают заключить страховой договор. В соответствии с обозначениями актуарной математики [1–3] пусть случайная величина X – продолжительность жизни, $T(x_k) = X - x_k$ – остаточное время жизни k -го индивидуума. Совокупности m чисел $T(x_1), \dots, T(x_m)$ поставим в соответствие статус U со своей продолжительностью жизни $T(U)$.

Двумя самыми распространенными статусами являются статус совместной жизни и статус выживания последнего. Статус выживания последнего обозначается $U := \overline{x_1 : \dots : x_m}$ и считается разрушенным, если все представители коллектива умерли, т.е.

$$T(U) = \max(T(x_1), \dots, T(x_m)).$$

Статус совместной жизни обозначается $U := x_1 : \dots : x_m$ и считается разрушенным, если наступила смерть хотя бы одного из индивидуумов, т.е.

$$T(U) = \min(T(x_1), \dots, T(x_m)).$$

Именно для этого статуса определим современную стоимость непрерывной временной пожизненной ренты. Понятно, что

$$P\{T(U) > t\} = P\{\min(T(x_1), \dots, T(x_m)) > t\} = P\{T(x_1) > t, \dots, T(x_m) > t\},$$

и в предположении независимости смертей $P\{T(U) > t\} = \prod_{i=1}^m {}_t p_{x_i}$, где ${}_t p_x = P\{X > x + t\}$ – одно из общепринятых обозначений актуарной математики.

По аналогии со случаем индивидуального страхования [6–8] определим ренту через нетто-премию:

$$\bar{a}_{x_1 : \dots : x_m} = \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_{x_1 : \dots : x_m}), \quad (1)$$

где δ – процентная ставка, $\bar{A}_{x_1 : \dots : x_m}$ – нетто-премия статуса совместной жизни, определяемая формулой

$$\bar{A}_{x_1 : \dots : x_m} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{x_1 : \dots : x_m}(t) dt, \quad (2)$$

в которой плотность распределения статуса совместной жизни

$$\begin{aligned} f_{x_1 : \dots : x_m}(t) &= \frac{d}{dt} [-P\{\min(T(x_1), \dots, T(x_m)) > t\}] = \frac{d}{dt} \left[-\frac{S(x_1+t)}{S(x_1)} \dots \frac{S(x_m+t)}{S(x_m)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{S(x_1+t)}{S(x_1)} \dots \frac{d}{dt} \left(-\frac{S(x_i+t)}{S(x_i)} \right) \dots \frac{S(x_m+t)}{S(x_m)} = \sum_{i=1}^m \frac{S(x_1+t)}{S(x_1)} \dots \frac{f(x_i+t)}{S(x_i)} \dots \frac{S(x_m+t)}{S(x_m)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m S_{x_i}(t) \cdots f_{x_i}(t) \cdots S_{x_m}(t).$$

Здесь $S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$ и $f_x(t)$ – соответственно функция выживания и плотность распределения случайной величины $T(x)$.

1. Рента статуса совместной жизни двух индивидуумов для модели де Муавра

Для простоты рассмотрим статус совместной жизни двух индивидуумов $U := x_1 : x_2$, для которого

$$T(U) = \min(T(x_1), T(x_2)), \quad \bar{a}_{x_1:x_2} = \frac{1}{\delta} \left(1 - \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{x_1:x_2}(t) dt \right), \quad f_{x_1:x_2}(t) = f_{x_1}(t) S_{x_2}(t) + f_{x_2}(t) S_{x_1}(t).$$

Отсюда имеем

$$\bar{a}_{x_1:x_2} = \frac{1}{\delta} \left(1 - \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [f_{x_1}(t) S_{x_2}(t) + f_{x_2}(t) S_{x_1}(t)] dt \right). \quad (3)$$

Найдем ренту статуса совместной жизни для модели де Муавра, которая ввиду простоты часто используется в качестве учебного примера. Введем обозначение $I_t(a, b) = \{1, t \in (a, b); 0, t \notin (a, b)\}$. Тогда

$$S(x) = I_x(-\infty, \omega) - x I_x(0, \omega) / \omega, \quad f(x) = -\frac{d}{dx} S(x) = I_x(0, \omega) / \omega, \quad f_x(t) = \frac{I_t(0, \omega - x)}{\omega - x}, \quad \omega - \text{ предельный}$$

возраст, а нетто-премия совместного статуса

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x_1:x_2}(\omega, \delta) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[\frac{I_t(0, \omega - x_1)}{\omega - x_1} \left(I_t(-\infty, \omega - x_2) - \frac{t I_t(0, \omega - x_2)}{\omega - x_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_t(0, \omega - x_2)}{\omega - x_2} \left(I_t(-\infty, \omega - x_1) - \frac{t I_t(0, \omega - x_1)}{\omega - x_1} \right) \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left[\frac{I_t(0, \min(\omega - x_1, \omega - x_2))}{\omega - x_1} - \frac{t I_t(0, \min(\omega - x_1, \omega - x_2))}{(\omega - x_1)(\omega - x_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_t(0, \min(\omega - x_1, \omega - x_2))}{\omega - x_2} - \frac{t I_t(0, \min(\omega - x_1, \omega - x_2))}{(\omega - x_1)(\omega - x_2)} \right] dt = \\ &= \int_0^{\min(\omega - x_1, \omega - x_2)} e^{-\delta t} \frac{1}{\omega - x_1} dt + \int_0^{\min(\omega - x_1, \omega - x_2)} e^{-\delta t} \frac{1}{\omega - x_2} dt - \\ &- 2 \int_0^{\min(\omega - x_1, \omega - x_2)} e^{-\delta t} \frac{t}{(\omega - x_1)(\omega - x_2)} dt = \frac{1 - e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)}}{\delta(\omega - x_1)} + \frac{1 - e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)}}{\delta(\omega - x_2)} + \\ &+ \frac{2 \min(\omega - x_1, \omega - x_2) e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)}}{\delta(\omega - x_1)(\omega - x_2)} - \frac{2(1 - e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)})}{\delta^2(\omega - x_1)(\omega - x_2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рента совместного статуса согласно (3) и (4) равна

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x_1:x_2}(\omega, \delta) &= \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{1 - e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)}}{\delta(\omega - x_1)} - \frac{1 - e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)}}{\delta(\omega - x_2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \min(\omega - x_1, \omega - x_2) e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)}}{\delta(\omega - x_1)(\omega - x_2)} + \frac{2(1 - e^{-\delta \min(\omega - x_1, \omega - x_2)})}{\delta^2(\omega - x_1)(\omega - x_2)} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношение (5) позволяет вычислять ренту совместной жизни для различных комбинаций возрастов индивидуумов. При $\omega=120$ и $\delta=0,1$ (10%) полученные результаты сведем в табл. 1.

Таблица 1

Рента статуса совместной жизни для модели де Муавра

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	8,35	8,27	8,18	8,07	7,92	7,73	7,46	7,07	6,45
20	8,27	8,2	8,11	8	7,86	7,67	7,4	7,02	6,42
30	8,18	8,11	8,02	7,9	7,78	7,59	7,34	6,96	6,37
40	8,07	8	7,9	7,81	7,68	7,5	7,25	6,89	6,31
50	7,92	7,86	7,78	7,68	7,55	7,38	7,14	6,79	6,24
60	7,73	7,67	7,59	7,5	7,38	7,22	7	6,67	6,14
70	7,46	7,4	7,34	7,25	7,14	7	6,79	6,49	6
80	7,07	7,02	6,96	6,89	6,79	6,67	6,49	6,23	5,79
90	6,45	6,42	6,37	6,31	6,24	6,14	6	5,88	5,44

Например, в рамках нашей модели современная стоимость полной непрерывной пожизненной ренты для двух индивидуумов возрастов $x_1 = x_2 = 40$ лет при $\delta=0,1$ и ежемесячной выплате в размере 1000 руб. каждому равна $12\,000 \cdot 7,81 = 93\,720$ руб. Следовательно, каждый из них должен внести 46 860 руб. в страховую компанию.

Сравним коллективную ренту с индивидуальной рентой, которая для модели де Муавра вычисляется по формуле [7]:

$$\bar{a}_x(\omega, \delta) = \frac{\delta(\omega - x) - 1 + e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta^2(\omega - x)}.$$

Таблица 2

Индивидуальная рента для модели де Муавра

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{a}_x(120, 0,1)$	9,09	9	8,89	8,75	8,57	8,34	8,01	7,55	6,83

Согласно табл. 2 современная стоимость полной непрерывной пожизненной индивидуальной ренты для $x = 40$ лет при $\delta = 0,1$ и ежемесячной выплате в размере 1000 руб. равна $12\,000 \cdot 8,66 = 103\,920$ руб.

Таким образом, рента статуса совместной жизни для некоторых категорий индивидуумов может оказаться более выгодной, чем индивидуальная рента.

Если параметр ω модели неизвестен, то для случайной выборки продолжительностей жизней пар индивидуумов $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ объема n функция правдоподобия

$L(X, \omega) = \frac{1}{\omega^{2n}} \prod_{i=1}^n I(0 < X_i < \omega) I(0 < Y_i < \omega)$, и, следовательно, асимптотически несмещенная оценка максимального правдоподобия для ω равна $\hat{\omega} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$. В качестве оценки ренты естественно взять $\bar{a}_{x_1: x_2}(\hat{\omega}, \delta) = \frac{1 - \bar{A}_{x_1: x_2}(\hat{\omega})}{\delta}$.

2. Модели Гомпертца и Мейкхама

Эти модели наиболее адекватно описывают реальное распределение продолжительности жизни человека. Для модели Гомпертца

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)} = \frac{B \exp \left[\alpha(x+t) - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha(x+t)} - 1) \right]}{\exp \left[-\frac{B}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1) \right]} = B \exp \left[\alpha(x+t) - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}) \right],$$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - 1\right)\right]}{\exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right)\right]} = \exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right], F_x(t) = 1 - \exp\left[-\frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right],$$

где $S(x)$ – функция выживания, $f(x)$ – кривая смертей и $\alpha > B > 0$. В этой модели величина $Be^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность.

Нетто-премия статуса $x_1 : x_2$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x_1:x_2}(B, \alpha, \delta) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left(B \exp\left[\alpha(x_1+t) - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1})\right] \times \right. \\ &\times \exp\left[-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2})\right] + B \exp\left[\alpha(x_2+t) - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2})\right] \times \\ &\times \exp\left[-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1})\right] \Big) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} B \left(\exp\left[\alpha(x_1+t) - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1})\right] \times \right. \\ &\times (e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t} - 1) \Big) + \exp\left[\alpha(x_2+t) - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2})\right] (e^{\alpha t} - 1) \Big) dt = \\ &= B(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}) \int_0^\infty \exp\left[(\alpha - \delta)t - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t} - 1)\right] dt \end{aligned}$$

и, соответственно, рента

$$\bar{a}_{x_1:x_2}(B, \alpha, \delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - B(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}) \int_0^\infty \exp\left[(\alpha - \delta)t - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t} - 1)\right] dt \right). \quad (6)$$

Вычисление интеграла в (6) проводится приближенно методом трапеций (с точностью до 4-го знака) при $B = 0,00005$, $e^\alpha = 10^{0,04}$. Именно эти значения используются при распределении продолжительности жизни в иллюстративной таблице [1]. Результаты расчета ренты сведем в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Рента статуса совместной жизни для модели Гомпертца

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	9,88	9,81	9,66	9,35	8,77	7,78	6,33	4,55	2,81
20	9,81	9,75	9,61	9,31	8,74	7,76	6,32	4,55	2,81
30	9,66	9,61	9,48	9,2	8,66	7,71	6,29	4,54	2,81
40	9,35	9,31	9,2	8,97	8,48	7,59	6,23	4,51	2,8
50	8,77	8,74	8,66	8,48	8,08	7,32	6,07	4,43	2,77
60	7,78	7,76	7,71	7,59	7,32	6,74	5,71	4,26	2,71
70	6,33	6,32	6,29	6,23	6,07	5,71	5,01	3,9	2,57
80	4,55	4,55	4,54	4,51	4,33	4,26	3,9	3,22	2,27
90	2,81	2,81	2,81	2,8	2,77	2,71	2,57	2,27	1,77

Итак, современная стоимость ренты в условиях двух предыдущих моделей равна $12\,000 \cdot 8,97 = 107\,640$ руб.

Приведем таблицу для индивидуальной ренты, вычисляемой по формуле [7]:

$$\bar{a}_x(B, \alpha, \delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - B \exp\left[\alpha x + B \frac{e^{\alpha(x+t)}}{\alpha}\right] \int_0^\infty \exp\left[(\alpha - \delta)t - B \frac{e^{\alpha(x+t)}}{\alpha}\right] dt \right).$$

Т а б л и ц а 4

Индивидуальная рента для модели Гомпертца

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{a}_x(0,1)$	9,94	9,86	9,7	9,38	8,79	7,79	6,34	4,56	2,82

Согласно табл. 4 индивидуальная рента равна $12\,000 \cdot 9,38 = 112\,560$ руб.

Если параметры B и α в модели Гомпертца неизвестны, то они находятся из решения системы уравнений, составленной согласно методу моментов:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x] - 1)\right] dx = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i), \\ \int_0^{\infty} 2x \exp\left[-\frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x] - 1)\right] dx = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2). \end{cases}$$

Для модели Мейкхама

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \frac{(A + Be^{\alpha(x+t)}) \exp\left[-A(x+t) - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x+t)} - 1)\right]}{\exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right]} = \\ &= (A + Be^{\alpha(x+t)}) \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x})\right], \\ S_x(t) &= \frac{\exp\left[-A(x+t) - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x+t)} - 1)\right]}{\exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right]} = \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x})\right], \\ F_x(t) &= 1 - \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x})\right] \end{aligned}$$

нетто премия

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x_1:x_2}(A, B, \alpha, \delta) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left((A + Be^{\alpha(x_1+t)}) \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1})\right] \times \right. \\ &\quad \times \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2})\right] + (A + Be^{\alpha(x_2+t)}) \times \\ &\quad \times \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_2+t)} - e^{\alpha x_2})\right] \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_1+t)} - e^{\alpha x_1})\right] \Big) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \exp\left[-(2A + \delta)t - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t} - 1)\right] (2A + Be^{\alpha t}(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})) dt, \end{aligned}$$

рента

$$\bar{a}_{x_1:x_2}(A, B, \alpha, \delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \int_0^{\infty} \exp\left[-(2A + \delta)t - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t} - 1)\right] (2A + Be^{\alpha t}(e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2})) dt \right). \quad (7)$$

Отметим, что для модели Мейкхама параметр A учитывает риски жизни, связанные с несчастными случаями.

Вычисление интеграла в (7) проводится приближенно методом трапеций. При значениях параметров $A = 0,0007$, $B = 0,00005$, $e^{\alpha} = 10^{0,04}$ получаем результаты, представленные в табл. 5.

Приведем таблицу для индивидуальной ренты, вычисляемой по формуле [7]:

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \exp\left[-B \frac{e^{\alpha x}}{a}\right] \int_0^{\infty} \exp\left[-(a - \delta)t - B \frac{e^{\alpha(x+t)}}{a}\right] (A + Be^{\alpha(x+t)}) dt \right).$$

Согласно табл. 5, 6 современные стоимости рент в условиях предыдущих моделей соответственно равны $12\,000 \cdot 8,87 = 106\,440$ руб. и $12\,000 \cdot 9,32 = 111\,840$ руб.

При сравнении табл. 4 и 6 видно, что модель Мейкхама по сравнению с моделью Гомпертца более адекватно характеризует процесс смертности индивидуумов: для детских возрастов преобладающую роль в интенсивности смертности играют несчастные случаи, а с увеличением возраста их роль ослабевает.

Таблица 5

Рента статуса совместной жизни для модели Мейкхама

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	9,75	9,68	9,54	9,24	8,67	7,71	6,28	4,53	2,81
20	9,68	9,62	9,48	9,2	8,64	7,69	6,27	4,52	2,8
30	9,54	9,48	9,36	9,09	8,57	7,64	6,25	4,51	2,8
40	9,24	9,2	9,09	8,87	8,39	7,52	6,18	4,48	2,79
50	8,17	8,64	8,57	8,39	8	7,25	6,02	4,41	2,76
60	7,71	7,69	7,64	7,52	7,25	6,68	5,67	4,24	2,7
70	6,28	6,27	6,25	6,18	6,02	5,67	4,98	3,88	2,56
80	4,53	4,52	4,51	4,48	4,41	4,24	3,88	3,21	2,27
90	2,81	2,8	2,8	2,76	2,76	2,7	2,54	2,27	1,76

Таблица 6

Индивидуальная рента для модели Мейкхама

Возраст, x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{a}_x(0,1)$	9,87	9,79	9,64	9,32	8,74	7,76	6,31	4,54	2,81

Если параметры A , B и α в модели Мейкхама неизвестны, то они находятся из решения системы уравнений, составленной согласно методу моментов:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x] - 1)\right] dx = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i), \\ \int_0^{\infty} 2x \exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x] - 1)\right] dx = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2), \\ \int_0^{\infty} 3x^2 \exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}(\exp[\alpha x] - 1)\right] dx = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (X_i^3 + Y_i^3). \end{cases}$$

Заключение

В результате исследований выяснено, что величины рента в коллективном страховании сложнее зависят от распределений продолжительностей жизни индивидуумов коллектива. Следует отметить симметричность таблиц относительно главной диагонали $(\bar{a}_{x_1:x_2} = \bar{a}_{x_2:x_1})$, причем $\bar{a}_{x_1:x_2} > \bar{a}_{x_1:x_1}$, если $x_1 > x_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, Itasca, III, 1986. 624 p.
2. Гербер Х. Математика страхования жизни. М.: Мир, 1995. 156 с.
3. Кошкин Г.М. Введение в математику страхования жизни. Томск: ТГУ, 2004. 112 с.
4. Кошкин Г.М., Лопухин Я.Н. Оценивание нетто-премий в моделях долгосрочного страхования жизни // Обзор прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, вып. 2. С. 315–330.
5. Koshkin G., Lopukhin Y. Nonparametric Estimation of Net Premium Functionals for Different Statuses in Collective Life Insurance // Communications in Computer and Information Science. 2014. Vol. 487. P. 223–233.
6. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Анкил, 2002. 262 с.
7. Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание современной стоимости непрерывной n -летней временной пожизненной ренты // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 235–241.
8. Koshkin G.M., Gubina O.V. Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Different Actuarial Models // Proceedings of The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management / Ilia Frenkel and Anatoly Lisnianski (Eds.). SMRLO 2016, February 15–18, 2016, Beer Sheva, Israel. Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 2016. P. 506–510.

Губина Оксана Викторовна. E-mail: gov7@mail.ru

Кошкин Геннадий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: kgm@mail.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 25 февраля 2016 г.

Consider the case of collective life insurance for which a useful abstraction is a status. Let m individuals of ages $x_1, \dots, x_m$ conclude an insurance contract. In accordance with the notation of actuarial mathematics, let the random variable X be lifetime, $T(x_k) = X - x_k$ be residual lifetime of the k -th individual. We put in line to the set of m numbers $T(x_1), \dots, T(x_m)$ the status U , which has its own lifetime $T(U)$.

The joint-life status is denoted $U := x_1 : \dots : x_m$ and is considered to be destroyed if at least one of the individuals has died, i.e.

$$T(U) = \min(T(x_1), \dots, T(x_m)).$$

It is clear that

$$P\{T(U) > t\} = P\{\min(T(x_1), \dots, T(x_m)) > t\} = P\{T(x_1) > t, \dots, T(x_m) > t\} = S_{x_1}(t) \cdots S_{x_m}(t),$$

where $S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$ is the survival function of the random variable $T(x)$. It is for this status, we define the present value of continuous time life annuity.

By analogy with the case of individual insurance, the annuity is expressed in terms of the net premium:

$$\bar{a}_{x_1 : \dots : x_m} = \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_{x_1 : \dots : x_m}),$$

where δ is the rate of interest, the net premium $\bar{A}_{x_1 : \dots : x_m}$ is expressed by the formula

$$\bar{A}_{x_1 : \dots : x_m} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{x_1 : \dots : x_m}(t) dt,$$

in which the distribution density of the joint-life status is defined as

$$f_{x_1 : \dots : x_m}(t) = \sum_{i=1}^m S_{x_1}(t) \cdots f_{x_i}(t) \cdots S_{x_m}(t).$$

Here $f_x(t)$ is the distribution density of the random variable $T(x)$.

The paper deals with the problem of finding numerical values for functionals of annuities for the joint-life status of two persons for a number of parameterized distributions of actuarial mathematics. Also, the corresponding estimates of annuities for the joint-life status of two persons are found.

REFERENCES

1. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1986) *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Itasca, III.
2. Gerber, H.U. (1995) *Matematika strakhovaniya zhizni* [Life Insurance Mathematics]. Translated from English by V. Mishkin, P. Biryukov. Moscow: Mir.
3. Koshkin, G.M. (2004) *Vvedenie v matematiku strakhovaniya zhizni* [Introduction to life insurance mathematics]. Tomsk: Tomsk State University.
4. Koshkin, G.M. & Lopukhin, Ya.N. (2003) Otsenivanie netto-premiy v modelyakh dolgosrochnogo strakhovaniya zhizni [Estimation of Net Premium in the Models of Long-term Life Insurance]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 10(2). pp. 315-330.
5. Koshkin, G. & Lopukhin, Y. (2014) Nonparametric Estimation of Net Premium Functionals for Different Statuses in Collective Life Insurance. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 223-233. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_27
6. Falin, G.I. (2002) *Matematicheskie osnovy teorii strakhovaniya zhizni i pensionnykh skhem* [Mathematical Foundations of the Theory of Life Insurance and Pension Schemes]. Moscow: Ankil.
7. Gubina, O.V. & Koshkin, G.M. (2015) Otsenivanie sovremennoy stoimosti nepreryvnoy n-letney vremennoy pozhiznennoy renty [Estimation of the Actuarial Present Value of the Continuous n-year Time Life Annuity]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11/2). pp. 235-241.
8. Koshkin, G.M. & Gubina, O.V. (2016) Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Different Actuarial Models. *Proc. of The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management*. SMRLO 2016, February 15–18, 2016, Beer Sheva, Israel. Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 2016. pp. 506-510.

К.И. Лившиц, Л.Ю. Сухотина

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТРАХОВЫХ ПРЕМИЙ И СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ

Находятся вероятности разорения страховой компании и среднее условное время до разорения для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями, модели Крамера–Лундберга с ММР-потоком страховых выплат при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат.

Ключевые слова: вероятность разорения; среднее условное время до разорения; модель Крамера–Лундберга; модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями; гиперэкспоненциальное распределение.

Стандартной задачей актуарной математики является задача вычисления вероятности разорения страховой компании, т.е. вероятности ситуации, когда страховая компания не может исполнять свои финансовые обязательства ввиду отсутствия денежных средств при различных предположениях о потоках, поступающих в компанию страховых премий и страховых выплат, производимых страховой компанией [1–3]. Сложность состоит, как правило, в нахождении явных решений соответствующих систем интегро-дифференциальных уравнений. Поэтому представляет интерес определение явного вида для вероятности разорения для какого-то достаточно широкого класса распределений страховых премий и страховых выплат. В настоящей работе находятся вероятности разорения и среднее условное время до разорения для некоторых стандартных моделей деятельности страховой компании в предположении, что страховые премии и страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальное распределение. Аналогичная идея используется, например, в задачах управления запасами, где считается, что объемы потребляемых ресурсов имеют гиперэкспоненциальное распределение [4].

1. Модель Крамера–Лундберга

Простейшей моделью деятельности страховой компании является модель Крамера–Лундберга, которая строится при следующих предположениях [1–3]: процесс поступления страховых премий в компанию считается детерминированным, за время t приращение капитала компании равно Ct , где C – количество средств, поступивших в компанию за единицу времени; страховые выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и средним значением a ; моменты наступления страховых выплат образуют пуассоновский поток интенсивности λ . Поток страховых выплат не зависит от поступления страховых премий. Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$. Определим $T = \min\{t : S(t) < 0\}$ и $T = \infty$, если $S(t) > 0 \forall t$. Случайная величина T – момент разорения. Тогда вероятность предельного разорения страховой компании при условии, что ее капитал в начальный момент равен S :

$$P(S) = \Pr\{T < \infty\}. \quad (1)$$

Как показано, например, в [1–3], вероятность разорения $P(S)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$C\dot{P}(S) = \lambda P(S) - \lambda \int_0^S P(S-x)\Psi(x)dx - \lambda \int_S^\infty \Psi(x)dx \quad (2)$$

с очевидным граничным условием $P(+\infty) = 0$. Для существования решения необходимо выполнение условия

$$C = (1 + \theta)\lambda a, \quad (3)$$

где $\theta > 0$ – нагрузка страховой премии. В принципе, для нахождения решения уравнения (2) можно применить преобразование Лапласа. Сложность состоит в нахождении обратного преобразования.

Будем теперь предполагать, что страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальное распределение n -го порядка

$$\Psi(S) = \sum_{k=1}^n A_k \alpha_k e^{-\alpha_k S} \quad (4)$$

с параметрами $\alpha_k > 0, A_k > 0$, причем

$$\sum_{k=1}^n A_k = 1. \quad (5)$$

Среднее значение величины страховой выплаты в этом случае будет равно

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\alpha_k}. \quad (6)$$

Распределение (4) в нашей задаче можно интерпретировать следующим образом. Имеется всего n различных типов страхования. При наступлении страхового случая страховая выплата с вероятностью A_k соответствует k -му типу страхового договора и имеет плотность распределения $\alpha_k e^{-\alpha_k}$. В силу линейной независимости функций $e^{-\alpha_k}$ распределение (4) можно использовать при подходящем выборе параметров для аппроксимации произвольного монотонного распределения $\Psi(S)$. При $n = 2$ уравнение (2) с плотностью распределения (4) решалось в работе [1].

Учитывая граничное условие $P(+\infty) = 0$, уравнение (2) можно переписать в виде

$$CP(S) = \lambda \int_0^S P(S-x) \int_x^\infty \Psi(y) dy dx + \lambda \int_S^\infty \int_x^\infty \Psi(y) dy dx. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$P(S) = \sum_{j=1}^n P_j e^{-\gamma_j S}, \quad (8)$$

где параметры $\gamma_j > 0, P_j$ подлежат определению. Подставляя выражение (8) в уравнение (7) и приравняв коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{-\alpha_k S}$ и $e^{-\gamma_j S}$, получим, что выражение (8) есть решение уравнения (7), если выполняются следующие условия:

$$C - \lambda \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\alpha_k - \gamma_j} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_k - \gamma_j} P_j = \frac{1}{\alpha_k}. \quad (10)$$

Таким образом, величины γ_j должны быть положительными корнями алгебраического уравнения

$$f(z) = C - \lambda \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\alpha_k - z} = 0. \quad (11)$$

Покажем, что уравнение (11) имеет ровно n различных положительных корней. Будем считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. Имеем, во-первых, $f(0) = C - \lambda a = \theta \lambda a > 0$. Во-вторых, $f'(0) = -\lambda \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\alpha_k^2} < 0$. Таким образом, в окрестности точки $z = 0$ функция $f(z)$ монотонно убывает. При $z \rightarrow \alpha_1 - 0$ функция $f(z) \rightarrow -\infty$. Следовательно, на отрезке $(0, \alpha_1)$ уравнение (11) имеет корень γ_1 . Далее, при $z \rightarrow \alpha_1 + 0$ $f(z) \rightarrow +\infty$, при $z \rightarrow \alpha_2 - 0$ $f(z) \rightarrow -\infty$. На отрезке (α_1, α_2) функция $f(z)$ непрерывна. Следовательно, на отрезке (α_1, α_2) уравнение (11) имеет корень γ_2 . Перебирая остальные отрезки (α_i, α_{i+1}) , убеждаемся, что уравнение (11) имеет ровно n различных положительных корней.

Коэффициенты P_j должны являться решением системы уравнений (11). Определитель матрицы системы $\left[(\alpha_k - \gamma_j)^{-1}\right]$ есть определитель Коши [5], равный

$$\Delta = \det \left[\frac{1}{\alpha_k - \gamma_j} \right] = \frac{\prod_{1 \leq k < j \leq n} (\alpha_k - \alpha_j)(\gamma_j - \gamma_k)}{\prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha_k - \gamma_j)}. \quad (12)$$

Поэтому система уравнений (10) имеет, причем единственное, решение. Покажем, что решение системы (10) положительно. Пусть система решается по формулам Крамера [5]. Тогда

$$P_m = \frac{\Delta_m}{\Delta}, \quad m = \overline{1, n},$$

где определитель Δ_m получается из определителя Δ заменой его m -го столбца на столбец из свободных членов уравнений (10). Рассмотрим вначале определитель Δ (12). Так как при $k < j$ $\alpha_k - \alpha_j < 0$, $\gamma_j - \gamma_k > 0$, то в числителе выражения (12) стоит произведение из $\frac{n(n-1)}{2}$ отрицательных сомножителей. Так как $\gamma_j < \alpha_k$ при $j \leq k$, то в знаменателе выражения (12) стоит произведение из $\frac{n(n+1)}{2}$ отрицательных сомножителей. Поэтому $\Delta > 0$. Определитель Δ_m вычисляется по формуле (12) при $\gamma_m = 0$. Поэтому как в числителе, так и в знаменателе выражения (12) добавится $m-1$ отрицательный сомножитель и, следовательно, $\Delta_m > 0$.

