

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/41/1

М.С. Бухтяк

РАСКРОЙ СЕТЕПОЛОТНА ДЛЯ ОФСЕТНОГО РЕФЛЕКТОРА

Класс линий на параболоиде, введенный ранее автором по названием SG-линий, применен при раскрое сетеполотна для офсетного рефлектора. Рассмотрены два случая взаимного расположения осей родительского параболоида и вырезающего круглого цилиндра (оси либо параллельны, либо нет).

Ключевые слова: *параболоид, SG-линия, офсетный рефлектор.*

Антенны «раннего космического периода» своей конструкцией напоминали зонтик (и сходным образом раскрывались).

К легкому и прочному силовому каркасу (его стержни закреплены в ступице) крепятся сети из углепластиковых нитей (тыльная и фронтальная). Между ними зажат лист особой трикотажной ткани, сотканной из металлических нитей (обычно молибденовых или вольфрамовых). Эта ткань (довольно эластичная) называется «сетеполотно», она и является отражающей поверхностью.

В идеале (недостижимом) форма указанной поверхности – в точности форма куска параболоида вращения. Параболоид как математический объект (его называют «родительский параболоид») имеет бесконечную протяженность. Рефлектор же рассматривается как вырезка из родительского параболоида. Зонтичный рефлектор получается при отсечении от родительского параболоида плоскостью, ортогональной оси параболоида.

Антенны зонтичного типа имеют недостаток, который при малых размерах не существен, однако при значительном диаметре не может быть сброшен со счетов. Спутник, несущий такую антенну, должен иметь в своей конструкции две длинные штанги: одна фиксирует положение ступицы, а на конце другой расположено принимающее (либо передающее) устройство.

Этого недостатка лишен так называемый офсетный рефлектор: плоскость, отсекающая его от родительского параболоида наклонена относительно оси симметрии параболоида. При таком подходе удастся разместить необходимые конструкции более компактно, а значит, более надежно. Антенна может состоять из нескольких секций. На рис. 1 показан рефлектор, составленный из двух секций.

Соотношение родительского параболоида и офсетного рефлектора хорошо видно на рис. 2, заимствованном из докторской диссертации одного из авторитетнейших специалистов в области космической радиосвязи Гуннара Тиберта [1].

Для параболической антенны рефлекторного типа актуальна задача прикрепления отражающего сетеполотна таким образом, чтобы как можно менее страдали радиофизические характеристики устройства. Ясно, что при различных избранных схемах раскроя указанная задача решается (всегда приближенно) разными способами.

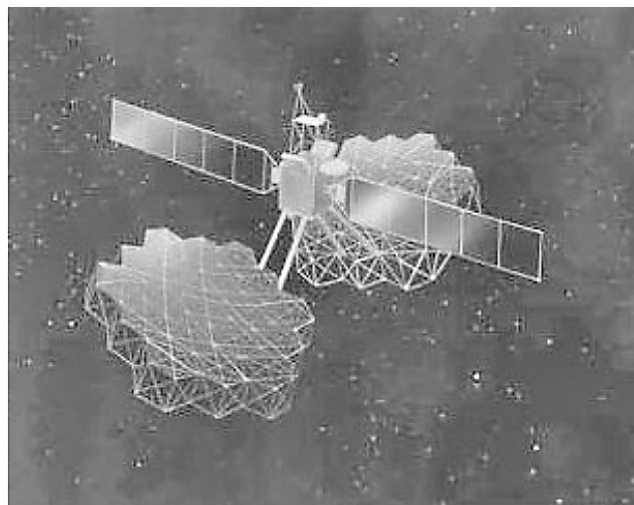


Рис. 1. Спутник с офсетным рефлектором из двух секций
Fig. 1. Satellite with offset reflector composed of two sections

