ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (35)

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/35/2

М.А. Бахолдина, А.М. Горцев

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МОДУЛИРОВАННОМ ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. В статье приводятся аналитические результаты по нахождению оценки максимального правдоподобия длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; непродлевающееся мертвое время; функция правдоподобия; оценка максимального правдоподобия; длительность мертвого времени.

Условия функционирования реальных систем массового обслуживания таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств, как правило, можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем; часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs) [1–9]. Интерес к рассмотрению дважды стохастических потоков событий проявляется неслучайно. Все это находит широкое применение в различных отраслях науки и техники, таких как теория сетей, P2P-сети и адаптивное вещание видео, системы оптической связи, статистическое моделирование, финансовая математика и др. [10–16]. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо, что еще более ухудшает ситуацию, изменяются со временем случайным образом. Поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий) [17–26]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [27–33].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока выступает мертвое время регистрирующих приборов. Необходимость рассмотрения случая мертвого времени вызвана тем, что на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживающий прибор, порождает период так называемого мертвого времени [34–42], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки»; в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В настоящей работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [43–46] и обобщенного полусинхронного потока событий [47–49] и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий с кусочно-постоянной интенсивностью. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [21, 22, 50, 51], при этом в [50] показано, что данные потоки могут быть представлены в виде моделей MAP-потоков событий. Настоящая статья является непосредственным развитием работ [51–55], где решается задача нахождения совместной плотности вероятности длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени. В данном исследовании приводятся аналитические результаты по нахождению оценки максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток или поток событий), интенсивность которого является кусочно-постоянным стационарным случайным процессом $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0)$. Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_1$, и второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_2$. В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i $(\lambda(t) = \lambda_i)$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1,2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1, при этом переход осуществляется с вероятностью p $(0 \leq p \leq 1)$; с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе также возможен в произвольный момент времени, не совпадающий с моментом наступления события, при этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β: $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1+\beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен и может осуществляться только в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ $(0 \leq \delta \leq 1)$ дополнительное событие. Отметим, что события пуассоновских потоков и дополнительные события неразличимы для наблюдателя. В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. При этом матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\beta) & \beta \\ \alpha(1-\delta) & -(\lambda_2+\alpha) \end{Vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha\delta & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\beta = 0$, то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [47–49].

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где *1*, *2* – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквами δ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые t_1, t_2,... – белыми.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Поскольку процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то говорить о состоянии потока можно только в вероятностном смысле. Вся доступная информация о потоке – это моменты наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k$ с начала наблюдения t_0 до момента t.

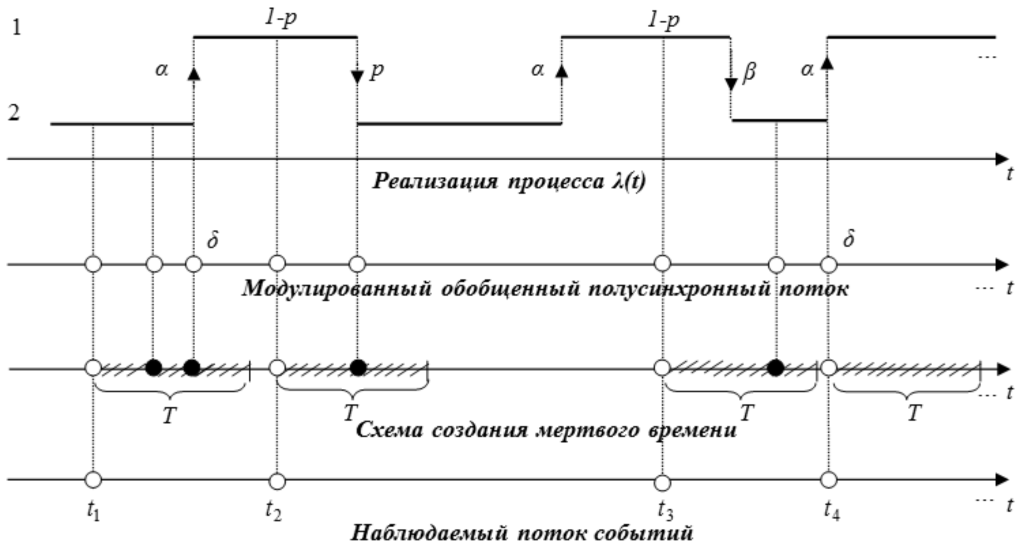

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Параметры потока $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ полагаются известными, длительность мертвого времени T неизвестна. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) на основании выборки $t_1, t_2, ..., t_k$ наблюденных моментов наступления событий потока осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1,2,...$, значение длительности *k*-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности *k*-го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого *k* (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда одномерная плотность вероятности $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, примет вид [51, 55]:

$$p_T(\tau)=\begin{cases}0, & 0\le\tau<T,\\ \dfrac{z_1}{z_2-z_1}\left[z_2-\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2}f(T)\right]e^{-z_1(\tau-T)}-\dfrac{z_2}{z_2-z_1}\left[z_1-\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2}f(T)\right]e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau\ge T,\end{cases}\tag{1}$$

$$f(T)=\lambda_1\alpha+(p\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\alpha\delta)+\alpha(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\{(p\lambda_1+\beta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-\lambda_2+\delta\beta]-p\lambda_1\alpha\}\frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)T}}{F(T)},$$

$$F(T)=z_1z_2-qe^{-(\beta_1+\beta_2)T},\ \beta_1=p\lambda_1+\beta,\ \beta_2=\alpha,\ q=\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)],$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right),\quad 0<z_1<z_2.$$

Пусть $\tau_1=t_2-t_1$, $\tau_2=t_3-t_2$, …, $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, $\tau_1\ge 0$, $\tau_2\ge 0$, …, $\tau_k\ge 0$, – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0,t]$ значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1, …, τ_k по возрастанию: $\tau_{\min}=\tau^{(1)}<\tau^{(2)}<...<\tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий t_1, t_2,…, t_k,… образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k, $k=1,2,...$. Тогда функция правдоподобия с учетом (1) запишется в виде

$$L(T\mid\tau^{(1)},...,\tau^{(k)})=\prod_{j=1}^{k}p_T(\tau^{(j)}),\quad 0\le T\le\tau_{\min};\ L(T\mid\tau^{(1)},...,\tau^{(k)})=0,\quad T>\tau_{\min}.$$

Поскольку задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени в предположении, что все параметры потока $\lambda_1>\lambda_2\ge 0$, $0\le p\le 1$, $\beta>0$, $\alpha>0$, $0\le\delta\le 1$ известны, то согласно методу максимального правдоподобия ее реализация есть решение оптимизационной задачи

$$L(T\mid\tau^{(1)},...,\tau^{(k)})=\prod_{j=1}^{k}p_T(\tau^{(j)})\Rightarrow\max_T,\quad 0\le T\le\tau_{\min},\quad \tau_{\min}>0,\tag{2}$$

где $p_T(\tau^{(j)})$ определена в (1) для $\tau=\tau^{(j)}$. Значение T, при котором функция правдоподобия (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи (2)