Второй характеристикой, позволяющей анализировать перспективы страховой компании, является среднее время до разорения $t(S)$ при условии, что разорение произошло и начальный капитал компании равен S . Как показано в [3], среднее условное время $t(S)$ определяется соотношением

$$t(S) = \frac{T(S)}{P(S)}, \quad (13)$$

где функция $T(S)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$CT'(S) = \lambda T(S) - \lambda \int_0^S T(S-x) \Psi(x) dx - P(S) \quad (14)$$

с граничным условием $T(+\infty) = 0$. Учитывая граничное условие, уравнение (14) можно переписать в виде

$$CT(S) = \lambda \int_0^S T(S-x) \int_x^\infty \Psi(y) dy dx + \int_S^\infty P(y) dy. \quad (15)$$

В нашем случае функции $\Psi(S)$ и $P(S)$ определяются соотношениями (4) и (8) соответственно, поэтому решение уравнения (15) будем искать в виде

$$T(S) = \sum_{j=1}^n (U_j + V_j S) e^{-\gamma_j S}. \quad (16)$$

Подставляя выражения (4), (8) и (16) в уравнение (15) и приравнявая коэффициенты при $e^{-\alpha_k S}$, $e^{-\gamma_j S}$ и $S e^{-\gamma_j S}$ и учитывая (9), получим, что коэффициенты U_j и V_j должны удовлетворять соотношениям

$$V_j = \frac{P_j}{\lambda \gamma_j \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(\alpha_k - \gamma_j)^2}}, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_k - \gamma_j} U_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\alpha_k - \gamma_j)^2} V_j. \quad (18)$$

2. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями

Второй достаточно хорошо известной моделью страхования является модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями [6, 7]. В этом случае предполагается, что поток страховых премий, поступающих в компанию, является пуассоновским с интенсивностью λ , премии – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Phi(x)$ и средним значением a . Страховые выплаты также образуют пуассоновский поток с интенсивностью μ , выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и средним значением b . Поток страховых выплат не зависит от потока страховых премий. Как показано в [6, 7], в этом случае вероятность разорения (1) определяется уравнением

$$(\lambda + \mu)P(S) = \lambda \int_0^\infty P(S+x)\Phi(x)dx + \mu \int_0^S P(S-x)\Psi(x)dx + \mu \int_S^\infty \Psi(x)dx \quad (19)$$

с граничным условием $P(+\infty) = 0$. Для существования решения уравнения необходимо выполнение условия

$$\lambda a = (1 + \theta)\mu b, \quad (20)$$

где $\theta > 0$ – нагрузка страховой премии.

Получим решение уравнения (19) в предположении, что распределения страховых премий и выплат являются гиперэкспоненциальными:

$$\Phi(S) = \sum_{k=1}^m A_k \alpha_k e^{-\alpha_k S}, \quad \Psi(S) = \sum_{k=1}^n B_k \beta_k e^{-\beta_k S}. \quad (21)$$

Решение уравнения (19) будем искать в виде

$$P(S) = \sum_{j=1}^n P_j e^{-\gamma_j S}. \quad (22)$$

Подставляя выражения (22) и (21) в уравнение (19) и приравнявая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{-\beta_k S}$ и $e^{-\gamma_j S}$, получим, что выражение (22) есть решение уравнения (19), если выполняются условия

$$\lambda + \mu - \lambda \sum_{k=1}^m \frac{A_k \alpha_k}{\alpha_k + \gamma_j} - \mu \sum_{k=1}^n \frac{B_k \beta_k}{\beta_k - \gamma_j} = 0, \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_k - \gamma_j} P_j = \frac{1}{\beta_k}. \quad (24)$$

Таким образом, величины γ_j должны быть положительными корнями алгебраического уравнения

$$f(z) = \lambda \sum_{k=1}^m \frac{A_k \alpha_k}{\alpha_k + z} + \mu \sum_{k=1}^n \frac{B_k \beta_k}{\beta_k - z} - \lambda - \mu = 0. \quad (25)$$

Покажем, что уравнение (25) имеет ровно n различных положительных и $m-1$ различных отрицательных корней. Имеем, во-первых, что $f(0) = 0$, во-вторых, $f'(0) = -\lambda a + \mu b < 0$. Значит, в окрестности точки $z = 0$ $f(z) = -(\lambda a - \mu b)z + o(z)$. Функция $f(z)$ непрерывна на $[0, \beta_1)$ и при $z \rightarrow \beta_1 - 0$ $f(z) \rightarrow +\infty$. Поэтому на отрезке $[0, \beta_1)$ уравнение (25) имеет корень γ_1 . Далее, функция $f(z)$ непрерывна на (β_1, β_2) . При $z \rightarrow \beta_1 + 0$ $f(z) \rightarrow -\infty$, при $z \rightarrow \beta_2 - 0$ $f(z) \rightarrow +\infty$. Поэтому на отрезке (β_1, β_2) уравнение (25) имеет корень γ_2 . Аналогично устанавливается наличие остальных $n-2$ положительных и $m-1$ различных отрицательных корней уравнения. Так как уравнение (24) по форме совпадает с уравнением (10), то решение уравнения (24) положительно.

Среднее условное время до разорения $t(S)$ для данной модели определится соотношением (13), где теперь функция $T(S)$ является решением уравнения [6]:

$$(\lambda + \mu)T(S) = \lambda \int_S^\infty T(x)\Phi(x-S)dx + \mu \int_0^S T(x)\Psi(S-x)dx + P(S) \quad (26)$$

с граничным условием $T(+\infty) = 0$. Решение уравнения (26) будем опять искать в виде

$$T(S) = \sum_{j=1}^n (U_j + V_j S) e^{-\gamma_j S}, \quad (27)$$

где показатели степеней γ_j удовлетворяют соотношениям (23). Подставляя соотношения (27), (21) и (22) в уравнение (26), получим систему соотношений на коэффициенты U_j и V_j

$$V_j = \frac{P_j}{\lambda \sum_{k=1}^m \frac{A_k \alpha_k}{(\alpha_k + \gamma_j)^2} + \mu \sum_{k=1}^n \frac{B_k \beta_k}{(\beta_k - \gamma_j)^2}}, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_k - \gamma_j} U_j = \sum_{j=1}^n \frac{V_j}{(\beta_k - \gamma_j)^2}. \quad (29)$$

Аналогично вышеизложенному могут быть найдены вероятность разорения и среднее условное время до разорения для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями и постоянными не страховыми расходами [8].

3. Модель Крамера–Лундберга с ММР потоком страховых выплат

Одним из возможных обобщений модели Крамера–Лундберга является допущение того, что интенсивность потока страховых выплат или скорость поступления страховых премий могут скачкообразно изменяться в случайные моменты времени. Такие модели были рассмотрены, например, в работах [9–12]. В настоящей работе будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и двумя состояниями λ_1 и λ_2 . Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик

$$B = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$. Тогда финальные вероятности состояний λ_1 и λ_2 равны соответственно

$$\pi_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \quad (31)$$

и средняя интенсивность потока страховых выплат в стационарном режиме

$$\lambda_0 = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2. \quad (32)$$

Страховые выплаты – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и средним значением a . Наконец, будем считать, что страховые премии поступают непрерывно во времени с постоянной скоростью C . Для нормального функционирования страховой компании необходимо выполнение условия [11]:

$$C = (1 + \theta) \lambda_0 a, \quad (33)$$

где $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разоряется.

Обозначим, как и ранее, через T момент разорения страховой компании, и пусть

$$P_i(S) = \Pr\{T < \infty | S(0) = S, \lambda(0) = \lambda_i\}, \quad i = 1, 2 \quad (34)$$

есть вероятности разорения страховой компании при условии, что в начальный момент ее капитал равен S и значение интенсивности потока выплат равно λ_i . Как показано в [11], вероятности $P_i(S)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} C \dot{P}_1(S) &= (\lambda_1 + \beta_1) P_1(S) - \beta_1 P_2(S) - \lambda_1 \int_0^S P_1(x) \Psi(S-x) dx - \lambda_1 \int_S^\infty \Psi(x) dx, \\ C \dot{P}_2(S) &= -\beta_2 P_1(S) + (\lambda_2 + \beta_2) P_2(S) - \lambda_2 \int_0^S P_2(x) \Psi(S-x) dx - \lambda_2 \int_S^\infty \Psi(x) dx \end{aligned} \quad (35)$$

с граничными условиями $P_i(+\infty) = 0$.

Пусть страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальное распределение n -го порядка (8). Решения системы уравнений (35) будем искать в виде

$$P_j(S) = \sum_{k=1}^{2n} P_{kj} e^{-\gamma_k S}. \quad (36)$$

Подставляя соотношения (36) и (8) в уравнения (35) и приравнявая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{-\alpha_k S}$ и $e^{-\gamma_k S}$, получим систему соотношений

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k1} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (37)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k2} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (38)$$

$$(\lambda_2 + \beta_2 + C\gamma_k - \lambda_2 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k}) P_{k2} - \beta_2 P_{k1} = 0, \quad k = \overline{1, 2n}, \quad (39)$$

$$(\lambda_1 + \beta_1 + C\gamma_k - \lambda_1 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k}) P_{k1} - \beta_1 P_{k2} = 0, \quad k = \overline{1, 2n}. \quad (40)$$

При фиксированных γ_k относительно коэффициентов P_{k1} и P_{k2} имеем систему из $6n$ уравнений с $4n$ неизвестными. Для совместности системы необходимо, чтобы ранг получившейся системы уравнений был равен $4n$ [5]. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты соответствующих уравнений систем (39) и (40) были пропорциональны, т.е. чтобы выполнялись условия

$$(\lambda_1 + \beta_1 + C\gamma_k - \lambda_1 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k})(\lambda_2 + \beta_2 + C\gamma_k - \lambda_2 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k}) - \beta_1 \beta_2 = 0, \quad k = \overline{1, 2n}. \quad (41)$$

Таким образом, величины γ_k должны являться корнями уравнения

$$f(z) = (\lambda_1 + \beta_1 + Cz - \lambda_1 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - z})(\lambda_2 + \beta_2 + Cz - \lambda_2 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - z}) - \beta_1 \beta_2 = 0. \quad (42)$$

Покажем, что уравнение (42) имеет $2n$ различных положительных корней.

Корни уравнения (42) совпадают с корнями многочлена степени $2n+2$. И значит, уравнение (42) имеет всего $2n+2$ корня. При $z=0$ $f(z)=0$. Следовательно, $z=0$ – корень уравнения (42). Далее, $f'(0) = (\beta_1 + \beta_2)(C - \lambda_0 a) > 0$. Поэтому при малых $z < 0$ $f(z) < 0$. С другой стороны, при $|z| \gg 1$ $f(z) \sim z^2$ и, следовательно, $f(z) > 0$. Поэтому уравнение (42) имеет хотя бы один отрицательный корень.

Перепишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^2 (C - \lambda_1 \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - z})(C - \lambda_2 \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - z}) + z(\beta_1 + \beta_2)(C - \lambda_0) \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - z} \quad (43)$$

и обозначим

$$f_0(z) = C - \lambda_0 \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - z}. \quad (44)$$

Как было показано ранее, уравнение $f_0(z)=0$ имеет n различных корней $k_1, k_2, \dots, k_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < k_1 < \alpha_1 < k_2 < \alpha_2 < \dots < k_n < \alpha_n.$$

Воспользуемся этим. Имеем теперь, во-первых, $f(0)=0$, $f'(0) > 0$; во-вторых,

$$f(k_1) = k_1^2 (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) \left(\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - k_1} \right)^2 < 0,$$

так как или $\lambda_1 - \lambda_0 < 0$, или $\lambda_2 - \lambda_0 < 0$. Поэтому уравнение $f(z) = 0$ имеет корень $\gamma_1 \in (0, k_1)$. Далее, при $z \rightarrow \alpha_1$ $f(z) \sim (\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - z})^2$ и, следовательно, $f(z) \rightarrow +\infty$. Таким образом, уравнение $f(z) = 0$ имеет корень $\gamma_2 \in (k_1, \alpha_1)$. Аналогично

$$f(k_2) = k_2^2 (\lambda_1 - \lambda_0) (\lambda_2 - \lambda_0) (\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\alpha_j - k_2})^2 < 0,$$

откуда вытекает существование корня уравнения $\gamma_3 \in (\alpha_1, k_2)$. Продолжая этот процесс, убеждаемся в существовании $2n$ различных положительных корней уравнения (43), удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \gamma_1 < k_1 < \gamma_2 < \alpha_1 < \gamma_3 < k_2 < \gamma_4 < \dots < k_n < \gamma_{2n} < \alpha_n.$$

Определив величины γ_j , коэффициенты P_{k1} и P_{k2} получим теперь как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k1} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (45)$$

$$\frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} \gamma_k (C - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\alpha_i - \gamma_k}) P_{k1} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (46)$$

$$P_{k2} = (1 + \frac{\gamma_k}{\beta_1} (C - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\alpha_i - \gamma_k})) P_{k1}. \quad (47)$$

Пример. В качестве примера рассмотрим случай гиперэкспоненциального распределения при $n = 2$. Параметры распределения: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, A_1 = 0,5, A_2 = 0,5$; параметры потока страховых выплат: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \beta_1 = 3, \beta_2 = 5$; нагрузка страховой премии $\theta = 0,2$. Корни уравнения (42) в этом случае равны: $\gamma_1 = 0,19, \gamma_2 = 0,866, \gamma_3 = 1,683, \gamma_4 = 1,839$. Графики вероятностей разорения $P_1(S)$ и $P_2(S)$ приведены на рис. 1. Как и следовало ожидать, вероятность разорения для состояния с большей интенсивностью выплат больше, чем вероятность разорения для состояния с меньшей интенсивностью выплат.

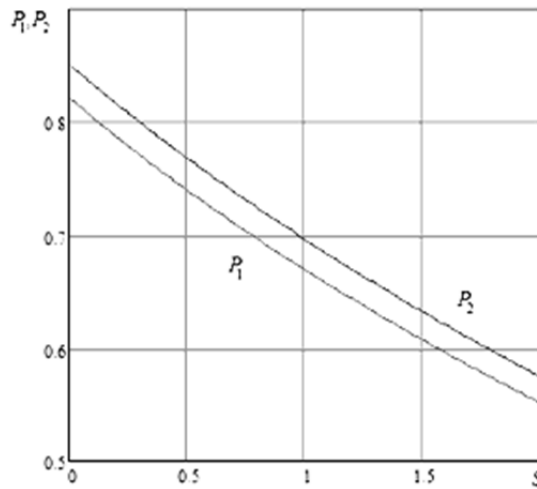


Рис. 1. Зависимость вероятностей разорения $P_i(S)$ от начального капитала

Заключение

В работе получены расчетные формулы, позволяющие вычислить вероятность разорения и среднее условное время до разорения страховой компании при гиперэкспоненциальных распределениях страховых выплат и страховых премий для модели Крамера–Лундберга, модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями, модели Крамера–Лундберга с ММР потоком страховых выплат. В принци-

пе, тот же подход может быть использован для вычисления вероятностей разорения и для более сложных моделей, например, для случая, когда и моменты поступления страховых премий образуют ММР поток [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Panjer H.Y., Wilmot G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. P. 442.
2. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Д. Актуарная математика. М.: Янус К, 2001. 656 с.
3. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
4. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 43–50.
5. Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Томск: Изд-во НТЛ, 2011. Ч. I. 252 с.
6. Livshits K.I. Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 394–399.
7. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применение. 2002. Т. 47, вып. 3. С. 549–553.
8. Livshits K.I., Yakimovich K.Yu. Cramer-Lundberg Model with Stochastic Premiums and Continuous Non-insurance Costs // Communications in Computer and Information Science. Springer, 2014. V. 487. P. 251–260.
9. Jasiniewicz H. Probability of Ruin with Variable Premium Rate in a Markovian Environment // Insurance: Mathematics and Economics. 2001. V. 29. P. 291–296.
10. Lu Y., Li S. On the Probability of Ruin in a Markov-modulated Risk Model // Insurance: Mathematics and Economics. 2005. V. 37(3). P. 522–532.
11. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
12. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 15–23.
13. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 64–73.

Лившиц Климентий Исаакович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: kim47@mail.ru

Томский государственный университет

Сухотина Лариса Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: suhotina@mail.fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 2 февраля 2016 г.

Livshits Klimenty I., Suhotina Larisa Yu. (Tomsk State University, Russian Federation).

Ruin probability of an insurance company with hyperexponential distribution of insurance premiums and insurance payments for different insurance models.

Keywords: probability of ruin; mean conditional time to ruin; Cramer-Lundberg model; Cramer-Lundberg model with stochastic premiums; hyperexponential distribution.

DOI: 10.17223/19988605/35/4

In this paper the calculated formulas which allow to calculate the ruin probability of an insurance company for some insurance models under assumption that insurance premiums and insurance payments have the hyperexponential distribution are obtained.

For Cramer–Lundberg model if the insurance payments distribution is $\Psi(S) = \sum_{k=1}^n A_k \alpha_k e^{-\alpha_k S}$, rate cash flows is C and the insurance payments flow intensity is λ , then the probability of ruin is defined as

$$P(S) = \sum_{j=1}^n P_j e^{-\gamma_j S},$$

where γ_j are the simple positive roots of equation

$$f(z) = C - \lambda \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\alpha_k - z} = 0,$$

and the coefficients P_j are the solution of equations $\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_k - \gamma_j} P_j = \frac{1}{\alpha_k}$.

For Cramer–Lundberg model with stochastic premiums if the insurance premiums and insurance payments distributions are $\Phi(S) = \sum_{k=1}^m A_k \alpha_k e^{-\alpha_k S}$, $\Psi(S) = \sum_{k=1}^n B_k \beta_k e^{-\beta_k S}$, respectively, the insurance premiums and insurance payments flows intensities are λ and μ , then the probability of ruin is determined by the same relation, but γ_j are the simple positive roots of equation

$$f(z) = \lambda \sum_{k=1}^m \frac{A_k \alpha_k}{\alpha_k + z} + \mu \sum_{k=1}^n \frac{B_k \beta_k}{\beta_k - z} - \lambda - \mu = 0,$$

and the coefficients P_j are the solution of equations $\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_k - \gamma_j} P_j = \frac{1}{\beta_k}$.

For Cramer–Lundberg model with MMP payments flow with two states λ_1 and λ_2 and the final probabilities of states $\beta_2 / (\beta_1 + \beta_2)$, $\beta_1 / (\beta_1 + \beta_2)$ the probabilities of ruin

$$P_j(S) = \sum_{k=1}^{2n} P_{kj} e^{-\gamma_k S}, j = 1, 2,$$

where γ_j are the simple positive roots of equation

$$f(z) = (\lambda_1 + \beta_1 + Cz - \lambda_1 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - z})(\lambda_2 + \beta_2 + Cz - \lambda_2 \sum_{j=1}^n \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - z}) - \beta_1 \beta_2 = 0,$$

and the coefficients P_{kj} are the solution of equations

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k1} = 1; \frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} \gamma_k (C - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\alpha_i - \gamma_k}) P_{k1} = 0, j = \overline{1, n}; P_{k2} = (1 + \frac{\gamma_k}{\beta_1} (C - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\alpha_i - \gamma_k})) P_{k1}.$$

REFERENCES

1. Panjer, H.Y. & Wilmot, G.E. (1992) *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.
2. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hekman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (2001) *Aktuarnaya Matematika* [Actuarial Mathematics]. Translated from English by V.K. Malinovskiy. Moscow: Yanus K.
3. Glukhova, E.V., Zmeev, O.A. & Livshits, K.I. (2004) *Matematicheskie modeli strakhovaniya* [Mathematical Models of Insurance]. Tomsk: Tomsk State University.
4. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 43-50. DOI: 10.17223/19988605/34/5
5. Livshits, K.I. (2011) *Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya* [Linear Algebra and Analytical Geometry]. Tomsk: NTL.
6. Livshits, K.I. (1999) Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 394-399. DOI: 10.1007/BF02509675
7. Boykov, A.V. (2002) The Cramer–Lundberg model with stochastic premium process. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniye*. 47(3). pp. 549-553. DOI: 10.4213/tvp3693
8. Livshits, K.I. & Yakimovich, K.Yu. (2014) Cramer-Lundberg Model with Stochastic Premiums and Continuous Non-insurance Costs. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 251-260. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_30
9. Jasiniewicz, H. (2001) Probability of Ruin with Variable Premium Rate in a Markovian Environment. *Insurance: Mathematics and Economics*. 29. pp. 291-296. DOI: 10.1016/S0167-6687(01)00090-7
10. Lu, Y. & Li, S. (2005) On the Probability of Ruin in a Markov-modulated Risk Model. *Insurance: Mathematics and Economics*. 37(3). pp. 522-532. DOI: 10.1007/s11009-007-9044-4
11. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2010) Ruin probability of an insurance company under double stochastic payment current. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
12. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2010) Distribution of the conditional time before ruin of an insurance company under double stochastic payment current. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 15-23. (In Russian).
13. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2011) Ruin probability of an insurance company under double stochastic insurance premium and insurance payment currents. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 64-73. (In Russian).

С.П. Моисеева, Е.В. Панкратова, Е.Г. Убонова

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗНОТИПНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассматривается система массового обслуживания $MR|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием. Найдены аналитические выражения для первого и второго начальных моментов числа занятых приборов каждого типа. С помощью метода асимптотического анализа при условии эквивалентно растущего времени обслуживания доказано, что двумерное распределение вероятностей числа занятых приборов каждого типа в системе является гауссовским.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания; поток марковского восстановления; метод асимптотического анализа; разнотипное обслуживание.

Общие выгоды от связи между математической теорией и ее практическим применением в теории массового обслуживания (ТМО) прослеживаются особенно хорошо. В начале XX в. А.К. Эрланг [1] заложил фундамент стохастических моделей для анализа эффективности технических систем. Первоначальная область применения ТМО для анализа телефонных систем вскоре была увеличена путем применения в ремонте машин, контроле запасов и позже конструкции и анализа компьютерных систем. Кроме того, системы массового обслуживания используют в качестве математических моделей для описания и изучения страховых компаний, медицинского обслуживания, пенсионных фондов [2–5]. Тесное взаимодействие теории и практики осталось движущей силой для развития теории массового обслуживания до сегодняшнего дня.

Современные потоки данных в информационных и телекоммуникационных системах включают в себя интегрированные разнотипные потоки, которые передают голосовую информацию, текстовые данные и информацию из видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве них, как правило, используют математические модели модулированных потоков (ВМАР, МАР), полумарковских (SM) или их частных случаев (марковский модулированный пуассоновский поток ММРР, поток марковского восстановления MR, рекуррентный поток GI).

Поскольку на обслуживание различных информационных единиц затрачивается различное время в зависимости от формата, соответствующих протоколов и т.д., то в качестве моделей процессов в информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками, требующими разного времени обслуживания и являющимися математическими моделями информационных систем.

Исследование систем с разнотипным обслуживанием можно встретить в работах [6–11]. В своей статье M.F. Neuts и Y. Takahashi [12] пришли к выводу, что для систем массового обслуживания с двумя или более приборами получение аналитических результатов является затруднительным, в этом случае следует применять асимптотические методы исследования [13–17].

Данная статья посвящена исследованию числа занятых приборов в системе с разнотипным обслуживанием заявок и входящим потоком марковского восстановления (MR). С помощью метода начальных моментов найдены точные выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе. Кроме того, предложено развитие метода асимптотического анализа для исследования числа занятых приборов при условии эквивалентно растущего времени обслуживания.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления заявок двух типов, заданный набором функ-

ций распределения длин интервалов $A_1(x), A_2(x), \dots, A_K(x)$ и матрицей вероятностей переходов $\mathbf{P} = [P_{ij}]$, $i, j = 1, 2$, вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова $k(t) = 1, 2, \dots, K$ с конечным числом состояний $k(t) = 1, 2, \dots, K$ [18].

Дисциплина обслуживания заключается в том, что заявка из MR/M/ ∞ входящего потока с вероятностью p_i ($i = 1, 2$) относится к i типу и занимает любой свободный прибор, время обслуживания на котором имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i ($i = 1, 2$) соответственно. Ставится задача исследования двумерного случайного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ – число занятых приборов каждого типа в системе.

Определим четырехмерный марковский случайный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t), z(t)\}$, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в потоке марковского восстановления, $k(t)$ – вложенная по моментам восстановления цепь Маркова [19].

Для распределения вероятностей $P(k, i_1, i_2, z, t) = P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, z(t) < z\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(k, i_1, i_2, z)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(k, i_1, i_2, 0)}{\partial z} - (i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) \Pi(k, i_1, i_2, z) + (i_1 + 1) \mu_1 \Pi(k, i_1 + 1, i_2, z) + \\ + (i_2 + 1) \mu_2 \Pi(k, i_1, i_2 + 1, z) + \sum_v \frac{\partial \Pi(v, i_1 - 1, i_2, 0)}{\partial z} p_1 P_{vk} A_k(z) + \sum_v \frac{\partial \Pi(v, i_1, i_2 - 1, 0)}{\partial z} p_2 P_{vk} A_k(z) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k(t) = 1, 2, \dots, K$, $i_1(t) = 0, 1, 2, \dots$, $i_2(t) = 0, 1, 2$.

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k, u_1, u_2, z) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \Pi(k, i_1, i_2, z), \text{ где } j = \sqrt{-1}.$$

Тогда из системы (1) получаем систему дифференциальных уравнений в матричном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, 0)}{\partial z} [p_1 e^{ju_1} \mathbf{PD}(z) + p_2 e^{ju_2} \mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}] - \\ - \mu_1 j(e^{-ju_1} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, z)}{\partial u_1} - \mu_2 j(e^{-ju_2} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, z)}{\partial u_2} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{H}(u_1, u_2, z) = [H(1, u_1, u_2, z), H(2, u_1, u_2, z), \dots, H(K, u_1, u_2, z)]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, z)}{\partial u_i} &= \left[\frac{\partial H(1, u_1, u_2, z)}{\partial u_i}, \frac{\partial H(2, u_1, u_2, z)}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial H(K, u_1, u_2, z)}{\partial u_i} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, z)}{\partial z} &= \left[\frac{\partial H(1, u_1, u_2, z)}{\partial z}, \frac{\partial H(2, u_1, u_2, z)}{\partial z}, \dots, \frac{\partial H(K, u_1, u_2, z)}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, 0)}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} A_1(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_K(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K \times K}.$$

Уравнение (2) является основным для дальнейших исследований.

2. Основные числовые вероятностные характеристики

Дифференцируя (2) по переменным u_1, u_2 и полагая их равными нулю, можно получить основные числовые вероятностные характеристики [20]. Средние значения числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяются равенствами

$$\frac{-(k)}{m_1} = \frac{p_k}{\mu_k} \lambda, \quad k = 1, 2,$$

где λ имеет смысл интенсивности потока марковского восстановления и определяется выражением

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} (1 - \mathbf{PD}(z)E) dz}.$$

Здесь $\mathbf{R} = [R(1), R(2), \dots, R(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова.

Моменты второго порядка числа заявок каждого типа в системе MR/M/ ∞ имеют вид

$$\frac{-(k)}{m_2} \mathbf{E} = \frac{p_k}{\mu_k} \lambda + \frac{p_k^2 \lambda}{\mu_k} \mathbf{PD}^*(\mu_k) [\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_k)]^{-1} \mathbf{E}, \quad k = 1, 2,$$

$$\mathbf{D}^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\mathbf{D}(z).$$

Выражение для коэффициента корреляции числа занятых приборов каждого типа системы MR/M/ ∞ принимает вид

$$r = \frac{p_1 p_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{[\mathbf{PD}^*(\mu_1) [\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_1)]^{-1} + \mathbf{PD}^*(\mu_2) [\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_2)]^{-1}]}{\sqrt{D_1} \cdot \sqrt{D_2}},$$

где дисперсия определяется выражением

$$D_i = \frac{p_i}{\mu_i} \lambda + \frac{p_i^2 \lambda}{\mu_i} \mathbf{PD}^*(\mu_i) [\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_i)]^{-1} \mathbf{E} - \left(\frac{p_i}{\mu_i} \lambda \right)^2, \quad i = 1, 2.$$

Численные эксперименты показали, что зависимость между компонентами i_1 и i_2 увеличивается при следующих условиях: при увеличении времени обслуживания, т.е. при $\mu_i \rightarrow 0$, при увеличении интенсивности входящего потока и если p_1 и p_2 близки по значению.

