УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/35/4

К.И. Лившиц, Л.Ю. Сухотина

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТРАХОВЫХ ПРЕМИЙ И СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ

Находятся вероятности разорения страховой компании и среднее условное время до разорения для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями, модели Крамера–Лундберга с ММР-потоком страховых выплат при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат.
Ключевые слова: вероятность разорения; среднее условное время до разорения; модель Крамера–Лундберга; модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями; гиперэкспоненциальное распределение.

Стандартной задачей актуарной математики является задача вычисления вероятности разорения страховой компании, т.е. вероятности ситуации, когда страховая компания не может исполнять свои финансовые обязательства ввиду отсутствия денежных средств при различных предположениях о потоках, поступающих в компанию страховых премий и страховых выплат, производимых страховой компанией [1–3]. Сложность состоит, как правило, в нахождении явных решений соответствующих систем интегро-дифференциальных уравнений. Поэтому представляет интерес определение явного вида для вероятности разорения для какого-то достаточно широкого класса распределений страховых премий и страховых выплат. В настоящей работе находятся вероятности разорения и среднее условное время до разорения для некоторых стандартных моделей деятельности страховой компании в предположении, что страховые премии и страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальное распределение. Аналогичная идея используется, например, в задачах управления запасами, где считается, что объемы потребляемых ресурсов имеют гиперэкспоненциальное распределение [4].

1. Модель Крамера–Лундберга

Простейшей моделью деятельности страховой компании является модель Крамера–Лундберга, которая строится при следующих предположениях [1–3]: процесс поступления страховых премий в компанию считается детерминированным, за время t приращение капитала компании равно Ct, где C – количество средств, поступивших в компанию за единицу времени; страховые выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и средним значением a; моменты наступления страховых выплат образуют пуассоновский поток интенсивности λ. Поток страховых выплат не зависит от поступления страховых премий. Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$. Определим $T=\min\{t: S(t)<0\}$ и $T=\infty$, если $S(t)>0\ \forall t$. Случайная величина T – момент разорения. Тогда вероятность предельного разорения страховой компании при условии, что ее капитал в начальный момент равен S:

$$P(S)=\Pr\{T<\infty\}. \qquad (1)$$

Как показано, например, в [1–3], вероятность разорения $P(S)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$C\dot{P}(S)=\lambda P(S)-\lambda\int_0^S P(S-x)\Psi(x)dx-\lambda\int_S^\infty \Psi(x)dx \qquad (2)$$

с очевидным граничным условием $P(+\infty)=0$. Для существования решения необходимо выполнение условия

$$C=(1+\theta)\lambda a\,, \tag{3}$$
где $\theta>0$ – нагрузка страховой премии. В принципе, для нахождения решения уравнения (2) можно применить преобразование Лапласа. Сложность состоит в нахождении обратного преобразования.

Будем теперь предполагать, что страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальное распределение n-го порядка
$$\Psi(S)=\sum_{k=1}^{n}A_k\alpha_k e^{-\alpha_k S} \tag{4}$$
с параметрами $\alpha_k>0,\ A_k>0$, причем
$$\sum_{k=1}^{n}A_k=1\,. \tag{5}$$
Среднее значение величины страховой выплаты в этом случае будет равно
$$a=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\alpha_k}. \tag{6}$$
Распределение (4) в нашей задаче можно интерпретировать следующим образом. Имеется всего n различных типов страхования. При наступлении страхового случая страховая выплата с вероятностью A_k соответствует *k*-му типу страхового договора и имеет плотность распределения $\alpha_k e^{-\alpha_k}$. В силу линейной независимости функций $e^{-\alpha_k}$ распределение (4) можно использовать при подходящем выборе параметров для аппроксимации произвольного монотонного распределения $\Psi(S)$. При $n=2$ уравнение (2) с плотностью распределения (4) решалось в работе [1].

Учитывая граничное условие $P(+\infty)=0$, уравнение (2) можно переписать в виде
$$CP(S)=\lambda\int_0^S P(S-x)\int_x^\infty \Psi(y)dydx+\lambda\int_S^\infty\int_x^\infty \Psi(y)dydx. \tag{7}$$
Решение уравнения (7) будем искать в виде
$$P(S)=\sum_{j=1}^{n}P_j e^{-\gamma_j S}, \tag{8}$$
где параметры $\gamma_j>0, P_j$ подлежат определению. Подставляя выражение (8) в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{-\alpha_k S}$ и $e^{-\gamma_j S}$, получим, что выражение (8) есть решение уравнения (7), если выполняются следующие условия:
$$C-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\alpha_k-\gamma_j}=0, \tag{9}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k-\gamma_j}P_j=\frac{1}{\alpha_k}. \tag{10}$$
Таким образом, величины γ_j должны быть положительными корнями алгебраического уравнения
$$f(z)=C-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\alpha_k-z}=0. \tag{11}$$
Покажем, что уравнение (11) имеет ровно n различных положительных корней. Будем считать, что $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$. Имеем, во-первых, $f(0)=C-\lambda a=\theta\lambda a>0$. Во-вторых, $f'(0)=-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\alpha_k^2}<0$. Таким образом, в окрестности точки $z=0$ функция $f(z)$ монотонно убывает. При $z\to\alpha_1-0$ функция $f(z)\to-\infty$. Следовательно, на отрезке $(0,\alpha_1)$ уравнение (11) имеет корень γ_1. Далее, при $z\to\alpha_1+0$ $f(z)\to+\infty$, при $z\to\alpha_2-0$ $f(z)\to-\infty$. На отрезке (α_1,α_2) функция $f(z)$ непрерывна. Следовательно, на отрезке (α_1,α_2) уравнение (11) имеет корень γ_2. Перебирая остальные отрезки (α_i,α_{i+1}), убеждаемся, что уравнение (11) имеет ровно n различных положительных корней.

Коэффициенты P_j должны являться решением системы уравнений (11). Определитель матрицы системы $\left[(\alpha_k-\gamma_j)^{-1}\right]$ есть определитель Коши $[5]$, равный

$$\Delta=\det\left[\frac{1}{\alpha_k-\gamma_j}\right]=\frac{\prod\limits_{1\le k<j\le n}(\alpha_k-\alpha_j)(\gamma_j-\gamma_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(\alpha_k-\gamma_j)}. \quad (12)$$

Поэтому система уравнений (10) имеет, причем единственное, решение. Покажем, что решение системы (10) положительно. Пусть система решается по формулам Крамера $[5]$. Тогда

$$P_m=\frac{\Delta_m}{\Delta},\quad m=\overline{1,n},$$

где определитель Δ_m получается из определителя Δ заменой его m-го столбца на столбец из свободных членов уравнений (10). Рассмотрим вначале определитель Δ (12). Так как при $k<j$ $\alpha_k-\alpha_j<0,\ \ \gamma_j-\gamma_k>0$, то в числителе выражения (12) стоит произведение из $\frac{n(n-1)}{2}$ отрицательных сомножителей. Так как $\gamma_j<\alpha_k$ при $j\le k$, то в знаменателе выражения (12) стоит произведение из $\frac{n(n+1)}{2}$ отрицательных сомножителей. Поэтому $\Delta>0$. Определитель Δ_m вычисляется по формуле (12) при $\gamma_m=0$. Поэтому как в числителе, так и в знаменателе выражения (12) добавится $m-1$ отрицательный сомножитель и, следовательно, $\Delta_m>0$.

Второй характеристикой, позволяющей анализировать перспективы страховой компании, является среднее время до разорения $t(S)$ при условии, что разорение произошло и начальный капитал компании равен S. Как показано в $[3]$, среднее условное время $t(S)$ определяется соотношением

$$t(S)=\frac{T(S)}{P(S)}, \quad (13)$$

где функция $T(S)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$C\dot{T}(S)=\lambda T(S)-\lambda\int\limits_0^S T(S-x)\Psi(x)dx-P(S) \quad (14)$$

с граничным условием $T(+\infty)=0$. Учитывая граничное условие, уравнение (14) можно переписать в виде

$$CT(S)=\lambda\int\limits_0^S T(S-x)\int\limits_x^\infty \Psi(y)dydx+\int\limits_S^\infty P(y)dy. \quad (15)$$

В нашем случае функции $\Psi(S)$ и $P(S)$ определяются соотношениями (4) и (8) соответственно, поэтому решение уравнения (15) будем искать в виде

$$T(S)=\sum_{j=1}^{n}(U_j+V_jS)e^{-\gamma_jS}. \quad (16)$$

Подставляя выражения (4), (8) и (16) в уравнение (15) и приравнивая коэффициенты при $e^{-\alpha_kS}$, $e^{-\gamma_jS}$ и $Se^{-\gamma_jS}$ и учитывая (9), получим, что коэффициенты U_j и V_j должны удовлетворять соотношениям

$$V_j=\frac{P_j}{\lambda\gamma_j\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(\alpha_k-\gamma_j)^2}}, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k-\gamma_j}U_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_k-\gamma_j)^2}V_j. \quad (18)$$

2. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями

Второй достаточно хорошо известной моделью страхования является модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями [6, 7]. В этом случае предполагается, что поток страховых премий, поступающих в компанию, является пуассоновским с интенсивностью λ, премии – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Phi(x)$ и средним значением a. Страховые выплаты также образуют пуассоновский поток с интенсивностью μ, выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и средним значением b. Поток страховых выплат не зависит от потока страховых премий. Как показано в [6, 7], в этом случае вероятность разорения (1) определяется уравнением

$$(\lambda+\mu)P(S)=\lambda\int_0^\infty P(S+x)\Phi(x)dx+\mu\int_0^S P(S-x)\Psi(x)dx+\mu\int_S^\infty \Psi(x)dx \tag{19}$$

с граничным условием $P(+\infty)=0$. Для существования решения уравнения необходимо выполнение условия

$$\lambda a=(1+\theta)\mu b, \tag{20}$$

где $\theta>0$ – нагрузка страховой премии.

Получим решение уравнения (19) в предположении, что распределения страховых премий и выплат являются гиперэкспоненциальными:

$$\Phi(S)=\sum_{k=1}^m A_k\alpha_k e^{-\alpha_k S},\qquad \Psi(S)=\sum_{k=1}^n B_k\beta_k e^{-\beta_k S}. \tag{21}$$

Решение уравнения (19) будем искать в виде

$$P(S)=\sum_{j=1}^n P_j e^{-\gamma_j S}. \tag{22}$$

Подставляя выражения (22) и (21) в уравнение (19) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{-\beta_k S}$ и $e^{-\gamma_j S}$, получим, что выражение (22) есть решение уравнения (19), если выполняются условия

$$\lambda+\mu-\lambda\sum_{k=1}^m\frac{A_k\alpha_k}{\alpha_k+\gamma_j}-\mu\sum_{k=1}^n\frac{B_k\beta_k}{\beta_k-\gamma_j}=0, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^n\frac{1}{\beta_k-\gamma_j}P_j=\frac{1}{\beta_k}. \tag{24}$$

Таким образом, величины γ_j должны быть положительными корнями алгебраического уравнения

$$f(z)=\lambda\sum_{k=1}^m\frac{A_k\alpha_k}{\alpha_k+z}+\mu\sum_{k=1}^n\frac{B_k\beta_k}{\beta_k-z}-\lambda-\mu=0\,. \tag{25}$$

Покажем, что уравнение (25) имеет ровно n различных положительных и $m-1$ различных отрицательных корней. Имеем, во-первых, что $f(0)=0$, во-вторых, $f'(0)=-\lambda a+\mu b<0$. Значит, в окрестности точки $z=0$ $f(z)=-(\lambda a-\mu b)z+o(z)$. Функция $f(z)$ непрерывна на $[0,\beta_1)$ и при $z\to\beta_1-0$ $f(z)\to+\infty$. Поэтому на отрезке $[0,\beta_1)$ уравнение (25) имеет корень γ_1. Далее, функция $f(z)$ непрерывна на (β_1,β_2). При $z\to\beta_1+0$ $f(z)\to-\infty$, при $z\to\beta_2-0$ $f(z)\to+\infty$. Поэтому на отрезке (β_1,β_2) уравнение (25) имеет корень γ_2. Аналогично устанавливается наличие остальных $n-2$ положительных и $m-1$ различных отрицательных корней уравнения. Так как уравнение (24) по форме совпадает с уравнением (10), то решение уравнения (24) положительно.

Среднее условное время до разорения $t(S)$ для данной модели определится соотношением (13), где теперь функция $T(S)$ является решением уравнения [6]:

$$(\lambda+\mu)T(S)=\lambda\int_S^\infty T(x)\Phi(x-S)dx+\mu\int_0^S T(x)\Psi(S-x)dx+P(S) \tag{26}$$

с граничным условием $T(+\infty)=0$. Решение уравнения (26) будем опять искать в виде

$$T(S)=\sum_{j=1}^{n}(U_j+V_jS)e^{-\gamma_j S}, \tag{27}$$

где показатели степеней γ_j удовлетворяют соотношениям (23). Подставляя соотношения (27), (21) и (22) в уравнение (26), получим систему соотношений на коэффициенты U_j и V_j

$$V_j=\frac{P_j}{\lambda\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k\alpha_k}{(\alpha_k+\gamma_j)^2}+\mu\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k\beta_k}{(\beta_k-\gamma_j)^2}}, \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_k-\gamma_j}U_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{V_j}{(\beta_k-\gamma_j)^2}. \tag{29}$$

Аналогично вышеизложенному могут быть найдены вероятность разорения и среднее условное время до разорения для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями и постоянными не страховыми расходами [8].

3. Модель Крамера–Лундберга с ММР потоком страховых выплат

Одним из возможных обобщений модели Крамера–Лундберга является допущение того, что интенсивность потока страховых выплат или скорость поступления страховых премий могут скачкообразно изменяться в случайные моменты времени. Такие модели были рассмотрены, например, в работах [9–12]. В настоящей работе будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и двумя состояниями λ_1 и λ_2. Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}-\beta_1 & \beta_1\\ \beta_2 & -\beta_2\end{bmatrix}, \tag{30}$$

где $\beta_1,\beta_2>0$. Тогда финальные вероятности состояний λ_1 и λ_2 равны соответственно

$$\pi_1=\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2},\quad \pi_2=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \tag{31}$$

и средняя интенсивность потока страховых выплат в стационарном режиме

$$\lambda_0=\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2. \tag{32}$$

Страховые выплаты – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и средним значением a. Наконец, будем считать, что страховые премии поступают непрерывно во времени с постоянной скоростью C. Для нормального функционирования страховой компании необходимо выполнение условия [11]:

$$C=(1+\theta)\lambda_0 a, \tag{33}$$

где $\theta>0$. При $\theta<0$ компания разоряется.

Обозначим, как и ранее, через T момент разорения страховой компании, и пусть

$$P_i(S)=\Pr\{T<\infty|\mathrm{S}(0)=S,\lambda(0)=\lambda_i\},\quad i=1,2 \tag{34}$$

есть вероятности разорения страховой компании при условии, что в начальный момент ее капитал равен S и значение интенсивности потока выплат равно λ_i. Как показано в $[11]$, вероятности $P_i(S)$ удовлетворяют системе уравнений

$$C\dot{P}_1(S)=(\lambda_1+\beta_1)P_1(S)-\beta_1P_2(S)-\lambda_1\int_0^S P_1(x)\Psi(S-x)dx-\lambda_1\int_S^\infty\Psi(x)dx, \tag{35}$$

$$C\dot{P}_2(S)=-\beta_2P_1(S)+(\lambda_2+\beta_2)P_2(S)-\lambda_2\int_0^S P_2(x)\Psi(S-x)dx-\lambda_2\int_S^\infty\Psi(x)dx$$

с граничными условиями $P_i(+\infty)=0$.

Пусть страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальное распределение n-го порядка (8). Решения системы уравнений (35) будем искать в виде

$$P_j(S) = \sum_{k=1}^{2n} P_{kj} e^{-\gamma_k S}. \tag{36}$$

Подставляя соотношения (36) и (8) в уравнения (35) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{-\alpha_k S}$ и $e^{-\gamma_k S}$, получим систему соотношений

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k1} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{37}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k2} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{38}$$

$$(\lambda_2 + \beta_2 + C\gamma_k - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k}) P_{k2} - \beta_2 P_{k1} = 0, \quad k = \overline{1,2n}, \tag{39}$$

$$(\lambda_1 + \beta_1 + C\gamma_k - \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k}) P_{k1} - \beta_1 P_{k2} = 0, \quad k = \overline{1,2n}. \tag{40}$$

При фиксированных γ_k относительно коэффициентов P_{k1} и P_{k2} имеем систему из $6n$ уравнений с $4n$ неизвестными. Для совместности системы необходимо, чтобы ранг получившейся системы уравнений был равен $4n$ [5]. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты соответствующих уравнений систем (39) и (40) были пропорциональны, т.е. чтобы выполнялись условия

$$(\lambda_1 + \beta_1 + C\gamma_k - \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k})(\lambda_2 + \beta_2 + C\gamma_k - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k}) - \beta_1 \beta_2 = 0, \qquad k = \overline{1,2n}. \tag{41}$$

Таким образом, величины γ_k должны являться корнями уравнения

$$f(z) = (\lambda_1 + \beta_1 + Cz - \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - z})(\lambda_2 + \beta_2 + Cz - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \alpha_j}{\alpha_j - z}) - \beta_1 \beta_2 = 0. \tag{42}$$

Покажем, что уравнение (42) имеет $2n$ различных положительных корней.

Корни уравнения (42) совпадают с корнями многочлена степени $2n+2$. И значит, уравнение (42) имеет всего $2n+2$ корня. При $z = 0$ $f(z) = 0$. Следовательно, $z = 0$ – корень уравнения (42). Далее, $f'(0) = (\beta_1 + \beta_2)(C - \lambda_0 a) > 0$. Поэтому при малых $z < 0$ $f(z) < 0$. С другой стороны, при $|z| \gg 1$ $f(z) \sim z^2$ и, следовательно, $f(z) > 0$. Поэтому уравнение (42) имеет хотя бы один отрицательный корень.

Перепишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^2 (C - \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - z})(C - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - z}) + z(\beta_1 + \beta_2)(C - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - z} \tag{43}$$

и обозначим

$$f_0(z) = C - \lambda_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - z}. \tag{44}$$

Как было показано ранее, уравнение $f_0(z) = 0$ имеет n различных корней $k_1, k_2, ..., k_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < k_1 < \alpha_1 < k_2 < \alpha_2 < ... < k_n < \alpha_n .$$

Воспользуемся этим. Имеем теперь, во-первых, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$; во-вторых,

$$f(k_1) = k_1^2 (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - k_1})^2 < 0,$$

так как или $\lambda_1 - \lambda_0 < 0$, или $\lambda_2 - \lambda_0 < 0$. Поэтому уравнение $f(z) = 0$ имеет корень $\gamma_1 \in (0, k_1)$. Далее, при $z \to \alpha_1$ $f(z) \sim (\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - z})^2$ и, следовательно, $f(z) \to +\infty$. Таким образом, уравнение $f(z) = 0$ имеет корень $\gamma_2 \in (k_1, \alpha_1)$. Аналогично

$$f(k_2) = k_2^2(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\alpha_j - k_2})^2 < 0,$$

откуда вытекает существование корня уравнения $\gamma_3 \in (\alpha_1, k_2)$. Продолжая этот процесс, убеждаемся в существовании $2n$ различных положительных корней уравнения (43), удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \gamma_1 < k_1 < \gamma_2 < \alpha_1 < \gamma_3 < k_2 < \gamma_4 < \ldots < k_n < \gamma_{2n} < \alpha_n.$$

Определив величины γ_j, коэффициенты P_{k1} и P_{k2} получим теперь как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} P_{k1} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{45}$$

$$\frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \gamma_k} \gamma_k (C - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\alpha_i - \gamma_k}) P_{k1} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{46}$$

$$P_{k2} = (1 + \frac{\gamma_k}{\beta_1}(C - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\alpha_i - \gamma_k})) P_{k1}. \tag{47}$$

Пример. В качестве примера рассмотрим случай гиперэкспоненциального распределения при $n = 2$. Параметры распределения: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, A_1 = 0{,}5, A_2 = 0{,}5$; параметры потока страховых выплат: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \beta_1 = 3, \beta_2 = 5$; нагрузка страховой премии $\theta = 0{,}2$. Корни уравнения (42) в этом случае равны: $\gamma_1 = 0{,}19, \gamma_2 = 0{,}866, \gamma_3 = 1{,}683, \gamma_4 = 1{,}839$. Графики вероятностей разорения $P_1(S)$ и $P_2(S)$ приведены на рис. 1. Как и следовало ожидать, вероятность разорения для состояния с большей интенсивностью выплат больше, чем вероятность разорения для состояния с меньшей интенсивностью выплат.

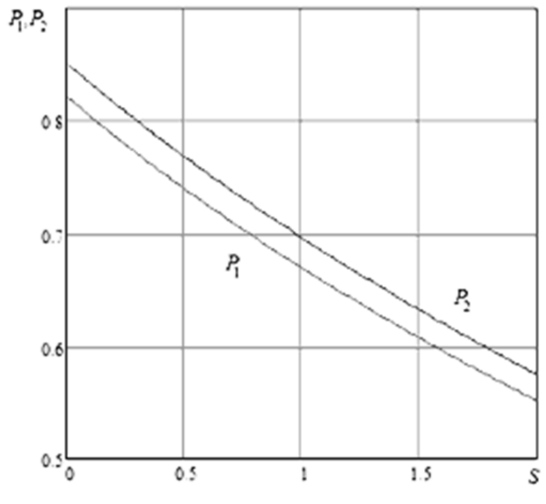

Рис. 1. Зависимость вероятностей разорения $P_i(S)$ от начального капитала

Заключение

В работе получены расчетные формулы, позволяющие вычислить вероятность разорения и среднее условное время до разорения страховой компании при гиперэкспоненциальных распределениях страховых выплат и страховых премий для модели Крамера–Лундберга, модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями, модели Крамера–Лундберга с ММР потоком страховых выплат. В принципе, тот же подход может быть использован для вычисления вероятностей разорения и для более сложных моделей, например, для случая, когда и моменты поступления страховых премий образуют ММР поток [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Panjer H.Y., Wilmot G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. P. 442.
2. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Д. Актуарная математика. М. : Янус К, 2001. 656 с.
3. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
4. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 43–50.
5. Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Томск: Изд-во НТЛ, 2011. Ч. I. 252 с.
6. Livshits K.I. Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 394–399.
7. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применение. 2002. Т. 47, вып. 3. С. 549–553.
8. Livshits K.I., Yakimovich K.Yu. Cramer-Lundberg Model with Stochastic Premiums and Continuous Non-insurance Costs // Communications in Computer and Information Science. Springer, 2014. V. 487. P. 251–260.
9. Jasinlewicz H. Probability of Ruin with Variable Premiun Rate in a Markovian Environment // Insurance: Mathematics end Economics. 2001. V. 29. P. 291–296.
10. Lu Y., Li S. On the Probability of Ruin in a Markov-modulated Risk Model // Insurance: Mathematics end Economics. 2005. V. 37(3). P. 522–532.
11. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
12. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 15–23.
13. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 64–73.

Лившиц Климентий Исаакович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: kim47@mail.ru
Томский государственный университет
Сухотина Лариса Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: suhotina@mail.fpmk.tsu.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 2 февраля 2016 г.

Livshits Klimenty I., Suhotina Larisa Yu. (Tomsk State University, Russian Federation).

Ruin probability of an insurance company with hyperexponential distribution of insurance premiums and insurance payments for different insurance models.

Keywords: probability of ruin; mean conditional time to ruin; Cramer-Lundberg model; Cramer-Lundberg model with stochastic premiums; hyperexponential distribution.

DOI: 10.17223/19988605/35/4

In this paper the calculated formulas which allow to calculate the ruin probability of an insurance company for some insurance models under assumption that insurance premiums and insurance payments have the hyperexponential distribution are obtained.

For Cramer–Lundberg model if the insurance payments distribution is $\Psi(S)=\sum_{k=1}^{n} A_k \alpha_k e^{-\alpha_k S}$, rate cash flows is C and the insurance payments flow intensity is λ, then the probability of ruin is defined as

$$P(S)=\sum_{j=1}^{n} P_j e^{-\gamma_j S},$$

where γ_j are the simple positive roots of equation

$$f(z)=C-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\alpha_k - z}=0,$$

and the coefficients P_j are the solution of equations $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k-\gamma_j}P_j=\frac{1}{\alpha_k}$.

For Cramer–Lundberg model with stochastic premiums if the insurance premiums and insurance payments distributions are $\Phi(S)=\sum_{k=1}^{m}A_k\alpha_k e^{-\alpha_k S}$, $\Psi(S)=\sum_{k=1}^{n}B_k\beta_k e^{-\beta_k S}$, respectively, the insurance premiums and insurance payments flows intensities are λ and μ , then the probability of ruin is determined by the same relation, but γ_j are the simple positive roots of equation

$$f(z)=\lambda\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k\alpha_k}{\alpha_k+z}+\mu\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k\beta_k}{\beta_k-z}-\lambda-\mu=0,$$

and the coefficients P_j are the solution of equations $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_k-\gamma_j}P_j=\frac{1}{\beta_k}$.

For Cramer–Lundberg model with MMP payments flow with two states λ_1 and λ_2 and the final probabilities of states $\beta_2/(\beta_1+\beta_2)$, $\beta_1/(\beta_1+\beta_2)$ the probabilities of ruin

$$P_j(S)=\sum_{k=1}^{2n}P_{kj}e^{-\gamma_k S},\ j=1,2,$$

where γ_j are the simple positive roots of equation

$$f(z)=(\lambda_1+\beta_1+Cz-\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\alpha_j}{\alpha_j-z})(\lambda_2+\beta_2+Cz-\lambda_2\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\alpha_j}{\alpha_j-z})-\beta_1\beta_2=0,$$

and the coefficients P_{kj} are the solution of equations

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{\alpha_j}{\alpha_j-\gamma_k}P_{k1}=1;\ \frac{1}{\beta_1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\alpha_j}{\alpha_j-\gamma_k}\gamma_k(C-\lambda_1\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\alpha_i-\gamma_k})P_{k1}=0,\quad j=\overline{1,n};\ P_{k2}=(1+\frac{\gamma_k}{\beta_1}(C-\lambda_1\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\alpha_i-\gamma_k}))P_{k1}.$$

REFERENCES

1. Panjer, H.Y. & Wilmot, G.E. (1992) *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.
2. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hekman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (2001) *Aktuarnaya Matematika* [Actuarial Mathematics]. Translated from English by V.K. Malinovskiy. Moscow: Yanus K.
3. Glukhova, E.V., Zmeev, O.A. & Livshits, K.I. (2004) *Matematicheskie modeli strakhovaniya* [Mathematical Models of Insurance]. Tomsk: Tomsk State University.
4. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 43-50. DOI: 10.17223/19988605/34/5
5. Livshits, K.I. (2011) *Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya* [Linear Algebra and Analytical Geometry]. Tomsk: NTL.
6. Livshits, K.I. (1999) Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 394-399. DOI: 10.1007/BF02509675
7. Boykov, A.V. (2002) The Cramer–Lundberg model with stochastic premium process. *Teoriya veroyatnostey i ee primenenie*. 47(3). pp. 549-553. DOI: 10.4213/tvp3693
8. Livshits, K.I. & Yakimovich, K.Yu. (2014) Cramer-Lundberg Model with Stochastic Premiums and Continuous Non-insurance Costs. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 251-260. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_30
9. Jasinlewicz, H. (2001) Probability of Ruin with Variable Premiun Rate in a Markovian Environment. *Insurance: Mathematics and Economics*. 29. pp. 291-296. DOI: 10.1016/S0167-6687(01)00090-7
10. Lu, Y. & Li, S. (2005) On the Probability of Ruin in a Markov-modulated Risk Model. *Insurance: Mathematics and Economics*. 37(3). pp. 522-532. DOI: 10.1007/s11009-007-9044-4
11. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2010) Ruin probability of an insurance company under double stochasticpayment current. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
12. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2010) Distribution of the conditional time before ruin of an insurancecompany under double stochastic payment current. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 15-23. (In Russian).
13. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2011) Ruin probability of an insurance company under double stochastic insurance premium and insurance payment currents. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(17). pp. 64-73. (In Russian).