ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (35)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5
DOI: 10.17223/19988605/35/1

В.В. Домбровский, Т.М. Ларина

СТРАТЕГИИ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ С УЧЕТОМ ТОРГОВЫХ ИЗДЕРЖЕК И ОГРАНИЧЕНИЙ НА ВЛОЖЕНИЯ В ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ

Работа посвящена построению и исследованию модели динамического управления самофинансируемым инвестиционным портфелем с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы вложений. Предполагается, что ставка по безрисковым вложениям отлична от ставки по займам. Для решения задачи управления портфелем используется метод управления с прогнозирующей моделью. Для подтверждения работоспособности модели приводятся результаты численного моделирования на основе реальных данных валютного рынка «Forex».
Ключевые слова: инвестиционный портфель; управление с прогнозирующей моделью; валютные пары; транзакционные издержки.

Проблема оптимизации и управления инвестиционным портфелем является одной из основных в управлении финансами и представляет большой теоретический и практический интерес.

Инвестиционный портфель (ИП) – это набор рисковых и безрисковых финансовых активов, которые инвестор включает в портфель. Рисковыми активами считают финансовые активы со случайной меняющейся доходностью (например, акции, валютные пары). Безрисковыми являются финансовые активы с известной заранее доходностью (государственные обязательства, казначейские векселя, банковские депозиты). Управление ИП осуществляется при помощи перераспределения капитала – купли-продажи различных рисковых и безрисковых активов.

Начало современной портфельной теории было положено революционной работой Г. Марковица [2] 1952 г. Результаты Марковица были развиты и дополнены не менее известными работами В. Шарпа [1], Д. Тобина [3, 4], Р. Мертона [5] и других исследователей.

Подход Марковица, а также его модификации основаны на предположениях о том, что инвестор стремится либо максимизировать доходность портфеля, минимизировав риск портфеля, либо минимизировать риск портфеля и получить при этом желаемую доходность. Проблема оптимизации структуры портфеля в зависимости от выбора функции риска и способов учета неопределенности сводится к решению задач квадратичного, линейного или стохастического программирования.

Практическая реализация большинства существующих на данный момент методов оптимизации портфеля включает два этапа:

1. Оценка параметров модели с использованием исторических данных.
2. Оптимизация портфеля с использованием вместо истинных значений параметров их оценок.

Результат оптимизации существенно зависит от точности оценок. Кроме того в большинстве методов, представленных в литературе, отсутствуют ограничения на объемы торговых операций и не учитываются транзакционные издержки.

В настоящей работе рассматривается построение и исследование модели динамического управления самофинансируемым инвестиционным портфелем с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы вложений. Кроме того, предполагается, что ставка по безрисковым вложениям отлична от ставки по займам.

Задача управления инвестиционным портфелем формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой доходностью. Управление ИП осуществляется при помощи перераспределения капитала на каждом этапе управления в зависимости от состояния рынка. Для решения задачи управления портфелем используется метод управления с прогнозирующей моделью, который позволяет эффективно учитывать ограничения [6–10].

Рассматриваемая в данной работе модель обладает следующими преимуществами:

1. Возможность учета ограничений на объемы вложений, квадратичные транзакционные издержки.
2. Не требуется каких-либо предположений относительно вероятностных свойств цен финансовых активов.
3. Алгоритм управления не использует статистических методов оценивания параметров модели.
4. Возможность адаптироваться к изменяющимся рыночным условиям путем введения новой информации в процессе управления.

Для подтверждения работоспособности модели было проведено численное моделирование на основе реальных данных международного валютного рынка «Forex».

1. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с учетом ограничений

Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из n видов рисковых финансовых активов и одного вида безрискового актива – банковского счета. Капитал, помещенный в рисковый актив i-го вида в момент времени k, равен $u_i(k)$, $(i=\overline{1,n})$, в безрисковый – $u_0(k)\geq 0$.

Рассматриваемый нами ИП является самофинансируемым, т.е. деньги извне на банковский счет не поступают, а снимаются только с целью вложения в ценные бумаги, входящие в данный ИП, но предполагается, что в случае необходимости инвестор может заимствовать капитал. Объем займа равен $u_{n+1}(k)\geq 0$.