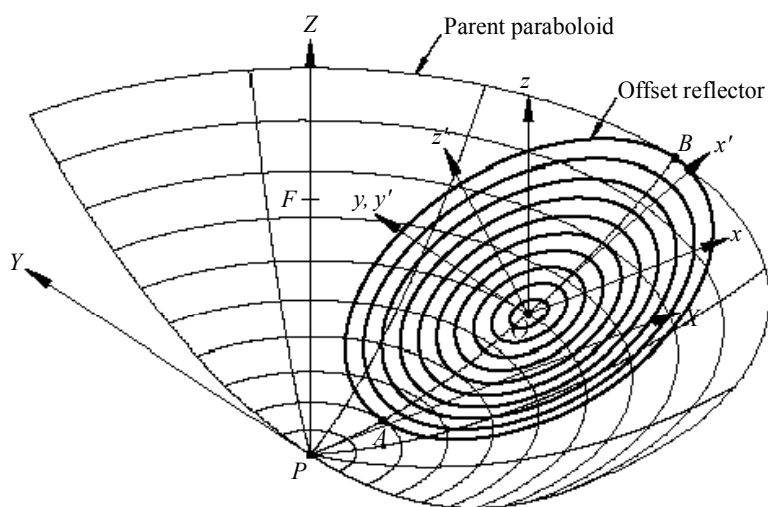


Рис. 2. Офсетный рефлектор и адаптированная к нему система координат
Fig. 2. Offset reflector and coordinate system adapted to it

1. Постановка задачи

В конструкторской практике слово «раскрой» (на наш взгляд) должно означать и «выкройку» листа сетеполотна и некоторый способ прикрепления его к несущим конструкциям, имея в виду, как правило, уменьшение среднего квадратичного отклонения (СКО) реальной поверхности рефлектора от идеальной поверхности родительского параболоида. Технологические приемы достижения желаемого результата можно проследить в работах [2–5].

В своей диссертации И.В. Рытикова [4] касается путей, ведущих к получению приемлемой объемной формы изделия. Среди прочего упомянуто и использование упрощенного геометрического контура плоской детали, что облегчает технологические операции раскроя и пошива. Правда, использование плоской детали ведет к неравномерности натяжения сетеполотна в разных частях рефлектора [6, 7]. Неслучайно там же [4] большое внимание уделено членению конструкции на детали и иные приемы (вытачки, складки, рельефы).

Есть основания признать правоту Ирины Валерьевны в её предпочтениях. Мы, в то же время, намереваемся показать, что при сравнительно малой кривизне поверхности (что характерно для офсетных рефлекторов) способ раскроя, основанный на одном лишь членении конструкции и обходящийся без вытачек, складок и рельефов, способен приводить (на наш взгляд, но квалифицированное суждение за практиками) к приемлемым результатам.

Подход к раскрою, предложенный в данной статье, опирается на использование SG-линий [8]. Алгоритм, реализующий схему раскроя, опубликован в [9].

Стоит напомнить, что SG-линии появились как решение (неформальной) задачи [10] об отыскании класса линий на параболоиде вращения, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Локально они должны быть близки к геодезическим линиям в некотором разумном смысле.

2. Их можно отнести к натуральному параметру без заметных вычислительных проблем.

3. Они должны однозначно определяться своими концевыми точками, указанными на параболоиде.

Разумеется, может быть предложено (возможно) необозримое множество решений. Автор считает, что решение, предложенное им в [8], заслуживает внимания и применения (там же, в [8], приведены доводы в пользу такого суждения).

2. Параллельность осей

Отметим, что обычно офсетный рефлектор вырезается из родительского параболоида круглым цилиндром, ось которого параллельна оси родительского параболоида (рис. 3).

Числовые параметры, характеризующие офсетный рефлектор в данном случае, следующие:

F – фокальный параметр параболоида;

R – радиус вырезающего цилиндра;

K – расстояние оси параболоида до ближайшей точки офсетного рефлектора.

Рассекая рис. 3 плоскостью, проходящей через оси симметрии параболоида и вырезающего цилиндра, приходим к схеме, изображенной на рис. 4. Прямые a и b – следы цилиндра на пересекающей плоскости. Точка C – середина хорды $[AB]$, стягивающей концы куска $[APB]$ параболы, $c = [PC]$. Смысл параметра x_0 ясен из рисунка.

Для рассмотрения конкретных примеров использованы следующие значения (в метрах):

$$F=13, R=12, K=1.8.$$

Числовые параметры, характеризующие офсетный рефлектор, объяснены на рис. 4.