Произведем переобозначение: $\tau_m=\tau_{\min}$. В силу того что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0\le T\le\tau_m$, положим $p_T(\tau^{(j)})=0$, $j=\overline{2,k}$, при $T>\tau_m$ ($\tau_m>0$). В дальнейшем изложенная ситуация, когда принимается $\tau_m=0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Перейдем к исследованию $p_T(\tau_m)$ как функции переменной T ($0\le T\le\tau_m$). Отметим, что $p_T(\tau_m)\ge 0$, так как $p_T(\tau_m)$ есть одномерная плотность вероятности. Исследуем производную $p'_T(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p'_T(\tau_m)=\frac{1}{(z_2-z_1)(\beta_1+\beta_2)}\Big\{z_1e^{-z_1\tau_m}\left[z_1z_2(\beta_1+\beta_2)-z_1f(T)-f'(T)\right]e^{-z_1T}-z_2e^{-z_2\tau_m}\left[z_1z_2(\beta_1+\beta_2)-\right.$$
$$\left.-z_2f(T)-f'(T)\right]e^{-z_2T}\Big\},\tag{3}$$

$$f'(T)=-\alpha(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)(\beta_1+\beta_2)z_1z_2\{(p\lambda_1+\beta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-\lambda_2+\delta\beta]-p\lambda_1\alpha\}\frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)T}}{F^2(T)},\ 0\le T\le\tau_m,$$

где $f(T)$, $F(T)$ определены в (1); $f'(T)$ – производная функции $f(T)$ по T.

Лемма 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ является положительной функцией переменной τ_m при $T=0$, $0\le\tau_m<\infty$ ($p'_{T=0}(\tau_m)>0$).

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число ($\tau_m \ge 0$), то $p'_{T=0}(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m. Подставляя $T=0$ в (3) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p'_{T=0}(\tau_m) = \frac{C}{A^2(z_2-z_1)}\left[z_2(C-z_1A)e^{-z_2\tau_m} - z_1(C-z_2A)e^{-z_1\tau_m}\right],\ \tau_m \ge 0, \tag{4}$$

$$C = \lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)+\delta\beta] + (\lambda_2+\alpha\delta)[\lambda_2(p\lambda_1+\beta)+p\lambda_1\alpha] = -z_1z_2(\beta_1+\beta_2)+(z_1+z_2)A > 0,$$

$$A = \lambda_1\alpha + (p\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\alpha\delta) = z_1z_2 - q > 0.$$

Рассмотрим на предмет существования корней уравнение $p'_{T=0}(\tau_m)=0$, которое с учетом (4) преобразуется к виду

$$B = e^{-(z_2-z_1)\tau_m},\ B = \frac{z_1(z_2A-C)}{z_2(z_1A-C)}. \tag{5}$$

Из (4) находим

$$p'_{T=0}(\tau_m=0) = (C/A)^2 > 0,\ \lim_{\tau_m\to\infty} p'_{T=0}(\tau_m) = \pm 0. \tag{6}$$

Подставляя в (5) выражения для z_1, z_2, определенные в (1), получаем

$$B = \frac{z_1^{\,2}\left[-2A+(\beta_1+\beta_2)(z_1+z_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right]}{z_2^{\,2}\left[-2A+(\beta_1+\beta_2)(z_1+z_2)-(\beta_1+\beta_2)\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right]} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Тогда имеем

$$B_1 = z_1^{\,2}\left[-2A+(\beta_1+\beta_2)(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right] \ \ge\ z_1^{\,2}\left[-2A+\right.$$
$$\left.+(\beta_1+\beta_2)(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2}\right] \ge\ 2z_1^{\,2}[p\lambda_1\alpha(1-\delta)+\alpha\beta(2-\delta)] > 0$$

вне зависимости от знака выражения $\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta$ ($\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta>0$, $\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta=0$, $\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta<0$). Для выражения (5) имеем два варианта:

1) $B_1 = z_1(z_2A-C)>0$; $B_2 = z_2(z_1A-C)>0$. Тогда $B>0$ и разность $B_1-B_2 = C(z_2-z_1)>0$. Следовательно, $B_1>B_2$ и $B>1$. Тогда уравнение (5) решения не имеет, следовательно, $p'_{T=0}(\tau_m)>0$, $\tau_m\ge 0$, так как в силу (6) $p'_{T=0}(\tau_m=0)>0$, при этом $\lim_{\tau_m\to\infty} p'_{T=0}(\tau_m) = +0$;

2) $B_1 = z_1(z_2A-C)>0$; $B_2 = z_2(z_1A-C)<0$. Тогда $B<0$ и уравнение (5) решения не имеет, следовательно, $p'_{T=0}(\tau_m)>0$, $\tau_m\ge 0$, аналогично варианту 1.

Осталось рассмотреть особый случай $z_1A-C=0$. Подставляя $z_1A-C=0$ в (4), получаем

$$p'_{T=0}(\tau_m) = \frac{C}{A^2(z_2-z_1)}(z_2A-C)z_1e^{-z_1\tau_m} > 0,\ \tau_m \ge 0,$$

так как $B_1 = z_1(z_2A-C)>0$ всегда и, следовательно, $z_2A-C>0$ всегда.

Таким образом, если $z_2(z_1A-C)\ge 0$ либо $z_2(z_1A-C)<0$, то $p'_{T=0}(\tau_m)>0$, $\tau_m\ge 0$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. $q>q_1$ всегда.

Доказательство. В лемме 1 показано, что $z_2A-C>0$ всегда. Можно показать, что $z_2A-C = z_1(q-q_1)$, следовательно, $q>q_1$ всегда.

Лемма 2. Производная $p'_T(\tau_m)$ строго больше нуля при $T=\tau_m$, $0\le\tau_m<\infty$ ($p'_{T=\tau_m}(\tau_m)>0$).

Доказательство. Подставляя $T=\tau_m$ в (3), получаем

$$p'(\tau_m) = p'_{T=\tau_m}(\tau_m) = \frac{1}{\beta_1+\beta_2}\left\{C+\varphi(q)\psi(\tau_m)\frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}}{F^2(\tau_m)}\right\},\ \psi(\tau_m) = C+(z_1+z_2)q\left[1-e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}\right], \tag{7}$$

$$\varphi(q) = (\beta_1+\beta_2)C - A^2 = -q^2 + [2z_1z_2 - (\beta_1+\beta_2)(z_1+z_2)]q - z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)(z_2-\beta_1-\beta_2),$$

где q, $F(\tau_m)$ определены в (1), A, C – в (4). Можно показать, что $\varphi(q) = -(q-q_1)(q-q_2)$, где $q_1 = z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $q_2 = z_1(z_2-\beta_1-\beta_2)$ – корни уравнения $\varphi(q)=0$. Отметим, что

$$p'(\tau_m=0) = (C/A)^2 > 0, \ \lim_{\tau_m\to\infty} p'(\tau_m) = \frac{C}{\beta_1+\beta_2} > 0, \ p'(\tau_m=0) - \lim_{\tau_m\to\infty} p'(\tau_m) = \frac{C}{A^2(\beta_1+\beta_2)}\varphi(q). \quad (8)$$

В силу того что $C>0$, $\psi(\tau_m)>0$ для $\tau_m \ge 0$, то знак производной $p'(\tau_m)$ определяется знаком $\varphi(q)$. Тогда если $\varphi(q)\ge 0$, то производная (7) строго больше нуля ($p'(\tau_m)>0$) для $\tau_m \ge 0$.