Тогда общий объем вложений в момент времени k будет равен

$$V(k)=\sum_{i=1}^{n}u_i(k)+u_0(k)-u_{n+1}(k). \tag{1}$$

Пусть $P_i(k)$ – цена i-го рискового актива в момент времени k, $\eta_i(k+1)$ – доходность рискового актива за период $[k,k+1]$, которая вычисляется по формуле

$$\eta_i(k+1)=\frac{P_i(k+1)-P_i(k)}{P_i(k)}. \tag{2}$$

Динамика изменения ИП имеет следующий вид [6, 7]:

$$V(k+1)=\sum_{i=1}^{n}[1+\eta_i(k+1)]u_i(k)+[1+r_1]u_0(k)-[1+r_2]u_{n+1}(k), \tag{3}$$

где r_1 – ставка доходности безрискового актива; r_2 – ставка заимствования, причем $r_1<r_2$. С учетом того, что $u_0(k)=V(k)-\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(k)+u_{n+1}(k),$ уравнение (3) можно представить в виде

$$V(k+1)=[1+r_1]V(k)+\sum_{i=1}^{n}[\eta_i(k+1)-r_1]u_i(k)-[r_2-r_1]u_{n+1}(k). \tag{4}$$

Используя векторно-матричные обозначения, получим

$$V(k+1)=[1+r_1]V(k)+b[\eta(k+1),k+1]u(k), \tag{5}$$

где $b[\eta(k+1),k+1]=[\eta_1(k)-r_1 \ldots \eta_n(k)-r_1 \; r_1-r_2]$ – вектор доходностей рисковых активов, $u(k)=[u_1(k) \quad u_2(k) \quad \ldots \quad u_{n+1}(k)]^{\mathrm{T}}$ – вектор управлений.

На практике необходимо учитывать ограничения на объемы вложений и займов [6, 7]:

$$u_i^{\min}(k)\leq u_i(k)\leq u_i^{\max}(k)(i=\overline{1,n}),$$

$$0 \le V(k) - \sum_{i=1}^{n} u_i(k) + u_{n+1}(k) \le u_0^{\max}, \tag{6}$$

$$0 \le u_{n+1}(k) \le u_{n+1}^{\max}(k).$$

Если нижняя граница $u_i^{\min}(k) < 0\,(i = \overline{1,n})$, то для рискового актива i-го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не больше, чем $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \ge 0\,(i = \overline{1,n})$, то операции «продажа без покрытия» для рискового актива i-го вида запрещены; $u_i^{\max}(k)\,(i = \overline{1,n})$, определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в рисковые активы i-го вида; $u_0^{\max}(k) \ge 0$ определяет максимальный размер капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив; $u_{n+1}^{\max}(k) \ge 0$ определяет максимальный размер займа. Стоит отметить, что $u_i^{\min}(k)$ и $u_i^{\max}(k)$ $(i = \overline{1,n})$, на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma_i V(k)$, $u_i^{\max}(k) = \beta_i V(k)$, где γ_i и β_i являются некоторыми параметрами, задающими так называемое кредитное плечо. Финансовым, или кредитным, плечом для участников маржинальной торговли на валютном рынке «Forex» называют отношение заёмных средств к собственным. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета.

Стратегия управления портфелем определяется таким образом, чтобы капитал реального управляемого ИП с наименьшими отклонениями следовал траектории эталонного портфеля с желаемой доходностью $\mu_0 > r_1$, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k). \tag{7}$$

В начальный момент времени $V^0(0) = V(0)$. Заметим, что $V^0(k)$ – величина детерминированная, известна для всех моментов k и ее можно рассматривать как известный параметр. Доходность μ_0 задается инвестором исходя из анализа состояния финансового рынка и склонности инвестора к риску.

Предположим, что единственным источником информации в момент времени k являются исторические значения доходностей и текущее значение портфеля $V(k)$. В данной работе для получения оптимальной стратегии управления используем метод управления с прогнозирующей моделью.