3. Метод асимптотического анализа

Применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов каждого типа в системе MR|M/ ∞ при некоторых асимптотических (предельных) условиях. Рассмотрим условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_1 = \varepsilon, \mu_2 = q\varepsilon, u = \varepsilon x_1, w = \varepsilon q x_2, \mathbf{H}(u_1, u_2, z) = \mathbf{F}_1(z, x_1, x_2, \varepsilon). \quad (3)$$

Перепишем (2) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(z, x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(0, x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial z} [p_1 e^{j\varepsilon x_1} \mathbf{PD}(z) + p_2 e^{j\varepsilon q x_2} \mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}] -$$

$$- j(e^{-j\varepsilon x_1} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(z, x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial x_1} - j(e^{-j\varepsilon q x_2} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(z, x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial x_2} = 0. \quad (4)$$

Лемма. Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}_1(z, x_1, x_2)$ решения $\mathbf{F}_1(z, x_1, x_2, \varepsilon)$ уравнения (4) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(z, x_1, x_2) = \mathbf{R}(z) \exp\{j\lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2)\}. \quad (5)$$

Доказательство. В уравнении (4) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(z, x_1, x_2)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(0, x_1, x_2)}{\partial z} [\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}] = 0,$$

решение которого определим в виде

$$\mathbf{F}_1(z, x_1, x_2) = \mathbf{R}(z) \Phi_1(x_1, x_2). \quad (6)$$

Скалярную функцию $\Phi_1(x_1, x_2)$ определим следующим образом: в уравнении (4) выполним предельный переход при $z \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(0, x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial z} [p_1 e^{j\varepsilon x_1} \mathbf{P} + p_2 e^{j\varepsilon q x_2} \mathbf{P} - \mathbf{I}] - j(e^{-j\varepsilon x_1} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial x_1} -$$

$$-j(e^{-jq\epsilon x_2} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, x_2, \epsilon)}{\partial x_2} = 0.$$

Разложим экспоненты в ряд Тейлора, поделим левую и правую части на ϵ и выполним предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$, тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_1(0, x_1, x_2)}{\partial z} [j(p_1 x_1 + p_2 q x_2) \mathbf{P} - \mathbf{I} + \mathbf{P}] + j^2 x_1 \frac{\partial \mathbf{F}_1(\infty, x_1, x_2)}{\partial x_1} + \\ + j^2 q x_2 \frac{\partial \mathbf{F}_1(\infty, x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \end{aligned}$$

подставляя в которую (6) и просуммировав уравнения, получаем дифференциальное уравнение для $\Phi_1(x_1, x_2)$ в частных производных вида

$$j\lambda \Phi_1(x_1, x_2) [p_1 x_1 + p_2 q x_2] = x_1 \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + q x_2 \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Нетрудно показать, что решение, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(0, 0) = 1$, имеет вид

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \exp\{\lambda j(p_1 x_1 + p_2 x_2)\}.$$

Следовательно, выполнено условие (5) леммы.

Учитывая замены (3), можно записать асимптотическое (при $\epsilon \rightarrow 0$) приближенное равенство для характеристической функции процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ в стационарном режиме:

$$h_1(u_1, u_2) = \mathbf{H}(u_1, u_2, \infty) \mathbf{E} \approx \exp\left\{\lambda j\left(p_1 \frac{u_1}{\mu_1} + p_2 \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\}.$$

Для построения аппроксимации характеристической функции второго порядка в уравнении (2) выполним следующую замену:

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, z) = \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z) \cdot \exp\left\{\lambda j\left(p_1 \frac{u_1}{\mu_1} + p_2 \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\}.$$

Тогда для $\mathbf{H}_2(u_1, u_2, z)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2, 0)}{\partial z} [p_1 e^{ju_1} \mathbf{P} \mathbf{D}(z) + p_2 e^{ju_2} \mathbf{P} \mathbf{D}(z) - \mathbf{I}] - \\ - \mu_1 j(e^{-ju_1} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z)}{\partial u_1} - \mu_2 j(e^{-ju_2} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z)}{\partial u_2} + \lambda p_1 (e^{-ju_1} - 1) \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z) + \\ + \lambda p_2 (e^{-ju_2} - 1) \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z) = 0. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mu_1 = \epsilon^2, \mu_2 = q\epsilon^2, u = \epsilon y_1, w = \epsilon q y_2, \mathbf{H}_2(u_1, u_2, z) = \mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon), \quad (7)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(0, y_1, y_2, \epsilon)}{\partial z} [p_1 e^{j\epsilon y_1} \mathbf{P} \mathbf{D}(z) + p_2 e^{jq\epsilon y_2} \mathbf{P} \mathbf{D}(z) - \mathbf{I}] - \\ - \epsilon j(e^{-j\epsilon y_1} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon)}{\partial y_1} - \epsilon j(e^{-jq\epsilon y_2} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon)}{\partial y_2} + \\ + (e^{-j\epsilon y_1} - 1) \lambda p_1 \mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon) + (e^{-jq\epsilon y_2} - 1) \lambda p_2 \mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Докажем следующую теорему:

Теорема. Сумма компонентов предельного, при $\epsilon \rightarrow 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}_2(z, y_1, y_2)$ решения $\mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \epsilon)$ уравнения (8) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(z, y_1, y_2) = \mathbf{R}(z) \exp\left\{j^2 \left[\frac{\lambda}{2} (p_1 y_1^2 + p_2 q y_2^2) + \mathbf{f}'(0) \mathbf{E} \left(\frac{(p_1 y_1)^2}{2} + q \frac{(p_2 y_2)^2}{2} + 2 p_1 p_2 \frac{q y_1 y_2}{q+1} \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

где вектор-функция $\mathbf{f}(z)$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}(\infty) \mathbf{E} = 0$ и является решением уравнения

$$\frac{d\mathbf{f}(z)}{dz} + \mathbf{f}'(0)(\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}) + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{RD}(z) - \lambda \mathbf{R}(z) = 0. \quad (10)$$

Доказательство. Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_2(z, y_1, y_2, \varepsilon) = \Phi_2(y_1, y_2)(\mathbf{R}(z) + j\varepsilon \mathbf{f}(z)(p_1 y_1 + p_2 q y_2)) + O(\varepsilon^2). \quad (11)$$

Подставив (11) в (8), имеем равенство

$$\begin{aligned} \Phi_2(y_1, y_2) \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z} + j\varepsilon \frac{d\mathbf{f}(z)}{dz} (p_1 y_1 + p_2 q y_2) + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} [\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} j\varepsilon (p_1 y_1 + p_2 q y_2) \mathbf{PD}(z) + j\varepsilon \frac{d\mathbf{f}(0)}{dz} (p_1 y_1 + p_2 q y_2) (\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}) - \right. \\ \left. - j\varepsilon \lambda (p_1 y_1 + p_2 q y_2) \mathbf{R}(z) \right\} + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части уравнения на ε и выполнив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая равенство $\frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} [\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}] = 0$ и $\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \lambda \mathbf{R}$, несложно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{d\mathbf{f}(z)}{dz} + \mathbf{f}'(0)(\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}) + \lambda \mathbf{RD}(z) - \lambda \mathbf{R}(z) = 0,$$

которая совпадает с системой (10).

Для нахождения вида функции $\Phi_2(y_1, y_2)$ разложим в уравнении (8) экспоненты в ряд Тейлора, подставим туда (11), устремим $z \rightarrow \infty$, разделим обе части на ε и выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\begin{aligned} \Phi_2(y_1, y_2) \left\{ \lambda (p_1 y_1^2 + p_2 (q y_2)^2) + \mathbf{f}'(0) \mathbf{E} (p_1 y_1 + p_2 q y_2)^2 \right\} = \\ = y_1 \frac{\partial \Phi_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} + q y_2 \frac{\partial \Phi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Решением дифференциального уравнения (12), удовлетворяющего начальному условию $\Phi_2(0,0) = 1$, является функция $\Phi_2(y_1, y_2)$ вида

$$\Phi_2(y_1, y_2) = \exp \left\{ j^2 \left[\frac{\lambda}{2} (p_1 y_1^2 + p_2 q y_2^2) + \mathbf{f}'(0) \mathbf{E} \left(\frac{(p_1 y_1)^2}{2} + q \frac{(p_2 y_2)^2}{2} + 2 p_1 p_2 \frac{q y_1 y_2}{q+1} \right) \right] \right\}.$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_2(z, y_1, y_2) = \mathbf{R}(z) \Phi_2(y_1, y_2)$, условие теоремы (9) доказано.

Выполнив обратные замены (7), можно записать асимптотическое ($\varepsilon \rightarrow 0$) приближенное равенство для характеристической функции

$$\begin{aligned} h_2(u_1, u_2) = \mathbf{H}(u_1, u_2, \infty) \mathbf{E} \approx \exp \left\{ \lambda j \left(p_1 \frac{u_1}{\mu_1} + p_2 \frac{u_2}{\mu_2} \right) + \right. \\ \left. + j^2 \left[\frac{\lambda}{2} \left(p_1 \frac{u_1^2}{\mu_1} + p_2 \frac{u_2^2}{\mu_2} \right) + \mathbf{f}'(0) \mathbf{E} \left(\frac{(p_1 u_2)^2}{2 \mu_1} + \frac{(p_2 u_2)^2}{2 \mu_2} + 2 p_1 p_2 \frac{u_1 u_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили гауссовскую аппроксимацию характеристической функции числа заявок каждого типа в рассматриваемой системе в стационарном режиме функционирования.

Заключение

В результате проведенного исследования построена математическая модель обслуживания заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания $\text{MR}|\text{M}|\infty$ с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления, определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов каждого типа. С помощью метода асимптотического анализа построена гауссовская аппроксимация исследуемого двумерного процесса.

На основе численных экспериментов показана сходимость асимптотических и допредельных характеристик для параметров обслуживания, превышающих интенсивность входящего потока в 10 и более раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erlang A.K. The theory of probability and telephone conversations // *Nyt Tidsskrift Mat.* 1911. В. 20. Р. 33–39.
2. Гарайшина И.Р. Применение бесконечнолинейной трехфазной СМО для исследования процесса изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, при нестационарном входящем потоке // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2008. № 2. С. 35–41.
3. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // *Вестник Томского государственного университета.* 2006. № 293. С. 49–52.
4. Даммер Д.Д., Назаров А.А. Исследование числа требований на страховые выплаты в компании с произвольной величиной продолжительности договора // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2011. № 2 (15). С. 24–31.
5. Miro O., Sanchez M., Espinosa, Coll-Vinent B., Bragulat E., and Milla J. Analysis of patient flow in the emergency department and the effect of G. an extensive reorganization // *Emergency Medical Journal.* 2003. V. 20. P. 143–148.
6. Панкратова Е.В. Исследование системы массового обслуживания $MAP|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: Управление, вычисление, связь.* 2015. С. 585–592.
7. Панкратова Е.В. Исследование системы массового обслуживания $GI/GI|\infty$ с двумя типами заявок // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова.* 2015. Ч. 1. С. 152–157.
8. Pankratova E., Moiseeva S. Queueing System $GI/GI|\infty$ with n Types of Customers // *Communications in Computer and Information Science.* Switzerland: Springer. 2015. V. 564. P. 216–225.
9. Dudin S., Kim C., Dudina O. MMAP|M|N queueing system with impatient heterogeneous customers as a model of a contact center // *Computers & Operations Research.* 2013. V. 40. P. 1790–1803.
10. Ammar S.I. Transient analysis of a two-heterogeneous servers queue with impatient behavior // *Journal of the Egyptian Mathematical Society.* 2014. V. 22. P. 90–95.
11. Li N., Stanford D.A. Multi-server accumulating priority queues with heterogeneous servers // *European Journal of Operational Research.* V. 252, Issue 3. 2016. P. 866–878.
12. Neuts M.F., Takahashi Y. Asimptotic behavior of the stationary distribution in the $GI|PH|c$ queue with heterogeneous servers // *Z. Wahrscheinlichkeitsth.* 1981. V. 57. P. 441–452.
13. Iglehart D.L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem // *J. Appl. Prob.* 1965. V. 2. P. 429–441.
14. Shore H. Simple Approximations for the $GI|G|c$ queue // *J. Operational Research Society.* 1988. No. 39. P. 279–284.
15. Моисеева С.П., Назаров А.А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
16. Крысанова К.А., Моисеева С.П. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления методом асимптотического анализа // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2012. № 1 (18). С. 49–55.
17. Fedorova E.A. The Second Order Asymptotic Analysis Under Heavy Load Condition for Retrial Queueing System MMPP/M/1 // *Communications in Computer and Information Science.* Switzerland : Springer, 2015. V. 564. P. 344–357.
18. Синякова И.А., Моисеева С.П. Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // *Известия Томского политехнического университета.* 2012. № 5. С. 24–28.
19. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015.
20. Панкратова Е.В., Убонова Е.Г. Моисеева С.П. Исследование бесконечнолинейной СМО с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // *Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Всерос. конф. с междунар. участием. М. : РУДН, 20163. С. 49–52.*

Убонова Елена Георгиевна. E-mail: rikka07@list.ru

Панкратова Екатерина Владимировна. E-mail: pankate@sibmail.com

Моисеева Светлана Петровна, д-р физ.-мат. наук. E-mail: smoiseeva@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 17 февраля 2016 г.

Ubonova Elena G., Pankratova Ekaterina V., Moiseeva Svetlana P. (Tomsk State University, Russian Federation)

Queueing system with renewal arrival process and two types of customers.

Keywords: Queueing system; different types of servers; method of asymptotic analysis; renewal arrival process.

DOI: 10.17223/19988605/35/5

This article deals with the queueing system with unlimited number of facilities. Arrival process is a Markov renewal process.

An arrival customer is the customer of the first type with the probability p_1 and the customer of the second type with the probability p_2 . Every customer comes into any vacant server where it is served during a stochastic time period distributed according to the exponential law with the parameter μ_1 for customers of the first type and with the parameter μ_2 for customers of the second type. The problem consists to study the process, which characterized by a number of occupied services.

The system of Kolmogorov's differential equations is derived. Using characteristic function, the main equation of research is obtained:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, 0)}{\partial z} [p_1 e^{ju} \mathbf{PD}(z) + p_2 e^{jw} \mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}] - \\ & - \mu_1 j(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, z)}{\partial u} - \mu_2 j(e^{-jw} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, z)}{\partial w} = 0. \end{aligned}$$

In particular, the first and the second order initial moments of the number of busy servers of different types are obtained. Furthermore, we found the expression for the correlation coefficient between the number of the different types of busy servers. The resulting correlation coefficient indicates that the number of busy servers of different type in the system are dependent.

The systems under considerations are studied using asymptotic analysis. Namely, the expressions for the asymptotic of the first and second orders are received for the characteristic functions of the busy servers of any type in the system MR/GI/ ∞ with the heterogeneous service. Therefore, we make conclusion that the system under study (with two types of customers) cannot be reduced in two separate systems (each with one type of customers). The method of asymptotic analysis in a condition of equivalent growing service time is offered. The asymptotic characteristic functions of the first and second orders are derived. It is shown that the asymptotic characteristic function of the second order by two-dimensional probability distribution of the number of the occupied devices of each type in the system has the Gaussian distribution:

$$\begin{aligned} h_2(u_1, u_2) \approx \exp \left\{ \lambda j \left(p_1 \frac{u_1}{\mu_1} + p_2 \frac{u_2}{\mu_2} \right) + \right. \\ \left. + j^2 \left[\frac{\lambda}{2} \left(p_1 \frac{u_1^2}{\mu_1} + p_2 \frac{u_2^2}{\mu_2} \right) + \mathbf{f}'(0) \mathbf{E} \left(\frac{(p_1 u_2)^2}{2\mu_1} + \frac{(p_2 u_2)^2}{2\mu_2} + 2p_1 p_2 \frac{u_1 u_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

The numerical analysis of the convergence of the exact and asymptotic algorithms computing the main probabilistic characteristics of the system is carried out.

REFERENCES

1. Erlang, A.K. (1911) The theory of probability and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift Mat.* 20. pp. 33-39.
2. Garayshina, I.R. (2008) Primenenie beskonечноlineynoy trekhfaznoy SMO dlya issledovaniya protsesssa izmeneniya chisla lits, zastrahovannykh v Pensionnom fonde, pri nestatsionarnom vkhodyashchem potoke [Application of multiply queueing system for investigation the process of change in the number of persons insured in the Pension Fund, with unsteady arrival flow]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika –Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2. pp. 35-41.
3. Morozova, A.S., Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. (2006) Issledovanie ekonomiko-matematicheskoy modeli vliyaniya tsenovoy skidki dlya postoyannykh klientov na pribyl' kommercheskoy organizatsii [Investigation of mathematical models of influence of price discounts for regular customers on the profit of commercial organization]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta– Tomsk State University Journal.* 293. pp. 49-52.
4. Dammer, D.D. & Nazarov, A.A. (2011) Research of the amount of demands for insurance payment in a company with arbitrary distribution of duration of the insurance contract. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(15). pp. 24-31. (In Russian).
5. Miro, O., Sanchez, M., Espinosa, G., Coll-Vinent, B., Bragulat, E. and Milla, J. (2003) Analysis of patient flow in the emergency department and the effect of G. an extensive reorganization. *Emergency Medical Journal.* 20. pp. 143-148. DOI: 10.1136/emj.20.2.143
6. Pankratova, E.V. (2015) [Queueing system MAP|M/ ∞ with two types of customers using asymptotic analysis in condition of extremely rare changes of arrival process MAP]. *Raspredelennye komp'yuternye i telekommunikatsionnye seti: Upravlenie, vychislenie, svyaz' [Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015)].* Proc. of the 18th International Scientific Conference. October 19-22, 2015. Moscow: Institute of control Sciences RAS. pp. 585-592. (In Russian).
7. Pankratova, E.V. (2015) [Queueing system GI/GI/ ∞ with two types of customers]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2015) [Information Technologies and Mathematical Modelling].* Proc. of the 14th International Scientific Conference ITMM 2015 named after A.F. Terpigov. pp. 152-157. (In Russian).
8. Pankratova, E. & Moiseeva, S. (2015) Queueing System GI/GI/ ∞ with n Types of Customers. *Communications in Computer and Information Science.* 564. pp. 216-225. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4 19
9. Dudin, S., Kim, C. & Dudina, O. (2013) MMAP|M|N queueing system with impatient heterogeneous customers as a model of a contact center. *Computers & Operations Research.* 40. pp. 1790-1803. DOI: 10.1016/j.cor.2013.01.023

10. Ammar, S.I. (2014) Transient analysis of a two-heterogeneous servers queue with impatient behavior. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 22. pp. 90-95. DOI: 10.1016/j.joems.2013.05.002
11. Li, N. & Stanford, D.A. (2016) Multi-server accumulating priority queues with heterogeneous servers. *European Journal of Operational Research*. 252(3). pp. 866-878. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.02.010
12. Neuts, M.F. & Takahashi, Y. (1981) Asymptotic behavior of the stationary distribution in the GI|PH|c queue with heterogeneous servers. *Z. Wahrscheinlichkeitsth.* 57. pp. 441-452. DOI: 10.1007/BF01025867
13. Iglehart, D.L. (1965) Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *Journal of Appl. Prob.* 2. pp. 429-441.
14. Shore, H. (1988) Simple Approximations for the GI|G|c queue. *Journal of Operational Research Society*. 39. pp. 279-284. DOI: 10.1057/jors.1988.45
15. Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. (2006) *Metody asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
16. Krysanova K. & Moiseeva S.P. (2012) Method of asymptotic analysis for research of parallel service multiple demands of Markovian renewal flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp.49-52. (In Russian).
17. Fedorova, E.A. (2015) The Second Order Asymptotic Analysis Under Heavy Load Condition for Retrial Queueing System MMPP/M/1. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 344-357. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_29
18. Sinyakova, I.A. & Moiseeva, S.P. (2012) The moment method for studying the mathematical model of Parallel service of multiple demands in the stream of Markov. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 5. pp. 24-28. (In Russian)
19. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolinyne sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Queueing systems and networks with infinite number of servers]. Tomsk: NTL.
20. Pankratova, E.V., Ubonova, E.G. & Moiseeva, S.P. (2016) [Queueing system with renewal arrival process and two types of customers]. *Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem* [Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems]. Proc. of the 6th International Scientific Conference. Moscow: RUDN. pp. 49-52. (In Russian).

П.Н. Подкур, Н.К. Смоленцев

ВЕЙВЛЕТ-ПАКЕТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЭГ НА ОСНОВНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ РИТМЫ

Методами вейвлет-анализа производится разложение электроэнцефалограммы на основные частотные ритмы и вычисляются их числовые характеристики. Более подробно изучается высокочастотная часть ЭЭГ. Она разбивается на несколько компонент с хорошей частотной локализацией, для которых находятся их основные частоты, амплитуда колебаний, относительная энергия и другие характеристики.

Ключевые слова: вейвлет-анализ; пакетный вейвлет-анализ; электроэнцефалограмма; ритмы ЭЭГ; высокочастотные компоненты ЭЭГ.

Имеется обширная литература, посвященная методам анализа сигналов электроэнцефалограммы (см., например, [1–3] и библиографии этих работ). При анализе электроэнцефалограммы (ЭЭГ) используются как традиционные статистические методы и методы анализа Фурье, так и более современные методы вейвлет-анализа [1, 2] и преобразования Гильберта–Хуанга [4]. В последнем случае сигнал ЭЭГ раскладывается на эмпирические моды нелинейных и нестационарных колебаний, а затем применяется преобразование Гильберта. В случае вейвлет-анализа распространено использование методов как непрерывного [1, 2, 5], так и дискретного вейвлет-анализа [6, 7]. В работах [8, 9] дискретный вейвлет-анализ успешно использовался для анализа электрокардиограмм. Традиционно выделяют и исследуют следующие основные диапазоны (ритмы) ЭЭГ [3]: Дельта-ритм (0–4 Гц), Тета-ритм (4–8 Гц), Альфа-ритм (8–16 Гц), Бета-ритм (16–31 Гц) и Гамма-ритм – это частоты выше 30 Гц. В последнее время при использовании электроэнцефалографов высокого разрешения (с частотой оцифровки до 20 тыс. Гц) наблюдается интерес и к высокочастотным диапазонам [10, 11]. Например, в работе [10] показано, что повышенная частотная активность некоторых участков мозга в диапазоне от 60 до 100 Гц является предвестником эпилептического приступа и наблюдается также во время медленного сна. Использование вейвлет-анализа сигнала позволяет выделить указанные выше ритмы в виде отдельных компонент сигнала. При этом получается еще несколько высокочастотных компонент, соответствующих частотам от 30 до 50 Гц, от 50 до 75 Гц и от 75 до 150 Гц. Вейвлет-разложение сигнала ЭЭГ на отдельные частотные диапазоны позволяет рассматривать их независимо друг от друга и дает возможность изучать частотные и другие свойства каждой компоненты. В данной работе мы предлагаем новый подход для получения числовых характеристик ЭЭГ на основе многоуровневого вейвлет-разложения и применения преобразования Гильберта, что позволяет выделить новые частотные диапазоны, получить их визуализацию и новые числовые характеристики ЭЭГ.

1. Многоуровневое вейвлет-разложение

Основная операция вейвлет-анализа [9] представляет собой разложение $S \rightarrow \{D_1, A_1\}$ изучаемого сигнала $S = \{S_n\}$ на две компоненты $D_1 = \{D_{1,k}\}$ и $A_1 = \{A_{1,k}\}$ при помощи некоторых фильтров. Массив A_1 представляет сглаженную часть сигнала и называется массивом коэффициентов аппроксимации. Массив D_1 представляет детали, которыми исходный сигнал S отличается от его сглаженной части. С точки зрения анализа сигналов ортогональные вейвлеты представляют собой четыре цифровых фильтра $\{h_n\}$, $\{g_n\}$, $\{h_n^*\}$, $\{g_n^*\}$ [9]. Фильтры $\{h_n^*\}$, $\{g_n^*\}$ используются для разложения сигнала по формулам

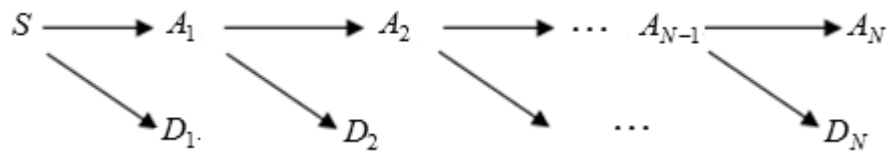
$$A_{1,k} = \sum_n h_n^* S_{2k-n}, \quad D_{1,k} = \sum_n g_n^* S_{2k-n}. \quad (1)$$

Результат действия фильтра $\{h_n^*\}$ представляет низкочастотную аппроксимацию сигнала. Результат действия фильтра $\{g_n^*\}$ представляет высокочастотную часть сигнала. Фильтры $\{h_n\}$ и $\{g_n\}$ используются для восстановления сигнала $S = \{S_n\}$ по формуле

$$S_n = \sum_k (h_{n-2k} A_{1,k} + g_{n-2k} D_{1,k}). \quad (2)$$

При многоуровневом вейвлет-анализе процедура вейвлет-разложения (1) применяется многократно к массивам коэффициентов аппроксимации. Это может быть изображено схематично следующим образом (рис. 1):

$$S \rightarrow \{D_1, A_1\} \rightarrow \{D_1, D_2, A_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{D_1, D_2, \dots, D_{N-1}, D_N, A_N\}.$$



ется по 64 общепринятым каналам по системе «10×20», рекомендованной Международной федерацией обществ электроэнцефалографии и клинической нейрофизиологии [3]. Часть сигнала ЭЭГ записана с закрытыми глазами пациента. Для каждого из 64 каналов рассматриваются фрагменты сигнала, соответствующие записи сигнала как с открытыми, так и с закрытыми глазами пациента. Для выбранных фрагментов производится вейвлет-разложение и вычисление характеристик. Вычисления производятся в системе MATLAB [12] с использованием пакета вейвлет-анализа MATLAB Wavelet Toolbox [9]. Функции этого пакета вейвлет-анализа предусматривают корректную обработку граничных значений при действии фильтров путем симметричного продолжения сигнала.

2.1. Выбор вейвлета

Мы будем использовать ортогональный вейвлет Мейера *dmey*, который получается из вейвлета Мейера [9] бесконечной импульсной характеристики усечением его фильтра до 102 членов. Он имеет носитель на промежутке $[0,101]$ и центральную частоту $Fr = 0,6634$ Гц. Выбор этого вейвлета объясняется хорошей локализацией частотных спектров компонент сигнала. Дело в том, что данный вейвлет имеет самый широкий частотный спектр среди ортогональных вейвлетов с компактным носителем. В нем в равной степени представлены частоты, находящиеся в достаточно большой окрестности его центральной частоты 0,6634 Гц. Именно поэтому он дает хорошее разложение сигнала на слагаемые, соответствующие определенным полосам частот.

Поскольку частота дискретизации составляет 500 отсчетов в секунду, то максимальная регистрируемая частота сигнала равна 250 Гц. Поэтому при первом уровне разложения вейвлет Мейера будет выделять элементы сигнала с частотами, близкими к центральной частоте первого уровня разложения, равной $Fr_1 = 0,6634 \cdot 250 = 165,85$ Гц. При втором уровне разложения вейвлет Мейера будет замечать частоты, близкие частоте в два раза меньше $Fr_2 = 82,93$ Гц, а при третьем уровне разложения вейвлет Мейера будет замечать частоты, близкие к 41,46 Гц. В коэффициентах детализации 4-го уровня разложения будут отражаться элементы сигнала с частотами, близкими к 20,73 Гц, для 5-го уровня разложения – 10,37 Гц, для 6-го – 5,18 Гц и для 7-го уровня – 2,59 Гц.

2.2. Вейвлет-разложение

Достаточно сделать разложение сигнала ЭЭГ до 6-го уровня: $S \rightarrow \{D_1, D_2, \dots, D_6, A_6\}$. При этом элементы сигнала с частотами в пределах от 0 до 4 Гц (дельта-ритм) будут представлены коэффициентами аппроксимации A_6 . Для вейвлет-разложения фрагмента сигнала до 6-го уровня используем следующую команду MATLAB: `[c,l] = wavedec(Fragment,6,'dmey')`. В результате получаем структуру `[c,l]`, которая содержит набор вейвлет-коэффициентов $\{D_1, D_2, \dots, D_6, A_6\}$, где $D_1, D_2, \dots, D_6$ – коэффициенты деталей и A_6 – аппроксимирующие коэффициенты. Восстановление первоначального сигнала производится последовательно в обратном порядке. Если мы применим процедуру восстановления только к одному набору коэффициентов, когда все остальные коэффициенты состоят из нулей, то получим часть сигнала, соответствующую одному набору коэффициентов. Будем называть такую часть *компонентой* сигнала. Компоненты сигнала, восстановленные только по коэффициентам деталей $D_1, D_2, \dots, D_6$, будем называть высокочастотными и обозначать $RecD_1, RecD_2, \dots, RecD_6$ соответственно. Например, $RecD_2$ – это компонента сигнала, восстановленная по следующему набору вейвлет-коэффициентов: $\{0, D_2, 0, 0, 0, 0, 0\}$, где 0 означает массив из нулей. Аналогично низкочастотные компоненты $RecA_1, RecA_2, \dots, RecA_6$ получаются восстановлением только по одному набору аппроксимирующих коэффициентов. В MATLAB Wavelet Toolbox есть функция `wtcoef`, которая позволяет восстановить как высокочастотные, так и низкочастотные компоненты сигнала по полученной ранее структуре `[c,l]` вейвлет-коэффициентов $\{D_1, D_2, \dots, D_n, A_n\}$ [9]. Тогда фрагмент нашего сигнала раскладывается в сумму следующих компонент:

$$Fragment = RecD_1 + RecD_2 + RecD_3 + RecD_4 + RecD_5 + RecD_6 + RecA_6.$$

На рис. 3 показаны графики исходного сигнала (фрагмент первого канала ЭЭГ) и нескольких его компонент. Частотный спектр мощности $P = \{P_n\}$ каждой компоненты $RecD_{i,k}$ находится в MATLAB обыч-

ным образом. Выполняется дискретное преобразование Фурье $\text{fft}: \{RecD_{i,k}\} \rightarrow \{c_n\}$, вычисляется квадрат модуля каждого коэффициента Фурье c_n и делится на длину L сигнала: $P_n = |c_n|^2 / L$.

