УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/35/5

С.П. Моисеева, Е.В. Панкратова, Е.Г. Убонова

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗНОТИПНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассматривается система массового обслуживания MR|M|∞ с разнотипным обслуживанием. Найдены аналитические выражения для первого и второго начальных моментов числа занятых приборов каждого типа. С помощью метода асимптотического анализа при условии эквивалентно растущего времени обслуживания доказано, что двумерное распределение вероятностей числа занятых приборов каждого типа в системе является гауссовским.
Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания; поток марковского восстановления; метод асимптотического анализа; разнотипное обслуживание.

Общие выгоды от связи между математической теорией и ее практическим применением в теории массового обслуживания (ТМО) прослеживаются особенно хорошо. В начале XX в. А.К. Эрланг [1] заложил фундамент стохастических моделей для анализа эффективности технических систем. Первоначальная область применения ТМО для анализа телефонных систем вскоре была увеличена путем применения в ремонте машин, контроле запасов и позже конструкции и анализа компьютерных систем. Кроме того, системы массового обслуживания используют в качестве математических моделей для описания и изучения страховых компаний, медицинского обслуживания, пенсионных фондов [2–5]. Тесное взаимодействие теории и практики осталось движущей силой для развития теории массового обслуживания до сегодняшнего дня.

Современные потоки данных в информационных и телекоммуникационных системах включают в себя интегрированные разнотипные потоки, которые передают голосовую информацию, текстовые данные и информацию из видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве них, как правило, используют математические модели модулированных потоков (BMAP, MAP), полумарковских (SM) или их частных случаев (марковский модулированный пуассоновский поток MMPP, поток марковского восстановления MR, рекуррентный поток GI).

Поскольку на обслуживание различных информационных единиц затрачивается различное время в зависимости от формата, соответствующих протоколов и т.д., то в качестве моделей процессов в информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками, требующими разного времени обслуживания и являющимися математическими моделями информационных систем.

Исследование систем с разнотипным обслуживанием можно встретить в работах [6–11]. В своей статье M.F. Neuts и Y. Takahashi [12] пришли к выводу, что для систем массового обслуживания с двумя или более приборами получение аналитических результатов является затруднительным, в этом случае следует применять асимптотические методы исследования [13–17].

Данная статья посвящена исследованию числа занятых приборов в системе с разнотипным обслуживанием заявок и входящим потоком марковского восстановления (MR). С помощью метода начальных моментов найдены точные выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе. Кроме того, предложено развитие метода асимптотического анализа для исследования числа занятых приборов при условии эквивалентно растущего времени обслуживания.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления заявок двух типов, заданный набором функций распределения длин интервалов $A_1(x)$, $A_2(x)$,…, $A_K(x)$ и матрицей вероятностей переходов $\mathbf{P} = [P_{ij}]$, $i, j = 1, 2$, вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова $k(t) = 1,2,\ldots,K$ с конечным числом состояний $k(t)=1,2,\ldots,K$ [18].

Дисциплина обслуживания заключается в том, что заявка из MR/M/∞ входящего потока с вероятностью p_i ($i = 1,2$) относится к i типу и занимает любой свободный прибор, время обслуживания на котором имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i ($i = 1,2$) соответственно. Ставится задача исследования двумерного случайного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ – число занятых приборов каждого типа в системе.

Определим четырехмерный марковский случайный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t), z(t)\}$, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в потоке марковского восстановления, $k(t)$ – вложенная по моментам восстановления цепь Маркова [19].

Для распределения вероятностей $P(k,i_1,i_2,z,t) = P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, z(t) < z\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме принимает вид

$$\frac{\partial \Pi(k,i_1,i_2,z)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(k,i_1,i_2,0)}{\partial z} - (i_1\mu_1 + i_2\mu_2)\Pi(k,i_1,i_2,z) + (i_1+1)\mu_1\Pi(k,i_1+1,i_2,z) + \tag{1}$$

$$+ (i_2+1)\mu_2\Pi(k,i_1,i_2+1,z) + \sum_{\nu}\frac{\partial \Pi(\nu,i_1-1,i_2,0)}{\partial z}p_1P_{\nu k}A_k(z) + \sum_{\nu}\frac{\partial \Pi(\nu,i_1,i_2-1,0)}{\partial z}p_2P_{\nu k}A_k(z) = 0\,,$$

где $k(t) = 1,2,\ldots,K$, $i_1(t) = 0,1,2,\ldots$, $i_2(t) = 0,1,2$.