Основная идея управления с прогнозирующей моделью заключается в том, что решается задача оптимизации критерия со скользящим горизонтом в каждый момент времени k:

$$\begin{aligned}\min_{u(k/k)\ldots u(k+m-1/k)} J(k+m/k) = E\{\sum_{i=1}^{m}[V(k+i/k) - V^0(k+i)]^2 / V(k), \eta(k), \ldots, \eta(k-N)\} + \\ + E\sum_{i=0}^{m-1}\{[u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]^{\mathrm{T}} R(k,i) \times \\ \times [u(k+i/k) - (I + Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)] / V(k), \eta(k), \ldots, \eta(k-N+1)\},\end{aligned} \tag{8}$$

где m – горизонт прогнозирования; $u(k+i/k) = [u_1(k+i/k), \ldots, u_n(k+i/k)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозных значений управлений; $R(k,i) > 0$ – положительно определенная симметричная матрица; $V(k+i/k)$ – предполагаемые значения портфеля; N – количество исторических данных; I – единичная матрица размерности $(n+1)$; $Q[\eta(k+i)] = \mathrm{diag}\{\eta_1(k+i), \eta_2(k+i), \ldots, \eta_n(k+i), 0\}$ – матрица доходностей; $E\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания. В качестве управления в момент времени k обозначим $u(k) = u(k/k)$. Для получения управлений на следующем $(k+1)$ шаге горизонт управления сдвигается на один шаг и процедура повторяется.

Можно отметить, что первое слагаемое в критерии представляет собой квадратичную ошибку и отражает качество слежения, второе слагаемое накладывает штраф, если реальная траектории идет ниже заданной траектории, третье учитывает транзакционные издержки и накладывает штраф на слишком большие транзакции.

2. Синтез стратегий управления с прогнозирующей моделью

Критерий (8) можно представить в эквивалентной форме:

$$
\begin{gathered}
J(k+m/k)=E\{\sum_{i=1}^{m}V^{2}(k+i/k)-2V^{0}(k+i)V(k+i/k)\}+\\
+E\{\sum_{i=0}^{m-1}[u(k+i/k)-(I+Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]^{\mathrm{T}}R(k,i)\times\\
\times[u(k+i/k)-(I+Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]/V(k),\eta(k),...,\eta(k-N+1)\},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где исключены слагаемые, не зависящие от управления.

Определим прогнозные значения портфеля следующим уравнением:

$$
\begin{gathered}
V(k+i/k)=A^{i}V(k)+A^{i-1}b[\theta(k)]u(k/k)+A^{i-2}b[\theta(k)]u(k+1/k)+\\
+...+b[\theta(k)]u(k+i-1/k)\ (i=\overline{1,m}),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $A=1+r_1, b[\theta(k)]=[\theta(k)-e_n r_1...\theta(k)-e_n r_1\ r_1-r_2]$, $\theta(k)=\alpha_1\eta(k)+\alpha_2\eta(k-1)+...+\alpha_N\eta(k-N+1)$, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N$ – некоторые параметры.

Параметры $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N$ являются настраиваемыми и определяются таким образом, чтобы достичь наилучших результатов при управлении. Стоит отметить, что никаких предположений относительно параметров мы не делаем.

Заметим, что (5) определяет реальные значения ИП, а уравнение (10) определяет предсказанные значения портфеля. Таким образом, в отличие от других известных моделей в данной работе не прогнозируются будущие значения доходностей, а предсказываются будущие значения портфеля в целом.

Прогнозное значение критерия (9) представим в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
K(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}\{V^{2}(k+i/k)-2V^{0}(k+i/k)V(k+i/k)\}+\\
+\sum_{i=1}^{m-1}\{[u(k+i/k)-(I+Q[\theta(k)])u(k+i-1/k)]^{\mathrm{T}}R(k,i)[u(k+i/k)-(I+Q[\theta(k)])u(k+i-1/k)]\}+\\
+[u(k/k)-(I+Q[\eta(k)])u(k-1/k)]^{T}R(k,0)[u(k/k)-(I+Q[\eta(k)])u(k-1/k)],
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где $Q[\theta(k)]=\mathrm{diag}\{\theta_1(k),\theta_2(k),...,\theta_n(k),0\},(i=\overline{1,m-1})$, θ_i – компоненты вектора θ. Заметим, что при $i=0$ $Q[\theta(k)]=Q[\eta(k)]$.

Введем следующие обозначения:

$$
X(k+1)=\begin{bmatrix}V(k+1/k)\\V(k+2/k)\\...\\V(k+m/k)\end{bmatrix},\Phi[\theta(k)]=\begin{bmatrix}b[\theta(k)] & 0_{1xn+1} & ... & 0_{1xn+1}\\ Ab[\theta(k)] & b[\theta(k)] & ... & 0_{1xn+1}\\ ... & ... & ... & ...\\ A^{m-1}b[\theta(k)] & A^{m-2}b[\theta(k)] & ... & b[\theta(k)]\end{bmatrix},\ \Psi=\begin{bmatrix}A\\A^2\\...\\A^m\end{bmatrix},
$$

$$
U(k)=\begin{bmatrix}u(k)\\u(k+1)\\...\\u(k+m-1)\end{bmatrix},\ \Delta_1(k+1)=2[V^0(k+1)\quad V^0(k+2)\quad ...\quad V^0(k+m)].
$$

Тогда критерий (11) можно представить в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
K(k+m/k)=X^{\mathrm{T}}(k+1)X(k+1)-\Delta_1(k+1)X(k+1)+\\
+U^{\mathrm{T}}(k)\overline{R}(k)U(k)-2u(k/k)^{\mathrm{T}}R(k,0)(I+Q[\eta(k)])u(k-1)+\\
+u^{\mathrm{T}}(k-1)(I+Q[\eta(k)])R(k,0)(I+Q[\eta(k)])u(k-1),
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где $\overline{R_{t,t}}(k)=R(k,t)+R(k,t+1)(I+2Q[\theta(k)])+Q[\theta(k)]^{\mathrm{T}}R(k,t+1)Q[\theta(k)]\ (t=\overline{0,m-2})$, $\overline{R_{m,m}}(k)=R(k,m-1)$, $\overline{R_{t+1,t}}(k)=\overline{R_{t,t+1}}(k)=-R(k,t+1)(I+Q[\theta(k)])\ (t=\overline{0,m-1})$.

Используя $X(k+1) = \Psi V(k) + \Phi[\theta(k)]U(k),$ представим (12) в виде

$$K(k+m/k) = V^2(k)\Psi^{\mathrm{T}}\Psi + [2V(k)\Psi^{\mathrm{T}} - \Delta_1(k+1)]\Phi[\theta(k)]U(k) +$$

$$+U^{\mathrm{T}}(k)\Phi^{\mathrm{T}}[\theta(k)]\Phi\ [\theta(k)]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)\overline{R}(k,i)U(k), \qquad (13)$$

где не учитываются слагаемые, которые не зависят от управления – $u(k+i/k)$.

Критерий (13) можно записать в следующем виде:

$$K(k+m/k) = [2V(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)[H(k) + \overline{R}(k)]U(k), \qquad (14)$$

где $H(k), G(k), F(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k) = [H_{t,f}(k)],\ G(k) = [G_t(k)],\ F(k) = [F_t(k)],\ t, f = \overline{1,m},$$

$$H(k) = \Phi^{\mathrm{T}}[\theta(k)]\Phi\ [\theta(k)], \qquad (15)$$

$$G(k) = \Psi^{\mathrm{T}}\Phi[\theta(k)],\ F(k) = \Delta_1(k+1)\Phi[\theta(k)] + L(k),$$

$$L(k) = [-2u(k-1)(I + Q[\eta(k)])^{\mathrm{T}} R(k,0)\quad 0_{1x(n+1)}\quad \ldots\quad 0_{1x(n+1)}].$$

Управление осуществляется при следующих ограничениях:

$$U_{\min}(k) \le \overline{S}U(k) \le U_{\max}(k),$$

где $U_{\min}(k) = [u^{\mathrm{T}}_{\min}(k), 0_{n+2x1}, \ldots, 0_{n+2x1}]^{\mathrm{T}}$, $U_{\max}(k) = [u^{\mathrm{T}}_{\max}(k), 0_{n+2x1}, \ldots, 0_{n+2x1}]^{\mathrm{T}}$,

$$U_{\min}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\min}(k) \\ u_2^{\min}(k) \\ \ldots \\ u_n^{\min}(k) \\ -V(k) \\ 0 \end{bmatrix}, U_{\max}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\max}(k) \\ u_2^{\max}(k) \\ \ldots \\ u_n^{\max}(k) \\ u_0^{\max}(k) - V(k) \\ u_{n+1}^{\max}(k) \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{S} = \mathrm{diag}\{S, 0_{n+2xn+1}, \ldots, 0_{n+2xn+1}\},$$

где $0_{(n+2)x(n+1)}$ – нулевая матрица размерности $(n+2)\times(n+1)(m-1)$.

Оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий (12), определяется уравнением

$$u(k) = [I_{n+1}\quad 0_{n+1}\quad \ldots\quad 0_{n+1}]U(k), \qquad (16)$$

где I_{n+1} – единичная матрица размерности $(n+1)$, 0_{n+1} – нулевая матрица размерности $(n+1)$.

3. Численное моделирование с использованием реальных данных международного валютного рынка «Forex»

Для подтверждения работоспособности представленной модели было проведено численное моделирование на основе реальных данных международного валютного рынка «Forex». Для моделирования использовались данные котировок шести видов валютных пар: USDJPY (доллар – йена), USDDEM (доллар – немецкая марка), EURJPY (евро – йена), EURUSD (евро – доллар), GBPUSD (фунт–доллар), CHFJPY (франк – йена), в период с 16.02.2001 г. – 13.11.2003 г., всего 1000 торговых дней, и один вид безрискового актива – банковский вклад с доходностью r_1 = 0,015%. Также нам доступна услуга кредитования со ставкой по займу r_2 = 0,03%.

При моделировании предполагалось, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = \alpha$. Поэтому параметр $\theta(k)$ определялся следующим образом:

$$\theta(k) = \alpha \sum_{t=1}^{N} \eta(k-t+1).$$

Рассматриваемый ИП состоял из шести валютных пар; период «скользящего окна» $N = 10$; параметр $\alpha = 0{,}5$; размер кредитных плеч $\gamma_i = \beta_i = 2$; желаемая доходность $\mu_0 = 0{,}0015$.

Результаты моделирования представлены на рис. 1–3. На рис. 1 представлена динамика капитала управляемого ИП относительно эталонной траектории. На рис. 2 показана динамика вложений в валютную пару EURUSD. На рис. 3 представлена доходность валютной пары EURUSD.

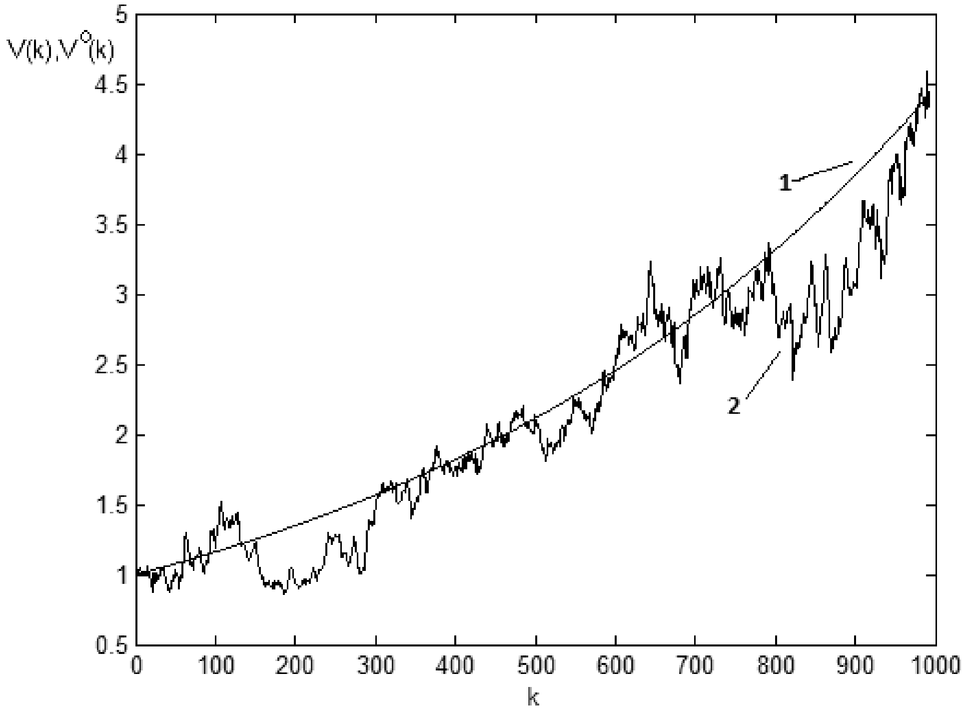

Рис. 1. Динамика капитала, управляемого ИП относительно эталонной траектории:
1 – эталонная траектория; *2* – динамика капитала управляемого ИП

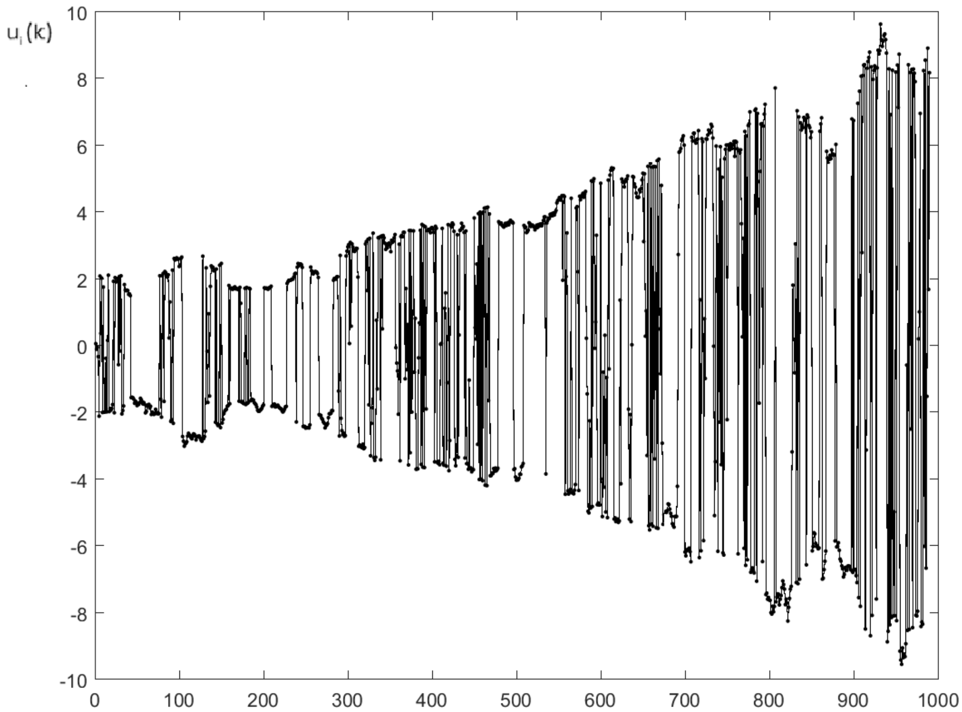

Рис. 2. Динамика вложений в валютную пару EURUSD

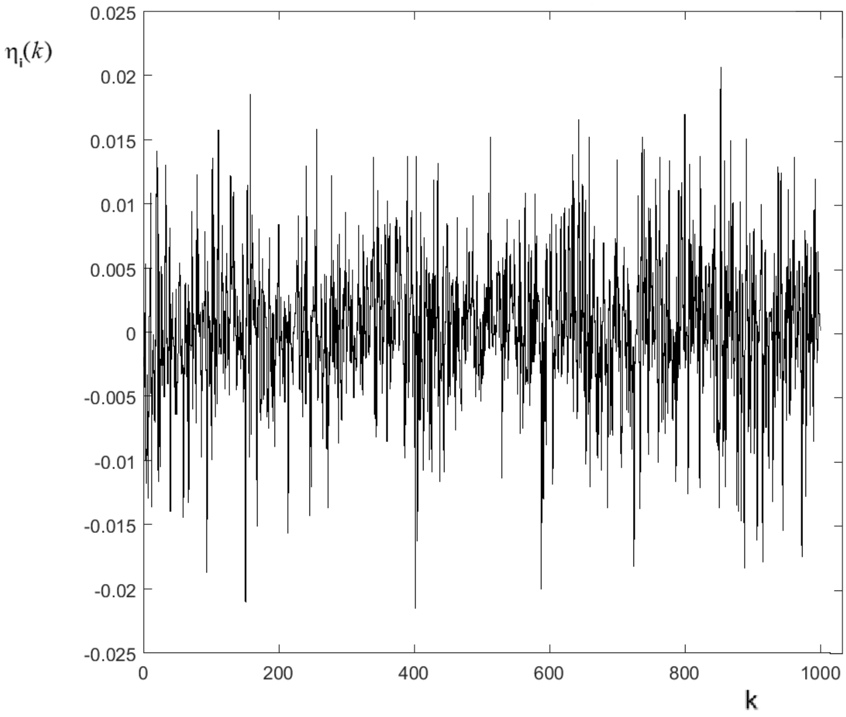

Рис. 3. Динамика доходности валютной пары EURUSD

Заключение

В данной работе рассмотрена задача оптимизации инвестиционного портфеля с учетом транзакционных издержек, ограничений на объемы вложений в финансовые активы и различия ставок на вложения и заем. Получена стратегия управления с обратной связью с использованием метода управления с прогнозирующей моделью. Результаты численного моделирования, проведенные на основе реальных данных международного валютного рынка «Forex», подтверждают работоспособность, эффективность предложенной модели и возможность ее реального применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Д.В. Инвестиции. М. : Инфра-М, 1997. 1028 с.
2. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. Vol. 7, No. 1. P. 77–91.
3. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Review of Economic Studies. 1958. Vol. 25, No. 2. P. 65–86.
4. Tobin J. The theory of portfolio selection. N. Y. : Macmillan, 1965.
5. Merton R.C. Continuous-time finance. Cambridge : Blackwell, 1990.
6. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71–85.
7. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Y. Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Transaction Costs and Different Rates for Borrowing and Lending // Electronic copy Available at SSRN. URL: http://ssrn.com/abstract=2516364
8. Домбровский Д.В. Динамические модели управления инвестиционным портфелем на нестационарном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек и ограничений : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008. 188 с.
9. Dombrovskii V.V. Adaptive data-driven portfolio optimization in the non stationary financial market under constraints // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 5–13.
10. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Y. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. No. 54. P. 325–331.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru
Ларина Татьяна Михайловна. E-mail: latami@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 февраля 2016 г.

Dombrovskii Vladimir V., Larina Tatyana M. (Tomsk State University, Russian Federation).
Predictive control strategies for investment portfolio subject to constraints and trading costs.
Keywords: investment portfolio; model predictive control; transaction costs; currency pairs.

DOI: 10.17223/19988605/35/1

Consider an investment portfolio consisting of n risky assets and one risk-free asset (e.g., a bank account or a government bond). Let $u_i(k)$, $(i=\overline{1,n})$ denote the amount of money invested in the i-th asset at time k; $u_0(k)\geq 0$ is the amount invested in a risk-free asset. Investor also can borrow the capital in case of need. The volume of the borrowing of the risk-free asset is equal to $u_{n+1}(k)\geq 0.$ If $u_i(k)<0,(i=\overline{1,n})$, then we use short position with the amount of shorting $|u_i(k)|$. Let $\eta_i(k+1)$ denote the (simple) return of the i-th risky asset per period $[k,k+1]$. It is a stochastic unobservable at time k.

By considering the self-finance strategies, the wealth process at the time $k+1$ is given by

$$V(k+1)=[1+r_1]V(k)+\sum_{i=1}^{n}[\eta_i(k+1)-r_1]u_i(k)-[r_2-r_1]u_{n+1}(k),$$

where r_1 is the riskless lending rate, r_2 is the riskless borrowing rate, $r_1 < r_2$.

We impose the following constraints on the decision variables (a borrowing limit on the total wealth invested in the risky assets, and long- and short-sale restrictions on all risky assets):

$$u_i^{\min}(k)\leq u_i(k)\leq u_i^{\max}(k)(i=\overline{1,n}), \tag{1}$$

$$0\leq V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)+u_{n+1}(k)\leq u_0^{\max}, \tag{2}$$

$$0\leq u_{n+1}(k)\leq u_{n+1}^{\max}(k). \tag{3}$$

Our objective is to control the investment portfolio, via dynamic asset allocation among the n stocks and the risk-free asset, by tracking, as closely as possible, a desired deterministic reference trajectory (reference portfolio)

$$V^0(k+1)=[1+\mu_0]V^0(k),$$

where μ_0 is a given parameter representing the growth factor and the initial state is $V^0(0)=V(0)$.

We use the model predictive control methodology in order to design feedback predictive control strategies for optimal dynamic allocation of a portfolio.

We define the following objective with receding horizon (risk function) which is to be minimized at each time k:

$$\begin{aligned}J(k+m/k)=E\{\sum_{i=1}^{m}[V(k+i/k)-V^0(k+i)]^2/V(k),\eta(k),\ldots,\eta(k-N)\}+\\+E\sum_{i=0}^{m-1}\{[u(k+i/k)-(I+Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]^T R(k,i)\times\\\times[u(k+i/k)-(I+Q[\eta(k+i)])u(k+i-1/k)]/V(k),\eta(k),\ldots,\eta(k-N+1)\},\end{aligned}$$

over the sequence of predictive control inputs $u(k/k)$, $u(k+1/k)$,…, $u(k+m-1/k)$ dependent on the portfolio wealth and the market information at the current time k, under constraints (1)–(3), where m is the prediction horizon. The first term represents the conditional mean-square error between the investment portfolio value and a reference (benchmark) portfolio, the second term penalizes for transaction costs associated with trading amount. At the time k, $u(k)=u(k/k)$ is assumed to be control $u(k)$. To obtain the control at the next step $k+1$, the procedure is repeated, and the control horizon is one step shifted.

Our approach is direct in that it uses directly the observed historical data to construct an adaptive algorithm for online portfolio selection. The main features of our approach are (a) the ability to adapt to non-stationary market environments by dynamically incorporating new information into the decision process; (b) no stochastic assumptions are needed regarding the stock prices, and (c) the flexibility of dealing with portfolio constraints. We also present the numerical modeling results based on currency pairs traded on the international currency market FOREX that give evidence of capacity and effectiveness of proposed approach.

REFERENCES

1. Sharpe, W., Alexander, G. & Bailey, J. (1997) *Investitsii* [Investments]. Translated from English. Moscow: Infra-M.
2. Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 7(1). pp. 77-91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
3. Tobin, J. (1958) Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*. 25(2). pp. 65-86. DOI: 10.2307/2296205
4. Tobin, J. (1965) *The theory of portfolio selection*. New York: Macmillan.
5. Merton, R.C. (1990) *Continuous-time finance*. Cambridge: Blackwell.
6. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 67(12). pp. 71-85. DOI: 10.1134/S000511790612006X

7. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Y. (2014) *Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Trans-action Costs and Different Rates for Borrowing and Lending*. [Online] Available from: http://ssrn.com/abstract=2516364.
8. Dombrovskii, D.V. (2008) *Dinamicheskie modeli upravleniya investitsionnym portfelem na nestatsionarnom finansovom rynke s uchetom tranzaktsionnykh izderzhek i ogranicheniy* [Dynamic portfolio management models in the non-stationary financial markets under constraints and transaction costs]. Physics and Mathematics cand. Diss. Tomsk.
9. Dombrovskii, V.V. (2013) Adaptive data-driven portfolio optimization in the non stationary financial market under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 5-13. (In Russian).
10. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Y. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325-331.