Проведенные расчеты показали, что частотные спектры компонент сигналов достаточно хорошо локализованы и полученные компоненты представляют основные диапазоны [3] ЭЭГ: $RecA_6$ – это Дельта-ритм (0–4 Гц), $RecD_6$ – Тета-ритм (4–8 Гц), $RecD_5$ – Альфа-ритм (8–16 Гц), $RecD_4$ – Бета-ритм (16–31 Гц). Часть сигнала, спектр которого содержит частоты выше 30 Гц, обычно называется Гамма-диапазоном. В полученном разложении Гамма-диапазон полностью представлен тремя компонентами $RecD_1$, $RecD_2$ и $RecD_3$. Частотные спектры компонент $RecD_2$ и $RecD_3$ локализованы в следующих пределах: $RecD_3$ – от 28 до 50 Гц и $RecD_2$ – от 57 до 75 Гц. Назовем эти диапазоны *Gamma-2* и *Gamma-1* соответственно. Первая компонента разложения $RecD_1$ имеет относительную l^2 -энергию порядка 10^{-7} , а ее частотный спектр распределен от 75 до 250 Гц. Поэтому она не рассматривается нами как отдельный диапазон сигнала ЭЭГ. На рис. 3 приведены графики исходного сигнала и нескольких его компонент. В результате получаем разложение сигнала в классических терминах диапазонов:

$$\text{Fragment} = \text{Gamma-2} + \text{Gamma-1} + \text{Beta} + \text{Alpha} + \text{Theta} + \text{Delta}.$$

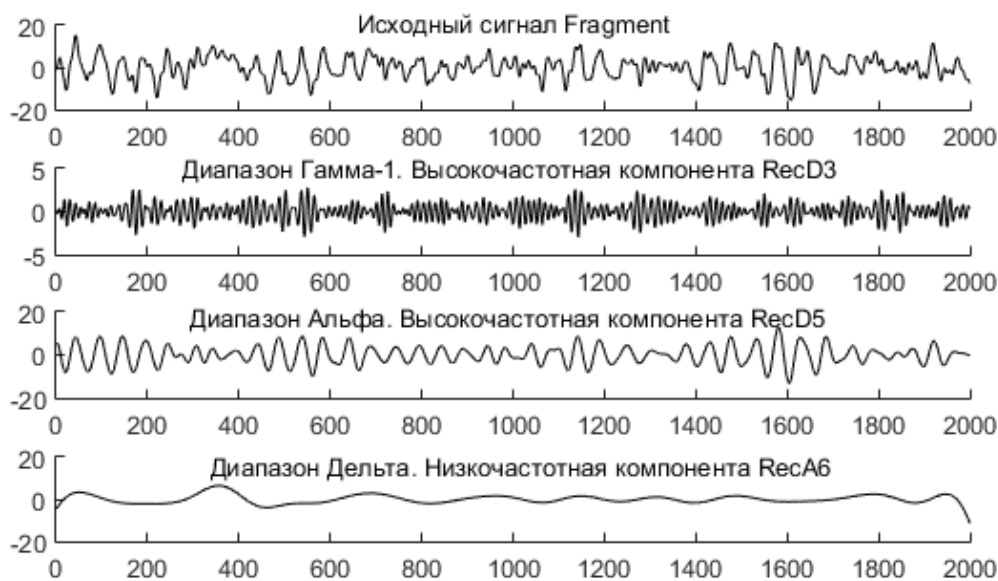


Рис. 3. Графики исходного сигнала и нескольких его компонент

2.3. Числовые характеристики компонент сигнала

Для всех полученных компонент $RecD_1$, $RecD_2$, ..., $RecD_6$ и $RecA_6$ представляют интерес следующие числовые характеристики: спектр мощности, стандартные отклонения, дисперсия, l^2 - и l^1 -нормы и энтропия. Все они легко вычисляются в MATLAB. Дополнительно определим еще три числовые характеристики компоненты сигнала.

1. Относительная энергия компоненты сигнала – это отношение l^2 -энергии компоненты к l^2 -энергии всего сигнала (l^2 -энергией сигнала $S = \{S_n\}$ мы называем сумму квадратов модулей элементов S_n).

Поскольку компоненты сигнала локализованы по частоте, то вполне естественно рассматривать некоторое усредненное, «основное» значение частоты каждой компоненты. Мы определим такую среднюю частоту компоненты сигнала двумя способами.

2. Средняя статистическая частота. Определяется как такая частота, которая делит пополам мощность спектра. Для вычисления этого параметра делается дискретное преобразование Фурье компоненты сигнала $RecD_i$, затем вычисляется мощность спектра Фурье $S_i = \sum_{n=1}^{N/2} |c_n|^2$ при суммировании до половины длины сигнала (поскольку вторая половина спектра мощности симметрична первой) и находится первое значение n_i , когда сумма первых квадратов становится больше или равной половине всей

суммы: $\sum_{n=1}^{n_i} |c_n|^2 \geq S_i / 2$. Значение частоты, соответствующее n_i , назовем *средней статистической частотой* i -ой компоненты сигнала $RecD_i$.

3. Средняя мгновенная частота. Определяется на основе преобразования Гильберта. Напомним, что преобразование Гильберта $y(t) = H(x(t))$ функции $x(t)$ определяется формулой

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

если, конечно, этот интеграл существует в смысле главного значения. Одно из основных свойств преобразования Гильберта заключается в том, что $H(H(x)) = -x$. Тогда комплексная функция $z(t) = x(t) + i y(t)$ является собственной для преобразования Гильберта: $H(z) = -i z$. Запишем комплексную функцию $z(t)$ в форме $z(t) = A(t)e^{i\theta(t)}$. Тогда амплитуда $A(t)$ определяется как модуль функции $z(t)$, а мгновенная частота колебаний – формулой $\omega = d\theta/dt$, где $\theta(t) = \arctg(y/x)$. В MATLAB есть функция $z = \text{hilbert}(x)$ для выполнения преобразования Гильберта дискретного сигнала x , которая вычисляет комплексную функцию z . Тогда формула

$$\text{instfreq} = F_s / (2 \cdot \pi) \cdot \text{diff}(\text{unwrap}(\text{angle}(z)))$$

дает нам мгновенную частоту сигнала. Применим дискретное преобразование Гильберта $z = \text{hilbert}(x)$ к каждой компоненте разложения и вычислим мгновенную частоту в каждый момент. Вычисления и графики мгновенных частот показывают, что мгновенная частота колебаний меняется незначительно около некоторого среднего значения F_0 . Будем называть это значение F_0 *средней мгновенной частотой* компоненты. Преобразование Гильберта позволяет также найти модулирующую функцию $A(t) = |z|$, которая определяет амплитуду колебаний компоненты сигнала. Теперь наша компонента имеет основную гармонику в виде $X = A(t) \cdot \cos(2\pi \cdot F_0 \cdot t)$.

Указанные выше числовые характеристики вычислены для 256 фрагментов сигнала ЭЭГ (по 4 фрагмента длительностью 8 с для каждого из 64 каналов) для пациента с открытыми / закрытыми глазами. Вычисления показывают, что эти числовые характеристики существенно отличаются для разных каналов ЭЭГ, что говорит о том, что они регистрируют разную электрическую активность участков мозга. На рис. 4 в качестве примера представлены значения относительных энергий и средних частот для Альфа-диапазона каждого из 64 каналов. Вычисления для случая ЭЭГ, записанной с закрытыми глазами, показывают, что относительная энергия Альфа-диапазона стала почти в два раза меньше, но средние частоты увеличились на 1–2 Гц. При записи ЭЭГ с закрытыми глазами основными являются Бета- и Дельта-ритмы, которые в сумме дают более 60% энергии сигнала.

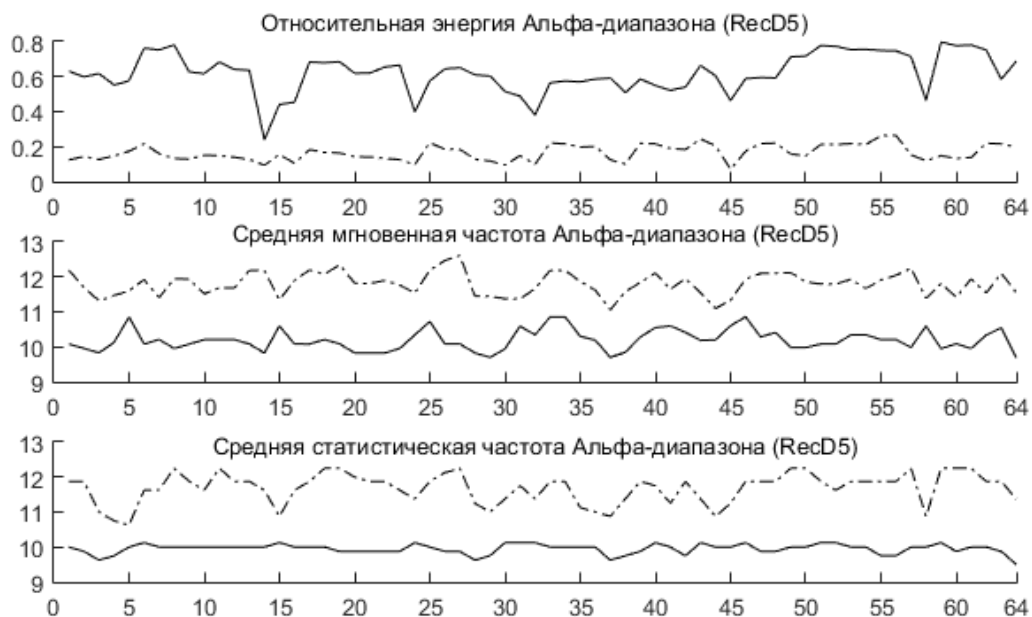


Рис. 4. Относительная энергия и средние частоты (в Гц) Альфа-диапазона всех 64 каналов ЭЭГ (сплошная линия – с открытыми глазами, штрих-пунктир – с закрытыми глазами)

2.4. Разложение компоненты Гамма-1 ($RecD_3$)

Результаты вычислений показывают, что средняя мгновенная и средняя статистическая частоты для высокочастотных компонент $RecD_2$ и $RecD_3$ ведут себя неустойчиво при небольших сдвигах фрагмента сигнала. Это объясняется тем, что существенная часть их частотных спектров мощности распределена достаточно широко: от 28 до 50 Гц и от 57 до 75 Гц соответственно. Эти компоненты требуют дальнейшего разложения на более узкие частотные диапазоны. Для решения этой задачи воспользуемся пакетным вейвлет-разложением. Функция $T = \text{wpdec}(X, N, 'wname')$ MATLAB производит пакетное разложение уровня N сигнала X , а функция $X = \text{wprcoef}(T, p)$ производит прямое восстановление только по одному набору коэффициентов в узле p , т.е. создает компоненту сигнала, соответствующую выбранному узлу пакетного дерева [9].

Оптимальное пакетное дерево разложения компоненты $RecD_3$ строится по принципу разложения только тех узлов, для которых относительная энергия соответствующих компонент больше или равна 1% от энергии всего сигнала. В частности, на четвертом уровне разложения имеется всего два узла (4, 2) и (4, 3), в которых относительная энергия компонент будет составлять 2,5 и 96,8% от энергии всего $RecD_3$. На пятом уровне – это узлы (5, 5), (5, 6) и (5, 7). На шестом уровне получается разложение $RecD_3$ на пять компонент, соответствующих узлам (6, 10), (6, 12), (6, 13), (6, 14) и (6, 15). Соответствующие этим узлам компоненты разложения $RecD_3$ имеют достаточно хорошо локализованный спектр: узел (6, 10) – частоты от 46 до 50 Гц, узел (6, 12) – частоты от 28 до 35 Гц, узел (6, 13) – частоты от 35 до 39 Гц, узел (6, 14) – частоты от 43 до 48 Гц и узел (6, 15) – частоты от 38 до 43 Гц. Соответствующие этим узлам компоненты хорошо представляют весь сигнал $RecD_3$, поскольку сумма их относительных l^2 -энергий составляет 0,98 от l^2 -энергии $RecD_3$. Получаем разложение первой высокочастотной компоненты на следующие диапазоны:

$$\text{Gamma-1} = RecD_{3,(6,10)} + RecD_{3,(6,12)} + RecD_{3,(6,13)} + RecD_{3,(6,14)} + RecD_{3,(6,15)}.$$

Относительная энергия этих диапазонов и средние частоты (для первого канала) указаны в табл. 1.

При седьмом уровне разложения получается еще более «тонкое» разложение на 9 компонент, соответствующих узлам (7, 20), (7, 24), (7, 25), (7, 26), (7, 27), (7, 28), (7, 29), (7, 30), (7, 31).

Таблица 1

Значения относительных энергий и средних частот компонент Гамма-1

Параметры / узлы	(6, 10)	(6, 12)	(6, 13)	(6, 14)	(6, 15)
Относительная энергия	0,0129	0,4018	0,3020	0,0836	0,1792
Мгновенная частота	47,38	33,64	36,72	44,31	40,49
Средняя статистическая частота	46,875	32,875	37,75	44,25	40,0

Мы видим, что основную часть составляют компоненты $RecD_{3,(6,12)}$ и $RecD_{3,(6,13)}$. Результаты вычислений относительной энергии и средних частот новых диапазонов показывают их зависимость от выбора канала ЭЭГ, что говорит о том, что они регистрируют разную электрическую активность участков мозга. Наблюдается также зависимость параметров от состояния пациента (с открытыми и закрытыми глазами).

Пакетное разложение компоненты Гамма-2 ($RecD_2$) производится совершенно аналогично. Локализованные по частоте компоненты сигнала $RecD_2$ находятся в узлах (5, 13), (7, 48), (7, 49), (7, 50), (7, 51). Соответствующие диапазоны имеют частоты: диапазон узла (7, 48) – от 60 до 65 Гц, диапазон узла (7, 49) – от 64 до 67 Гц, диапазон узла (7, 51) – от 66 до 68 Гц, диапазон узла (7, 50) – от 68 до 71 Гц, диапазон узла (5, 13) – от 70 до 75 Гц. Найденные компоненты хорошо представляют весь сигнал $RecD_2$, сумма их относительных l^2 -энергий составляет 0,96 от l^2 -энергии всей компоненты $RecD_2$. В табл. 2 представлены относительная энергия и средние частоты компонент $RecD_{2,(5,13)}$, $RecD_{2,(7,48)}$, $RecD_{2,(7,49)}$, $RecD_{2,(7,50)}$ и $RecD_{2,(7,51)}$ для первого канала ЭЭГ. Более детальные результаты получаются при дальнейшем разложении в узле (5, 13). Тогда дополнительно к указанным выше компонентам добавляются (вместо (5, 13)) следующие: диапазон узла (7, 52) – от 76 до 80 Гц, диапазон узла (7, 53) – от 74 до 76 Гц, диапазон узла (7, 54) – от 69 до 73 Гц и диапазон узла (7, 55) – от 72 до 75 Гц.

Значения относительных энергий и средних частот компонент Гамма-2

Параметры / узлы	(5, 13)	(7, 48)	(7, 49)	(7, 50)	(7, 51)
Относительная энергия	0,1224	0,1764	0,2433	0,1710	0,2501
Мгновенная частота	72,2201	63,5380	65,2604	69,3311	67,4535
Средняя статистическая частота	71,875	62,875	65,125	69,125	67,625

Заключение

В данной работе методами вейвлет-анализа производится разложение ЭЭГ на частотные диапазоны, которые включают как классические ритмы ЭЭГ, так и ряд новых высокочастотных ритмов, которые получаются пакетным вейвлет-разложением. Для полученных вейвлет-компонент определены новые числовые характеристики, такие как относительная энергия и средние частоты двух типов. Вейвлет-разложения и вычисления указанных параметров проведены для 256 фрагментов сигнала ЭЭГ (по 4 фрагмента длительностью 8 с для каждого из 64 каналов ЭЭГ) для пациента как с открытыми, так и с закрытыми глазами. Вычисления показывают, что эти параметры существенно отличаются для разных каналов ЭЭГ, что говорит о том, что они регистрируют разную электрическую активность участков мозга. Показано также, что они зависят от условий регистрации ЭЭГ (с открытыми или закрытыми глазами). Введенные параметры, относительная энергия, средняя статистическая частота и средняя мгновенная частота компонент сигнала могут использоваться при автоматизированной обработке ЭЭГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aldroubi A., Unser M. Wavelets in Medicine and Biology. CRC Press, 1996. 640 p.
2. Павлов А.Н. и др. Вейвлет-анализ в нейродинамике // УФН. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939.
3. Гнездицкий В.В. Обратная задача ЭЭГ и клиническая электроэнцефалография (картирование и локализация источников электрической активности мозга). М. : МЕДпресс-информ, 2004. 624 с.
4. Swarnalatha R., Prasad D.V. Detection of Sleep Bruxism Based on EEG Hilbert Huang Transform // 5th International Conference on Biomedical Engineering and Technology (ICBET). IPCBEE, 2015. V. 81. P. 33–39.
5. Габова А.В. и др. Использование вейвлет-преобразований для анализа электрической активности мозга при болезни Паркинсона // Нервные болезни. 2012. № 3. С. 1–6. URL: http://www.atmosphere-ph.ru/modules/Magazines/articles/ner-vo/an_3_2012_02.pdf
6. Siddiqi A.H. et al. Spectral Analysis of Eeg Signals by using Wavelet and Harmonic Transforms // İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi. 2014. V. 3(9). P. 1–20.
7. Gajic D., Djurovic Z., Di Gennaro S. and Gustafsson F. Classification of EEG signals for detection of epileptic seizures based on wavelets and statistical pattern recognition // Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications. 2014. V. 26, No. 2. 1450021.
8. Подкур П.Н. О высокочастотных компонентах кардиосигнала // Седьмая Всероссийская научно-практическая конференция «Новые достижения в развитии электрокардиографии» ГУ НИИ кардиологии Томского научного центра СО РАМН Тюменский кардиологический центр. Тюмень, 2005. С. 123–126.
9. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М. : ДМК Пресс, 2013. 628 с.
10. Worrell G.A. et al. High frequency oscillations and seizure generation in neocortical epilepsy // Brain. 2004. Vol. 127. P. 1496–1506. URL: <http://brain.oxfordjournals.org/content/127/7/1496>
11. Grenier F., Timofeev I., Steriade M. Focal synchronization of ripples (80–200 Hz) in neocortex and their neuronal correlates // J. Neurophysiology. 2001. V. 86, No. 4. P. 1884–1898.
12. Смоленцев Н.К. MATLAB: программирование на Visual C#, Borland JBuilder, VBA: учебный курс. М. : ДМК Пресс ; СПб. : Питер, 2009. 456 с.

Подкур Полина Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: paulina.podkur@gmail.com

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Кемеровский институт (филиал)

Смоленцев Николай Константинович, д-р. физ.-мат. наук, профессор. E-mail: smolennk@mail.ru

Кемеровский государственный университет

Поступила в редакцию 29 января 2016 г.

Podkur Polina N., Smolentsev Nikolai K. (Kemerovo Institute (branch) of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo State University, Russian Federation).

Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms.

Keywords: wavelet analysis; wavelet packet analysis; electroencephalogram; rhythms of EEG; high-frequency components EEG.

DOI: 10.17223/19988605/35/6

This work is devoted to the study of signal electroencephalogram (EEG) by wavelet analysis methods. Traditionally for study of EEG, statistical methods and methods of the analysis Fourier are used. It is considered that the upper boundary frequency of normal EEG, noticeably influencing on its form does not exceed 30 Hz. The fact that higher frequencies are not visible, and in the Fourier spectrum of all EEG signal, the power spectrum of low-frequency part of EEG signal far exceeds and overrides the power spectrum of high frequency oscillations therefore the high frequency ranges are also practically closed for study. Wavelet analysis allows decomposing the entire EEG signal into separate components, which include both traditional rhythms: Delta, Theta, Alpha, Beta and Gamma and series of new frequency localized rhythms. This allows to consider them independently of each other and makes it possible to study separately the frequency and other properties of each component, including high frequency which poorly known at present. In this paper, we propose a new approach for obtaining numerical characteristics of the EEG based on the multilevel wavelet package decomposition and applying the Hilbert transformation, which allows to clearly allocate new frequency bands, to obtain visualization, and new numerical characteristics of the EEG. It is shown that by the wavelet decomposition up to the 6th level with the Meyer wavelet, the EEG signal is decomposed into wavelet components

$$EEG = RecD_1 + RecD_2 + RecD_3 + RecD_4 + RecD_5 + RecD_6 + RecA_6,$$

where $RecD_4$, $RecD_5$, $RecD_6$, and $RecA_6$ are classic ranges of Beta, Alpha, Theta and Delta, respectively, and the other $RecD_1$, $RecD_2$, and $RecD_3$ represent the part of the signal, which is usually called Gamma range. In this case, the range $RecD_1$ has a relative l^2 -energy of about 10^{-7} , and its frequency spectrum is allocated from 75 to 250 Hz, therefore $RecD_1$ not considered in this work as a separate range of EEG signal. Frequency spectra of the components $RecD_2$ and $RecD_3$ are localized: $RecD_3$ – from 28 Hz to 50 Hz and $RecD_2$ – from 57 Hz to 75 Hz. In the work these ranges are named *Gamma-2* and *Gamma-1*, respectively. In addition to the common numeric characteristics of all the bands, in this work three characteristics are defined: the relative energy of component, the average instantaneous frequency and the average statistical frequency of component. The calculation of these parameters for 256 fragments of EEG signal are conducted (in 4 fragments with a duration of 8 seconds, for each of the 64 channels of EEG) for the patient as open as with eyes closed. Calculations show that these numerical characteristics differ significantly for different EEG channels, this suggests that these parameters record the electrical activity of different brain regions. It is also shown that they depend on the recording conditions of EEG (with open or closed eyes). It turned out that the average instantaneous and average statistical frequency for the high-frequency components $RecD_2$ and $RecD_3$ behave unstably in case of small shifts of the fragment of the signal. The reason is that a significant part of their frequency spectra of power although is localized, but is distributed widely: from 28 Hz to 50 Hz or from 57 Hz to 75 Hz, respectively. These EEG components need further decomposition into narrower frequency ranges. For better frequency localization, these components are decomposed into several parts using the wavelet packet decomposition. In each case, the packet nodes of the tree decomposition are found, which allow to decompose $RecD_2$ and $RecD_3$ on new bands with good frequency localization:

$$RecD_3 = RecD_{3,(6,10)} + RecD_{3,(6,12)} + RecD_{3,(6,13)} + RecD_{3,(6,14)} + RecD_{3,(6,15)},$$

$$RecD_2 = RecD_{2,(5,13)} + RecD_{2,(7,48)} + RecD_{2,(7,49)} + RecD_{2,(7,50)} + RecD_{2,(7,51)}.$$

The relative energy and average frequencies are calculated for obtained ranges. Thus, in this work, additionally to four classical EEG rhythms 10 bands with good frequency localization are found, which allow to determine their frequency characteristics.

REFERENCES

1. Aldroubi, A. & Unser, M. (1996) *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press.
2. Pavlov, A.N. Hramov, A.E., Koronovskii, A.A., Sitnikova, E.Yu., Makarov, V.A. & A.A. Ovchinnikov (2012) Wavelet analysis in neurodynamics. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*. 182(9). pp. 905-939. (In Russian).
3. Gnezditskiy, V.V. (2004) *Obratnaya zadacha EEG i klinicheskaya elektroentsefalografiya (kartirovanie i lokalizatsiya istochnikov elektricheskoy aktivnosti mozga)* [Converse task of EEG and clinical electroencephalography (mapping and localization of sources of brain electrical activity)]. Moscow: MEDpress-inform.
4. Swamalatha, R. & Prasad, D.V. (2015) Detection of Sleep Bruxism Based on EEG Hilbert Huang Transform. *5th International Conference on Biomedical Engineering and Technology (ICBET)*. 81. pp. 33-39. DOI: 10.7763/ICBET. 2015. V81. 7
5. Gabova, A.V., Gnezditskiy, V.V., Karabanov, A.V. et al. (2012) Ispol'zovanie veyvlet-preobrazovaniy dlya analiza elektricheskoy aktivnosti mozga pri bolezni Parkinsona [The use of wavelet transforms for analysis of electrical brain activity in Parkinson's disease]. *Nervnye bolezni*. 3. pp. 1-6. [Online] Available from: http://www.atmosphere-ph.ru/modules/Magazines/articles/nervo/an_3_2012_02.pdf.
6. Siddiqi, A.H. et al. (2014) Spectral Analysis of Eeg Signals by using Wavelet and Harmonic Transforms. *İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi*. 3(9). pp. 1-20.
7. Gajic, D., Djurovic, Z., Di Gennaro, S. & Gustafsson, F. (2014) Classification of EEG signals for detection of epileptic seizures based on wavelets and statistical pattern recognition. *Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications*. 26(2). DOI: 10.4015/S1016237214500215.
8. Podkur, P.N. (2005) [About high frequency components of ECG]. *Novye dostizheniya v razvitii elektrokardiografii* [New achievements in the development of electrocardiography]. The Seventh All-Russian Scientific-Practical Conference, State Scientific Research Institute of Cardiology Tomsk Scientific Centre SB RAMS, Tyumen Cardiology Center. Tyumen. pp. 123-126. (In Russian).
9. Smolentsev, N.K. (2013) *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB* [Fundamentals of the theory of wavelets]. Moscow: DMK Press.
10. Worrell, G.A., Parish, L., Cranstoun, S. & Litt, B. (2004) High frequency oscillations and seizure generation in neocortical epilepsy. *Brain*. 127. P. 1496-1506. DOI: 10.1093/brain/awh149
11. Grenier, F., Timofeev, I. & Steriade, M. (2001) Focal synchronization of ripples (80–200 Hz) in neocortex and their neuronal correlates. *Journal of Neurophysiology*. 86(4). pp. 1884-1898.
12. Smolentsev, N.K. (2009) *MATLAB: programmirovaniye na Visual C#, Borland JBuilder, VBA* [MATLAB: programming in Visual C#, Borland JBuilder, VBA]. Moscow: DMK Press; St. Petersburg: Piter.

В.П. Шуленин

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РОБАСТНЫХ ОЦЕНОК МАСШТАБНОГО ПАРАМЕТРА

Изучаются свойства робастных оценок масштабного параметра. Показано, что оценка медианы абсолютных разностей имеет асимптотически нормальное распределение, является В-робастной и имеет ограниченную функцию влияния. Приводятся результаты сравнения оценок масштабного параметра в рамках гауссовской модели с засорением.

Ключевые слова: масштабный параметр; робастные оценки; функция влияния.

Масштабный параметр используется в качестве меры, характеризующей степень разброса случайной величины, и определяется в виде функционала от функции распределения наблюдений. Общие требования, предъявляемые к таким функционалам, сформулированы в работах [1, 2]. Традиционно используемые на практике оценки масштабного параметра, такие как выборочная оценка $\hat{S}_1(0)$ стандартного отклонения $S_1(F)$ и оценка $\hat{S}_2(0)$ среднего абсолютных отклонений $S_2(F)$, имеют неограниченные функции влияния и очень чувствительны к наличию выбросов в выборке. Урезанные варианты этих оценок $\hat{S}_1(\alpha)$ и $\hat{S}_2(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1/2$, которые вычисляются не по исходной выборке $X_1, \dots, X_n$, а на основе упорядоченной статистики $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$, из которой предварительно удаляются $[\alpha n]$ наименьших и наибольших порядковых статистик, имеют ограниченные функции влияния, и их характеристики существенно зависят от параметра α , что на практике приводит к дополнительным усилиям по выбору этого параметра, например с помощью адаптивного подхода, и это усложняет оценку. Выборочные оценки $\hat{S}_3(\alpha) = [X_{(n-[\alpha n])} - X_{([\alpha n])}] / 2$, $0 < \alpha < 1/2$, интер- α -квантильных размахов имеют ограниченные функции влияния, но их асимптотические эффективности по отношению к оценке стандартного отклонения при нормальном распределении Φ очень низкие. Например, для оценки интерквартильного размаха $\hat{S}_3(0,25)$ асимптотическая относительная эффективность равна $AOЭ_{\Phi}(\hat{S}_3(0,25) : \hat{S}_1(0)) = 0,37$. В теории робастного оценивания параметров (см., например, [3–6]) при построении оценок масштабного параметра обычно используют медиану абсолютных отклонений от медианы, выборочная оценка которой записывается в виде $\hat{S}_3^* = \text{med}\{|X_i - \text{med}(X)|, 1 \leq i \leq n\}$. Эта оценка имеет ограниченную функцию влияния, для неё «точка срыва» (breakdown point) равна максимально возможному значению, равному $1/2$, но при этом её эффективность невелика, и при нормальном распределении Φ также имеем $AOЭ_{\Phi}(\hat{S}_3^* : \hat{S}_1(0)) = 0,37$. Таким образом, мы приходим к необходимости построения новых оценок масштабного параметра, и с ограниченными функциями влияния, и с высокой эффективностью при нормальном распределении. К числу таких оценок относится рассматриваемая в работе медиана абсолютных разностей $\hat{S}_4 = \text{med}\{|X_i - X_j|, 1 \leq i < j \leq n\}$, которая входит в семейство обобщённых L-оценок [7]. В данной работе доказана асимптотическая нормальность этой оценки, отмечено, что она имеет ограниченную функцию влияния и высокую эффективность при нормальном распределении. Приведены результаты сравнения оценок в рамках гауссовской модели с масштабным засорением.