Пусть $\varphi(q)<0$. Введем в рассмотрение вторую производную $p''(\tau_m)$ по переменной T в точке $T=\tau_m$. Используя (3), находим

$$p''(\tau_m) = -z_1z_2\frac{\varphi(q)}{F^3(\tau_m)}e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}\left[z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2) - (z_1+z_2+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}\right], \ \tau_m \ge 0,$$

где q, $F(\tau_m)$ определены в (1), $\varphi(q)$ определена в (7). По условию имеем $\left[-z_1z_2\dfrac{\varphi(q)}{F^3(\tau_m)}e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}\right] > 0$, следовательно, знак производной $p''(\tau_m)$ определяется знаком функции

$$y(\tau_m) = z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2) - (z_1+z_2+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}, \ \tau_m \ge 0.$$

Исследуем функцию $y(\tau_m)$ как функцию переменной τ_m ($\tau_m \ge 0$). Имеем

$$y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2), \ \lim_{\tau_m\to\infty} y(\tau_m) = y(\infty) = z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2) = z_1z_2[\lambda_1(1-p)+\lambda_2] > 0,$$

где q определена в (1), C – в (4). Здесь возможны следующие варианты:

1) $q<0$ и, следовательно, $y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2) > 0$. Тогда функция $y(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m ($\tau_m \ge 0$); убывает от $y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2) > 0$ до $y(\infty) = z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2) > 0$. Следовательно, $y(\tau_m)>0$, $\tau_m \ge 0$. Отсюда следует, что $p''(\tau_m)>0$, $\tau_m\ge 0$, и функция $p'(\tau_m)$ является возрастающей функцией переменной τ_m ($\tau_m \ge 0$). Таким образом, в силу (8) $p'(\tau_m)>0$, $\tau_m \ge 0$;

2) $q=0$. Тогда $y(\tau_m) = z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2) > 0$, $\tau_m \ge 0$. Результат идентичен результату предыдущего пункта;

3) $q>0$. Тогда $y(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m ($\tau_m \ge 0$); возрастает от $y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2)$ до $y(\infty) = z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2) > 0$. В данном случае имеют место три варианта: а) $y(0)>0$; б) $y(0)=0$; в) $y(0)<0$. Рассмотрим более подробно каждый из вариантов.

Вариант а. Пусть $y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2) > 0$. Тогда $y(\tau_m)>0$, $\tau_m \ge 0$. Отсюда следует, что $p''(\tau_m)>0$, $\tau_m \ge 0$, и функция $p'(\tau_m)$ является возрастающей функцией переменной τ_m ($\tau_m \ge 0$). Таким образом, в силу (8) $p'(\tau_m)>0$, $\tau_m \ge 0$.

Вариант б. Пусть $y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2) = 0$. Тогда $y(\tau_m)\ge 0$, $\tau_m \ge 0$, причем равенство нулю ($y(\tau_m)=0$) достигается в единственной точке $\tau_m = 0$. Результат идентичен результату варианта а.

Вариант в. Пусть $y(0) = C - q(\beta_1+\beta_2) < 0$. Тогда: 1) $y(\tau_m)<0$, $0 \le \tau_m < \tau_m^*$; 2) $y(\tau_m)=0$, $\tau_m = \tau_m^*$; 3) $y(\tau_m)>0$, $\tau_m^* < \tau_m < \infty$. Следовательно, в точке $\tau_m = \tau_m^*$ производная $p'(\tau_m)$ достигает минимального значения $p'(\tau_m^*)$. Точка минимума τ_m^* находится из уравнения $p'(\tau_m)=0$:

$$\tau_m^* = -\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2)}{(z_1+z_2+\beta_1+\beta_2)q}, \ \frac{z_1z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2)}{(z_1+z_2+\beta_1+\beta_2)q} > 0.$$

Вычислим значение $p'(\tau_m)$ в точке τ_m^*:

$$p'(\tau_m^*) = \frac{1}{\beta_1+\beta_2}\left\{C + \varphi(q)\frac{(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2)^2}{4(\beta_1+\beta_2)q}\right\}.$$

Тогда имеем

$$p'(\tau_m^*) > \frac{1}{\beta_1+\beta_2}\left\{C + \varphi(q)\frac{(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2)^2}{4C}\right\} = \frac{1}{4C(\beta_1+\beta_2)}\Big\{3C^2 + (\beta_1+\beta_2)\Big[C\big(\lambda_1{}^2(1-p)^2+\lambda_2{}^2+2p\lambda_1\alpha\delta\big)-$$

$$-q^2(\beta_1+\beta_2)\Big]\Big\} > \frac{1}{4C(\beta_1+\beta_2)}\Big\{3C^2+(\beta_1+\beta_2)\Big[\big(\lambda_1{}^2\alpha(1-p)+\lambda_2{}^2\beta+\lambda_1\lambda_2 p(\lambda_2+\alpha)\big)\big(\lambda_1{}^2(1-p)^2+\lambda_2{}^2\big)-$$

$$-\big(\lambda_1\lambda_2(1-p)\big)^2(\beta_1+\beta_2)\Big]\Big\} = \lambda_1{}^4\alpha(1-p)^3+\lambda_1\lambda_2 p\alpha\Big[\lambda_1\lambda_2(1-p)+\lambda_1{}^2(1-p)^2+\lambda_2{}^2\Big]+\lambda_2{}^4\beta_1 > 0.$$

Отсюда следует, что $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m \ge 0$. Таким образом, если $\varphi(q) < 0$, то производная $p'(\tau_m)$ строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$) для $\tau_m \ge 0$. Лемма 2 доказана.

Перейдем к исследованию производной $p'_T(\tau_m)$ как функции переменной T, $0 \le T \le \tau_m$. Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_T(\tau_m) = 0$, которое с учетом (3) приводится к виду

$$e^{-(z_2-z_1)(\tau_m-T)} = f_1(T)/f_2(T),\ 0 \le T \le \tau_m, \tag{9}$$

$$f_1(T) = z_1\big[z_1 z_2(\beta_1+\beta_2) - z_1 f(T) - f'(T)\big],\ f_2(T) = z_2\big[z_1 z_2(\beta_1+\beta_2) - z_2 f(T) - f'(T)\big].$$

При этом функция $\chi(T) = e^{-(z_2-z_1)(\tau_m-T)}$ есть возрастающая функция переменной T, $0 \le T \le \tau_m$; возрастает от $\chi(0) = e^{-(z_2-z_1)\tau_m}$ до $\chi(T = \tau_m) = 1$, ее максимальное значение есть 1.

Так как τ_m, в принципе, может равняться бесконечности, то изучим функции $f_1(T)$, $f_2(T)$ как функции переменной T, $T \ge 0$.