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k,u_1,u_2,z) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1i_1}e^{ju_2i_2}\Pi(k,i_1,i_2,z),\text{ где } j = \sqrt{-1}\,.$$

Тогда из системы (1) получаем систему дифференциальных уравнений в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,0)}{\partial z}\left[p_1e^{ju_1}\mathbf{PD}(z) + p_2e^{ju_2}\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}\right] -$$

$$- \mu_1 j(e^{-ju_1}-1)\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,z)}{\partial u_1} - \mu_2 j(e^{-ju_2}-1)\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,z)}{\partial u_2} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{H}(u_1,u_2,z) = \left[H(1,u_1,u_2,z), H(2,u_1,u_2,z),\ldots,H(K,u_1,u_2,z)\right]$,

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,z)}{\partial u_i} = \left[\frac{\partial H(1,u_1,u_2,z)}{\partial u_i}, \frac{\partial H(2,u_1,u_2,z)}{\partial u_i},\ldots,\frac{\partial H(K,u_1,u_2,z)}{\partial u_i}\right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial H(1,u_1,u_2,z)}{\partial z}, \frac{\partial H(2,u_1,u_2,z)}{\partial z},\ldots,\frac{\partial H(K,u_1,u_2,z)}{\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,0)}{\partial z} = \left.\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,z)}{\partial z}\right|_{z=0},$$

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} A_1(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_K(z) \end{bmatrix},\ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{K\times K}.$$

Уравнение (2) является основным для дальнейших исследований.

2. Основные числовые вероятностные характеристики

Дифференцируя (2) по переменным u_1,u_2 и полагая их равными нулю, можно получить основные числовые вероятностные характеристики [20]. Средние значения числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяются равенствами

$$\overline{m}_1^{(k)} = \frac{p_k}{\mu_k}\lambda\,,\ k = 1,2,$$

где λ имеет смысл интенсивности потока марковского восстановления и определяется выражением

$$\lambda = 1 \Big/ \int_0^{\infty} (1 - P\mathbf{D}(z)E)dz .$$

Здесь $\mathbf{R} = [R(1), R(2), \ldots, R(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова.

Моменты второго порядка числа заявок каждого типа в системе MR/M/∞ имеют вид

$$\overline{m}_2^{(k)}\mathbf{E} = \frac{p_k}{\mu_k}\lambda + \frac{p_k^2\lambda}{\mu_k}\mathbf{PD}^*(\mu_k)\left[\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_k)\right]^{-1}\mathbf{E},\ k = 1,2,$$

$$\mathbf{D}^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\mathbf{D}(z).$$

Выражение для коэффициента корреляции числа занятых приборов каждого типа системы MR/M/∞ принимает вид

$$r = \frac{p_1 p_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\left[\mathbf{PD}^*(\mu_1)\left[\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_1)\right]^{-1} + \mathbf{PD}^*(\mu_2)\left[\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_2)\right]^{-1}\right]}{\sqrt{D_1} \cdot \sqrt{D_2}},$$

где дисперсия определяется выражением

$$D_i = \frac{p_i}{\mu_i}\lambda + \frac{p_i^2\lambda}{\mu_i}\mathbf{PD}^*(\mu_i)\left[\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_i)\right]^{-1}\mathbf{E} - \left(\frac{p_i}{\mu_i}\lambda\right)^2,\ i = 1,2.$$

Численные эксперименты показали, что зависимость между компонентами i_1 и i_2 увеличивается при следующих условиях: при увеличении времени обслуживания, т.е. при $\mu_i \to 0$, при увеличении интенсивности входящего потока и если p_1 и p_2 близки по значению.