1. Обсуждение общего подхода к построению оценок масштабного параметра

Введем необходимые понятия и обозначения. Пусть X – изучаемая случайная величина с функцией распределения $F(x)$, $x \in R^1$, которая абсолютно непрерывна, имеет плотность $f(x)$, $x \in R^1$, и симметрична

относительно точки θ_x , т.е. $F \in \mathfrak{Z}_{S|\theta}$, где $\mathfrak{Z}_{S|\theta} = \{F : F(x) = 1 - F(2\theta_x - x), \forall x \in R^1\}$. Масштабный параметр функции распределения F используется в качестве меры, характеризующей степень разброса случайной величины (с.в.) X с функцией распределения (ф.р.) F . Рассмотрим такие меры, которые могут быть представлены в виде функционала $S(F)$, $F \in \mathfrak{Z}$, заданного на множестве допустимых распределений $\mathfrak{Z}$ в условиях эксперимента, связанного с изучением с.в. X по статистическим данным $X_1, \dots, X_n$, полученным в серии n независимых и повторных наблюдений над с.в. X . Выборочная оценка $\hat{S}(X_1, \dots, X_n)$ функционала $S(F)$, $F \in \mathfrak{Z}$, построенная методом подстановки, записывается в виде $\hat{S}(X_1, \dots, X_n) = S(F_n)$, где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$. Общие требования, которым должен удовлетворять функционал $S(F)$, описывающий разброс случайной величины X , сформулированы Бикелем и Леманом [1, 2]. Для формулировки этих требований напомним определения.

Определение 1. О случайных величинах X_1 и X_2 с функциями распределений F_1 и F_2 говорят, что с.в. X_2 стохастически больше, чем с.в. X_1 (при этом используют обозначение в виде $F_1 <_{st} F_2$), если выполняется неравенство $P(X_1 > x) \leq P(X_2 > x)$, $\forall x \in R^1$. Отметим, что $F_1 <_{st} F_2 \Rightarrow F_1(x) \geq F_2(x)$, $\forall x \in R^1$ и $F_1^{-1}(t) \leq F_2^{-1}(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Определение 2. Говорят, что выборочная оценка $\hat{S}(X_1, \dots, X_n) = S(F_n)$ функционала $S(F)$, $F \in \mathfrak{Z}$, является эквивариантной относительно линейных преобразований наблюдений $X_1, \dots, X_n$, если выполняется равенство $\hat{S}(aX_1 + b, \dots, aX_n + b) = |a| \hat{S}(X_1, \dots, X_n)$.

Определение 3. Разброс с.в. X относительно θ_x (масштабный параметр с.в. X) определяют в терминах «расстояния» X от θ_x , т.е. с помощью величины $|X - \theta_x|$, при этом говорят, что с.в. X_1 имеет больший разброс относительно θ_{x_1} , чем с.в. X относительно θ_x , если с.в. $|X_1 - \theta_{x_1}|$ стохастически больше с.в. $|X - \theta_x|$.

Определение 4. Согласно условиям Бикеля и Лемана [1, 2] функционал $S(F)$, $F \in \mathfrak{Z}$, определяет меру разброса, или масштабный параметр ф.р. F , если его выборочная оценка $\hat{S}(X_1, \dots, X_n) = S(F_n)$ является эквивариантной относительно линейных преобразований наблюдений $X_1, \dots, X_n$ и он удовлетворяет условию монотонности относительно стохастического возрастания распределений, т.е. выполняется выражение $S(F_1) \leq S(F_2)$ для $F_1 <_{st} F_2$, где F_1 и F_2 – функции распределения вероятностей случайных величин $|X_1 - \theta_{x_1}|$ и $|X_2 - \theta_{x_2}|$.

Замечание 1. Отметим, что выбор конкретного функционала для описания масштабного параметра может быть продиктован различными требованиями. Так, в работе [2] кроме условия эквивариантности оценки относительно линейных преобразований накладывается требование непрерывности функционала относительно метрики, порождающей слабую сходимость. Выполнение этого требования приводит к оценкам функционалов, удовлетворяющих условиям качественной робастности [3, 4]. Окончательный выбор может осуществляться путем сравнения точностей, с которыми каждый функционал может быть оценен по наблюдениям в рамках заданной супермодели. Множество различных функционалов, характеризующих масштабный параметр, условно можно разделить на следующие группы.

К первой группе относятся функционалы, построенные с помощью отклонений каждого члена генеральной совокупности от некоторого «центрального» (типичного значения) с.в. X с ф.р. F . Обычно в качестве такого значения используется параметр положения, определённый функционалом $T(F)$, либо в виде среднего $T_1(F) = \int x dF(x) = M(X)$, либо в виде медианы $T_2(F) = F^{-1}(1/2) = MED(X)$. Обозначим ф.р. $|X - T(F)|$ через F_1 и ф.р. $|X_1 - X_2|$, где X_1 и X_2 – независимые с ф.р. F , через F_2 . Многих представителей первой группы можно описать с помощью функционалов вида

$$\left\{ \int_0^1 [F_i^{-1}(t)]^\gamma dV(t) \right\}^{1/\gamma}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где $V(t)$ – некоторая функция распределения на $[0, 1]$ и $\gamma > 0$. Например, если в (1) положить $i=1$, в качестве параметра положения выбрать среднее значение $T_1(F)$ и положить $V(t)=t$, $0 \leq t \leq 1$, то при $\gamma=1$ получим среднее абсолютных отклонений $S_2(F)$, выборочная оценка которого запишется в виде $\hat{S}_2(0) = n^{-1} \sum |X_i - \bar{X}|$. При $\gamma=2$ будем иметь стандартное отклонение. Если же положить $V(t)=t/(1-\alpha)$, $0 \leq t \leq 1-\alpha$, $0 \leq \alpha < 1/2$, то получим α -урезанные варианты указанных мер масштабного параметра. Другая часть этой группы определяется функционалом $F_1^{-1}(1/2)$. Например, при использовании в качестве параметра положения $T_2(F) = F^{-1}(1/2) = MED(X)$ получаем широко используемую в теории робастного оценивания медиану абсолютных отклонений от медианы $MED |X - MED(X)|$ [6–8].

Ко второй группе относятся функционалы, построенные с помощью отклонений между всеми членами генеральной совокупности. Некоторые представители этой группы также выражаются с помощью функционалов вида (1). Например, при $i=2$, $\gamma=1$, и $V(t)=t$, $0 \leq t \leq 1$, из (1) получим среднюю разность Джини, выборочная оценка которой записывается в виде $\hat{\Delta}_0 = [n(n-1)]^{-1} \sum |X_i - X_j|$. При $\gamma=2$ получаем стандартное отклонение, умноженное на $\sqrt{2}$. К этой же группе относится и медиана абсолютных разностей $MED |X_i - X_j|$, $1 \leq i, j \leq n$, определяемая с помощью функционала $S_4(F) = F_2^{-1}(1/2)$ [8, 10].

К третьей группе относятся функционалы, построенные с помощью расстояний между точками, в которых ф.р. F имеет характерные особенности. К таким точкам могут относиться, например, квантили заданных уровней. Некоторых представителей этой группы можно описать с помощью функционалов вида

$$\left\{ \int_0^1 |F^{-1}(t) - F^{-1}(1-t)|^\gamma dK(t) \right\}^{1/\gamma}, \quad (2)$$

где $K(t)$ – некоторая функция распределения на $[0, 1]$ и $\gamma > 0$. В частности, к этой группе относятся интер- α -квантильные размахи, определяемые в виде $[F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha)]/2$, $0 < \alpha < 1/2$. Отметим, что при $\alpha = 0,25$ получаем интерквартильный размах, который для симметричных распределений совпадает с медианой абсолютных отклонений от медианы, т.е. определяется функционалом $F_1^{-1}(1/2)$ при использовании в качестве параметра положения функционала $T_2(F) = F^{-1}(1/2) = MED(X)$. Подводя итог, отметим, что один из общих подходов построения различных (мер) функционалов от распределений, описывающих масштабный параметр, сводится, по существу, к следующему. Над исходной случайной величиной X осуществляется некоторое преобразование вида $|X - T_1(F)|^\gamma$, $|X - T_2(F)|^\gamma$, $|X_1 - X_2|^\gamma$, $\gamma > 0$, и т.п. Затем к преобразованным случайным величинам применяется либо «операция усреднения», либо «операция вычисления медианы», либо «операция вычисления оценки Ходжеса–Лемана» и т.п. Другими словами, функционал, описывающий масштабный параметр, определяется с помощью функционала, характеризующего параметр положения для преобразованных случайных величин. Например, «медианная операция», примененная к $|X - T_2(F)|^\gamma$ при $\gamma=1$, приводит к медиане абсолютных отклонений от медианы; «медианная операция», примененная к $|X_1 - X_2|^\gamma$ при $\gamma=1$, приводит к медиане абсолютных разностей; «операция усреднения» в этом случае приводит к средней разности Джини; «операция вычисления оценки Ходжеса–Лемана» приводит к еще не изученным оценкам масштабного параметра, например, такого вида:

$$\text{med}\{ [|X_i - \text{med}(X)| + |X_j - \text{med}(X)|]/2, 1 \leq i, j \leq n \}, \text{ med}\{ [|X_i - X_j| + |X_k - X_l|]/2, 1 \leq i, j, k, l \leq n \}.$$

При этом также возможно использование обобщенных оценок Ходжеса–Лемана и их урезанных вариантов. Применение этой схемы открывает большие возможности при построении новых мер масштабного параметра, при этом могут использоваться обширные результаты, полученные при изучении оценок параметра положения, включая их общие классы M -, L - и R -оценок, а также обобщенные L -оценки [7, 11–15].

Замечание 2. Отметим, что для выбранного функционала $S(F)$, $F \in \mathfrak{F}$, описывающего масштабный параметр с.в. X с ф.р. F , его выборочная оценка строится методом подстановки и записывается в виде $\hat{S}(X_1, \dots, X_n) = S(F_n)$, где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$. Асимптотическая нормальность таких оценок масштабного параметра изучается методом Мизеса с использованием теоремы Слущкого и центральной предельной теоремы [6, 15] на основе разложения

$$S(F_n) = S(F) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n IF(X_i; F, S) + o_p(n^{-1/2}), \quad (3)$$

где $IF(x; F, S)$ – функция влияния Хампеля [5, 9] оценки $\hat{S} = S(F_n)$ функционала $S(F)$, $F \in \mathfrak{F}$, которая определяется в виде

$$IF(x; F, S) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{S[(1-\lambda)F + \lambda\Delta_x] - S(F)}{\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad x \in R^1, \quad (4)$$

для тех $x \in R^1$, при которых предел существует. Здесь Δ_x обозначает вырожденную функцию распределения в точке $x \in R^1$. Асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}\hat{S}$ -оценки обозначается через $\sigma^2(F, \hat{S})$ и вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F, \hat{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} IF^2(x; F, S) dF(x). \quad (5)$$

Для сравнения различных оценок масштабного параметра при заданной ф.р. F будем использовать понятие асимптотической относительной эффективности, определенное через обратное отношение стандартизованных асимптотических дисперсий. Асимптотическую эффективность оценки $\hat{S}_1$ относительно $\hat{S}_2$ при заданной ф.р. F обозначим через $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_1 : \hat{S}_2)$ и, следуя работам [1, 2], определим в виде

$$AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_1 : \hat{S}_2) = \frac{\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}_2)}{\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}_1)}, \quad (6)$$

где $\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S})$ – стандартизованная дисперсия $\sqrt{n}\hat{S}$ -оценки, равная отношению асимптотической дисперсии к квадрату функционала, т.е.

$$\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}) = \sigma^2(F, \hat{S}) / S^2(F). \quad (7)$$

2. Асимптотическая нормальность выборочной медианы абсолютных разностей

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, порождённые ф.р. $F(x)$ с плотностью $f(x)$, $\forall x \in R^1$.

Обозначим функцию распределения с. в. $Y = |X_1 - X_2|$ через $H_F(y)$ и определим её в виде

$$H_F(y) = \iint I[|x_1 - x_2| \leq y] dF(x_1) dF(x_2) = \int [F(x+y) - F(x-y)] dF(x), \quad y \in R^1.$$

Плотность $h_F(y)$ ф.р. $H_F(y)$ равна

$$h_F(y) = \int [f(x+y) + f(x-y)] dF(x).$$

Эмпирическая функция распределения $H_n(y)$, значений $|X_i - X_j|$, $1 \leq i < j \leq n$, записывается в виде

$$H_n(y) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i < j} I[|X_i - X_j| \leq y].$$

Определим функционал $S_4(H_F)$ в виде

$$S_4(H_F) = H_F^{-1}(1/2), \quad (8)$$

где H_F^{-1} квантильная функция для ф.р. $H_F(y)$. Выборочная оценка $\hat{S}_4 = S_4(H_n)$ функционала $S_4(H_F)$, называемая выборочной медианой абсолютных разностей, входит в класс обобщенных L -оценок [7] и определяется в виде

$$S_4(H_n) = \text{med}\{|X_i - X_j|, 1 \leq i < j \leq n\} = \begin{cases} W_{(r+1)}, & N = 2r + 1, \\ \{W_{(r)} + W_{(r+1)}\} / 2, & N = 2r, \end{cases} \quad (9)$$

где $W_{(1)}, \dots, W_{(N)}$, $N = n(n-1)$, – упорядоченные значения «абсолютных разностей Джини» $|X_i - X_j|$, $1 \leq i < j \leq n$, число которых равно $N = n(n-1)$. Отметим, что при выполнении неравенства $h(H_F^{-1}(1/2)) > 0$ оценка $\hat{S}_4 = S_4(H_n)$ является асимптотически нормальной (см. [10], а также теорему (8.4.26) в [15]). Отметим также, что при изучении свойств робастности оценок важную роль играет функция влияния Хампеля, определяемая выражением (4). Приведем эту функцию для асимптотически эквивалентной оценки $\tilde{T}(F_n) = \text{med}\{|X_i - X_j|, 1 \leq i, j \leq n\}$. Эта оценка была предложена в [10]. Она является выборочной оценкой эквивалентного функционала $\tilde{T}(F)$, который в данном случае может быть определен через исходную ф.р. F неявно с помощью выражения

$$\int \int I(|x_1 - x_2| \leq \tilde{T}(F)) dF(x_1) dF(x_2) = \frac{1}{2}, \text{ или } \int [F(x + \tilde{T}(F)) - F(x - \tilde{T}(F)) - F(x)] dF(x) = 0. \quad (10)$$

Можно убедиться [14, 15], что дифференциал Гато первого порядка функционала $\tilde{T}(F)$, заданного выражением (10), вычисляется по формуле

$$d_1 \tilde{T}(F; G - F) = \frac{(1/2) - \int [F(x + \tilde{T}) - F(x - \tilde{T})] dG(x)}{\int [f(x + \tilde{T}) + f(x - \tilde{T})] dF(x)}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что функция влияния оценки $\tilde{T}(F_n)$ функционала $\tilde{T}(F)$, заданного выражением (10), определяется в виде

$$IF(x; \tilde{T}) = d_1 \tilde{T}(F; \Delta_x - F) = \frac{1 + 2F(x - \tilde{T}) - 2F(x + \tilde{T})}{2 \int [f(x + \tilde{T}) + f(x - \tilde{T})] dF(x)}, \quad x \in R^1. \quad (12)$$

Заметим, что для симметричных распределений функционал $\tilde{T}(F)$ определяется выражением

$$\int F(x + \tilde{T}) dF(x) = 3/4, \quad (13)$$

т.е. соответствует квантилю уровня $(3/4)$ для ф.р. случайной величины $Y = |X_1 - X_2|$. Используя разложение (3), можно убедиться [14, 15], что оценка $\tilde{T}(F_n)$ асимптотически нормальная, т.е. справедливо выражение

$$L\{\sqrt{n}[\tilde{T}(F_n) - \tilde{T}(F)] / \sigma(F, \tilde{T})\} = N(0, 1) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (14)$$

причем асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}\tilde{T}(F_n)$ -оценки вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F, \tilde{T}) = \int_{-\infty}^{\infty} IF^2(x; F, \tilde{T}) dF(x) = \frac{\int [1 + 2F(x - \tilde{T}) - 2F(x + \tilde{T})]^2 dF(x)}{4 \left(\int [f(x + \tilde{T}) + f(x - \tilde{T})] dF(x) \right)^2}. \quad (15)$$

Функции влияния различных оценок масштабного параметра при нормальном распределении Φ приведены на рис. 1. Отметим, что функция влияния оценки $\hat{S}_4$ медианы абсолютных разностей является *ограниченной*, следовательно, эта оценка является В-робастной [9] и подвержена меньшему влиянию выбросов в выборке $X_1, \dots, X_n$, по сравнению с традиционно применяемой оценкой $\hat{S}_1(0)$ стандартного отклонения, оценкой $\hat{S}_2(0)$ среднего абсолютных отклонений и оценкой средних разностей Джини Δ_α , $0 \leq \alpha < 1/2$ [13].

Пример 1. Приведем результаты сравнения оценки $S_4(F)$ с оценкой $\hat{S}_1(0)$ стандартного отклонения и оценкой $\hat{S}_2(0)$ среднего абсолютных отклонений в рамках супермодели с засорением вида $\mathfrak{T}_{\varepsilon, \tau}(\Phi) = \{F : F(x) = \Phi_{\varepsilon, \tau}(x)\}$, где $\Phi_{\varepsilon, \tau}(x) = (1 - \varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x/\tau)$. Учитывая, что $\Phi_{\varepsilon, \tau}(x) \in \mathfrak{T}_{S|0}$, выражение (13), определяющее функционал $S_4(F)$, перепишем в виде

$$\int \Phi_{\varepsilon, \tau}(x + S_4) d\Phi_{\varepsilon, \tau}(x) - (3/4) = 0.$$

Формула (15) для асимптотической стандартизованной дисперсии переписывается в виде

$$\tilde{\sigma}^2(F, \tilde{T}) = \frac{\pi^2 \int [1 + 2\Phi_{\varepsilon, \tau}(x - S_4) - 2\Phi_{\varepsilon, \tau}(x + S_4)]^2 d\Phi_{\varepsilon, \tau}(x)}{S_4^2 \cdot [(1 - \varepsilon)J_1 + \varepsilon(1 - \varepsilon)J_2 / \tau + \varepsilon^2 J_3 / \tau^2]^2},$$

где

$$J_1 = \sqrt{\pi} \exp\{-S_4^2 / 4\}, J_2 = [\tau \sqrt{2\pi} / \sqrt{1 + \tau^2}] \exp\{-(1/2)(S_4 / \tau)^2\}, J_3 = \tau \sqrt{\pi} \exp\{-S_4^2(2 - \tau^2) / 4\tau^2\}.$$

Численные расчеты относительных эффективностей $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_1(0))$ медианы абсолютных разностей $\hat{S}_4$ по отношению к оценке $\hat{S}_1(0)$ стандартного отклонения и относительных эффективностей $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_2(0))$ для $F \in \mathfrak{F}_{\varepsilon, \tau}(\Phi)$ при различных ε и τ приведены в табл. 1.

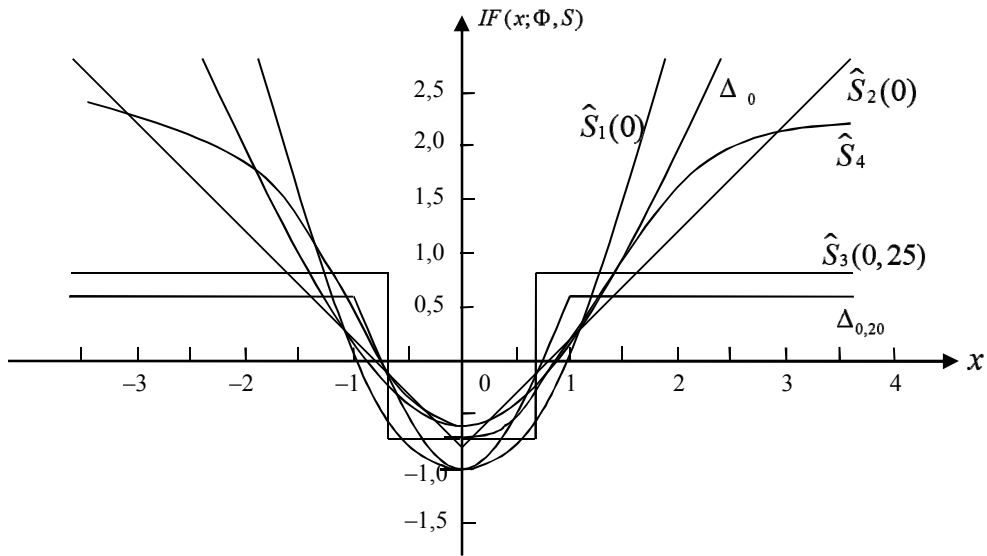


Рис. 1. Функции влияния оценок масштабного параметра

Таблица 1

Относительные эффективности $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_1(0))$ и $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_2(0))$ для $F \in \mathfrak{F}_{\varepsilon, \tau}(\Phi)$

τ	$AO\mathfrak{E}(\hat{\theta}_1 : \hat{\theta}_2)$	$\varepsilon = 0,00$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,05$	$\varepsilon = 0,10$	$\varepsilon = 0,15$	$\varepsilon = 0,20$
$\tau = 3$	$\hat{S}_4 : \hat{S}_1(0)$	0,864	1,507	2,383	2,211	1,816	1,459
$\tau = 3$	$\hat{S}_4 : \hat{S}_2(0)$	0,986	1,048	1,172	1,163	1,075	0,967
$\tau = 5$	$\hat{S}_4 : \hat{S}_1(0)$	0,864	5,471	6,733	4,395	2,751	1,735
$\tau = 5$	$\hat{S}_4 : \hat{S}_2(0)$	0,986	1,335	1,988	1,958	1,616	1,230

Из данных таблицы видно, что оценка $\hat{S}_4$ медианы абсолютных разностей, проигрывая по эффективности оценке $\hat{S}_1(0)$ стандартного отклонения при нормальном распределении ($\varepsilon = 0$) менее 14%, а оценке $\hat{S}_2(0)$ среднего абсолютных отклонений лишь 2%, обладает существенным преимуществом при отклонении от нормального распределения в рамках супермодели $\mathfrak{F}_{\varepsilon, \tau}(\Phi)$. В частности, при изменении пропорции засорения ε в интервале $0 < \varepsilon < 0,2$ приведенные эффективности больше единицы. Отме-

ченное преимущество возрастает при «утяжелении хвостов распределений» (при увеличении ε и масштабного параметра τ засорения нормального распределения). Напомним также, что оценка $\hat{S}_4$, в отличие от оценок $\hat{S}_1(0)$ и $\hat{S}_2(0)$, имеет *ограниченную функцию влияния* (см. рис. 1).

Пример 2. Пусть исходная функция распределения F является распределением Лапласа с плотностью $f(x) = (1/2)\exp\{-|x|\}$, $x \in R^1$. В этом случае выражение (13) принимает вид уравнения $\ln(2 + S_4) - S_4 = 0$, решением которого является значение функционала $S_4(F) \approx 1,146$. Асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}\hat{S}_4$ -оценки в данном случае, вычисленная по формуле (15), равна 1,685. Следовательно, стандартизованная дисперсия равна $\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}_4) = 1,685 / (1,146)^2 = 1,277$. Для сравнения отметим, что при распределении Лапласа для оценок $\hat{S}_1(0)$ и $\hat{S}_2(0)$ имеем $\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}_1(0)) = 1,250$, $\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}_2(0)) = 1,000$. Следовательно, относительные эффективности при распределении Лапласа равны $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_1(0)) = 0,98$, $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_2(0)) = 0,78$.

Приведем теперь результаты сравнения оценки $\hat{S}_4$ с оценками $\hat{S}_3(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, семейства интер- α -квантильных размахов. Согласно формуле (15) для распределения Лапласа имеем $\tilde{\sigma}^2(F, \hat{S}_3(\alpha)) = (1 - 2\alpha) / 2\alpha(\ln 2\alpha)^2$. Численные значения относительной эффективности $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_3(\alpha))$ оценок $\hat{S}_4$ и $\hat{S}_3(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, для распределения Лапласа приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Относительные эффективности $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_3(\alpha))$, F -распределение Лапласа

α	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,30$
$AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_3(\alpha))$	1,33	1,21	1,26	1,40	1,63	2,00

Из таблицы видно, что оценка $\hat{S}_4$ медианы абсолютных разностей при распределении Лапласа эффективнее любой оценки $\hat{S}_3(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, из семейства интер- α -квантильных размахов. В частности, её эффективность по отношению к оценке $\hat{S}_3^* = \text{med}\{|X_i - \text{med}(X)|, 1 \leq i \leq n\}$ при распределении Лапласа равна $AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_3^*) = AO\mathfrak{E}_F(\hat{S}_4 : \hat{S}_3(0,25)) = 1,63$.

Заключение

В работе обсуждается общий подход к построению робастных оценок масштабного параметра, который основан на использовании робастных оценок параметра положения для предварительно преобразованных наблюдений. Отмечено, что предложенная в [10] выборочная оценка в виде медианы абсолютных разностей, т.е. оценка $\tilde{T}(F_n) = \text{med}\{|X_i - X_j|, 1 \leq i, j \leq n\}$, является В-робастной, её функция влияния Хампеля ограничена, она подвержена меньшему влиянию выбросов в выборке, чем традиционно используемые оценки $\hat{S}_1(0)$ стандартного отклонения $S_1(F)$ и оценка $\hat{S}_2(0)$ среднего абсолютных отклонений $S_2(F)$. Для предложенной оценки приведены параметры асимптотически нормального распределения. Проведено сравнение оценок и показано, что предложенная оценка $\tilde{T}(F_n) = \text{med}\{|X_i - X_j|, 1 \leq i, j \leq n\}$ имеет высокую эффективность и при нормальном распределении, и в рамках гауссовской модели с масштабным засорением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bickel P.J., Lehmann E.L. Measures of location and scale // Proc. Prague Symp. Asymptotic Statist. 1973. Prague Charles Univ. 1974. V. 1. P. 25–36.

2. Bickel P.J., Lehmann E.L. Descriptive statistics for nonparametric models. III // Dispersion. Ann. Statist. 1976. V. 4, No. 6. P. 1139–1158.
3. Hampel F.R. Contribution to the theory of robust estimation : Ph. D. diss. Berkeley : Univ. California, 1968. 103 p.
4. Hampel F.R. A general qualitative definition of robustness // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. P. 1887–1896.
5. Hampel F.R. The influence curve and its role in robust estimation // J. Amer. Statist. Assoc. 1974. V. 69, No. 346. P. 383–393.
6. Serfling R.J. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. N.Y. : Wiley, 1980. 371 p.
7. Serfling R.J. Generalized L-M-R-statistics // Ann. Statist. 1984. V. 12. P. 76–86.
8. Rousseeuw P.J., Croux C. Alternatives to the Median Absolute Deviation // Journal of the American Statistical Association. 1993. V. 88, No. 424. P. 1273–1283.
9. Хампель Ф., Ронchetti Э., Рауссей П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М. : Мир, 1989. 512 с.
10. Шуленин В.П. Исследование свойств оценки медианы абсолютных разностей // V Совещание-семинар по непараметрическим и робастным методам статистики в кибернетике. Томск, 1987. Ч. II. С. 460–467.
11. Шуленин В.П. Асимптотические свойства и робастность обобщенных L-оценок // Труды V Международной конференции по теории вероятности и математической статистике. Вильнюс, 1989. Т. 4. С. 377–378.
12. Шуленин В.П. Асимптотические свойства обобщенных L-оценок, вычисляемых по урезанным выборкам // Непараметрические и робастные статистические методы в кибернетике и информатике. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1990. С. 564–570.
13. Шуленин В.П. Исследование устойчивости и асимптотических свойств урезанной средней разности Джини // Труды IV Международной конференции по теории вероятности и математической статистике. Вильнюс, 1985. С. 330–332.
14. Шуленин В.П. Введение в робастную статистику. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
15. Шуленин В.П. Математическая статистика. Ч. 3 : Робастная статистика : учебник. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. 520 с.

Шуленин Валерий Петрович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: shvp@fpmk.tsu.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 15 февраля 2016 г.

Shulenin Valery P. (Tomsk State University, Russian Federation).

Asymptotic properties of robust estimators of scale parameters.

Keywords: scale parameter; robust estimator; influence function; asymptotic relative efficiency.

DOI: 10.17223/19988605/35/7

This paper deals with asymptotic robust properties of some estimators of scale parameter by the ε -contamination of the model distributions: $F = \Phi_{\varepsilon, \tau}(x) = (1 - \varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x/\tau)$, ε is a known proportion of contamination ($0 < \varepsilon < 1/2$), τ is a known scale parameter and Φ is the standard Gaussian distribution function.

Assume that $X_1, \dots, X_n$ is a random sample with distribution function $F(x)$ and F has a density $f(x)$, $x \in R^1$. Let $T(F)$, $F \in \mathfrak{F}$, is a generic scale functional and $T_n(X_1, \dots, X_n) = T(F_n)$ is its sample estimator. We consider the functional $T(F)$ defined by $\int [F(x + T(F)) - F(x - T(F)) - F(x)]dF(x) = 0$ and the location invariance and scale equivariance sample estimators of the functional $T(F)$, $F \in \mathfrak{F}$. The sample estimator of this functional $T(F)$ is given by $T_n(X_1, \dots, X_n) = \text{med} \{ |X_i - X_j|, 1 \leq i, j \leq n \}$. This estimator is also named as the median of the absolute differences.