Утверждение 1. Для функции $f_1(T) = z_1\big[z_1 z_2(\beta_1+\beta_2) - z_1 f(T) - f'(T)\big]$, $T \ge 0$, справедливо:

1) $f_1(0) = (\beta_1+\beta_2)\dfrac{z_1 C}{A^2}(z_2 A - C) = (\beta_1+\beta_2)\dfrac{z_1^2 C}{A^2}(q - q_1) > 0$, $q_1 = z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $q > q_1$;

2) $f_1(\infty) = \lim\limits_{T\to\infty} f_1(T) = z_1(z_2 A - C) = z_1^2(q-q_1) > 0$;

3) $f_1'(T) = \dfrac{z_1^2 z_2(\beta_1+\beta_2)}{F^3(T)}\varphi(q)e^{-(\beta_1+\beta_2)T}\Big[z_1 z_2(z_1-\beta_1-\beta_2) - (z_1+\beta_1+\beta_2)q e^{-(\beta_1+\beta_2)T}\Big]$, $T \ge 0$;

4) точка $T_1(q)$ – точка экстремума (либо точка перегиба) функции $f_1(T)$:

$$T_1(q) = -\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{z_1 z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)}{(z_1+\beta_1+\beta_2)q},\ \frac{z_1-\beta_1-\beta_2}{q} > 0; \tag{10}$$

5) $f_1(T_1(q)) = \dfrac{z_1(z_1+\beta_1+\beta_2)^2}{4(\beta_1+\beta_2)q}\Big[q - z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)\Big]\Big[q - \dfrac{z_1(z_1-\beta_1-\beta_2)^2(z_2-\beta_1-\beta_2)}{(z_1+\beta_1+\beta_2)^2}\Big]$, $\dfrac{z_1-\beta_1-\beta_2}{q} > 0$,

где $q_{11} = q_1 = z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $q_{12} = \dfrac{z_1(z_1-\beta_1-\beta_2)^2(z_2-\beta_1-\beta_2)}{(z_1+\beta_1+\beta_2)^2}$ – корни уравнения $f_1(T_1(q)) = 0$. Здесь q, $F(T)$ определены в (1); A, C – в (4); $\varphi(q)$ – в (7).

Лемма 3. Функция $f_1(T)$ является положительной функцией ($f_1(T) > 0$) переменной T, $T \ge 0$.

Доказательство. Пусть $q = q_1$, тогда $f_1(T, q = q_1) = z_1{}^2\big[z_2(\beta_1+\beta_2) - z_1 z_2 + z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)\big] = 0$; пусть $q = q_2$, тогда $f_1(T, q = q_2) = z_1{}^2(z_2-z_1)(\beta_1+\beta_2) > 0$. Точки $q = q_1$, $q = q_2$ из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как в этих точках $\varphi(q) = 0$. Рассмотрим далее возможные случаи.

Случай 1. $\varphi(q) > 0$, $0 < q_1 < q < q_2$. Знак производной $f_1'(T)$ функции $f_1(T)$ определяется знаком функции $y_1(T) = z_1 z_2(z_1-\beta_1-\beta_2) - (z_1+\beta_1+\beta_2)q e^{-(\beta_1+\beta_2)T}$, $T \ge 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является возрастающей функцией переменной T, $T \ge 0$; возрастает от $y_1(T = 0, q) < 0$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2(z_1-\beta_1-\beta_2) > 0$, т.е. один раз пересекает ось абсцисс в точке $T_1(q)$, определенной выражением (10). Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется единственный минимум функции $f_1(T)$. Можно показать, что $f_1(T_1(q)) > 0$, тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $0 < q_1 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 2. $\varphi(q) > 0$, $q_1 = 0 < q < q_2$. Имеем $y_1(T) = -(z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$, т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T, $T \geq 0$; убывает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 = 0 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 3. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < 0 < q < q_2$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$; далее ход доказательства аналогичен случаю 2. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < 0 < q < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 4. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q = 0 < q_2$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) = \mathrm{const} < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$; далее ход доказательства аналогичен случаю 2. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q = 0 < q_2$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 5. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < 0 < q_2$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T \geq 0$; убывает от $y_1(T = 0, q)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Рассмотрим $y_1(T = 0, q) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)q$, $q_1 \leq q \leq 0$. Тогда: а) $y_1(T = 0, q = q_1) = -z_2(\beta_1 + \beta_2)(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$; б) $y_1(T = 0, q = 0) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$; в) $y_1(T = 0, q = q_1^*) = 0$, $q_1^* = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)/(z_1 + \beta_1 + \beta_2)$, $q_1 < q_1^* < 0$. Тогда для $q_1 < q < q_1^* < 0$ имеем: 1) $y_1(T) > 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $y_1(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $y_1(T) < 0$, $T > T_1(q)$, где $T_1(q)$ определяется выражением (10). Следовательно, для $q_1 < q < q_1^* < 0$ имеем: 1) $f_1'(T) > 0$, $0 \leq T < T_1(q)$; 2) $f_1'(T) = 0$, $T = T_1(q)$; 3) $f_1'(T) < 0$, $T > T_1(q)$. Таким образом, в точке $T = T_1(q)$ реализуется единственный максимум функции $f_1(T)$, в силу этого $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_1^* < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Для $q = q_1^*$ имеем $y_1(T) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)\left[1 - e^{-(\beta_1+\beta_2)T}\right] < 0$, $T \geq 0$. Тогда $f_1'(T) < 0$, $T \geq 0$, т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T, $T \geq 0$; убывает от $f_1(0) > 0$ до $f_1(\infty) > 0$. Тогда $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q = q_1^* < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Для $q_1^* < q < 0$ экстремальной точки $T = T_1(q)$ не существует ($T \geq 0$), при этом $y_1(T = 0, q) < 0$, следовательно, $y_1(T) < 0$, $T \geq 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 2. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1^* < q < 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 6. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 = 0$. Имеем $y_1(T) = -z_1 z_2(z_2 - z_1) - (z_1 + z_2)qe^{-z_2 T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T \geq 0$; убывает от $y_1(T = 0, q)$ до $y_1(\infty) = -z_1 z_2(z_2 - z_1) < 0$. Рассмотрим $y_1(T = 0, q) = -[z_1 z_2(z_2 - z_1) + (z_1 + z_2)q]$, $q_1 \leq q \leq q_2 = 0$. Тогда: а) $y_1(T = 0, q = q_1) = -z_2^2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$; б) $y_1(T = 0, q = q_2 = 0) = -z_1 z_2(z_2 - z_1) < 0$; в) $y_1(T = 0, q = q_1^*) = 0$, $q_1^* = -z_1 z_2(z_2 - z_1)/(z_1 + z_2)$, $q_1 < q_1^* < 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 5. Итак, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 = 0$, то $f_1(T) > 0$, $T \geq 0$.