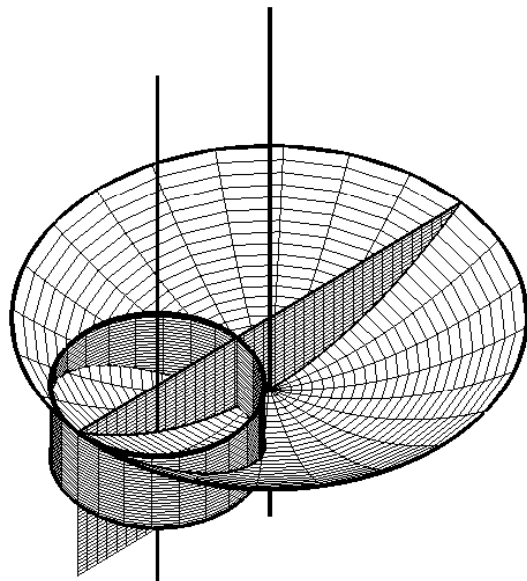


Рис. 3. Схема офсетного рефлектора при параллельных осях
Fig. 3. Offset reflector diagram with parallel axes

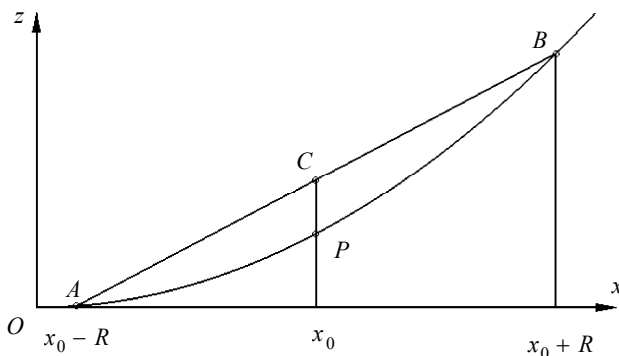


Рис. 4. Сечение офсетного рефлектора при параллельных осях
Fig. 4. Offset reflector cross section with parallel axes

Сетеполотно выпускается полосами различной ширины (в среднем около 2 м). Это позволяет покрывать поверхность рефлектора полосами – правда, переменной ширины. Принцип такого подхода объяснен на следующем рис. 5.

Полоса – криволинейный четырехугольник $A_i A_6 B_6 B_i$, в котором на длинных сторонах через равные расстояния, отмеренные на кривых, отмечены точки A_i и B_i . Криволинейные отрезки $[A_i B_i]$ имеют, вообще говоря, разную длину.

Линии, которые мы будем проводить на параболоиде, суть SG-линии, определенные в [8]. Длины отрезков на плоской выкройке суть длины указанных SG-линий (рис. 6).

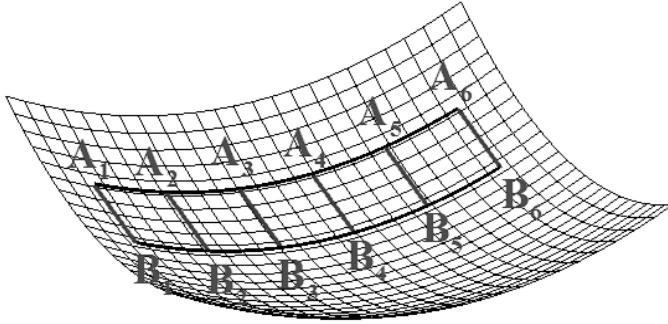


Рис. 5. Схематическое изображение полосы сетеполотна на рефлекторе
Fig. 5. Schematic drawing of a metallic mesh strip on the reflector

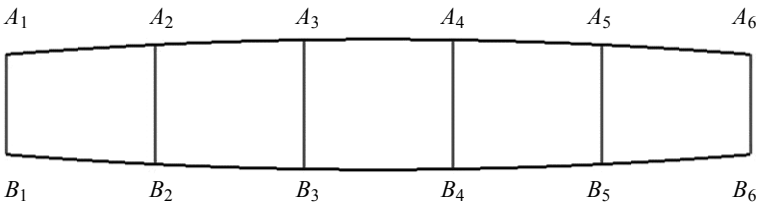


Рис. 6. Раскрой офсетного рефлектора полосами сетеполотна, идущими вдоль главного осевого сечения
Fig. 6. Offset reflector tailoring into metallic mesh stripes running along the main axial section

В основу раскрой положена схема, приведенная на рис. 7.

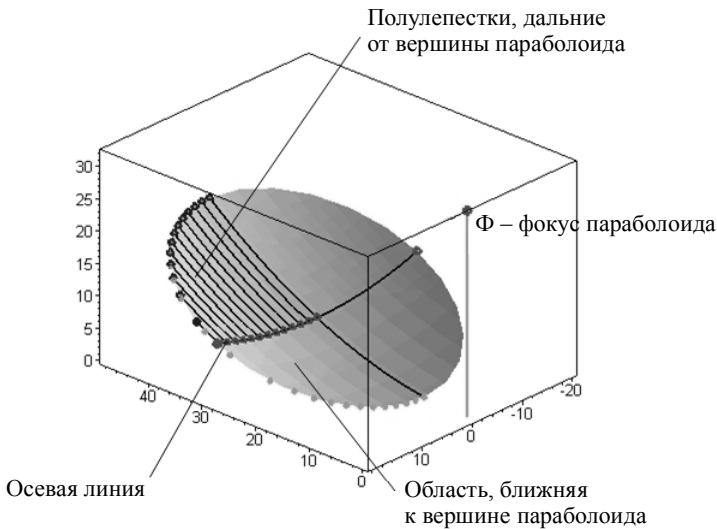


Рис. 7. Схема раскрой офсетного рефлектора
Fig. 7. Offset reflector tailoring diagram

Схема описания лепестка приведена на рис. 8.

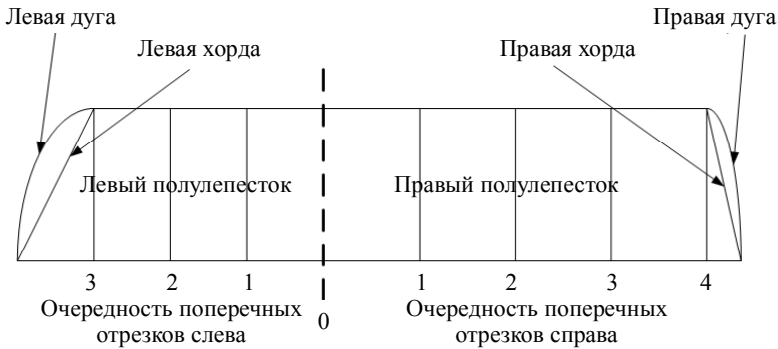


Рис. 8. Лепесток и его элементы

Fig. 8. Petal and its elements

Самый длинный лепесток (его номер 1) приведен на рис. 9.

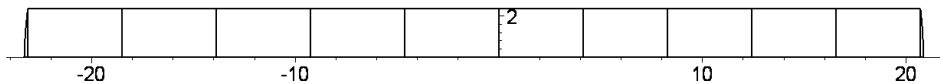


Рис. 9. Лепесток 1

Fig. 9. Petal 1

Числовые параметры первого лепестка таковы:

Длина лепестка 44159.95 мм

Длина ближнего (правого) полулепестка 20838.43 мм

Хорда ближнего (правого) полулепестка 2383.76 мм

Дуга ближнего (правого) полулепестка 2385.06 мм

Площадь ближнего (правого) полулепестка 49.499 м²

Длина дальнего (левого) полулепестка 23311.52 мм

Хорда дальнего (левого) полулепестка 2386.06 мм

Дуга дальнего (левого) полулепестка 2387.11 мм

Площадь ближнего (левого) полулепестка 55.315 м²

Длины поперечных отрезков лепестка № 1

Ближний (правый) полулепесток		Дальний(левый) полулепесток	
Расстояние от средней линии лепестка, мм	Длина отрезка, мм	Расстояние от средней линии лепестка, мм	Длина отрезка, мм
0	2380.00	0	2380.00
4141.02	2379.98	4626.80	2379.98
8282.04	2379.91	9253.60	2379.91
12423.06	2379.80	13880.40	2379.80
16564.09	2379.65	18507.20	2379.65
20705.11	2379.46	23134.00	2379.46

Наконец, располагая числовыми параметрами всех лепестков, представляем на рис. 10 в собранном виде одну из двух зеркально симметричных половин рефлектора.

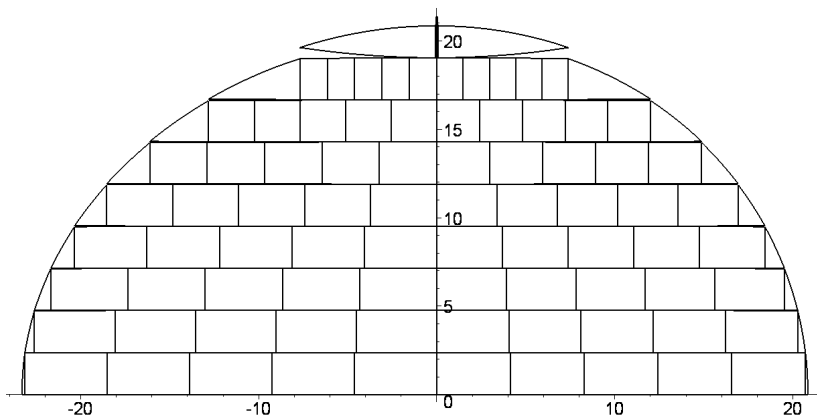


Рис. 10. Лепестки в сборе
Fig 10. Assembled petals

Числовые параметры выкройки половины рефлектора таковы:
 Истинная площадь рефлектора 1397.27 м^2
 Площадь выкройки 1402.375 м^2
 Относительное расхождение площадей в процентах 0.3653%
 Истинная длина граничного эллипса 131.476 м
 Периметр выкройки 131.574 м
 Относительное расхождение периметров в процентах 0.0745%

3. Непараллельность осей

В этом случае ось вырезающего цилиндра не параллельна оси параболоида. Расположение поверхностей, дающих в пересечении границу офсетного параболоида, показано на рис. 11.

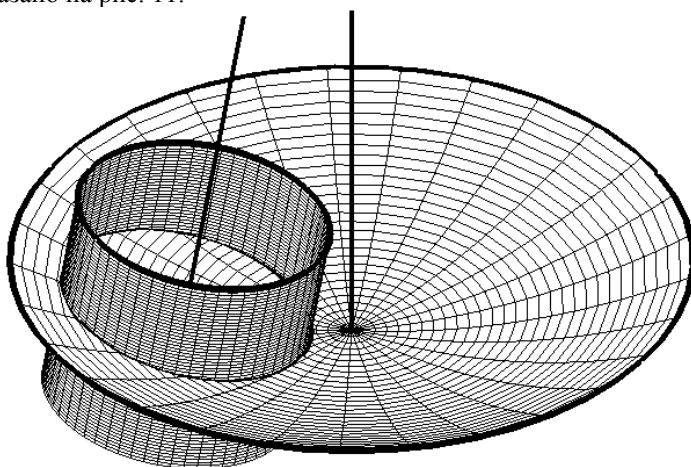


Рис 11. Офсетный рефлектор, вырезанный наклонным цилиндром
Fig 11. Offset reflector cut out by an inclined cylinder

Линия пересечения параболоида и цилиндра – существенно пространственная кривая¹. Проекция этой линии на плоскость xOy – алгебраическая кривая L , заданная уравнением

$$(1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4) \begin{pmatrix} (x_0^2 - R^2)((x_0^2 + 8F^2)^2 - R^2x_0^2) & 64F^4 - 2x_0^4 - 2R^2x_0^2 & x_0^2 \\ -16F^2x_0(x_0^2 + 8F^2 + R^2) & 16F^2x_0 & 0 \\ 64F^4 - 16F^2x_0^2 - 2x_0^2R^2 - 2x_0^4 & 2x_0^2 & 0 \\ 16F^2x_0 & 0 & 0 \\ x_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 \\ y^4 \end{pmatrix} = 0.$$

Эта кривая аппроксимируется эллипсом (рис. 12)

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{4F^2x_0^2y^2}{(8F^3 - \sqrt{64F^6 + 32F^4x_0^2 - R^2x_0^4 + 4F^2x_0^4})^2} = 1,$$

ограничивающим площадь, равную

$$\frac{\pi R (\sqrt{64F^6 + 32F^4x_0^2 - R^2x_0^4 + 4F^2x_0^4} - 8F^3)}{2Fx_0}.$$

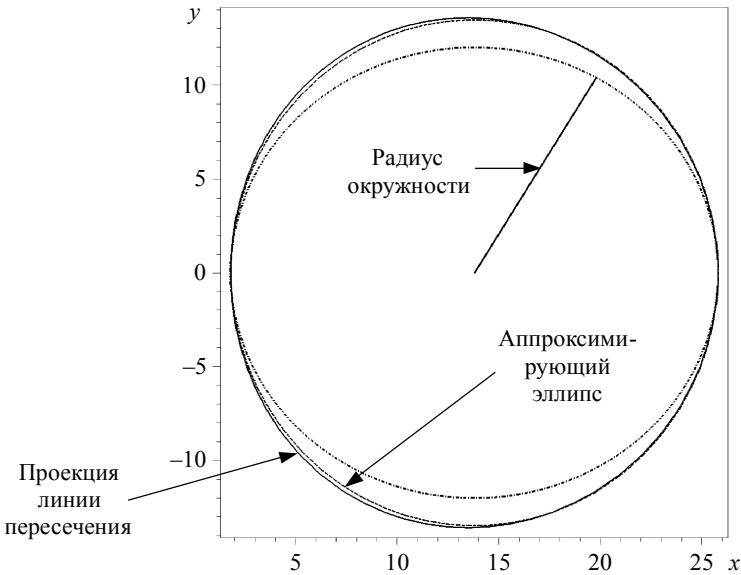


Рис. 12. Проекция линии пересечения на плоскость XOY
 Fig. 12. Projection of the intersection line onto the XOY plane

Вырезая офсетный рефлектор цилиндром, ось которого параллельна оси параболоида, мы получили бы в плоскости XOY окружность радиуса R . Выигрыш в

¹ Не помещается в двумерной плоскости.

площади при использовании непараллельных осей аппроксимируется выражением

$$\Delta S \approx \frac{4Fk}{R} - 1 - \frac{4F}{R} + \frac{100F^2 - R^2 - 60F^2k - R^2k}{2R\sqrt{100F^2 - R^2}}. \quad (3.1)$$

Здесь $k = \frac{x_0}{F} - 1$. Оценим надежность аппроксимации, построив графики (рис. 13)

относительной погрешности при различных значениях параметра k , полагая

$$10 \leq F \leq 20, \quad 0.8F \leq R \leq 0.94F.$$

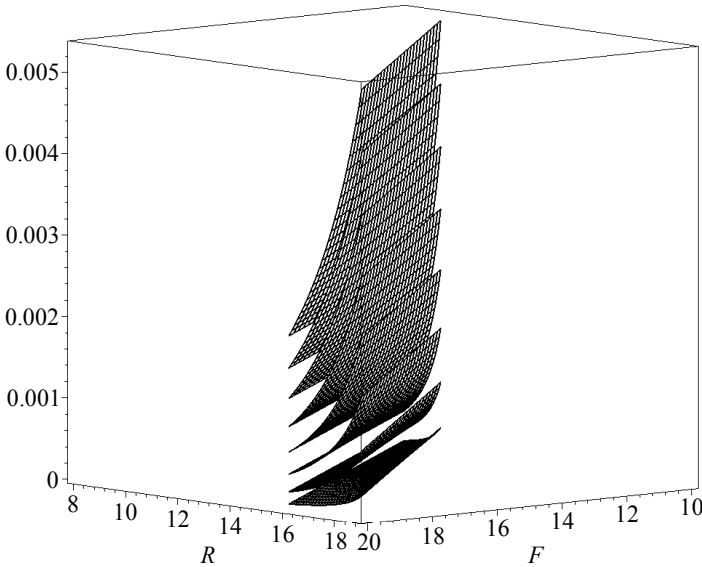


Рис. 13. Относительная погрешность аппроксимации для $k \in \{0.02, 0.04, \dots, 0.16\}$ (очередность снизу вверх)

Fig. 13. Relative approximation error for $k \in \{0.02, 0.04, \dots, 0.16\}$ (bottom-upwards ordering)

Отметим, что отличие значений F и R невелико, а при $R = F$ формула (3.1) принимает весьма простой вид:

$$\Delta S \approx 0.935k - 0.0251.$$

4. Выводы

Автор полагает, что способ выкраивания сетеполотна для офсетного рефлектора, предложенный в данной статье, опирается на методы математики, приводит к приемлемым результатам на уровне численного моделирования, и потому заслуживает внимания как в теоретическом плане, так и в практическом применении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gunnar Tibert*. Deployable Tensegrity Structures for Space Application. Doctoral Thesis. Stockholm, 2002. 220 p.
2. Патент RU 2350518 C1, 13.06.2007.
3. Патент RU 2350519 C1, 13.06.2007.
4. *Рытикова И.В.* Разработка технологии формирования сложноконструктивных изделий из металлических трикотажных полотен технического назначения: дис. ... канд. технич. наук. М.: Моск. гос. текстильный университет, 2005.
5. *Бутов В.Г., Бухтяк М.С., Пономарев С.В.* Методика оптимального раскроя отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов // *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: доклады IV Всеросс. научн. конф. Томск, 5–7 октября 2005 г.* Томск: Изд-во ТГУ, 2004. С. 180–181.
6. *Бухтяк М.С., Самылкина О.А.* О раскрое сетеполотна для осесимметричного рефлектора // *Всероссийская конференция по математике и механике: тезисы докладов. 2–4 октября 2013 г.* – Томск: ТГУ, 2013. – С. 93.
7. *Бухтяк М.С., Соломина А.В.* Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34).* С. 5–17.
8. *Бухтяк М.С.* Линии на параболоиде, близкие к геодезическим // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38).* С. 5–17.
9. *Бухтяк М.С., Пономарев С.В.* Алгоритм раскроя сетеполотна офсетного параболического рефлектора. *Федеральный институт промышленной собственности. Заявка № 69 № 2015э14446.*
10. *Бухтяк М.С.* Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37).* С. 5–19.

Статья поступила 27.02.2016 г.

Bukhtyak M.S. (2016) METALLIC MESH TAILORING FOR AN OFFSET REFLECTOR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/41/1

The term ‘tailoring’ means not only ‘cutting’ of a metallic mesh but also the method of its attachment to the supporting structures, which generally means a decrease in root-mean-square deviation (RMSD) of the reflector’s real surface from the ideal surface of the parent paraboloid. The approach of tailoring offered in this paper is based on application of SG-lines. SG-lines showed up as a solution of a (non-formal) problem to find a class of lines lying on a paraboloid of revolution and satisfying the following conditions. Locally, they should be close to geodesic lines in some reasonable sense. They can be referred to the natural parameter without significant computational problems. They should be uniquely determined by its endpoints defined on the paraboloid. These lines are used for metallic mesh tailoring for an offset reflector. An algorithm the input values of which are the design parameters of the reflector and metallic mesh has been composed. The algorithm returns a set of petals with dimensions required for tailoring. The case in which the axis of the parent paraboloid is parallel to that of the cutting cylinder is considered, as well as the case of nonparallel axes. The computational experiment carried out for specific conditions shows an error in area of 0.3653%, and the error in perimeter is of 0.0745%.

Keywords: paraboloid, honeycomb panel, covering, inner energy, minimization.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyak@mail.ru

REFERENCES

1. Gunnar Tibert (2002) *Deployable Tensegrity Structures for Space Application*. Doctoral Thesis. Stockholm.
2. Pat. RU 2350518 C1, 13.06.2007.
3. Pat. RU 2350519 C1, 13.06.2007.
4. Rytikova I.V. (2005) *Razrabotka tekhnologii formirovaniya slozhnokonstruktivnykh izdeliy iz metallicheskikh trikotazhnykh poloten tekhnicheskogo naznacheniya* [Development of technology for the formation of complex construction products from metal industrial-use fabrics]: Abstract of Technical Cand. Diss. Moscow.
5. Butov V.G., Bukhtyak M.S., Ponomarev S.V.(2005) *Metodika optimal'nogo raskroya otrazhayushchey poverkhnosti transformiruemyykh reflektorov* [Technique of optimum tailoring of the reflecting surface of transformable reflectors]. In: *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki* [Fundamental and applied problems of present-day mechanics]. Proc. of the International Conference. Tomsk: TGU Publ. pp.180–181.
6. Bukhtyak M.S., Samylkina O.A. (2013) O raskroe setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora [On tailoring of a metallic mesh for a axisymmetric reflector]. In: *Vserossiyskaya konferentsiya po matematike i mekhanike* [All-Russia conference on mathematics and mechanics]. Thes. dokl. Tomsk: TGU Publ. p. 93.
7. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. (2015) Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1 [Geometric modeling of metallic mesh sheet tailoring for an axisymmetric reflector. Part 1]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 5–17. DOI 10.17223/19988621/34/1.
8. Bukhtyak M.S.(2015) Linii na paraboloidе, blizkie k geodezicheskim.[Lines close to geodetic lines on a paraboloid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp.5-17. DOI 10.17223/19988621/38/1.
9. Bukhtyak M.S., Ponomarev S.V. *Algoritm raskroya setepolotna ofsetnogo parabolicheskogo reflektora* [Algorithm of tailoring the metallic mesh of an offset parabolic reflector]. Federal'nyy institut promyshlennoy sobstvennosti [Federal Institute of Industrial Property]. Application no. 69 №2015e14446.
10. Bukhtyak M.S. (2015) Normal'naya kongruentsiya paraboloida. Demikvadriki. [Normal congruence of a paraboloid. Demiquadrics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 5–19. DOI 10.17223/19988621/37/1.