The purpose of this article is to study asymptotic robust properties T_n – estimators for different models distributions. The formal calculation of the Influence Function $IF(x; F, T)$ is given by

$$IF(x; F, T) = d_1 T(F; \Delta_x - F) = \frac{1 + 2F(x - T) - 2F(x + T)}{2 \int [f(x + T) + f(x - T)]dF(x)}, \quad x \in R^1.$$

Note that Influence Function $IF(x; F, T)$ is bounded and looks like as the U-shaped curve. If $\int [f(x + T) + f(x - T)]dF(x) > 0$, then the random variable $\sqrt{n}\{T_n - T(F)\} / \sigma(F, T_n)$ has asymptotically standard normal distribution, where the asymptotic variance of $\sqrt{n}T_n$ is given by the following formula:

$$\sigma^2(F, T_n) = \int_{-\infty}^{\infty} IF^2(x; F, T)dF(x) = \frac{\int [1 + 2F(x - T) - 2F(x + T)]^2 dF(x)}{4 \left(\int [f(x + T) + f(x - T)]dF(x) \right)^2}.$$

The paper contains numerical comparisons for some estimators of scale parameters by ε – contamination of the model distribution for different values of ε and τ . It is shown that for normal distribution asymptotic relative efficiency T_n – estimator with respect to $\hat{S}_1$ having the classical standard deviation is equal: $ARE_{\Phi}(T_n : \hat{S}_1) = 0.86$ and $ARE_{\Phi}(T_n : \hat{S}_2) = 0.98$, where $\hat{S}_2$ has the average absolute deviation.

REFERENCES

1. Bickel, P.J. & Lehmann, E.L. (1974) Measures of location and scale. *Proc. Prague Symp. Asymptotic Statist.* 1. Prague Charles University. pp. 25–36.
2. Bickel, P.J. & Lehmann, E.L. (1976) Descriptive statistics for nonparametric models. III. Dispersion. *Annual Statistics*. 4(6). pp. 1139–1158.
3. Hampel, F.R. (1968) *Contribution to the theory of robust estimation*. Ph. D. Diss. Berkeley, Univ. California.
4. Hampel, F.R. (1971) A general qualitative definition of robustness. *Annual Mathematical Statistics* 42. pp. 1887–1896. DOI: 10.1214/aoms/1177693054
5. Hampel, F.R. (1974) The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of American Statistical Association*. 69(346). pp. 383–393. DOI: 10.1080/01621459.1974.10482962
6. Serfling, R.J. (1980) *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. New York: Wiley.
7. Serfling, R. J. (1984) Generalized L-M-R-statistics. *Annual Statistics*. 12. pp. 76–86.
8. Rousseeuw, P.J. & Croux, C. (1993) Alternatives to the Median Absolute Deviation. *Journal of the American Statistical Association*. 88(424). pp. 1273–1283. DOI: 10.1080/01621459.1993.10476408
9. Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P. & Stahel, W. (1989) *Robastnost' v statistike. Podkhod na osnove funktsiy vliyaniya* [Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions]. Moscow: Mir.
10. Shulenin, V.P. (1987) [Studying the properties of the median absolute differences of assessment]. *V Soveshchanie-seminar po neparametricheskim i robustnym metodam statistiki v kibernetike* [Proc. of the Fifth Conference on nonparametric and robust methods of statistics in cybernetics]. Tomsk. pp. 460–467. (In Russian).
11. Shulenin, V.P. (1989) [The asymptotic properties and robustness of generalized L-assessments]. *Trudy V Mezhdunarodnoy konferentsii po teorii veroyatnosti i matematicheskoy statistike* [Proc. of the Fifth International Conference on the Theory of Probability and Mathematical Statistics]. Vilnius. pp. 377–378. (In Russian).
12. Shulenin, V.P. (1990) Asimptoticheskie svoystva obobshchennykh L-otsenok, vychislyaemykh po urezannym vyborkam [The asymptotic properties of generalized L-estimates calculated by the trimmed samples]. In: Tarasenko, F.P. (ed.) *Neparametricheskie i robustnye statisticheskie metody v kibernetike i informatike* [Nonparametric and robust statistical methods in cybernetics and computer science]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 564–570.
13. Shulenin, V.P. (1985) [Investigation of the stability and asymptotic properties of the truncated mean difference Gini]. *Trudy IV Mezhdunarodnoy konferentsii po teorii veroyatnosti i matematicheskoy statistike* [Proc. of the Fourth International Conference on the Theory of Probability and Mathematical Statistics] Vilnius. pp. 330–332. (In Russian).
14. Shulenin, V.P. (1993) *Vvedenie v robustnuyu statistiku* [Introduction into Robust Statistics]. Tomsk: Tomsk State University.
15. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Math statistics]. Part 3. Tomsk: NTL.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.922

DOI: 10.17223/19988605/35/8

П.В. Сенченко, Д.А. Ознабихин, В.Ф. Тарасенко

ЗАДАЧА АВТОМАТИЧЕСКОЙ КАЛИБРОВКИ ПРОЕКТОРА И СЕНСОРА ГЛУБИНЫ

Рассматриваются варианты использования устройств интерактивного взаимодействия. Предложен пошаговый алгоритм определения взаимного расположения сенсора глубины пространства и проектора изображения. Определены необходимые этапы процесса предварительной обработки, позволяющие осуществлять процесс калибровки в автоматическом режиме. Представлены механизмы проецирования, поиска и определения глубины. Описан принцип преобразования локальных координат датчика в глобальные координаты. Предложена методика определения координат расположения проектора и определения направления проецирования. Описан процесс трансформации из глобального пространства в локальное пространство проектора. Представлен вариант получения общего преобразования локальных координат датчика в локальные координаты проектора.

Ключевые слова: сенсор глубины; автоматическая калибровка; дополненная реальность; Kinect; компьютерная графика.

В настоящее время все большую популярность получают устройства, способные перевести интерактивное взаимодействие человека и вычислительной техники на качественно более высокий уровень. Такие устройства, как Microsoft Kinect – сенсорный игровой контроллер, разработанный компанией Microsoft для консоли Xbox 360 [1], Asus X-tion – игровой контроллер и платформа фирмы ASUS, применяемая для разработки приложений на основе распознавания движений [2], PrimeSense – сенсорный контроллер отслеживания движения, правами на который обладает Apple [3], находят применение в различных сферах деятельности: в оборонной промышленности, робототехнике, медицине, образовании, игровой индустрии.

В системах дополненной реальности, где роль таких интерактивных устройств играют, с одной стороны, сенсорный контроллер, а с другой – проектор для визуальной модификации сцены, возникает необходимость решения задачи определения геометрии поверхности реального пространства и сопоставления этой поверхности с проецируемым изображением. Процесс калибровки обоих устройств обычно осуществляется в ручном режиме самостоятельно пользователем системы, что не позволяет достаточно точно получить необходимое преобразование и, как следствие, добиться желаемого уровня отображения виртуального представления.

Существуют различные методики калибровки [4–6], каждая из которых обладает определенными преимуществами и недостатками. Так, применение одного из современных методов калибровки при помощи шахматной доски не всегда возможно в автоматическом режиме по причине необходимости периодического перемещения доски для более точной калибровки.

В некоторых случаях процесс калибровки становится технически затруднительным или вообще невозможным. Задача калибровки может быть решена путем формализации алгоритма автоматической калибровки системы, программная реализация которого позволяет получить необходимое преобразование координат системой в автоматическом режиме.

1. Постановка задачи калибровки сенсора глубины и проектора

Одним из вариантов использования технологии дополненной реальности является «Виртуальная песочница», представляющая собой комбинацию обычной песочницы, трехмерного датчика Microsoft

Kinect, программного обеспечения моделирования и визуализации, а также с обычного проектора (иногда нескольких проекторов), обеспечивающего визуализацию представления изображения. Ландшафты, создаваемые из песка, выделяются в режиме реального времени цветами, соответствующими высоте возвышения, топографическими контурными линиями и виртуальной водой [7].

В процессе разработки сложных программных систем моделирования и визуализации, в основе которых лежит обработка графической информации [8], возникает необходимость сопоставления координаты облака точек, принимаемых с сенсора глубины, и координат пространства, проецируемых проектором. Такие действия позволят дополнять реальное изображение данными виртуального пространства. Для сопоставления координат необходимо выполнить преобразование

$$ProjectorSpace = VPTransform(SensorSpace), \quad (1)$$

где *ProjectorSpace* – проекционные координаты относительно проектора, *SensorSpace* – проекционные координаты относительно сенсора, *VPTransform* – функция трансформации.

Для получения преобразования *VPTransform* предлагается следующий пошаговый алгоритм, выполняемый на этапе запуска системы:

1. Проецирование, поиск и определение глубины.
2. Преобразование локальных координат датчика в глобальные координаты.
3. Определение координат расположения проектора.
4. Определение направления проецирования.
5. Получение трансформации из глобального пространства в локальное пространство проектора.
6. Получение общего преобразования локальных координат датчика в локальные координаты проектора.

Опишем порядок действия для решения задачи автоматической калибровки проектора и сенсора глубины для каждого шага алгоритма.

2. Проецирование, поиск и определение глубины

Для поиска образов по изображению существует достаточное количество алгоритмов, от выбора которых и будет зависеть проецируемый образ. Использование в качестве образов изображений, имеющих информацию об изменении размера проекции, позволяет определить расстояния до исходной точки. Такой подход способствует уменьшению погрешности вычисления. К примеру, при проецировании круга значение радиуса проекции и значение радиуса проецируемого образа позволит вычислить длину луча. Сенсор Kinect считывает цветовые и глубинные данные одновременно на частоте до 30 кадров в секунду. Разрешение инфракрасного сенсора составляет $1,280 \times 1,024$ пикселей, при этом максимальный размер выходного изображения не превышает 640×480 пикселей. Это связано с привязкой к возможностям внутреннего процессора Kinect и пропускным возможностям шины USB [9].

Представленные характеристики, которыми обладает Microsoft Kinect, позволяют использовать его в качестве датчика для определения глубины изображения. Датчик глубины представляет собой инфракрасный проектор, объединенный со светочувствительной матрицей. Это дает возможность сенсору Microsoft Kinect получать трехмерное изображение движущегося объекта при естественном и искусственном освещении помещения. Специальная программа и сенсор диапазона глубины позволяют калибровать датчики с учетом условий окружающей среды [10]. Несмотря на то что существуют другие аналоги и алгоритмы получения стереоизображения на основе двух камер, в данной задаче важна точность получаемых данных и поэтому наилучшим вариантом является использование сенсора Microsoft Kinect.

3. Преобразование локальных координат датчика в глобальные координаты

Для данного преобразования можно воспользоваться обратным способом: найдём трансформацию глобальных координат в локальные координаты сенсора. В общем случае трансформация описывается формулой

$$SensorSpace = GlobalSpace * ViewTransform * ProjectionTransform, \quad (2)$$

где $GlobalSpace$ – глобальные координаты, $ViewTransform$ – матрица видового преобразования сенсора, $ProjectionTransform$ – матрица проекционного преобразования сенсора.

Соответственно, преобразование локальных координат в глобальные координаты описывается формулой

$$GlobalSpace = SensorSpace * inverse (ViewTransform * ProjectionTransform), \quad (3)$$

где $inverse (ViewTransform * ProjectionTransform)$ – обратная матрица от $ViewTransform * ProjectionTransform$.

Матрица преобразования $ProjectionTransform$ зависит от характеристик сенсора, таких как угол обзора, соотношение сторон обзора, коэффициенты искажения линзы. Коэффициентом искажения линзы в данной задаче можно пренебречь (как показала практика использования Microsoft Kinect, в данной задаче коэффициент искажения слабо влияет на результат). Остальные преобразования можно свести к стандартным преобразованиям, выполняемым в матрице проекции.

Матрица преобразования $ViewTransform$ зависит от точки в пространстве и направления сенсора. Задача значительно упрощается, если точка в пространстве, где находится сенсор, будет определена как центр координат и направления осей, соответствующих направлению лучей сенсора. Тогда матрица $ViewTransform$ будет единичной, и данное преобразование можно учитывать. Стоит заметить, что в комбинации, где присутствует несколько сенсоров, такое упрощение невозможно.

Используя в качестве сенсора устройство Microsoft Kinect и коэффициенты fx, fy, cx, cy , предоставленные для данного сенсора [11], матрицу $inverse (ProjectionTransform)$ можно заменить на формулу (4):

$$GlobalSpace = vec3 ((SensorSpace.x - cx) * depth * fx, (SensorSpace.y - cy) * depth * fy, depth), \quad (4)$$

где $fx = 1,0 / 594,2143$; $fy = 1,0 / 591,0405$; $cx = 339,3078$; $cy = 242,7391$.

4. Определение координат расположения проектора

По аналогии для преобразования глобальных координат в локальные координаты проектора используется преобразование

$$ProjectorSpace = GlobalSpace * PViewTransform * PProjectionTransform, \quad (5)$$

где $PViewTransform$ – матрица видового преобразования проектора, $PProjectionTransform$ – матрица проекционного преобразования проектора.

Матрица $PProjectionTransform$ также получается из характеристик проектора: угол обзора по одной из осей, соотношение сторон, коэффициенты искажения линзы.

Для нахождения матрицы $PViewTransform$ необходимы данные точек, не лежащих в одной плоскости, в количестве на одну больше, чем количество измерений пространства. При данном количестве точек уравнения, которыми будет описываться решение, данная задача будет иметь одно решение. Представим задачу калибровки в виде рисунка в двухмерном пространстве (рис. 1).

При этом точками S, C, P_0, P_1, P_2 могут являться произвольные точки в пространстве. Следует отметить, что данные точки могут не лежать на одной плоскости.

Для решения задачи необходимо получить локальное направление лучей для d_0 , соответствующей CP_0 ; d_1 , соответствующей CP_1 ; d_2 , соответствующей CP_2 , или углов между лучами, для которых выполняется следующие равенство:

$$\beta_1 = arccos((\langle d_0, d_1 \rangle) = asin(((x_1 - x_0) * (\frac{MaxYawAngle}{width}), (y_1 - y_0) * (\frac{MaxPitchAngle}{height}))), \quad (6)$$

где x_0, x_1 – координаты проецирования по горизонтали; y_0, y_1 – координаты проецирования по вертикали; $MaxYawAngle$ – угол обзора по горизонтали; $MaxPitchAngle$ – угол обзора по вертикали. Представим задачу на рис. 2.

Спроецируем точки на виртуальную плоскость в пространстве и нормализуем вектор направления луча. Таким образом, возможно применить преобразование координат, используя следующее равенство:

$$\begin{bmatrix} dx_0 & dy_0 & dz_0 & 1 \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 & 1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 & 1 \\ dx_3 & dy_3 & dz_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Px_0 & Py_0 & Pz_0 & 1 \\ Px_1 & Py_1 & Pz_1 & 1 \\ Px_2 & Py_2 & Pz_2 & 1 \\ Px_3 & Py_3 & Pz_3 & 1 \end{bmatrix} * V, \quad (7)$$

где V – матрица преобразования координат; dx, dy, dz – координаты на плоскости проекции проектора; P_x, P_y, P_z – мировые координаты.

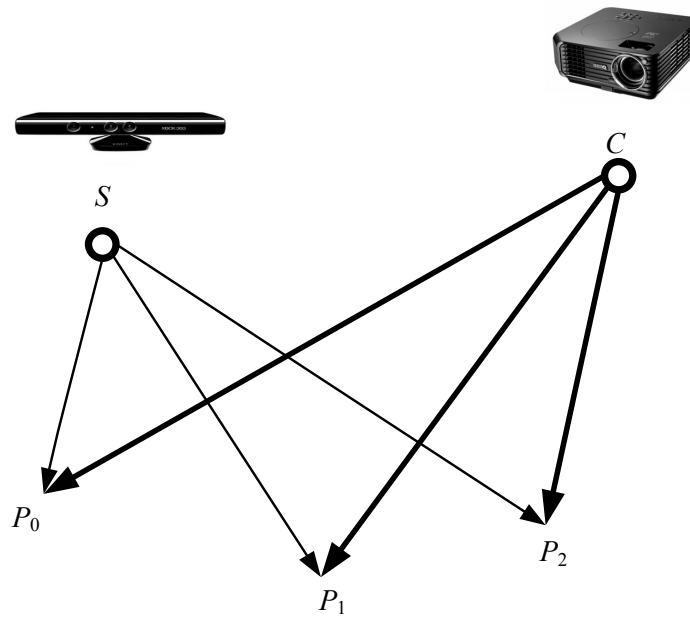


Рис. 1. Точки в пространстве, сенсор и проектор: S – точка координат сенсора, определенная как центр координат; C – искомая точка координаты проектора; P_0, P_1, P_2 – проецируемые точки в глобальных координатах (в трёхмерном пространстве, соответственно, имеется ещё точка P_3)

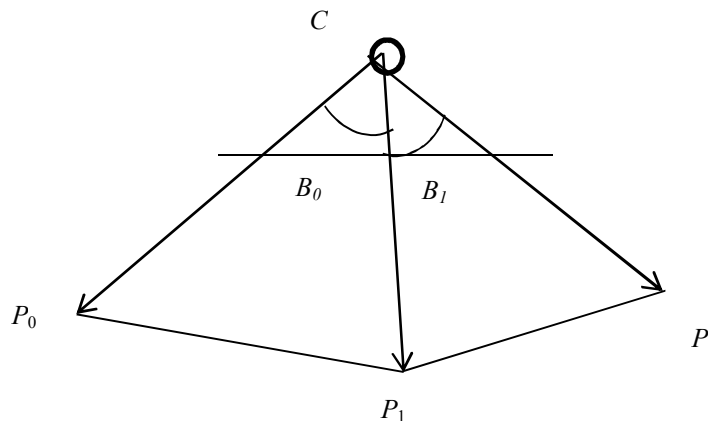


Рис. 2. Графическое представление задачи

Координату точки C получаем из матрицы V по следующему равенству (8) [12]:

$$C = \text{row}(V^{-1}, 3), \quad (8)$$

где row – функция, определяющая строку матрицы под определённым номером.

5. Определение направления проецирования

После нахождения точки координаты проектора можно найти направление данного проектора. Направлением считаем луч, соответствующий центру локальных координат проектора. Задачу можно значительно упростить, если один из искомых лучей, используемый в определении координат расположения проектора, будет направлен строго по центру. Получим вектор направления

$$\text{ViewDirection} = \text{normalize}(P - C),$$

где P – координаты центральной точки.

Если требуется вычисление стандартной видовой матрицы, то в качестве точки плоскости наблюдения используется центральная точка.

6. Получение трансформации из глобального пространства в локальное пространство проектора

Далее для нахождения матрицы *PViewTransform* необходимы координаты проектора и направление проецирования, найденные ранее. В качестве искомой матрицы используем стандартную видовую матрицу.

Для получения матрицы проекции *PProjectionTransform* будем использовать следующую матрицу с возможностью выбора центра [12]:

$$PProjectionTransform = \begin{bmatrix} Z_{prp} - Z_{prp} & 0 & -X_{prp} & X_{prp} * Z_{prp} \\ 0 & Z_{prp} - Z_{prp} & -Y_{prp} & Y_{prp} * Z_{prp} \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & -1 & Z_{prp} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

здесь $(X_{prp}, Y_{prp}, Z_{prp})$ – одна из точек направляющего вектора, где Z_{prp} – некоторое выбранное случайным образом положение плоскости наблюдения на оси Z; S_z и T_z – коэффициенты масштабирования и трансляции для нормировки спроектированных значений координат Z. Заданные значения S_z и T_z зависят от выбранного диапазона нормировки.

Таким образом комбинация матриц *PViewTransform* * *PProjectionTransform* является общей трансформацией глобальных координат в локальные координаты проектора.

7. Получение общего преобразования локальных координат датчика в локальные координаты проектора

С учётом всех полученных преобразований развернём формулу (1) и получим следующее выражение:

$$ProjectorSpase = SensorSpase * inverse(ViewTraqnstform * ProjectionTransform) * \\ * PViewTransform * PProjectionTransform,$$

где *ViewTransform* будет единичной матрицей, если сенсор глубины определен как центр координат; *ProjectionTransform* получается после приведения формулы (2) в матричный вид (при этом в конечном итоге не обязательно использовать матрицу); *PViewTransform* вычисляется при помощи четырех проецируемых точек; значение *PProjectionTransform* получается в зависимости от характеристик проектора.

Заключение

Предложенный в работе алгоритм наряду с другими существующими методиками [4–6] может быть использован для различных вариантов калибровки. Так, после единовременной автоматической калибровки системы имеются необходимые преобразования, которые позволяют разработчику в режиме реального времени производить сопоставление данных, получаемых сенсором или датчиком глубины, с виртуальными данными системы, проецируемыми с помощью проектора.

В более сложной комбинации целесообразно использовать несколько сенсоров и проекторов для получения лучшего результата. При этом калибровка осуществляется аналогично (попарно) с добавлением этапа получения взаимного расположения координатных осей различных пар. Также рассмотренный алгоритм может быть взят за основу для использования в системах дополненной реальности в тех случаях, когда ручная калибровка устройств представляется затруднительной или невозможной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Microsoft Kinect. URL: <http://www.xbox.com/en-us/kinect> (дата обращения: 30.11.2015).
2. Asus X-tion. URL: http://www.asus.com/ru/Multimedia/Xtion_PRO (дата обращения: 30.11.2015).
3. Beyond Television: How Apple Could Incorporate PrimeSense Technology Into Its Products. URL: <http://www.macrumors.com/2013/11/25/beyond-television-how-apple-could-incorporate-primesense-technology-into-its-products> (дата обращения: 03.12.2015).

4. Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2000. V. 22, No. 11. P. 1330–1334.
5. Tsai R.Y. A Versatile Camera Calibration Techniaue for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-shelf TV Cameras and Lenses Proceedings // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami Beach, FL, 1986. P. 364–374.
6. Hrdlička J. Kinect-projector calibration, human-mapping. URL: <http://blog.3dsense.org/programming/kinect-projector-calibration-human-mapping-2> (дата обращения: 03.12.2015).
7. Песочница дополненной реальности. URL: http://arpoint.ru/news/arconf_13_11_14.php (дата обращения: 03.12.2015).
8. Сенченко П.В., Жуковский О.И., Гриценко Ю.Б., Лазарев И.В., Милихин М.М. Интерфейс взаимодействия геоинформационной технологии ведения электронного генерального плана со сторонними программными системами // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2013. № 1 (27). С. 129–134.
9. Дусеев В.Р., Мальчуков А.Н., Мыцко Е.А. Фильтрация данных глубины с сенсора Kinect // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1. С. 153–160.
10. Как работает Kinect. URL: <http://www.kakprosto.ru/kak-883127-kak-rabotaet-kinect> (дата обращения: 03.12.2015).
11. Shiffman D. Getting Started with Kinect and Processing. URL: <http://shiffman.net/p5/kinect/>, свободный (дата обращения: 25.10.2015).
12. Херн Д., Бейкер П. Компьютерная графика и стандарт OpenGL : пер. с англ. М. : Вильямс, 2005. 1168 с.

Сенченко Павел Васильевич, канд. техн. наук, доцент. E-mail: pvs@tusur.ru

Ознабихин Дмитрий Анатольевич. E-mail: kvid06@mail.ru

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Тарасенко Владимир Феликсович, д-р техн. наук. E-mail: vtara54@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 марта 2016 г.

Senchenko Pavel V., Oznabihin Dmitry A. (Tomsk State University of Control System and Radioelectronics, Russian Federation),
Tarasenko Vladimir F. (Tomsk State University, Russian Federation).

The task of automatic calibration of the projector and the sensor depth.

Keywords: sensor depth; automatic calibration; augmented reality; Kinect; computer graphics.

DOI: 10.17223/19988605/35/8

Augmented reality system, built with use of projectors and sensors depth using infrared light, are widely used in various fields – from the defense to the gaming industry. In such systems, the actual problem is the calibration of the projector display information and sensor depth, reading the data in the space. One of options using technology of augmented reality is the "Virtual sandbox" representing a combination of a normal sandbox, the three-dimensional sensor Microsoft Kinect, the software of simulation and visualization and also from the normal projector (sometimes several projectors) providing visualization of submission of the image. The landscapes created from sand are selected in real time with the flowers corresponding to elevation height, topographical planimetric lines and the virtual water.

In systems of augmented reality, where a role of interactive devices is played by the sensor controller and a projector for visual modification of a scene, there is a need of the solution of the task of determination of geometry of a surface of real space and comparison of this surface to the projected image. Process of calibration of both devices is usually carried out in a manual mode independently by the user of system that doesn't allow to receive rather precisely necessary conversion and as a result doesn't allow to achieve the desirable level of display of the virtual view.

In certain cases process of calibration becomes technically difficult or generally impossible. The task of calibration can be solved by formalization of algorithm of automatic calibration of system which program implementation allows to receive necessary transformation of coordinates by system in an automatic mode.

In development process of difficult program systems of simulation and visualization, which cornerstone graphic job processing is, there is a need of comparison of coordinate of a cloud of the points accepted from a sensor of depth and coordinate of space, projected by a projector. Such actions will allow to add the real image data of the virtual space.

This article discusses options for using interactive devices. We have proposed a stepwise algorithm for determining the mutual position of the sensor space and depth of the projector image:

1. Projection, search and determination of depth;
2. Conversion of local coordinates of the sensor to global coordinates;
3. Determination of coordinates of layout of a projector;
4. Projection direction finding;
5. Receiving transformation from global space in local space of a projector;
6. Receiving the general conversion of local coordinates of the sensor to local coordinates of a projector.

The necessary steps pretreatment process are defined that allow to carry out the calibration of the projector automatically.

The mechanism of projection, search and determination of the depth are presented. The principle of conversion of the local coordinates of the sensor in global coordinates is described. A method for determining the coordinates of the location of the projector and the determination of the direction of projection is proposed. The process of transformation of the global space in the local space of the projector is described. A version of obtaining a general transformation of the local coordinates of the sensor in the local coordinates of the projector is presented.

The mathematical component optimally integrable in computer graphics processing systems through the use of common principles, requires minimal changes in the system processing and analysis of complex structured images. The proposed algorithm can be used in augmented reality systems with both single and multiple projectors. In the latter case calibration is carried out in pairs, with adding of a stage of receiving a relative positioning of coordinate axes of different couples. Also considered algorithm can be taken as a basis for use in systems of augmented reality when manual calibration of devices is represented difficult or impossible.

REFERENCES

1. *Microsoft Kinect*. (n.d.) [Online] Available from: <http://www.xbox.com/en-us/kinect/>. (Accessed: 30th November 2015).
2. *Asus X-tion*. (n.d.) [Online] Available from: http://www.asus.com/ru/Multimedia/Xtion_PRO/. (Accessed: 30th November 2015).
3. Clover, J. (2013) *Beyond Television: How Apple Could Incorporate PrimeSense Technology Into Its Products*. [Online] Available from: <http://www.macrumors.com/2013/11/25/beyond-television-how-apple-could-incorporate-primesense-technology-into-its-products>. (Accessed: 3rd December 2015).
4. Zhang, Z. (2000) A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 22(11). pp. 1330-1334. DOI: 10.1109/34.888718
5. Tsai, R.Y. (1986) A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-shelf TV Cameras and Lenses. *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Miami Beach, FL. pp. 364-374. DOI: 10.1109/JRA.1987.1087109
6. Hrdlička, J. (2013) *Kinect-projector calibration, human-mapping*. [Online] Available from: <http://blog.3dsense.org/rogramming/kinect-projector-calibration-human-mapping-2/>. (Accessed: 3rd December 2015).
7. Anon. (n.d.) *Pesochnitsa dopolnennoy real'nosti* [Augmented Reality Sandbox]. [Online] Available from: http://arpoint.ru/news/arconf_13_11_14.php. (Accessed: 3rd December 2015).
8. Senchenko, P., Gritsenko, Yu., Zhukovsky, O., Lazarev, I. & Milihin, M. (2013) Interface between GIS technology of electronic master plan with other software systems. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki – Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*. 1(27). pp. 129-134. (In Russian).
9. Duseev, V., Malchukov, A. & Mytsko, E. (2015) Depth Data Filtering with Sensor Kinect. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Modern Problems of Science and Education*. 1. pp. 153-160. (In Russian).
10. KakProsto. (n.d.) *How does the Kinect work*. [Online] Available from: <http://www.kakprosto.ru/kak-883127-kak-rabotaet-kinect>. (Accessed: 3rd December 2015).
11. Shiffman, D. (n.d.) *Getting Started with Kinect and Processing*. [Online] Available from: <http://shiffman.net/p5/kinect/>. (Accessed: 25th October 2015).
12. Hearn, D. & Baker, P. (2005) *Komp'yuternaya grafika i standart OpenGL* [Computer graphics and standard OpenGL]. Translated from English. Moscow: Williams. (In Russian).

А.Е. Янковская, В.В. Разин

**СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ОБУЧЕНИЕМ НА ОСНОВЕ СМЕШАННЫХ
ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ
SEMANTIC WEB**

*Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований
в рамках научного проекта № 13-07-98037-р_сибирь_a.*

Рассматривается подход к построению систем управления обучением, основанный на использовании технологий Semantic Web и смешанных диагностических тестов. Дается описание онтологических моделей, представляющих учебные дисциплины и тестовые задания. Предлагается подход к созданию системы управления обучением, использующей разработанные модели в качестве базы знаний. Предложена общая архитектура системы управления обучением, основанной в предлагаемом подходе.