3. Метод асимптотического анализа

Применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов каждого типа в системе MR|M|∞ при некоторых асимптотических (предельных) условиях. Рассмотрим условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_1 = \varepsilon,\ \mu_2 = q\varepsilon,\ u = \varepsilon x_1,\ w = \varepsilon q x_2,\ \mathbf{H}(u_1,u_2,z) = \mathbf{F}_1(z,x_1,x_2,\varepsilon). \quad (3)$$

Перепишем (2) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(0,x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial z}\left[p_1 e^{j\varepsilon x_1}\mathbf{PD}(z) + p_2 e^{j\varepsilon q x_2}\mathbf{PD}(z) - I\right] -$$

$$- j\left(e^{-j\varepsilon x_1} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_1} - j\left(e^{-j\varepsilon q x_2} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_2} = 0. \quad (4)$$

Лемма. Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon \to 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}_1(z,x_1,x_2)$ решения $\mathbf{F}_1(z,x_1,x_2,\varepsilon)$ уравнения (4) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(z,x_1,x_2) = \mathbf{R}(z)\exp\left\{\lambda j\left(p_1 x_1 + p_2 x_2\right)\right\}. \quad (5)$$

Доказательство. В уравнении (4) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,x_1,x_2)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(0,x_1,x_2)}{\partial z}\left[\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}\right] = 0,$$

решение которого определим в виде

$$\mathbf{F}_1(z,x_1,x_2) = \mathbf{R}(z)\Phi_1(x_1,x_2). \quad (6)$$

Скалярную функцию $\Phi_1(x_1,x_2)$ определим следующим образом: в уравнении (4) выполним предельный переход при $z \to \infty$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(0,x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial z}\left[p_1 e^{j\varepsilon x_1}\mathbf{P} + p_2 e^{jq\varepsilon x_2}\mathbf{P} - \mathbf{I}\right] - j\left(e^{-j\varepsilon x_1} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_1} -$$

$$-j\left(e^{-jq\varepsilon x_2}-1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_2}=0.$$

Разложим экспоненты в ряд Тейлора, поделим левую и правую части на ε и выполним предельный переход при ε → 0, тогда получим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(0,x_1,x_2)}{\partial z}\left[j\left(p_1x_1+p_2qx_2\right)\mathbf{P}-\mathbf{I}+\mathbf{P}\right]+j^2x_1\frac{\partial \mathbf{F}_1(\infty,x_1,x_2)}{\partial x_1}+$$

$$+j^2qx_2\frac{\partial \mathbf{F}_1(\infty,x_1,x_2)}{\partial x_2}=0,$$

подставляя в которую (6) и просуммировав уравнения, получаем дифференциальное уравнение для $\Phi_1(x_1,x_2)$ в частных производных вида

$$j\lambda\Phi_1(x_1,x_2)\left[p_1x_1+p_2qx_2\right]=x_1\frac{\partial \Phi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+qx_2\frac{\partial \Phi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}.$$

Нетрудно показать, что решение, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(0,0)=1$, имеет вид

$$\Phi_1(x_1,x_2)=\exp\left\{\lambda j\left(p_1x_1+p_2x_2\right)\right\}.$$

Следовательно, выполнено условие (5) леммы.

Учитывая замены (3), можно записать асимптотическое (при ε → 0) приближенное равенство для характеристической функции процесса $\{i_1(t),\, i_2(t)\}$ в стационарном режиме:

$$h_1(u_1,u_2)=\mathbf{H}(u_1,u_2,\infty)\mathbf{E}\approx\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u_1}{\mu_1}+p_2\frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\}.$$

Для построения аппроксимации характеристической функции второго порядка в уравнении (2) выполним следующую замену:

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,z)=\mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)\cdot\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u_1}{\mu_1}+p_2\frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\}.$$

Тогда для $\mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1,u_2,0)}{\partial z}\left[p_1e^{ju_1}\mathbf{PD}(z)+p_2e^{ju_2}\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\right]-$$

$$-\mu_1j(e^{-ju_1}-1)\frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)}{\partial u_1}-\mu_2j(e^{-ju_2}-1)\frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)}{\partial u_2}+\lambda p_1(e^{-ju_1}-1)\mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)+$$

$$+\lambda p_2(e^{-ju_2}-1)\mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)=0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mu_1=\varepsilon^2,\ \mu_2=q\varepsilon^2,\ u=\varepsilon y_1,\ w=\varepsilon q y_2,\ \mathbf{H}_2(u_1,u_2,z)=\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon), \tag{7}$$

получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{F}_2(0,y_1,y_2,\varepsilon)}{\partial z}\left[p_1e^{j\varepsilon y_1}\mathbf{PD}(z)+p_2e^{jq\varepsilon y_2}\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\right]-$$

$$-\varepsilon j(e^{-j\varepsilon y_1}-1)\frac{\partial \mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)}{\partial y_1}-\varepsilon j(e^{-jq\varepsilon y_2}-1)\frac{\partial \mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)}{\partial y_2}+$$

$$+(e^{-j\varepsilon y_1}-1)\lambda p_1\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)+(e^{-jq\varepsilon y_2}-1)\lambda p_2\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)=0. \tag{8}$$

Докажем следующую теорему:

Теорема. Сумма компонентов предельного, при ε → 0, значения вектор-функции $\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2)$ решения $\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)$ уравнения (8) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2)=\mathbf{R}(z)\exp\left\{j^2\left[\frac{\lambda}{2}\left(p_1y_1^2+p_2qy_2^2\right)+\mathbf{f}'(0)\mathbf{E}\left(\frac{(p_1y_1)^2}{2}+q\frac{(p_2y_2)^2}{2}+2p_1p_2\frac{qy_1y_2}{q+1}\right)\right]\right\}, \tag{9}$$

где вектор-функция $\mathbf{f}(z)$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}(\infty)\mathbf{E}=0$ и является решением уравнения

$$\frac{d\mathbf{f}(z)}{dz}+\mathbf{f}'(0)\big(\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\big)+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{RD}(z)-\lambda\mathbf{R}(z)=0\,. \qquad (10)$$

Доказательство. Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2,\varepsilon)=\Phi_2(y_1,y_2)\big(\mathbf{R}(z)+j\varepsilon\mathbf{f}(z)\big(p_1y_1+p_2qy_2\big)\big)+O(\varepsilon^2)\,. \qquad (11)$$

Подставив (11) в (8), имеем равенство

$$\Phi_2(y_1,y_2)\left\{\frac{\partial\mathbf{R}(z)}{\partial z}+j\varepsilon\frac{d\mathbf{f}(z)}{dz}(p_1y_1+p_2qy_2)+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\big[\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\big]+\right.$$

$$+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}j\varepsilon(p_1y_1+p_2qy_2)\mathbf{PD}(z)+j\varepsilon\frac{d\mathbf{f}(0)}{dz}(p_1y_1+p_2qy_2)(\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I})-$$

$$\left.-\,j\varepsilon\lambda(p_1y_1+p_2qy_2)\mathbf{R}(z)\right\}+\mathrm{O}(\varepsilon^2)=0\,.$$

Разделив обе части уравнения на ε и выполнив предельный переход при ε → 0, учитывая равенство $\frac{\partial\mathbf{R}(z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\big[\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\big]=0$ и $\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}=\lambda\mathbf{R}$, несложно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{d\mathbf{f}(z)}{dz}+\mathbf{f}'(0)\big(\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\big)+\lambda\mathbf{RD}(z)-\lambda\mathbf{R}(z)=0\,,$$

которая совпадает с системой (10).

Для нахождения вида функции $\Phi_2(y_1,y_2)$ разложим в уравнении (8) экспоненты в ряд Тейлора, подставим туда (11), устремим $z \to \infty$, разделим обе части на ε и выполним предельный переход при ε→0. Получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\Phi_2(y_1,y_2)\left\{\lambda\big(p_1y_1^2+p_2(qy_2)^2\big)+\mathbf{f}'(0)\mathbf{E}(p_1y_1+p_2qy_2)^2\right\}=$$

$$=y_1\frac{\partial\Phi_2(y_1,y_2)}{\partial y_1}+qy_2\frac{\partial\Phi_2(y_1,y_2)}{\partial y_2}\,. \qquad (12)$$

Решением дифференциального уравнения (12), удовлетворяющего начальному условию $\Phi_2(0,0) = 1$, является функция $\Phi_2(y_1,y_2)$ вида

$$\Phi_2(y_1,y_2)=\exp\left\{j^2\left[\frac{\lambda}{2}\big(p_1y_1^2+p_2qy_2^2\big)+\mathbf{f}'(0)\mathbf{E}\left(\frac{(p_1y_1)^2}{2}+q\frac{(p_2y_2)^2}{2}+2p_1p_2\frac{qy_1y_2}{q+1}\right)\right]\right\}.$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_2(z,y_1,y_2)=\mathbf{R}(z)\Phi_2(y_1,y_2)$, условие теоремы (9) доказано.