Случай 7. $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2 < 0$. Имеем $y_1(T) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}$, $T \geq 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T \geq 0$; убывает от $y_1(T = 0, q)$ до $y_1(\infty) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$. Рассмотрим $y_1(T = 0, q) = z_1 z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - (z_1 + \beta_1 + \beta_2)q$, $q_1 \leq q \leq q_2 < 0$. Тогда: 1) $y_1(T = 0, q = q_1) = -z_2(\beta_1 + \beta_2) \times (z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$; 2) $y_1(T = 0, q = q_2) = -z_1(\beta_1 + \beta_2)\left[z_2 - z_1 + (z_2 - \beta_1 - \beta_2)\right]$, здесь $z_2 - \beta_1 - \beta_2 < 0$. Далее возможны варианты: а) $y_1(T = 0, q = q_2) > 0$; б) $y_1(T = 0, q = q_2) = 0$; в) $y_1(T = 0, q = q_2) < 0$.

Вариант а: $y_1(T=0,q=q_2)>0$. В данном варианте функция $y_1(T)$ один раз пересекает ось абсцисс в точке $T_1(q)$, определенной выражением (10). Тогда поведение производной $f_1'(T)$ будет выглядеть следующим образом: 1) $f_1'(T)>0$, $0\le T<T_1(q)$; 2) $f_1'(T)=0$, $T=T_1(q)$; 3) $f_1'(T)<0$, $T>T_1(q)$. Таким образом, в точке $T=T_1(q)$ реализуется единственный максимум функции $f_1(T)$. Тогда $f_1(T)>0$, $T\ge 0$, так как $f_1(0)>0$, $f_1(\infty)>0$, $f_1(0)>f_1(\infty)$. Итак, если $\varphi(q)>0$, $q_1<q<q_2<0$, $y_1(T=0,q=q_2)>0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Вариант б: $y_1(T=0,q=q_2)=0$. Результат идентичен результату варианта а.

Вариант в: $y_1(T=0,q=q_2)<0$. Результат идентичен результату в случае 5.

Итак, если $\varphi(q)>0$, $q_1<q<q_2<0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Суммируя результаты случаев 1–7, получаем: если $\varphi(q)>0$, $q_1<q<q_2$, где $q_1=z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $q_2=z_1(z_2-\beta_1-\beta_2)$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Перейдем к рассмотрению случаев, когда $\varphi(q)<0$. Так как $q>q_1$, область $q\le q_1$ отсекается.

Случай 8. $\varphi(q)<0$, $0<q_1<q_2<q$. Имеем $y_1(T)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)-(z_1+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}$, $T\ge 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является возрастающей функцией переменной T, $T\ge 0$; возрастает от $y_1(T=0,q)$ до $y_1(\infty)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)>0$. Рассмотрим $y_1(T=0,q)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)-(z_1+\beta_1+\beta_2)q$, $0<q_1<q_2\le q$. Тогда $y_1(T=0,q=q_2)<0$ и: 1) $y_1(T)<0$, $0\le T<T_1(q)$; 2) $y_1(T)=0$, $T=T_1(q)$; 3) $y_1(T)>0$, $T>T_1(q)$, где $T_1(q)$ определяется выражением (10). Следовательно: 1) $f_1'(T)>0$; $0\le T<T_1(q)$; 2) $f_1'(T)=0$, $T=T_1(q)$; 3) $f_1'(T)<0$, $T>T_1(q)$. Таким образом, в точке $T=T_1(q)$ реализуется максимум функции $f_1(T)$, при этом $f_1(0)>0$, $f_1(\infty)>0$, $f(0)<f_1(\infty)$. Отсюда следует, что $f_1(T)>0$, $T\ge 0$. Итак, если $\varphi(q)<0$, $0<q_1<q_2<q$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Случай 9. $\varphi(q)<0$, $q_1=0<q_2<q$. Имеем $y_1(T)=-(z_1+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}<0$, $T\ge 0$. Тогда $f_1'(T)>0$, $T\ge 0$, т.е. $f_1(T)$ – возрастающая функция переменной T, $T\ge 0$; возрастает от $f_1(0)>0$ до $f_1(\infty)>0$. Тогда $f_1(T)>0$, $T\ge 0$. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1=0<q_2<q$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Случай 10. $\varphi(q)<0$, $q_1<0<q_2<q$. Имеем $y_1(T)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)-(z_1+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}<0$, $T\ge 0$. Тогда $f_1'(T)>0$, $T\ge 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1<0<q_2<q$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Случай 11. $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<0<q$. Имеем $y_1(T)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)-(z_1+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}<0$, $T\ge 0$. Тогда $f_1'(T)>0$, $T\ge 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<0<q$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Случай 12. $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q=0$. Имеем $y_1(T)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)=\mathrm{const}<0$, $T\ge 0$. Тогда $f_1'(T)>0$, $T\ge 0$. Далее ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q=0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Случай 13. $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q<0$. Имеем $y_1(T)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)-(z_1+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}$, $T\ge 0$. В данном случае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T\ge 0$; убывает от $y_1(T=0,q)$ до $y_1(\infty)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)<0$. Рассмотрим $y_1(T=0,q)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)-(z_1+\beta_1+\beta_2)q$, $q_2\le q\le 0$. Тогда: 1) $y_1(T=0,q=q_2)=-z_1(\beta_1+\beta_2)[z_2-z_1+(z_2-\beta_1-\beta_2)]$; 2) $y_1(T=0,q=0)=$ $=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)<0$.

Подслучай 13.1. $y_1(T=0,q=q_2)>0$. Тогда возможны варианты: а) $y_1(T=0,q)>0$, $q_2<q<q_1^*<0$; б) $y_1(T=0,q)=0$, $q=q_1^*<0$; в) $y_1(T=0,q)<0$, $q_1^*<q<0$, $q_1^*=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)/(z_1+\beta_1+\beta_2)$.

Вариант а: $y_1(T=0,q)>0$, $q_2<q<q_1^*<0$. В данном варианте функция $y_1(T)$ один раз пересекает ось абсцисс в точке $T_1(q)$, определенной выражением (10). Тогда поведение производной $f_1'(T)$ будет выглядеть следующим образом: 1) $f_1'(T)<0$, $0\le T<T_1(q)$; 2) $f_1'(T)=0$, $T=T_1(q)$; 3) $f_1'(T)>0$, $T>T_1(q)$. Таким образом, в точке $T=T_1(q)$ реализуется единственный минимум функции $f_1(T)$, $T\ge 0$. Можно показать, что $f_1(T_1(q))>0$, $q_2<q<q_1^*<0$, тогда $f_1(T)>0$, $T\ge 0$. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_2<q<q_1^*<0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Вариант б: $y_1(T=0,q)=0$, $q=q_1^*<0$. В данном варианте $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T\ge 0$; убывает от $y_1(T=0,q=q_1^*)$ до $y_1(\infty)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)<0$. Тогда: 1) $y_1(T)<0$, $T>0$; 2) $y_1(T)=0$, $T=0$. Таким образом: 1) $f_1'(T)>0$, $T>0$; 2) $f_1'(T)=0$, $T=0$. Отсюда следует, что $f_1(T)$ – возрастающая функция переменной T, $T>0$, и неубывающая функция в точке $T=0$; $f_1(T)$ возрастает от $f_1(0)>0$ до $f_1(\infty)>0$. Тогда $f_1(T)>0$, $T\ge 0$. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q=q_1^*<0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Вариант в: $y_1(T=0,q)<0$, $q_1^*<q<0$. В данном варианте $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T\ge 0$; убывает от $y_1(T=0,q)<0$ до $y_1(\infty)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)<0$. Тогда $y_1(T)<0$, $T\ge 0$, следовательно, $f_1'(T)>0$, $T\ge 0$. Отсюда следует, что $f_1(T)$ – возрастающая функция переменной T, $T\ge 0$; $f_1(T)$ возрастает от $f_1(0)>0$ до $f_1(\infty)>0$. Тогда $f_1(T)>0$, $T\ge 0$. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1^*<q<0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Таким образом, если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q<0$, $y_1(T=0,q=q_2)>0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Подслучай 13.2. $y_1(T=0,q=q_2)=0$. В данном подслучае функция $y_1(T)$ является убывающей функцией переменной T, $T\ge 0$; убывает от $y_1(T=0,q)<0$ до $y_1(\infty)=z_1z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)<0$. Тогда $y_1(T)<0$, $T\ge 0$, и дальнейший ход доказательства аналогичен случаю 9. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q<0$, $y_1(T=0,q=q_2)=0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Подслучай 13.3. $y_1(T=0,q=q_2)<0$. Дальнейший ход доказательства аналогичен подслучаю 13.2. Итак, если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q<0$, $y_1(T=0,q=q_2)<0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Суммируя подслучаи 13.1–13.3, получаем: если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q<0$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$. Суммируя случаи 8–13, получаем: если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q$, где $q_1=z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $q_2=z_1(z_2-\beta_1-\beta_2)$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$.

Таким образом, 1) если $\varphi(q)>0$, $q_1<q<q_2$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$; 2) если $\varphi(q)=0$, $q=q_2$, то $f_1(T)=\text{const}>0$, $T\ge 0$; 3) если $\varphi(q)<0$, $q_1<q_2<q$, то $f_1(T)>0$, $T\ge 0$, где $q_1=z_2(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $q_2=z_1(z_2-\beta_1-\beta_2)$ – любые вещественные числа. Лемма 3 доказана.

Утверждение 2. Для функции $f_2(T)=z_2\left[z_1z_2(\beta_1+\beta_2)-z_2f(T)-f'(T)\right]$, $T\ge 0$, справедливо:

1) $f_2(0)=(\beta_1+\beta_2)\dfrac{z_2C}{A^2}(z_1A-C)=(\beta_1+\beta_2)\dfrac{z_2^2C}{A^2}(q-q_2)$, $q_2=z_1(z_2-\beta_1-\beta_2)$; при этом $f_2(0)$ может быть: а) $f_2(0)>0$; б) $f_2(0)=0$; в) $f_2(0)<0$; $q>q_1$, $q_1<q_2$;

2) $f_2(\infty)=\lim\limits_{T\to\infty}f_2(T)=z_2(z_1A-C)=z_2^2(q-q_2)$; при этом $f_2(\infty)$ может быть: а) $f_2(\infty)>0$; б) $f_2(\infty)=0$; в) $f_2(\infty)<0$;

3) $f_2'(T)=\dfrac{z_1z_2^2(\beta_1+\beta_2)}{F^3(T)}\varphi(q)e^{-(\beta_1+\beta_2)T}\left[z_1z_2(z_2-\beta_1-\beta_2)-(z_2+\beta_1+\beta_2)qe^{-(\beta_1+\beta_2)T}\right]$, $T\ge 0$;

4) точка $T_2(q)$ – точка экстремума (либо точка перегиба) функции $f_2(T)$:

$$T_2(q) = -\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{z_1 z_2\left(z_2-\beta_1-\beta_2\right)}{\left(z_2+\beta_1+\beta_2\right)q},\ \frac{z_2-\beta_1-\beta_2}{q} > 0;$$

5) $f_2(T_2(q)) = \frac{z_2\left(z_2+\beta_1+\beta_2\right)^2}{4\left(\beta_1+\beta_2\right)q}\left[q - z_1\left(z_2-\beta_1-\beta_2\right)\right]\left[q - \frac{z_2\left(z_1-\beta_1-\beta_2\right)\left(z_2-\beta_1-\beta_2\right)^2}{\left(z_2+\beta_1+\beta_2\right)^2}\right],\ \frac{z_2-\beta_1-\beta_2}{q} > 0,$

где $q_{22} = q_2 = z_1\left(z_2-\beta_1-\beta_2\right)$, $q_{21} = \frac{z_2\left(z_1-\beta_1-\beta_2\right)\left(z_2-\beta_1-\beta_2\right)^2}{\left(z_2+\beta_1+\beta_2\right)^2}$ – корни уравнения $f_2(T_2(q)) = 0$. Здесь q, $F(T)$ определены в (1); A, C – в (4); $\varphi(q)$ – в (7).

Лемма 4. Функция $f_2(T)$ является отрицательной функцией ($f_2(T) < 0$) переменной T, $T \ge 0$, если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2$, и положительной функцией ($f_2(T) > 0$) переменной T, $T \ge 0$, если $\varphi(q) < 0$, $q_1 < q_2 < q$, где $q_1 = z_2\left(z_1-\beta_1-\beta_2\right)$, $q_2 = z_1\left(z_2-\beta_1-\beta_2\right)$ – любые вещественные числа.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Рассмотрим функцию $\Phi(T) = f_1(T) - f_2(T)$ как функцию переменной T, $T \ge 0$.

Утверждение 3. Для функции $\Phi(T) = f_1(T) - f_2(T)$, $T \ge 0$, справедливо:

1) $\Phi(T) = \left(z_2 - z_1\right)\left[-z_1 z_2\left(\beta_1+\beta_2\right) + \left(z_1+z_2\right)f(T) + f'(T)\right]$, $T \ge 0$;

2) $\Phi(0) = \left(z_2 - z_1\right)\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(C/A\right)^2 > 0$, следовательно, $f_1(0) > f_2(0)$;

3) $\Phi(\infty) = \lim\limits_{T\to\infty}\Phi(T) = \left(z_2 - z_1\right)C > 0$, следовательно, $f_1(\infty) > f_2(\infty)$;

4) $\Phi(0) - \Phi(\infty) = \left(z_2 - z_1\right)\varphi(q)C/A^2$;

5) $\Phi'(T) = -\left(z_2 - z_1\right)\varphi(q)\frac{z_1 z_2\left(\beta_1+\beta_2\right)e^{-(\beta_1+\beta_2)T}}{F^3(T)}\left[z_1 z_2\left(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2\right) - \left(z_1+z_2+\beta_1+\beta_2\right)q e^{-(\beta_1+\beta_2)T}\right]$, $T \ge 0$;

6) точка $T^*(q)$ – точка экстремума (либо точка перегиба) функции $\Phi(T)$:

$$T^*(q) = -\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{z_1 z_2\left(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2\right)}{\left(z_1+z_2+\beta_1+\beta_2\right)q},\ \frac{z_1+z_2-\beta_1-\beta_2}{q} > 0;$$

7) $\Phi(T^*(q)) = \left(z_2 - z_1\right)\left[C + \varphi(q)\frac{\left(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2\right)^2}{4\left(\beta_1+\beta_2\right)q}\right],\ \frac{z_1+z_2-\beta_1-\beta_2}{q} > 0.$

Здесь q, $F(T)$ определены в (1); A, C – в (4); $\varphi(q)$ – в (7).