Ключевые слова: системы управления обучением; смешанные диагностические тесты; дидактические единицы учебной дисциплины; Semantic Web; онтология.

Системы управления обучением широко используются в мировой образовательной практике уже долгое время. Для управления самыми разными аспектами процесса обучения на сегодняшний день разработано большое количество программных систем. Системы подобного рода чаще всего предназначены для поддержания не только структуры образовательного процесса, но и процесса дистанционного обучения. Как правило, системы управления обучением включают набор модулей, организованных в библиотеки и используемых в режиме реального времени.

Создание единой государственной системы управления качеством образования в российских вузах на данный момент не потеряло своей актуальности. Начиная с 2005 г. Национальное аккредитационное агентство в сфере образования проводит эксперимент по внедрению экзамена федерального экзамена в сфере профессионального образования (ФЭПО) для проведения внешней независимой оценки результатов обучения студентов в рамках требований государственного образовательного стандарта ГОС. Одной из составляющих этого эксперимента является проведение компьютерного интернет-тестирования студентов вузов. Концептуальной основой модели оценки качества подготовки студентов на соответствие требованиям ГОС является оценка освоения всех дидактических единиц той или иной дисциплины. Тестовые задания, из которых состоит экзамен ФЭПО, выбираются из общей базы заданий случайно для каждой дидактической единицы заданной дисциплины. Доля студентов, освоивших все дидактические единицы данной дисциплины, является показателем её освоения [1].

Большинство существующих систем управления обучением предлагают пользователю инструментарий для создания и редактирования тестовых заданий для осуществления контроля за качеством образования. В большинстве систем оценка прохождения студентом теста является бинарной: «тест пройден» либо «тест не пройден». Подобный способ оценивания едва ли является гибким и, кроме того, не позволяет оценить степень усвоения учащимся тех или иных разделов курса. В одном из методов тестирования, предлагающих альтернативу подобному способу оценивания, предлагается использование смешанных диагностических тестов (СДТ), предложенных в работе [2], для контроля качества образования. СДТ представляют собой оптимальное сочетание безусловных и условных составляющих [3] и позволяют дифференцированно оценивать качество усвоения учебного материала. При этом для вычисления оценок используются аппараты пороговой и нечёткой логики.

Большинство существующих систем управления обучением в значительной степени ориентированы на использование web-сети для доступа пользователей к учебным курсам и тестовым заданиям.

Кроме того, как уже было сказано, разрабатываемый в данный момент экзамен ФЭПО предполагает проведение интернет-тестирования и, следовательно, также ориентирован на использование web-сети. Модульность и возможности повторного использования отдельных элементов существующих систем управления обучением – одни из самых сильных сторон этих систем, однако представление данных в web-сети, которое приходится использовать разработчикам в связи со значительной ориентированностью этих систем на онлайн-доступ, достаточно плохо пригодно как для машинного анализа и обработки, так и для стандартизации. Существующие стандарты в этой области, такие как SCORM [4], как правило, требуют либо значительной доработки существующей системы, либо изначальной ориентированности разрабатываемой системы на образовательный стандарт.

Для разрешения проблем, связанных со сложностями структурирования и пригодности для машинной обработки данных в web-сети, предпринята глобальная инициатива реорганизации структуры данных сети Интернет с целью преобразования ее в так называемую семантическую паутину [5], представляющую возможности эффективного поиска и анализа данных как человеком, так и программными агентами.

Современная Web-сеть (Всемирная паутина) основана на HTML-страницах, в тексте которых содержится информация, извлекаемая человеком при помощи программы-посредника, или браузера. Семантическая же паутина предполагает хранение информации в виде семантической сети, предоставляющей программе-клиенту возможность извлекать из паутины факты и осуществлять на их основе логический вывод. При этом семантическая паутина работает параллельно с WWW и на её основе, используя протокол HTTP и уникальные идентификаторы ресурсов URI. Семантические сети, на которых должна быть основана семантическая паутина, в этом случае служат надстройкой над обычной web-сетью и хранят метаданные как о контексте той или иной web-страницы (название, авторы, дата создания и / или последнего редактирования), так и о её контенте (основные понятия, используемые в тексте на странице, предметная область, о которой идёт речь и т.д.).

Несмотря на наличие некоторых препятствий для создания глобальной семантической паутины, как сама идея, так и существующие технологии Semantic Web могут быть использованы для создания и развития информационных систем в рамках какой-либо отдельно взятой организации и, в частности, для создания системы управления обучением. Семантические сети, хранящие метаданные в Semantic Web, основаны на аппарате дескрипционных логик, являются весьма гибкой моделью представления информации, а также, строго говоря, позволяют перейти от работы с данными к работе со знаниями и могут легко быть использованы повторно.

Основные подходы к применению технологий Semantic Web в образовании [6–10] предполагают использование тщательно разработанных заранее моделей предметных областей либо для структурирования учебного материала, либо для аннотирования уже существующих документов (методических материалов, наглядных пособий и т.д.). При этом основные усилия экспертов приходятся как раз на создание модели предметной области, а не на поддержку учебного процесса. Кроме того, эти подходы, как правило, не включают методы контроля качества обучения, отличные от тестов, использующих вышеупомянутые бинарные оценки.

В рамках данной работы рассматривается подход, включающий использование технологий Semantic Web для создания программной системы управления обучением, использующей СДТ.

1. Основные понятия и определения. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления обучением как некоторую систему управления, объектом в которой является человек, проходящий обучение, а управляющим воздействием – изменение структуры учебного курса или повторное прохождение части курсов, входящих в состав образовательной программы. Датчиками такой системы будем считать наборы тестовых заданий, а параметрами объекта управления – численные оценки успешности их выполнения.

Описанный в работах [2, 11–13] подход к оцениванию качества образования, основанный на СДТ, опирается на аппарат нечёткой логики и позволяет использовать нечёткую оценку как сложности теста, так и результата его прохождения обучающимся. Тем самым достигается, с одной стороны, гибкость в

описании параметров объекта управления (в данном случае обучающегося) и, с другой стороны, возможность в дальнейшем использовать нечёткие методы управления объектом (в данном случае управление дальнейшим процессом обучения).

Смешанные диагностические тесты были впервые введены в 1996 г. А.Е. Янковской для принятия решений в интеллектуальных системах; тогда же был предложен и доказан ряд теорем, подтверждающих их эффективность по сравнению с условными и безусловными диагностическими тестами. Впоследствии было предложено их применение в обучающе-тестирующих системах и показана эффективность их использования. В данной публикации представлено дальнейшее развитие СДТ и, в частности, их совместное использование с технологиями Semantic Web в целях построения гибридных интеллектуальных обучающе-тестирующих систем.

Обучающийся – человек, проходящий обучение (объект управления). Основной задачей, решаемой с применением СДТ, является задача классификации обучающихся; классами при этом являются степени освоения ими того или иного учебного курса – «не владеет материалом», «удовлетворительно владеет материалом» и т.п. *Учебным курсом* в данной работе называется набор тематически связанных учебных материалов, объединённых одной образовательной дисциплиной (предметной областью).

Диагностический тест – совокупность групповых характеристических признаков, различающих любые пары объектов, принадлежащих разным классам. При этом будем различать условный и безусловный диагностические тесты. *Безусловный диагностический тест* основан на одновременном предъявлении всех входящих в него признаков исследуемого объекта, а *условный* – на последовательном предъявлении признаков в зависимости от значений признаков, предъявленных ранее. Условный диагностический тест в этом случае включает в себя обязательное вычисление текущей оценки респондента, зависящей от заранее определённой экспертом сложности теста.

Смешанный диагностический тест представляет собой оптимальное сочетание безусловной и условных составляющих. После ответа на каждый вопрос теста вычисляется полученная респондентом оценка в зависимости от заранее заданной составителем теста сложности вопроса.

Тема (модуль) представляет собой элемент структуры учебного курса, посвящённый разделу соответствующей ему дисциплины. В рамках данной работы предполагается, что теме, входящей в состав учебного курса, соответствует некоторая дидактическая единица. *Занятие* – элемент темы, посвящённый рассмотрению отдельных вопросов, входящих в её состав. Занятию соответствует объём учебных материалов, рассматриваемых в течение одной лекции (двух академических часов). Занятие – атомарный элемент структуры учебного курса. При этом тема может включать в себя либо другие темы (подтемы), либо отдельные занятия, но не те и другие одновременно.

Онтология представляет собой концептуальную схему, определяющую термины, которые используются для описания и представления знаний некоторой предметной области, и включающую машиночитаемые (понятные для программы) определения базовых понятий и отношения между ними. Основными компонентами онтологии являются:

- *понятия* (классы) описываемой предметной области;
- *экземпляры* этих понятий;
- *отношения*, которые могут быть *объектными* (связывающими понятия и их экземпляры друг с другом) или *литеральными* (связывающими понятия и их экземпляры с некоторыми значениями).

Множество понятий и отношений между ними определяют общую схему хранения данных, представленных как множество утверждений об экземплярах понятий, или аксиом онтологии. Эти утверждения, или *триплеты*, имеют вид троек «субъект-предикат-объект».

Онтология – центральное понятие стека технологий Semantic Web. Фактически онтология – семантическая сеть, хранящая любые данные, описанные средствами Semantic Web. Основными языками, используемыми для описания онтологий, являются стандартизованные консорциумом W3C языки RDF [14] и OWL [15].

При построении СДТ для некоторой дисциплины множество её разделов последовательно разбивается на безусловную и условную части. Затем при помощи алгоритмов, описанных в [2], формируются последовательности вопросов, соответствующих дидактическим единицам из каждой части.

Рассмотрим в качестве примера дисциплину «Информатика» для студентов специальности 270102.65 – «Промышленное и гражданское строительство». Основными разделами этой дисциплины являются:

1. Понятие информации.
2. Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации.
3. Технические и программные средства реализации информационных процессов.
4. Технические средства реализации информационных процессов.
5. Программные средства реализации информационных процессов.
6. Модели решения функциональных и вычислительных задач.
7. Алгоритмизация и программирование.
8. Языки программирования высокого уровня.
9. Базы данных.
10. Программное обеспечение и технология программирования.
11. Компьютерная графика.

На рис. 1 приведён пример последовательности прохождения СДТ для описываемой дисциплины, представленный в виде дерева поиска. Вершины дерева, представленные прямоугольниками, соответствуют разделам дисциплины, сплошные рёбра – безусловным переходам, пунктирные рёбра – переходам, выполняемым при успешном прохождении безусловной составляющей теста для определённого раздела. В этом случае допустимо отнести к безусловной составляющей теста разделы с первого по раздел 3.1, а к условной – с раздела 3.2 по раздел 9 включительно. Также имеет смысл предъявлять задания по разделам 6–9 в заключительной части тестирования.

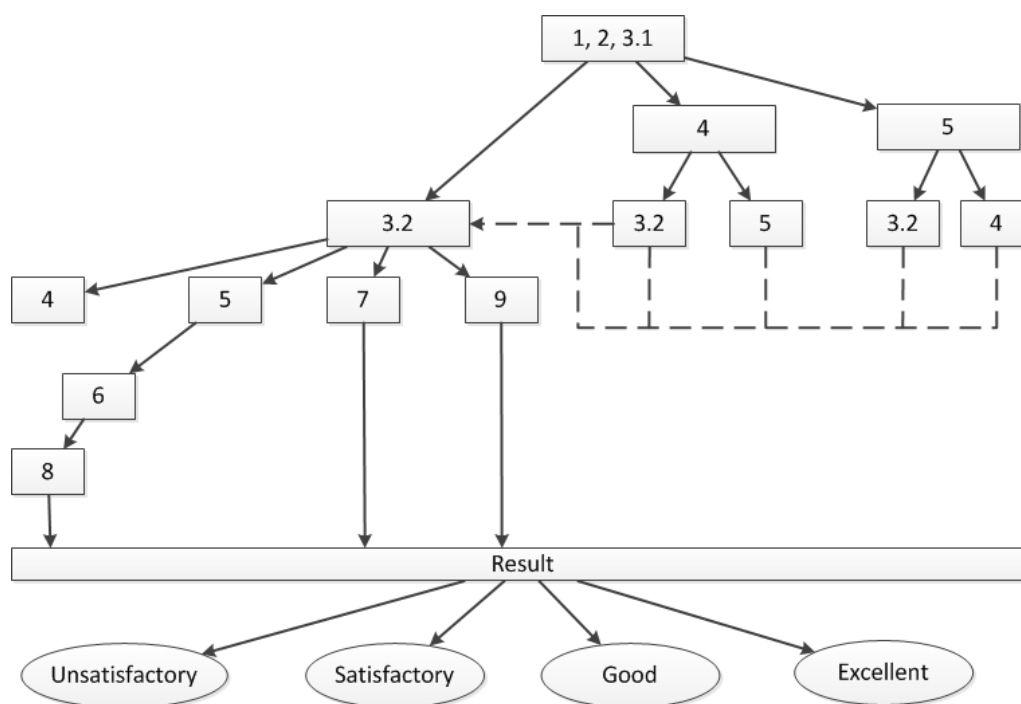


Рис. 1. Дерево переходов для процесса прохождения СДТ (дерево СДТ)

Каждому СДТ соответствует матрица весов ответов A размерностью $n \times k$, где n – количество тестовых заданий, а k – максимальное количество возможных вариантов ответа на тестовое задание. Элементы a_{ij} матрицы A соответствуют весу ответа j на вопрос i . Каждый a_{ij} выставляется заранее экспертом в соответствии со сложностью теста и близостью ответа j на правильный ответ на вопрос i . Прохождение безусловной части СДТ считается успешным при превышении суммарным весом ответов обучающегося заранее заданного порога. Прохождение условной составляющей СДТ возможно только при успешном прохождении его безусловной составляющей.

2. Описание дисциплины при помощи онтологий Semantic Web

Предлагаемый в данной работе подход к описанию учебных дисциплин на основе использования онтологий Semantic Web основан на системе понятий, представленных в предыдущем разделе. Учебной дисциплине в рамках предлагаемого подхода соответствует учебный курс, а его разделам – темы. Подход предполагает использование трёх основных онтологий: CourseLevel, KnowledgeLevel и SystemLevel.

Общая схема онтологии CourseLevel изображена на рис. 2. Понятие «Course» представляет собой учебный курс. Его атрибутами являются название (name), отведенное количество часов (hours) и описание (description). Понятие «Course» связано отношением includes с понятием «Theme», соответствующим теме, и отношением refersTo с понятием «KnowledgeDomain». Отношение refersTo является аналогом односторонней ассоциации и задает ссылку от одного класса к другому.

Понятие «KnowledgeDomain» (предметная область) содержит информацию о предметной области. Атрибутами понятия являются название (name) и описание (description). Как видно на диаграмме, предметная область может быть частью какой-либо другой более глобальной предметной области или же включать другие предметные области. Понятие «Theme» предназначено для хранения данных о темах и может включать в себя подтемы и занятия. Атрибутами Theme являются название (name) и описание (description). Понятие «Theme» также находится в отношении refersTo с понятием «KnowledgeDomain», что позволяет однозначно определить предметную область, к которой относится тема. Понятие «Lesson» хранит данные о конкретном занятии и имеет также название или заголовок (name) и краткое описание или краткое содержание (description). Понятие «ClassElement», «атомарный элемент занятия», по существу представляет абстракцию для дочерних понятий, рассмотренных в следующей онтологии. Понятия «TestQuestion» и «TestAnswer» задают описание тестовых вопросов по тому или иному ClassElement. Каждому из них отношением checking может быть сопоставлен тестовый вопрос TestQuestion, описанный атрибутами body (тело вопроса) строкового типа и weight типа double. Отношением hasAnswer каждому вопросу может быть сопоставлен вариант ответа TestAnswer, описываемый полями body строкового типа и truthValue («правильность» ответа) типа double.

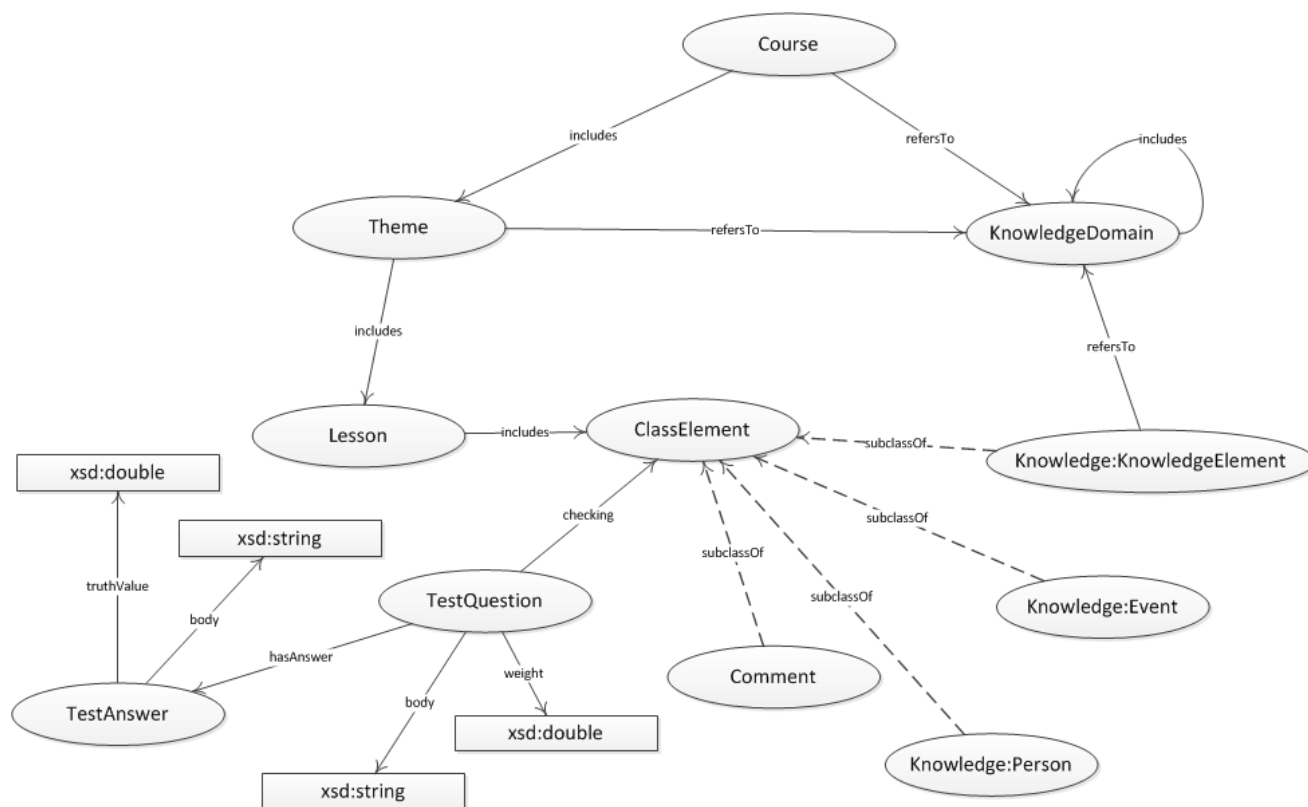


Рис. 2. Онтология CourseLevel

Понятия «KnowledgeElement», «Person» и «Event» не являются прямыми составляющими онтологии CourseLevel, но рассматриваются совместно с её элементами для связи с другой онтологией, рассмотренной ниже.

Онтология KnowledgeLevel, изображённая на рис. 3, описывает возможные «элементы знаний», присутствующие в учебных курсах.

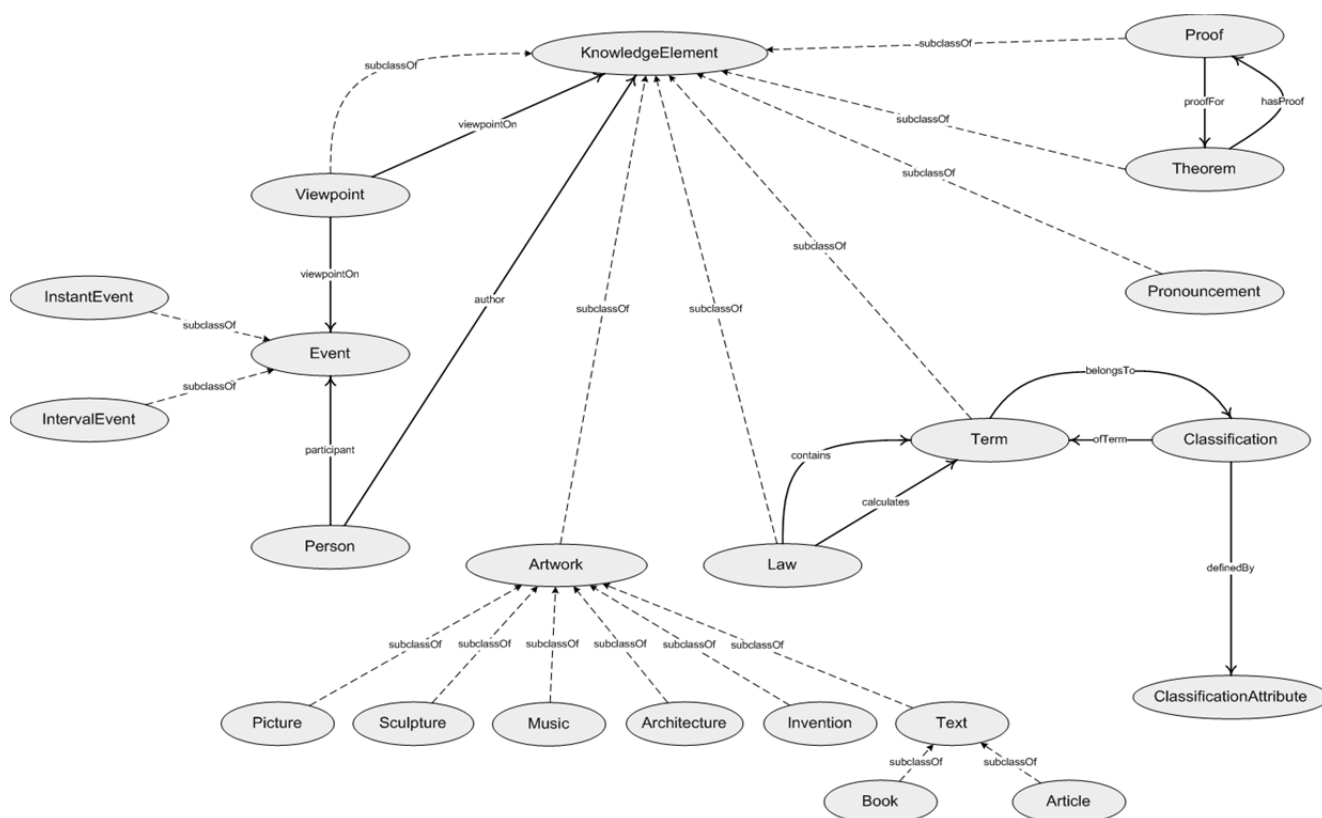


Рис. 3. Онтология KnowledgeLevel

Основным элементом данной онтологии является понятие «KnowledgeElement», которое по сути абстрактно и обобщает ряд других понятий данной онтологии. Понятие «Person» предназначено для хранения данных о некоторой личности и связано с понятием «KnowledgeElement» отношением author. Таким образом, личность может выступать в качестве автора любого из экземпляров понятия, наследующего KnowledgeElement. Понятие «Event» описывает некоторое произвольное событие. Для него определены два дочерних понятия для указания типа события – интервальное и мгновенное (IntervalEvent и InstantEvent). Понятие «Person» связывается с понятием «Event» отношением participant, описывая возможность личности участвовать в событии или каким-либо образом быть связанным с ним. Понятие «Theorem» формально служит для описания теорем, но в широком смысле представляет собой любое утверждение, для которого существует формальное доказательство. Понятие «Proof» описывает доказательство для теоремы (класс Theorem). Понятия «Theorem» и «Proof» связаны отношениями hasProof и proofFor соответственно.

Понятие «Pronouncement» предназначено для описания высказывания, сделанного некоторой личностью Person. Понятие «Viewpoint» (точка зрения) отличается от высказывания (понятие «Pronouncement») тем, что имеет отношение viewpointOn с понятием «KnowledgeElement», связывая между собой автора, его точку зрения и субъект, о котором идет речь. Понятие «Term» соответствует некоторому термину или определению и может описываться как термин в широком смысле (например, понятие или объект в математическом рассуждении). Понятие «Classification» предназначено для описания классификаций тех или иных терминов. Между понятиями «Classification» и «Term» существуют отношения ofTerm и belongsTo соответственно. Понятие «ClassificationAttribute» отвечает за описание критерия классификации терминов. Понятие «Law» описывает произвольный закон или правило (не-

формально это требование для выполнения некоторых условий). Наглядно представить его можно в виде конструкции «если – то». Данное понятие непосредственно связано с классом Term, так как содержит различные термины и понятия и оперирует ими. Понятие «Artwork» служит для описания метаданных различных ресурсов. Его подклассами являются Picture (картина или изображение), Sculpture (скульптура), Architecture (архитектура), Music (музыкальное произведение), Invention (изобретение), Text (произвольный текст). Все экземпляры этих понятий не предназначены для хранения файлов изображений, музыкальных произведений и т.д., а лишь описывают данные об этих объектах. Понятие «Text» разделяется на два подкласса – Book (книга) и Article (статья).

Третья из разработанных онтологий называется SystemLevel и имеет прикладное значение. Она служит в первую очередь для обеспечения возможности расстановки приоритетов (принцип предшествования) для учебных курсов, тем и занятий. Принцип предшествования не выносится в отдельное понятие, а представлен в виде атрибута с целочисленным типом xsd:int. Основными ресурсами являются аудио- и видеоматериалы, изображения, книги и статьи, а также веб-сайты. Соответствующие им классы отображены на рис. 4.

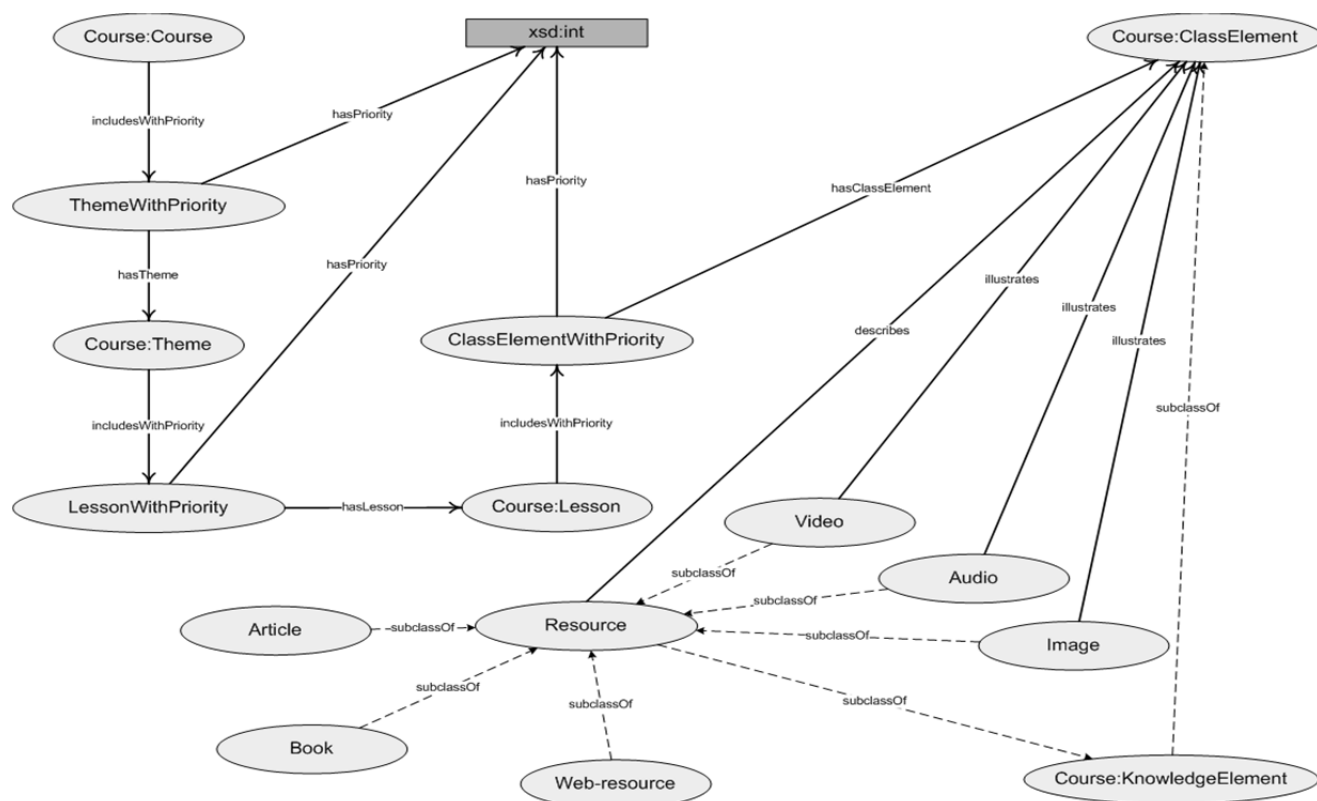


Рис. 4. Онтология SystemLevel

Понятия «ThemeWithPriority», «LessonWithPriority» и «ClassElementWithPriority» служат для хранения данных о порядке следования или приоритете тем учебного курса, занятий каждой темы и понятий, используемых в занятиях, соответственно.