Выполнив обратные замены (7), можно записать асимптотическое (ε→0) приближенное равенство для характеристической функции

$$h_2(u_1,u_2)=\mathbf{H}(u_1,u_2,\infty)\mathbf{E}\approx\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u_1}{\mu_1}+p_2\frac{u_2}{\mu_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\,j^2\left[\frac{\lambda}{2}\left(p_1\frac{u_1{}^2}{\mu_1}+p_2\frac{u_2{}^2}{\mu_2}\right)+\mathbf{f}'(0)\mathbf{E}\left(\frac{(p_1u_2)^2}{2\mu_1}+\frac{(p_2u_2)^2}{2\mu_2}+2p_1p_2\frac{u_1u_2}{\mu_1+\mu_2}\right)\right]\right\}.$$

Таким образом, получили гауссовскую аппроксимацию характеристической функции числа заявок каждого типа в рассматриваемой системе в стационарном режиме функционирования.

Заключение

В результате проведенного исследования построена математическая модель обслуживания заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания MR|M|∞ с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления, определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов каждого типа. С помощью метода асимптотического анализа построена гауссовская аппроксимация исследуемого двумерного процесса.

На основе численных экспериментов показана сходимость асимптотических и допредельных характеристик для параметров обслуживания, превышающих интенсивность входящего потока в 10 и более раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erlang A.K. The theory of probability and telephone conversations // Nyt Tidsskrift Mat. 1911. B. 20. P. 33–39.
2. Гарайшина И.Р. Применение бесконечнолинейной трехфазной СМО для исследования процесса изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, при нестационарном входящем потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 2. С. 35–41.
3. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
4. Даммер Д.Д., Назаров А.А. Исследование числа требований на страховые выплаты в компании с произвольной величиной продолжительности договора // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2 (15). С. 24–31.
5. Miro O., Sanchez M., Espinosa, Coll-Vinent B., Bragulat E., and Milla J. Analysis of patient flow in the emergency department and the effect of G. an extensive reorganization // Emergency Medical Journal. 2003. V. 20. P. 143–148.
6. Панкратова Е.В. Исследование системы массового обслуживания MAP|M|∞ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: Управление, вычисление, связь. 2015. С. 585–592.
7. Панкратова Е.В. Исследование системы массового обслуживания GI/GI/∞ с двумя типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. 2015. Ч. 1. С. 152–157.
8. Pankratova E., Moiseeva S. Queueing System GI/GI/∞ with n Types of Customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland: Springer. 2015. V. 564. P. 216–225.
9. Dudin S., Kim C., Dudina O. MMAP|M|N queueing system with impatient heterogeneous customers as a model of a contact center // Computers & Operations Research. 2013. V. 40. P. 1790–1803.
10. Ammar S.I. Transient analysis of a two-heterogeneous servers queue with impatient behavior // Journal of the Egyptian Mathematical Society. 2014. V. 22. P. 90–95.
11. Li N., Stanford D.A. Multi-server accumulating priority queues with heterogeneous servers // European Journal of Operational Research. V. 252, Issue 3. 2016. P. 866–878.
12. Neuts M.F., Takahashi Y. Asimptotic behavior of the stationary distribution in the GI|PH|c queue with heterogeneous servers // Z. Wahrscheinlickeitsth. 1981. V. 57. P. 441–452.
13. Iglegart D.L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem // J. Appl. Prob. 1965. V. 2. P. 429–441.
14. Shore H. Simple Approximations for the GI|G|c queue // J. Operational Research Society. 1988. No. 39. P. 279–284.
15. Моисеева С.П., Назаров А.А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
16. Крысанова К.А., Моисеева С.П. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления методом асимптотического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 49–55.
17. Fedorova E.A. The Second Order Asymptotic Analysis Under Heavy Load Condition for Retrial Queueing System MMPP/M/1 // Communications in Computer and Information Science. Switzerland : Springer, 2015. V. 564. P. 344–357.
18. Синякова И.А., Моисеева С.П. Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // Известия Томского политехнического университета. 2012. № 5. С. 24–28.
19. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015.
20. Панкратова Е.В., Убонова Е.Г. Моисеева С.П. Исследование бесконечнолинейной СМО с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Всерос. конф. с междунар. участием. М. : РУДН, 20163. С. 49–52.

Убонова Елена Георгиевна. E-mail: rikka07@list.ru
Панкратова Екатерина Владимировна. E-mail: pankate@sibmail.com
Моисеева Светлана Петровна, д-р физ.-мат. наук. E-mail: smoiseeva@mail.ru
Томский государственный университет
Поступила в редакцию 17 февраля 2016 г.

Ubonova Elena G., Pankratova Ekaterina V., Moiseeva Svetlana P. (Tomsk State University, Russian Federation)
Queuing system with renewal arrival process and two types of customers.
Keywords: Queueing system; different types of servers; method of asymptotic analysis; renewal arrival process.

DOI: 10.17223/19988605/35/5

This article deals with the queueing system with unlimited number of facilities. Arrival process is a Markov renewal process.

An arrival customer is the customer of the first type with the probability p_1 and the customer of the second type with the probability p_2. Every customer comes into any vacant server where it is served during a stochastic time period distributed according to the exponential law with the parameter μ_1 for customers of the first type and with the parameter μ_2 for customers of the second type. The problem consists to study the process, which characterized by a number of occupied services.

The system of Kolmogorov's differential equations is derived. Using characteristic function, the main equation of research is obtained:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,0)}{\partial z}\left[p_1 e^{ju}\mathbf{PD}(z)+p_2 e^{jw}\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\right]-$$

$$-\mu_1 j(e^{-ju}-1)\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,z)}{\partial u}-\mu_2 j(e^{-jw}-1)\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,z)}{\partial w}=0.$$

In particular, the first and the second order initial moments of the number of busy servers of different types are obtained. Furthermore, we found the expression for the correlation coefficient between the number of the different types of busy servers. The resulting correlation coefficient indicates that the number of busy servers of different type in the system are dependent.

The systems under considerations are studied using asymptotic analysis. Namely, the expressions for the asymptotic of the first and second orders are received for the characteristic functions of the busy servers of any type in the system MR/GI/∞ with the heterogeneous service. Therefore, we make conclusion that the system under study (with two types of customers) cannot be reduced in two separate systems (each with one type of customers) The method of asymptotic analysis in a condition of equivalent growing service time is offered. The asymptotic characteristic functions of the first and second orders are derived. It is shown that the asymptotic characteristic function of the second order by two-dimensional probability distribution of the number of the occupied devices of each type in the system has the Gaussian distribution:

$$h_2(u_1,u_2)\approx \exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u_1}{\mu_1}+p_2\frac{u_2}{\mu_2}\right)+\right.$$

$$\left.+j^2\left[\frac{\lambda}{2}\left(p_1\frac{u_1^2}{\mu_1}+p_2\frac{u_2^2}{\mu_2}\right)+\mathbf{f}'(0)\mathbf{E}\left(\frac{(p_1u_2)^2}{2\mu_1}+\frac{(p_2u_2)^2}{2\mu_2}+2p_1p_2\frac{u_1u_2}{\mu_1+\mu_2}\right)\right]\right\}.$$

The numerical analysis of the convergence of the exact and asymptotic algorithms computing the main probabilistic characteristics of the system is carried out.

REFERENCES

1. Erlang, A.K. (1911) The theory of probability and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift Mat*. 20. pp. 33-39.
2. Garayshina, I.R. (2008) Primenenie beskonechnolineynoy trekhfaznoy SMO dlya issledovaniya protsessa izmeneniya chisla lits, zastrakhovannykh v Pensionnom fonde, pri nestatsionarnom vkhodyashchem potoke [Application of multiply queuing system for investigation the process of change in the number of persons insured in the Pension Fund, with unsteady arrival flow]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika –Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2. pp. 35-41.
3. Morozova, A.S., Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. (2006) Issledovanie ekonomiko-matematicheskoy modeli vliyaniya tsenovoy skidki dlya postoyannykh klientov na pribyl' kommercheskoy organizatsii [Investigation of mathematical models of influence of price discounts for regular customers on the profit of commercial organization]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta– Tomsk State University Journal.* 293. pp. 49-52.
4. Dammer, D.D. & Nazarov, A.A. (2011) Research of the amount of demands for insurance payment in a company with arbitrary distribution of duration of the insurance contract. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(15). pp. 24-31. (In Russian).
5. Miro, O., Sanchez, M., Espinosa, G., Coll-Vinent, B., Bragulat, E. and Milla, J. (2003) Analysis of patient flow in the emergency department and the effect of G. an extensive reorganization. *Emergency Medical Journal*. 20. pp. 143-148. DOI: 10.1136/emj.20.2.143
6. Pankratova, E.V. (2015) [Queuing system MAP|M|∞ with two types of customers using asymptotic analysis in condition of extremely rare changes of arrival process MAP]. *Raspredelennye komp'yuternye i telekommunikatsionnye seti: Upravlenie, vychislenie, svyaz'* [Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015)]. Proc. of the 18th International Scientific Conference. October 19-22, 2015. Moscow: Institute of control Sciences RAS. pp. 585-592. (In Russian).
7. Pankratova, E.V. (2015) [Queuing system GI/GI/∞ with two types of customers]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2015)* [Information Technologies and Mathematical Modelling]. Proc. of the 14th International Scientific Conference ITMM 2015 named after A.F. Terpugov. pp. 152-157. (In Russian).
8. Pankratova, E. & Moiseeva, S. (2015) Queueing System GI/GI/∞ with n Types of Customers. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 216-225. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4 19
9. Dudin, S., Kim, C. & Dudina, O. (2013) MMAP|M|N queueing system with impatient heterogeneous customers as a model of a contact center. *Computers & Operations Research*. 40. pp. 1790-1803. DOI: 10.1016/j.cor.2013.01.023

10. Ammar, S.I. (2014) Transient analysis of a two-heterogeneous servers queue with impatient behavior. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 22. pp. 90-95. DOI: 10.1016/j.joems.2013.05.002
11. Li, N. & Stanford, D.A. (2016) Multi-server accumulating priority queues with heterogeneous servers. *European Journal of Operational Research*. 252(3). pp. 866-878. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.02.010
12. Neuts, M.F. & Takahashi, Y. (1981) Asymptotic behavior of the stationary distribution in the GI|PH|c queue with heterogeneous servers. *Z. Wahrscheinlickeitsth*. 57. pp. 441-452. DOI: 10.1007/BF01025867
13. Iglegart, D.L. (1965) Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *Journal of Appl. Prob*. 2. pp. 429-441.
14. Shore, H. (1988) Simple Approximations for the GI|G|c queue. *Journal of Operational Research Society*. 39. pp. 279-284. DOI: 10.1057/jors.1988.45
15. Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. (2006) *Metody asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
16. Krysanova K. .& Moiseeva S.P. (2012) Method of asymptotic analysis for research of parallel service multiple demands of Markovian renewal flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp.49-52. (In Russian).
17. Fedorova, E.A. (2015) The Second Order Asymptotic Analysis Under Heavy Load Condition for Retrial Queueing System MMPP/M/1. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 344-357. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_29
18. Sinyakova, I.A. & Moiseeva, S.P. (2012) The moment method for studying the mathematical model of Parallel service of multiple demands in the stream of Markov. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University,* 5. pp. 24-28. (In Russian)
19. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) Beskonechnolineynye sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya [Queuing systems and networks with infinite number of servers]. Tomsk: NTL.
20. Pankratova, E.V., Ubonova, E.G. & Moiseeva, S.P. (2016) [Queuing system with reneval arrival process and two types of customers]. *Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem* [Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems]. Proc. of the 6th International Scientific Conference. Moscow: RUDN. pp. 49-52. (In Russian).