Лемма 5. Функция $\Phi(T)$ является положительной функцией ($\Phi(T) > 0$) переменной T, $T \ge 0$, т.е. $f_1(T) > f_2(T)$, $T \ge 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Леммы 1–5 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ есть положительная функция ($p'_T(\tau_m) > 0$) переменной T, $0 \le T \le \tau_m$, $0 \le \tau_m < \infty$, при любых значениях параметров $\lambda_1 > \lambda_2 \ge 0$, $0 \le p \le 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \le \delta \le 1$.

Доказательство. Доказательство осуществляется последовательным применением лемм 1–5:

1. Если $\varphi(q) > 0$, $q_1 < q < q_2$, $q \ne q_2$, то $f_1(T) > 0$, $f_2(T) < 0$, $T \ge 0$. Тогда имеем $f_1(T)/f_2(T) < 0$, $T \ge 0$, в том числе и для $0 \le T \le \tau_m$. Таким образом, уравнение (9) решения не имеет, т.е. функция $p'_T(\tau_m)$ не достигает нуля для $0 \le T \le \tau_m$. Так как $p'_{T=0}(\tau_m) > 0$, $p'_{T=\tau_m}(\tau_m) > 0$, то $p'_T(\tau_m) > 0$, $0 \le T \le \tau_m$.

2. Если $\varphi(q) = 0$, $q = q_1$, $q \ne q_2$, то $f_1(T) = 0$, $f_2(T) < 0$, $T \ge 0$. Тогда имеем $f_1(T)/f_2(T) = 0$, $T \ge 0$, в том числе и для $0 \le T \le \tau_m$. Таким образом, уравнение (9) решения не имеет. Тогда $p'_T(\tau_m) > 0$, $0 \le T \le \tau_m$.

3. Если $\varphi(q) = 0$, $q \ne q_1$, $q = q_2$, то $f_1(T) > 0$, $f_2(T) = 0$, $T \ge 0$. Тогда в уравнении (9) имеет место деление на ноль. Преобразуем (9) к виду

$$e^{\left(z_2-z_1\right)\left(\tau_m-T\right)} = f_2(T)/f_1(T),\ 0 \le T \le \tau_m. \tag{11}$$

Тогда имеем $f_2(T)/f_1(T)=0$, $T\ge 0$, в том числе и для $0\le T\le \tau_m$. Следовательно, уравнение (11) решения не имеет, уравнение (9) также не имеет решения. Тогда $p'_T(\tau_m)>0$, $0\le T\le \tau_m$.

4. Если $\varphi(q)<0$, $q>q_2$, то $f_1(T)>0$, $f_2(T)>0$, $f_1(T)>f_2(T)$, $T\ge 0$. Тогда имеем $f_1(T)/f_2(T)>1$, $T\ge 0$, в том числе и для $0\le T\le \tau_m$. Таким образом, уравнение (9) решения не имеет. Тогда $p'_T(\tau_m)>0$, $0\le T\le \tau_m$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ есть возрастающая функция переменной T, $0\le T\le \tau_m$, $0\le \tau_m<\infty$, при любых значениях параметров $\lambda_1>\lambda_2\ge 0$, $0\le p\le 1$, $\beta>0$, $\alpha>0$, $0\le \delta\le 1$ и достигает своего максимального значения в точке $T=\tau_m$, $0\le \tau_m<\infty$.

Доказательство вытекает из результата теоремы 1.

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j=\overline{2,k}$, являются возрастающими функциями переменной T, $0\le T\le \tau^{(j)}$, $0\le \tau^{(j)}<\infty$, $j=\overline{2,k}$, при любых значениях параметров $\lambda_1>\lambda_2\ge 0$, $0\le p\le 1$, $\beta>0$, $\alpha>0$, $0\le \delta\le 1$.

Следствие 2. Из теоремы 2 вытекает, что функция правдоподобия $L(T\,|\,\tau^{(1)},...,\tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T}=\tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T}=\tau_m$.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценивания длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения за потоком событий (в течение временного интервала $(0,t]$) вычисляются величины τ_k, $k=\overline{1,n}$, после чего находится $\tau_{\min}=\min\tau_k$ ($k=\overline{1,n}$), и полагается $\hat{T}=\tau_{\min}$. Подчеркнем, что по определению оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных t будет всегда смещенная ($\tau_{\min}>T$); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Phylosophical Society. 1964. V. 60, No 4. P. 923–930.
3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17(6). P. 66–73.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Cox D. R., Isham V. Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
7. Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. N.Y. : Springer-Verlag, 1981.
8. Last G., Brandt A. Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. N.Y. : Springer-Verlag, 1995.
9. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
10. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
11. Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A. Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science: Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011 (August 23–25, 2011, St. Petersburg, Russia). 2011. P. 428–439.
12. Bouzas P.R., Valderrama M.J., Aguilera A.M., Ruiz-Fuentes N. Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 50(10). P. 2655–2667.
13. Centanni S., Minozzo M. A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes // Journal of the American Statistical Association. 2006. V. 101. P. 1582–1597.

14. Dubois J.-P. Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper) // Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004. 2004. P. 116–119.
15. Hossain M.M., Lawson A.B. Approximate methods in Bayesian point process spatial models // Computational Statistics and Data Analysis. 2009. V. 53(8). P. 2831–2842.
16. Snyder D.L., Miller M.I. Random Point Processes in Time and Space. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
17. Горцев А.М., Нежельская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
18. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // Automation and Remote Control. 1999. V. 60, No. 1. P. 41–51.
19. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
20. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних событий // Вестник ТюмГУ. 2008. № 6. С. 107–119.
21. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44–65.
22. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33–47.
23. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Solovev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
24. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 10–21.
25. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 13–24.
26. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
27. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 3. С. 273–280.
28. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С 179–184.
29. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
30. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
31. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 25–40.
32. Леонова М.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 54–63.
33. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
34. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 1.
35. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М. : Наука, 1969.
36. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988.
37. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes. (Advanced textbooks in control and signal processing). London : Springer-Verlag, 2007.
38. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
39. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
40. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Известия вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
41. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
42. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. Russian Physics Journal. 2005. V. 48(10). P. 1039–1054.
43. Нежельская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.

44. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
45. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
46. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
47. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
48. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
49. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 27–37.
50. Горцев А.М., Нежельская Л.А. О связи MC-потоков и MAP-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
51. Бахолдина М.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2(31). С. 4–17.
52. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
53. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий и условия его рекуррентности // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 2. С. 137–143.
54. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 фев. 2015 г. / редкол.: Н.Н. Труш [и др.]. Минск : РИВШ, 2015. С. 17–22.
55. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 13–27.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com
Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 19 февраля 2016 г.

Bakholdina Maria A., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Russian Federation).
Maximum likelihood estimation of unextendable dead time period duration in the modulated semi-synchronous generalized flow of events.
Keywords: modulated semi-synchronous generalized flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); maximum likelihood estimation; likelihood function; dead time period duration.

DOI: 10.17223/19988605/35/2

In this paper we consider the modulated semi-synchronous generalized flow of events, which is one of the mathematical models for incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states 1, 2 (first, second correspondingly). In the first state $\lambda(t)=\lambda_1$ and in the second state $\lambda(t)=\lambda_2$ ($\lambda_1>\lambda_2\geq 0$). During the time interval of a random duration when the process $\lambda(t)$ is in state λ_i ($\lambda(t)=\lambda_i$), a Poisson flow of events with intensity λ_i, $i=1,2$, arrives. The transition of the process $\lambda(t)$ from the first state to the second state is possible at any moment of a Poisson event occurrence in state 1 of the process $\lambda(t)$, herewith the process $\lambda(t)$ can change its state to the second one with probability p $(0\leq p\leq 1)$ or continue to stay in state 1 with complementary probability $1-p$. The transition of the process $\lambda(t)$ from state 1 to state 2 is also possible at any moment that does not coincide with the moment of a Poisson event occurrence, herewith the duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first state is distributed according to the exponential law with parameter β: $F(\tau)=1-e^{-\beta\tau}$, $\tau\geq 0$. Then the duration of the process $\lambda(t)$ staying

in the first state is distributed according to the exponential law with distribution function $F_1(\tau)=1-e^{-(p\lambda_1+\beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. The transition of the process $\lambda(t)$ from the second state to the first state at the moment of a Poisson event occurrence in state 2 is impossible and can be done only at a random time moment. In this case the duration of the process $\lambda(t)$ staying in state 2 is distributed according to the exponential law with parameter α: $F_2(\tau)=1-e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. At the moment when the state changes from the second to the first one, an additional event is assumed to be initiated with probability δ $(0 \leq \delta \leq 1)$.

The registration of the flow events is considered in conditions of a constant (unextendable) dead time. The dead time period of a constant duration T begins after every registered at the moment t_k, $k \geq 1$, event. During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next interval of a dead time of duration T and so on.

This paper contains analytical results that are devoted to finding the maximum likelihood estimate $\hat{T}$ of the dead time period duration on monitoring the time moments of the events occurrence. We assume that the flow parameters $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$ are known and the duration of the dead time period T is not known. According to the maximum-likelihood technique the likelihood function $L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)})$ is maximized and the following task of optimization is solved:

$$L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}) \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0,$$

where $p_T(\tau^{(j)})$ is the one-dimensional probability density function of the interval length between two consecutive flow events. Finally, we obtain that the likelihood function $L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)})$ reaches its global maximum at the point $\hat{T}=\tau_{\min}$, where $\tau_{\min}=\min\tau_k$ ($k=\overline{1,n}$); $\tau_k = t_{k+1}-t_k$, $\tau_k \geq 0$, $k=\overline{1,n}$ – the sequence of the values of the intervals lengths between consecutive flow events measured during the interval of observation $(0,t]$, i.e. the solution of optimization problem is the estimate of the dead time period duration: $\hat{T}=\tau_{\min}$.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *Journal of Royal Statistical Society B*. 17. pp. 129-164. DOI: 10.2307/2983950
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Phylosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1. pp. 55-61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
6. Cox, D.R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
7. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
8. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
10. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62-69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
11. Adamu, A., Gaidamaka, Y. & Samuylov, A. (2011) Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network. *Lecture Notes in Computer Science*. Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011. August 23–25, 2011. St. Petersburg, Russia. pp. 428-439.
12. Bouzas, P.R., Valderrama, M.J., Aguilera, A.M. & Ruiz-Fuentes, N. (2006) Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*. 50(10). pp. 2655-2667. DOI: 10.1016/j.csda.2005.04.015
13. Centanni, S. & Minozzo, M. (2006) A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association*. 101. pp. 1582-1597. DOI: 10.1198/016214506000000276
14. Dubois, J.-P. (2004) Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper). *Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004*. pp. 116-119.
15. Hossain, M.M. & Lawson, A.B. (2009) Approximate methods in Bayesian point process spatial models. *Computational Statistics and Data Analysis*. 53(8). pp. 2831-2842. DOI: 10.1186/1471-2288-11-133
16. Snyder, D.L. & Miller, M.I. (1991) *Random Point Processes in Time and Space*. Heidelberg: Springer-Verlag.
17. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian).
18. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41–51.

19. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66. (In Russian).
20. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2008) Optimal'naya otsenka sostoyaniy asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s initsiirovaniem lishnikh sobytiy [Optimal estimation of the states of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta – The Bulletin of Tyumen State University*. 6. pp. 107-119.
21. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
24. Bakholdina, M.A. (2013) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
25. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13-24. (In Russian).
26. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9(29). pp. 1433-1451. DOI: 10.12988/ams.2015.5135
27. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observabiity]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
28. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control* 63(3). pp. 511-515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
29. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotechnics*. 10. pp. 8-16.
30. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy s initsiirovaniem lishnego sobytiya [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145.
31. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2011) Optimal estimation of parameters of an asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 25-40. (In Russian).
32. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
33. Gortsev, A.M. & Solovev, A.A. (2015) Otsenka maksimal'nogo pravdopodobiya dlitel'nosti neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni v potoke fizicheskikh sobytiy [Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 58(11). pp. 141-149.
34. Feller, W. (1950) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [An introduction to probability theory and its applications]. Translated from English. Vol. I. New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc.
35. Bharucha-Reid, A.T. (1960) *Elementy teorii markovskikh protsessov i ikh prilozheniya* [Elements of the theory of Markov processes and their applications]. Translated from English by V. Kalashnikov, Yu. Krutovskiy, M. Epelman. Moscow: Nauka.
36. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
37. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time processes. (Advanced textbooks in control and signal processing)*. London: Springer-Verlag.
38. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nenablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 12. pp. 3-7.
39. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Otsenivanie perioda nenablyudaemosti i intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy [The estimation of intensity process and period of unobservability of the Poisson flow of events]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 2. pp. 8-11.
40. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13. DOI: 10.1007/BF02509672
41. Gortsev, A.M., Nissenbaum, O.V. (2005) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period]. Izvestiya vuzov. Fizika. 10. pp. 35-49.
42. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 48(10). pp. 1039-1054. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y

43. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronus flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
44. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
45. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochasic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
46. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
47. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2010) Optimal states estimation of generalized semi-synchronous flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 50-60. (In Russian).
48. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
49. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
50. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
51. Bakholdina, M.A. (2015) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time and flow recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 4-17. (In Russian).
52. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
53. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) [Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2014)* [Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2014)]. Proc. of the 13th International Scientific Research and Practice Conference named after A.F. Terpugov. November 20-22, 2014. Tomsk: Tomsk State University. pp. 137-143. (In Russian).
54. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density of the interval length between consecutive events of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications]. Proc. of International Scientific Conference dedicated to 80th anniversary of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences G.A. Medvedev. Minsk. Feburary 23-26, 2015. Minsk: RIVSh. pp. 17-22. (In Russian)
55. Bakholdina, M., Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13-27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3