Понятия «Video», «Audio», «Book», «Article», «Image», «Web-resource» описывают ресурсы, соответствующие основным элементам учебного курса, например, изображение человека (личности Person), видеозапись какого-либо события (Event), статья о теореме и ее доказательство (Theorem и Proof соответственно). Атрибутами таких классов являются ссылки на хранилища соответствующих материалов. Классы Resource и ClassElement связаны отношением describes.

Пример онтологий, описывающих часть вышеупомянутого курса «Информатика», приведён на рис. 5, 6. В данном примере сам курс представлен в онтологии CourseLevel экземпляром InformationScience270102.65 понятия «Course». Он относится (отношение refersTo) к предметной области «Информатика», представленной экземпляром Information_Science понятия «KnowledgeDomain».

Входящая в состав курса тема «Информация» (экземпляр Information понятия «Theme»), связанный отношением includes с курсом InformationScience270102.65) включает (отношения includes) две лекции (экземпляры понятия «Lesson», «Lecture_1» и «Lecture_2»), озаглавленные (литеральное свойство name) «Понятие информации» и «Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации». Каждая из этих лекций включает (отношение includes) термин «Информация», которому в онтологии соответствует экземпляр Information понятия «Term», описанного в онтологии KnowledgeLevel.

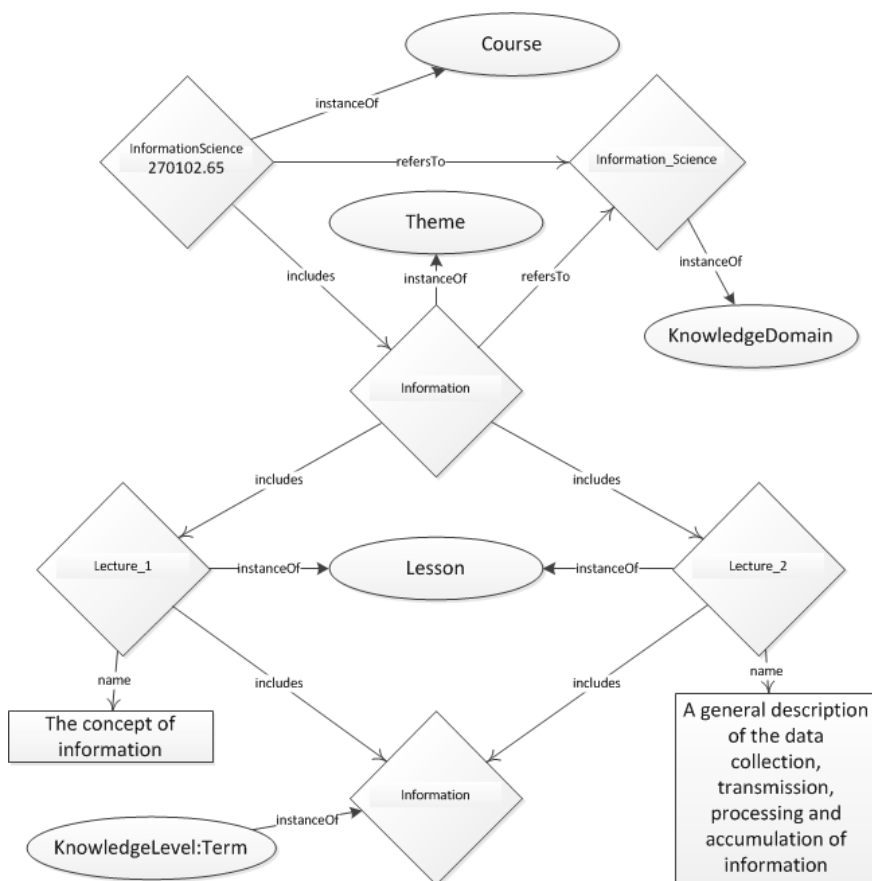


Рис. 5. Описание части курса «Информатика» в онтологии CourseLevel

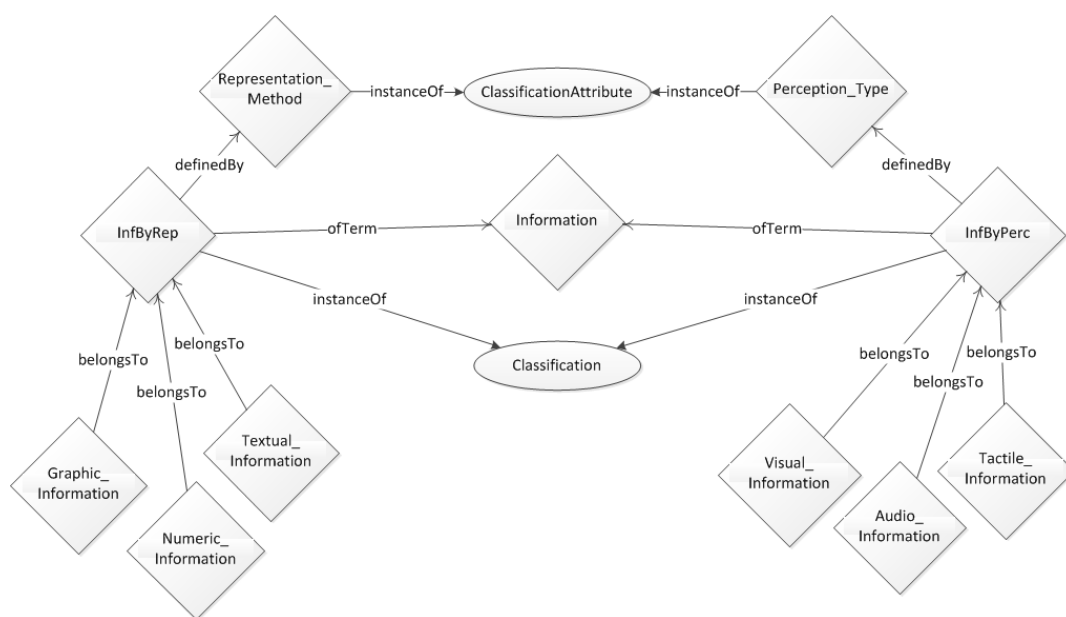


Рис. 6. Частичное описание термина «Информация» в терминах онтологии KnowledgeLevel

Онтология KnowledgeLevel включает описание классификаций информации (экземпляр Information понятия «Term») по форме представления и способу восприятия (экземпляры InfByRep и InfByPerc понятия «Classification» соответственно). Критерии классификации представлены в онтологии экземплярами понятия «ClassificationAttribute» следующим образом: Representation_Method – для классификации по способу представления, и Preception_Type – для классификации по форме представления информации, и связаны с экземплярами, представляющими классификации, отношением definedBy. Наконец, виды информации, входящие в эти классификации, связаны с ними отношением belongsTo. Каждому из этих видов соответствует свой термин (экземпляр понятия «Term»), например, Graphic_Information – для информации, представленной в графической форме, Tactile_Information – для информации, воспринимаемой тактильными рецепторами и т.д.

Описанные онтологии формируют общую базу знаний, позволяющую хранить и редактировать онтологические модели, описывающие учебные дисциплины в виде учебных курсов, разбитых на темы, которым соответствуют дидактические единицы. В свою очередь, темы разбиты на занятия, включающие описания широкого спектра понятий, явлений и событий, которые могут входить в состав произвольного учебного курса. Важным элементом онтологической модели учебных курсов являются описания тестовых заданий, которые могут быть сопоставлены любому из изучаемых в процессе обучения понятий. Указание сложности тестовых заданий позволяет по понятию, теме и разделу курса единственным запросом к онтологии выбрать базу тестовых заданий и сформировать набор смешанных диагностических тестов для контроля качества усвоения обучающимися учебных материалов.

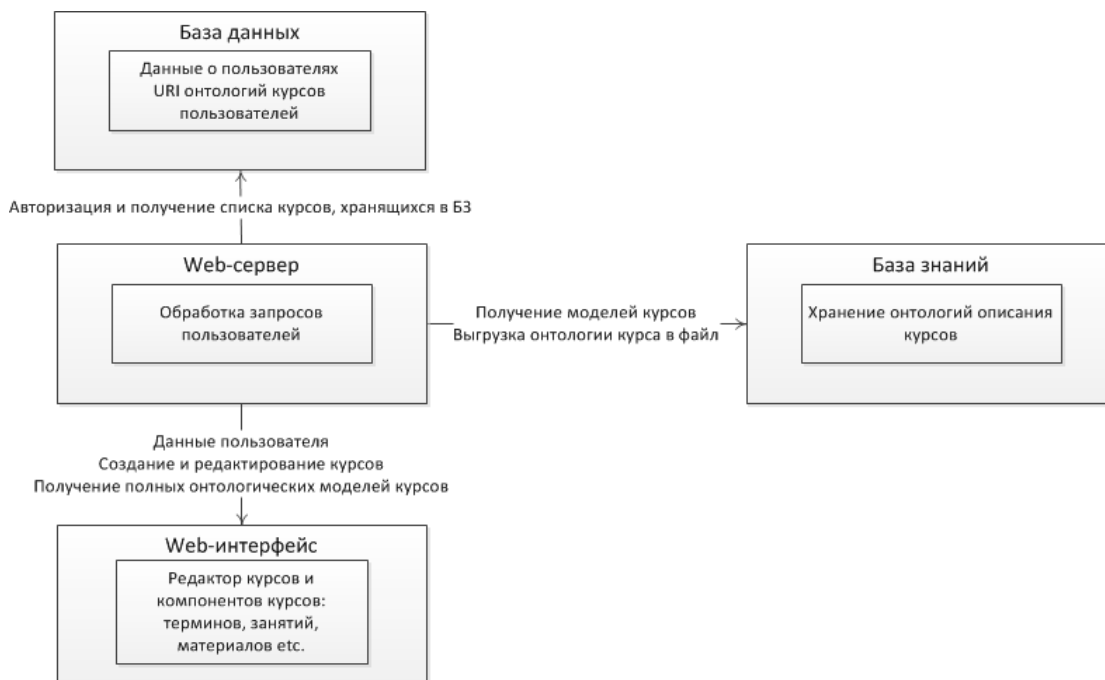


Рис. 7. Общая архитектура системы управления обучением

Наиболее простым и эффективным способом реализации подобной системы представляется создание web-сервиса по планированию учебных курсов для его использования преподавателями в рамках сети факультета или университета.

Общая архитектура системы управления обучением, разрабатываемой с использованием описанного подхода, представлена на рис. 7. Основными элементами такой системы являются:

1. База знаний, отвечающая за хранение описанных выше онтологических моделей.
2. База данных, хранящая данные о пользователях сервиса, включая список URI (Uniform Resource Identifier, унифицированные идентификаторы ресурса) онтологических моделей курсов, разработанных пользователями и хранящихся в базе знаний.
3. Web-сервер, непосредственно отвечающий за обработку запросов пользователей по созданию и редактированию моделей учебных курсов, а также их компонентов (терминов, понятий, смешанных ди-

агностических тестов и др.). Кроме того, web-сервер позволяет при необходимости произвести загрузку модели курса в файл онтологии Semantic Web.

Заключение

Онтологические модели являются весьма гибким описательным инструментом. Предложенные в данной работе онтологии могут быть дополнены онтологиями более низкого уровня, относящимися к конкретным предметным областям. Кроме того, полученные модели могут быть повторно использованы в дальнейшем как для создания новых учебных курсов с использованием элементов уже описанных курсов, так и для создания онтологии предметной области более высокого уровня. Наличие в онтологических моделях описаний аудио-, видео- и сетевых ресурсов позволяет дополнять учебный курс наглядными учебными материалами и структурировать списки дополнительной литературы по связанным с ними элементам учебного курса. Кроме того, описанные выше модели позволяют хранить и обрабатывать структуры, содержащие СДТ, и, следовательно, встраивать контрольные срезы с оцениванием по смешанным диагностическим тестам в структуру любого хранимого в подобной системе курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Янковская А.Е., Семенов М.Е. Принятие решений в интеллектуальных обучающе-тестирующих системах, основанное на смешанных диагностических тестах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. № 1. С. 95–104.
2. Yankovskaya A.E. Mixed Diagnostic Tests are a New Paradigm of Construction of Intelligent Learning and Training Systems // Proc. New quality of education in the new conditions. Tomsk, Russia. 2011. V. 1. P. 195–203.
3. Yankovskaya A.E. Design of Optimal Mixed Diagnostic Test With Reference to the Problems of Evolutionary Computation // Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Computation and Its Applications (EVCA'96). Moscow, 1996. P. 292–297.
4. SCORM – Home. URL: <http://scorm.com> (дата обращения: 14.12.2013).
5. Semantic Web W3C. URL: <http://www.w3.org/standards/semanticweb> (дата обращения: 14.12.2013).
6. Aroyo L., Pokraev S., Brussee R. Preparing SCORM for the Semantic Web // Robert Meersman; Zahir Tari & Douglas C. Schmidt, ed., 'CoopIS/DOA/ODBASE'. Springer, 2003. P. 621–634.
7. Silva Munoz L., Palazzo Moreira de Oliveira J. Adaptive web-based courseware development using metadata standards and ontologies. Proceedings of the International Conference on Advanced Information Systems Engineering CAiSE. Berlin : Springer-Verlag, LNCS 3084, 2004. P. 414–428.
8. Boyce S. Investigation of ontology relationships used for the modelling and generation of educational content: M.Sc. Dissertation. School of Computing, Dublin City University, 2004.
9. De Bra P., Aroyo L., Cristea A. Adaptive web-based educational hypermedia // Web dynamics, adaptive to change in content, size, topology and use / eds. by M. Levene, A. Poulovassilis. Berlin : Springer, 2004. P. 387–410.
10. Jovanovic J., Gasevic D., Devedzic V. Automating Semantic Annotation to Enable Learning Content Adaptation // 'AH' / eds. by Helen Ashman, Barry Smyth. Springer, 2006. P. 151–160.
11. Yankovskaya A., Yevtushenko N. Finite State Machine (FSM) – Based Knowledge Representation in a Computer Tutoring System // New Media and Telematic Technologies for Education in Eastern European Countries / ed. by P. Kommers. etc. Twenty University Press Enshede, 1997. P. 67–74.
12. Yankovskaya A.E., Semenov M.E. Construction of the Mixed Tests of the Quality System of Education. Proc. International Scientific Conference (Modern IT & (e-) Training). Astrakhan, Russia, 2009. P. 125–129 (in Russian).
13. Yankovskaya A.E., Semenov M.E. Foundation of the Construction of Mixed Diagnostic Tests in Systems for Quality Control of Education. Proc. 13th IASTED International Conference Computers and Advanced Technology in Education (CATE 2010) August 23–25, 2010, Maui, Hawaii, USA. P. 142–145.
14. RDF Primer. W3C Working Draft / ed. by F. Manola and E. Miller. // World Wide Web Consortium (W3C). 2004. URL: <http://www.w3.org/TR/rdf-primer> (дата обращения: 14.12.2013).
15. Web Ontology Language OWL // World Wide Web Consortium (W3C). 2007. URL: <http://www.w3.org/2004/OWL> (дата обращения: 14.12.2013).

Янковская Анна Ефимовна, д-р техн. наук, профессор. E-mail: ayyankov@gmail.com

Разин Владимир Викторович. E-mail: moonbreeze@sibmail.com

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 24 декабря 2015 г.

Yankovskaya Anna E., Razin Vladimir V. (Tomsk State University, Russian Federation)

Learning management system based on Mixed Diagnostic Tests and Semantic Web technology.

Keywords: learning management systems; Mixed Diagnostic Tests; teaching units; Semantic Web; ontology.

DOI: 10.17223/19988605/35/9

The paper describes an approach to the construction of learning management systems based on combined usage of Mixed Diagnostic Tests (MDT) in order to maintain education quality control and Semantic Web technology stack for purposes of storing learning courses' data and structures containing MDT.

Mixed Diagnostic Tests are a compromise between unconditional and conditional components. Most of learning management systems being used in educational practice only utilize a binary approach to estimating quality of education: "test passed" or "test not passed". Mixed Diagnostic Tests utilize and fuzzy logic apparatus, allowing to differentiate such estimations.

Central element of Semantic Web technology are semantic networks (ontologies) that are suited well to be used as a knowledge base for a system including MDT. Ontologies allow to describe both elements of an educational course (course, theme, lecture) and material being studied during the course (events, dates, terms, theorems etc.) in both full and flexible way. A set of MDT can be associated with every element of ontology describing teaching material. These MDT can be used to perform a check of mastering quality of a teaching course educational elements.

Three basic ontologies, CourseLevel, KnowledgeLevel and SystemLevel, are suggested to be used in an approach being described. A CourseLevel ontology describes elements of a learning course and structures containing MDT. KnowledgeLevel ontology describes possible "knowledge elements" that will be studied during the course. SystemLevel ontology is intended for structuring CourseLevel ontologies in a framework of a single course (for example, for determination of themes' order). That ontology also stores descriptions of different resources connected with course' "knowledge elements": audio and video resources, images, books and articles.

These ontologies can be supplemented with additional "child" ontologies describing in details a knowledge domain being discussed during the course, if needed.

A creation of a web service for educational courses planning seems to be the simplest and most effective way of implementing such a learning management system. That web service should be used by lecturers in the network of a faculty or the university. The paper describes general architecture of a learning management system based upon the approach being suggested. It includes a database containing system users' data, knowledge base containing the above-mentioned ontologies, and a web server providing course models creation and editing.

The system based upon the approach being described will possess both flexibility of description of learning courses and their elements and possibility of making a differentiate estimation of education quality for these courses.

REFERENCES

1. Yankovskaya, A.E. & Semenov, M.E. (2012) Decision-making in training-testing systems based on the mixed diagnostic tests. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy – Artificial intelligence and decision making*. 1. pp. 95-104. (In Russian).
2. Yankovskaya, A.E. (2011) Mixed Diagnostic Tests are a New Paradigm of Construction of Intelligent Learning and Training Systems. *Proc. New Quality of Education in the New Conditions*. Tomsk. pp. 195-203. (In Russian).
3. Yankovskaya, A.E. (1996) Design of Optimal Mixed Diagnostic Test With Reference to the Problems of Evolutionary Computation. *Proc. of the First International Conference on Evolutionary Computation and Its Applications (EVCA'96)*. Moscow. pp. 292-297.
4. SCORM – Home. (n.d.) [Online] Available from: <http://scorm.com/>. (Accessed: 14th December 2013).
5. Semantic Web – W3C. (n.d.) [Online] Available from: <http://www.w3.org/standards/semanticweb/>. (Accessed: 14th December 2013).
6. Aroyo, L., Pokraev, S. & Brussee, R. (2003) Preparing SCORM for the Semantic Web. In: Meersman, R., Tari, Z. & Schmidt, D.C. (eds) *CoopIS/DOA/ODBASE'*. Springer. pp. 621-634.
7. Silva Munoz, L. & Palazzo Moreira de Oliveira, J. (2004). Adaptive web-based courseware development using metadata standards and ontologies. *Proceedings of the International Conference on Advanced Information Systems Engineering CaiSE*. Berlin: Springer-Verlag, LNCS 3084. pp. 414-428. DOI: 10.1007/978-3-540-25975-6_30
8. Boyce, S. (2004). *Investigation of ontology relationships used for the modelling and generation of educational content*. M.Sc. Dissertation. School of Computing, Dublin City University.
9. De Bra, P., Aroyo, L. & Cristea, A. (2004). Adaptive web-based educational hypermedia. In: Levene, M. & Poulovassilis, A. (eds) *Web dynamics, adaptive to change in content, size, topology and use*. Berlin: Springer. pp. 387-410
10. Jovanovic, J., Gasevic, D. & Devedzic, V. (2006) Automating Semantic Annotation to Enable Learning Content Adaptation. In: Wade, V.P., Ashman, H. & Smyth, B. (eds) *Adaptive Hypermedia and Adaptive Web-Based Systems*. Springer. pp. 151-160.
11. Yankovskaya, A. & Yevtushenko, N. (1997) Finite State Machine (FSM) – Based Knowledge Representation in a Computer Tutoring System. In: Kommers, P. Et al. (eds) *New Media and Telematic Technologies for Education in Eastern European Countries*. Enshede: Twenty University Press. pp. 67-74.
12. Yankovskaya, A.E. & Semenov, M.E. (2009) [Construction of the Mixed Tests of the Quality System of Education]. *Modern IT & (e-) Training*. Proc. International Scientific Conference. Astrakhan, Russia. pp. 125-129. (In Russian).
13. Yankovskaya, A.E. & Semenov, M.E. (2010) Foundation of the Construction of Mixed Diagnostic Tests in Systems for Quality Control of Education. *Proc. 13th IASTED International Conference Computers and Advanced Technology in Education (CATE 2010)*. August 23-25, 2010. Maui, Hawaii, USA. pp.142-145.
14. Manola, F. & Miller, E. (2004) *RDF Primer. W3C Working Draft. World Wide Web Consortium (W3C)*. [Online] Available from: <http://www.w3.org/TR/rdf-primer>. (Accessed: 14th December 2013).
15. World Wide Web Consortium (W3C). (2007) *Web Ontology Language OWL*. [Online] Available from: <http://www.w3.org/2004/OWL/>. (Accessed: 14th December 2013).

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.17223/19988605/35/10

75 лет профессору

МАТРОСОВОЙ АНЖЕЛЕ ЮРЬЕВНЕ



2 февраля 2016 г. исполнилось 75 лет доктору технических наук, профессору, почетному работнику высшего профессионального образования Российской Федерации Матросовой Анжеле Юрьевне.

Анжела Юрьевна родилась 2 февраля 1941 г. в городе Томске в семье преподавателя Томского политехнического института Солокова Юрия Николаевича и медицинского лаборанта Калмыковой Татьяны Ивановны. С 1943 по 1950 г. семья жила в городе Загорске Московской области, ныне Сергиев Посад. В 1948 г. поступила в среднюю школу в Загорске, в 1950 г., после возвращения семьи в Томск, продолжила обучение в школе № 12 города Томска, которую закончила в 1958 г. с серебряной медалью. Параллельно с учебой в средней школе она занималась музыкой, играла на скрипке. Успехи на музыкальном поприще могли повлиять на выбор ее будущей профессии. Перед Анжелой Юрьевной стоял выбор между профессией музыканта и занятием точными науками, в частности популярной в те годы радиофизикой. Выбор пал на точные науки, о

чем она не жалеет до сих пор. Но музыка сопровождает Анжелу Юрьевну всю ее жизнь. Она активно участвовала в музыкальной жизни (играла в ансамбле скрипачей, участвовала в театральных постановках). Анжела Юрьевна с большим удовольствием посещает концерты классической музыки и своим примером пытается привить музыкальный вкус ученикам, у нее богатое собрание произведений классической музыки (которое все время пополняется) и фильмов, посвященных известным музыкантам и художникам.

В 1958 г. Анжела Юрьевна поступила в Томский государственный университет на радиофизический факультет, который окончила с отличием в 1963 г. После окончания университета работала инженером, а затем была младшим научным сотрудником в лаборатории счетно-решающих устройств под руководством А.Д. Закревского. В это время занималась проблемой решения логических уравнений. С 1967 г. она начала заниматься исследованиями в области тестирования дискретных устройств, которые были продолжены в аспирантуре факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета с 1969 по 1972 г. В 1973 г. защитила кандидатскую диссертацию «Методы решения булевых уравнений и их применение в диагностике неисправностей дискретных автоматов».

А.Ю. Матросова начала свою педагогическую деятельность в 1973 г. с переходом на факультет прикладной математики и кибернетики ТГУ в качестве старшего преподавателя, затем доцента, а после этого заведующей кафедрой математической логики и программирования. В это время ею разработаны и читаются курсы «Дискретная математика», «Диагностика дискретных устройств», «Искусственный интеллект» и др. Параллельно ведутся научные исследования в области диагностики дискретных устройств. Итогом научных исследований стала защита докторской диссертации в 1990 г. на тему «Алгоритмические методы контроля и диагностики дискретных устройств управления и проблемы контролепригодного проектирования». В 1991 г. ей присуждается ученая степень доктора технических наук, а в 1994 г. – звание профессора по кафедре программирования.

Анжела Юрьевна является автором более 180 публикаций, в том числе в ведущих академических журналах России и бывшего Советского Союза, таких как «Автоматика и телемеханика», «Автоматика и вычислительная техника» и др. Ею подготовлена монография «Алгоритмические методы синтеза тестов».

Анжела Юрьевна одна из первых на факультете прикладной математики и кибернетики в начале 90-х начала сотрудничать с зарубежными коллегами, в частности с проф. Б. Куртуа (лаборатория ТИМА, Франция), проф. М. Гёссель (Потсдамский университет, Германия), проф. Р. Убар (Таллиннский технический университет, Эстония), проф. Дж. Абрахам (Техасский университет в Остине, США), проф. И. Левин (Тель-Авивский университет, Израиль), проф. В. Сингх (Индийский институт технологий (ИИТ) Bombay, Индия) и др. Результатом сотрудничества стало написание совместных статей и докладов, принятых на ведущих международных конференциях.

Неоднократно выступала с докладами на международных конференциях и симпозиумах как в России, так и за рубежом (США, Италия, Франция, Норвегия, Индия и др.).

Профессор А.Ю. Матросова является действующим членом трёх диссертационных советов, академиком Российской академии информатизации, академиком Академии наук прикладной радиоэлектроники (Беларусь, Россия, Украина), членом редакционной коллегии журнала «Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика», членом программных комитетов множества российских и зарубежных конференций международного уровня.

А.Ю. Матросова одна из первых в Томском государственном университете получила престижный грант Российского научного фонда по теме «Тестирование и контролепригодное проектирование логических схем высокой производительности». В период с 1995 по 2000 г. неоднократно была научным руководителем грантов Министерства образования по разделу «Автоматика и телемеханика». В рамках российско-индийского гранта РФФИ (2011–2013 гг.) под её руководством выполнялся совместный проект с индийскими коллегами «Синтез логических схем, обеспечивающий их качественное тестирование и обнаружение неисправностей, снижающих производительность схем». Неоднократно руководила стажировками молодых учёных из других городов. Под руководством Анжелы Юрьевны защищено восемь кандидатских диссертаций.

В настоящее время Анжела Юрьевна работает заведующей кафедрой программирования, читает базовый курс «Дискретная математика» для студентов факультета прикладной математики и кибернетики (направление «Экономика») и для студентов физического факультета (направление «Информационные системы и технологии»), несколько спецкурсов для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика», руководит курсовыми и дипломными работами студентов, а также аспирантами. В своих воспоминаниях выпускники отмечают её доброжелательность, интеллигентность и, конечно, высокий профессионализм.

За большую и плодотворную работу А.Ю. Матросова награждена нагрудным знаком «Почётный работник высшего профессионального образования РФ», юбилейной медалью «400 лет Городу Томску», медалью «За заслуги перед ТГУ» и медалью «Д.И. Менделеева», рядом почётных грамот Министерства образования, Администрации города Томска и ТГУ.

Сотрудники факультета прикладной математики и кибернетики, коллеги, друзья и ученики поздравляют Анжелу Юрьевну с юбилеем и искренне желают ей крепкого здоровья на долгие годы, личного счастья и благополучия!

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАХОЛДИНА Мария Алексеевна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

ГОРЦЕВ Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru

ГУБИНА Оксана Викторовна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: gov7@mail.ru

ДОМБРОВСКИЙ Владимир Валентинович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета, профессор кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

КОШКИН Геннадий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: kgm@mail.tsu.ru

ЛАРИНА Татьяна Михайловна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: latami@mail.ru

ЛИВШИЦ Климентий Исаакович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Томского государственного университета. E-mail: kim47@mail.ru

МОИСЕЕВА Светлана Петровна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: smoiseeva@mail.ru

ОЗНАБИХИН Дмитрий Анатольевич – аспирант кафедры автоматизации обработки информации Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: kvid06@mail.ru

ПАНКРАТОВА Екатерина Владимировна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: pankate@sibmail.com

ПОДКУР Полина Николаевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, Кемеровский институт (филиал). E-mail: paulina.podkur@gmail.com

РАЗИН Владимир Викторович – ассистент кафедры теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета. E-mail: moonbreeze@sibmail.com

СЕНЧЕНКО Павел Васильевич – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации обработки информации, декан факультета систем управления Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: pvs@tusur.ru

СМОЛЕНЦЕВ Николай Константинович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа Кемеровского государственного университета. E-mail: smolennk@mail.ru

СУХОТИНА Лариса Юрьевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Томского государственного университета. E-mail: suhotina@mail.fpmk.tsu.ru

ТАРАСЕНКО Владимир Феликсович – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: vtara54@mail.ru

УБОНОВА Елена Георгиевна – магистрантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: rikka07@list.ru

ШУЛЕНИН Валерий Петрович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической кибернетики Томского государственного университета. E-mail: shvp@fpmk.tsu.ru

ЯНКОВСКАЯ Анна Ефимовна – доктор технических наук, зав. лабораторией интеллектуальных систем Томского государственного архитектурно-строительного университета, профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета, профессор кафедры программной инженерии Томского государственного университета, профессор кафедры компьютерных систем в управлении и проектировании Томского университета систем управления и радиоэлектроники, профессор кафедры клинической психологии и психотерапии Томского государственного медицинского университета. E-mail: ayuankov@gmail.com

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2016. № 2 (35)

Редактор Н.А. Афанасьева
Корректор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано к печати 15.06.2016 г. Формат 60x84¹/₈.

Гарнитура Times.

Печ. л. 11,5; усл. печ. л. 10,7.

Тираж 250 экз. Заказы № 1913.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)-53-15-28
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru