ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 3(41)

УДК 517.518.26
DOI 10.17223/19988621/41/2

А.Н. Малютина, К.А. Алипова

К ВОПРОСУ О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С *S*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Представлено дальнейшее развитие геометрического метода модулей семейств кривых для изучения свойств негомеоморфных пространственных отображений – отображений с *s*-усредненной характеристикой. Обобщается теорема, известная для случая $n = 2$ как Iversen – Tsuji's Theorem и доказываются характеристические свойства для сферического модуля семейств кривых, асимптотических для некоторого особого граничного множества.

Ключевые слова: *отображения с s-усредненной характеристикой, метод модулей, устранение особенностей, оценки искажения, асимптотические поднятия.*

Теорема Иверсена – Цудзи доказана для случая $n = 2$ в [1]. Для $n \geq 3$ в [2] дано ее обобщение для квазирегулярных отображений на случай, когда для особого множества *I* выполняется равенство $Cap\ I = 0$. В работе [3] М.А. Лаврентьев высказал несколько утверждений, касающихся специфики пространственного случая. Одно из них – о стирании особенностей меньшей размерности при квазиконформном отображении шара. К настоящему времени этот вопрос для гомеоморфных квазиконформных отображений в работах Ю.Г. Решетняка, В.А. Зорича, Б.В. Шабата, В.М. Миклюкова, J. Väisälä, O. Martio, S. Rickman исследован, когда *f* – гомеоморфизм или когда $Cap\ I = 0$. Для негомеоморфных квазирегулярных отображений в работе Е.А. Полецкого [4] и в работе [5] приведены примеры, которые показывают, что существуют неустранимые особенности, для которых $\Lambda_\beta(I) \neq 0$ при некотором $\beta \neq 0$, и пример, опровергающий гипотезу, что для особого множества *I*, для которого $\Lambda_\alpha(I) = 0$, где $\alpha \leq n-2$, либо точки *I* устранимы, либо ёмкость непринимаемых значений равна нулю.

Для негомеоморфных отображений с *s*-усредненной характеристикой [6] нами построен пример [5], показывающий, что изолированная особенность в классе с $K_I, s, K_{O,s}$-усредненной характеристикой, вообще говоря, не является устранимой.

Напомним некоторые необходимые нам определения. Пусть $I = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, – отрезок на $\mathbb{R}^1$. Если кривая γ спрямляема, то кривую β назовем подкривой кривой γ, для случая если $I = [t_1, t_2]$, где $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Известно, что для кривой Жордана [4,7] величина $l(\gamma) = \sup l(\beta)$, где sup берется над всеми такими подкривыми β кривой γ, называется длиной γ.

Определение 1 [4]. Пусть $f: D \to D'$ – открытое, непрерывное, изолированное отображение. Если γ^* – кривая в $f(D)$, то поднятием γ^* в *D* называется кривая $\gamma \in D$, такая, что $f\circ\gamma=\gamma^*$. Частичным поднятием γ^* назовем поднятие ее дуги. Два частичных поднятия γ_1 и γ_2 кривой γ называются существенно различными, если $\Lambda_1(\gamma_1\cap\gamma_2)=0$, где $\Lambda_1(s)$ – одномерная мера Хаусдорфа множества s.

Рассмотрим счетное покрытие $\{E_i\}, i=1,2,\dots$, множества E открытыми множествами E_i, такими, что $d(E_i)<r, r>0$.

Пусть $\Lambda_\alpha^r(E)=\inf\sum\limits_i d(E_i)^\alpha$, где inf берется над всеми такими покрытиями. Тогда Λ_α^r является убывающей функцией от r, а величина $\Lambda_\alpha(E)=\lim\limits_{r\to0}\Lambda_\alpha^r(E)$ называется α-мерной мерой Хаусдорфа множества E.

Говорят, что отображение f принадлежит классу $ACL(U)$, $U\in\mathbb{R}^m$, если оно непрерывно в U и абсолютно непрерывно на почти всех отрезках из U, параллельных осям координат. Известно, что если $f\in ACL(U)$, то оно имеет почти всюду в U частные производные. Если, кроме того, эти частные производные принадлежат $L_p(U)$, $p\ge1$, для любой области $U'\subset U$, то мы будем писать $f\in ACL_p(U)$ [8].

Обозначим через $N(x,f)$ кратность ветвления отображения f в точке x ([13, с. 40, (2.1)], [8, с. 262]).

Если A – компактное подмножество U, то $cap\ (A,U)$ – нижняя грань $\int\limits_U|\nabla u|^n\,dV$ по всем непрерывным функциям класса $W_n^1(U)$, равным 0 на ∂U и 1 на A. Хорошо известно [13], что равенство $cap\ (A,U)=0$ не зависит от U и поэтому можно писать $cap\ A=0$ [4].

Пусть Γ – некоторое семейство кривых в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Неотрицательную борелевскую функцию $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ [7, 10] назовем допустимой метрикой семейства Γ, если $\int\limits_\gamma\rho\,d\gamma_x\ge1$, где $d\gamma_x=\dfrac{dl}{1+|x|^2}$, для каждой кривой $\gamma\in\Gamma$. В дальнейшем, как и в [7], будем обозначать допустимость метрики $\rho\wedge\Gamma$.

Определение 3. Сферический модуль порядка p семейства Γ, где $p\in\mathbb{N}$, для удобства обозначим $M_p(\Gamma)$ и определим по формуле $M_p(\Gamma)=\inf\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^p(x)\dfrac{dx}{(1+|x|^2)^n}$, где inf берется над классом всевозможных метрик $\rho\wedge\Gamma$. Наиболее важным является случай, когда $p=n$, и мы полагаем $M_n(\Gamma)=M(\Gamma)=\inf\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^n(x)\dfrac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Для неотрицательной функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/(1+|x|^2)^n$, где $|x|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, в [6] доказано, что для любого $n\in\mathbb{N}$, $n<\infty$, выполнено

$$\mathcal{J}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\sigma_x=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Заметим, что интеграл в определении сферического модуля может быть сужен до наименьшего борелевского множества E, содержащего семейство Γ, так как inf в определении модуля достигается на метриках, обращающихся в нуль на CE.

Из определения 3 следует, что $0 \le M_p(\Gamma) \le \infty$. Поскольку функция, тождественно равная нулю, допустима для пустого семейства, то $M_p(\varnothing) = 0$. Если класс метрик $\rho \wedge \Gamma$ пуст, то полагаем $M_p(\Gamma) = \infty$. Семейство Γ назовем исключительным, если $M_p(\Gamma) = 0$ [7 стр.20, 10]. Семейство всевозможных неспрямляемых кривых в $\mathbb{R}^n$ исключительно [7, т. 2.13].

Определение 4. Если для некоторой метрики $\rho_0 \wedge \Gamma$ имеем $M_p(\Gamma) =$ $= \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_0^p \dfrac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}$, то метрику ρ_0 назовем экстремальной.

Свойства сферического модуля семейства кривых Γ доказаны в свойствах 1 – 13 [9, стр.180].

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,loc(D)}$ и $J(x,f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$), тогда будем говорить $f \in \widehat{W}^1_{n,loc(D)}$.

Пусть $f \in \widehat{W}^1_{n,loc(D)}$, как и в [7], обозначим через $K_I(x,f) = \dfrac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$ внутреннюю дилатацию отображения f, где $l(x,f) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, а через $K_O(x,f) = \dfrac{L^n(x,f)}{J(x,f)}$ – внешнюю дилатацию отображения f, где $L(x,f) = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$.

Известно [4], что

$$K_I(x,f) \le K_O^{n-1}(x,f),\ K_O(x,f) \le n^{\frac{n}{2}} \cdot \lambda(x,f) \le n^{\frac{n}{2}} \cdot K_O(x,f) \le n^{\frac{n}{2}} \cdot K_i^{n-1}(x,f),$$

$$K(x,f) \le \min\left(K_I(x,f), K_O(x,f)\right) \le K^{\frac{n}{2}}(x,f) \le \max\left(K_I(x,f), K_O(x,f)\right) \le K^{n-1}(x,f),$$

где $K(x,f) = \dfrac{|f'(x)|}{l(x,f)}$, $\lambda(x,f) = n^{-\frac{n}{2}} \dfrac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|}$.

Определение 5. Отображение f называется отображением с $K_{I,s}$-суммируемой характеристикой, если:

1) $f \in \widehat{W}^1_{n,loc(D)}$; 2) существует постоянная $K_{I,s} \ge 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K_{I,s}(f) = \left(\int\limits_D K_I^s(x,f)\, d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \le K_{I,s},\ \text{где } d\sigma_x = \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}.$$

Определение 6. Отображение f называется отображением с $K^*_{O,s}$-суммируемой характеристикой, если:

1) $f \in \widehat{W}^1_{n,loc(D)}$; 2) существует постоянная $K^*_{O,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K^*_{O,s}(f) = \left(\int\limits_D K^s_O(x,f) \cdot J(x,f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq K^*_{O,s}, \text{ где } d\sigma_x = \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}.$$

Определение 7. Отображение f называется отображением с $(s,s^*)_I$-суммируемой характеристикой, если оно является отображением с $K_{I,s}$ и $K^*_{I,s}$-суммируемыми характеристиками.

Определение 8. Отображение f называется отображением с $(s,s^*)_O$-суммируемой характеристикой, если оно является отображением с $K_{O,s}$ и $K^*_{O,s}$-суммируемыми характеристиками.

Определение 9. Пусть $f : D \to D^*$ отображение с *s*-усредненной характеристикой, $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma^*(t):[0,1] \to R^n$, для которой $\lim\limits_{t\to 1} \gamma^*(t) = y$. Пусть существует такая спрямляемая кривая γ в *D*, что $f \circ \gamma = \gamma^*$ и $\lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = x$, где $x \in \partial D$. Тогда кривая γ^* называется асимптотической для точки $x \in \partial D$, γ – её асимптотическим поднятием, а y – её асимптотическим значением f в точке x. Если I – особое множество и $I_1 \subset I$, то семейство асимптотических кривых (для I_1) – это все асимптотические кривые для точек $x \in I$ $(x \in I_1)$. Для квазиконформных отображений см. [4, с. 243].

Следующий пример показывает характерную особенность, отличающую произвольные отображения с *s*-усредненной характеристикой от квазиконформных и квазирегулярных отображений.

Пример 1. Зададим произвольное целое число $m > 0$. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Если $x_2^2 + x_3^2 = 0$, полагаем $f(x) = x$. Если же $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, то пусть $x_2 = r\cos\varphi$, $x_3 = r\sin\varphi$, где $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В этом случае полагаем $f(x) = (x_1, r\cos m\varphi, r\sin m\varphi)$. Отображение *f*, очевидно, непрерывно. Все точки прямой $\mathbb{R}^1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = x_3 = 0\right\}$ отображением *f* переводятся в себя. Будем называть *f* закручиванием вокруг оси.

Отображение *f*, очевидно, принадлежит классу C^1 на открытом множестве $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$. Всякая двумерная полуплоскость, ограниченная прямой $\mathbb{R}^1 (x_2 = x_3 = 0)$ отображается функцией *f* на другую такую же полуплоскость изометрически так, что растяжения *f* в каждой точке $x \notin \mathbb{R}^1$ в направлениях, лежащих на этой прямой, равны 1. Всякая окружность с центром на $\mathbb{R}^1$, лежащая в двумерной плоскости, вполне ортогональной $\mathbb{R}^1$ при отображении *f* переходит в себя. При этом, когда точка x описывает окружность, обходя ее один раз в каком-либо направлении, точка $f(x)$ обежит ту же окружность в том же направлении m раз. Коэффициент растяжения f в направлении, касательном данной окружности, равен m. Таким образом, в каждой $x \notin \mathbb{R}^1$ два главных растяжения отображения f равны 1 и одно из них равно m. Отсюда следует, что $\|f'(x)\| = m$, $\det f'(x) = m$, $K_I(x,f)[f'(x)] = m$, $K_O(x,f)[f'(x)] = 1$. Производные отображения f ограничены. Теорема 1.5 [11] позволяет заключить, что $f \in W^1_{n,loc}$. Из сказанного следует, в силу доказанной в [6] оценки для $\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\sigma_n$, что отображение f является отображением с s-усредненной характеристикой, т.е. сходятся оба интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_I^{\alpha}(x,f)J(x,f)d\sigma_x < +\infty$, $\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_O^{\beta}(x,f)d\sigma_x < +\infty$, если $0 > s > \max\left\{-\frac{1}{2\beta}, -\frac{2}{2\alpha+1}\right\}$.

Основная особенность этого отображения такова – f является топологическим отображением в достаточно малой окрестности всякой точки $x \notin \mathbb{R}^1$ и не будет топологическим ни в какой окрестности произвольной точки $x \in \mathbb{R}^1$.

Приведем еще один пример, показывающий, что в отличие от отображений с ограниченным искажением, у которых конечны интегралы $\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_I^{\alpha}(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_O^{\beta}(x,f)d\sigma_x$, ограниченность кратности и степени на компактах, вообще говоря, не имеет места (в случае плоскости аналогичный пример построен в [12]). Приводимые ниже построения являются модификацией конструкции закручивания вокруг оси из примера 1 и примера из монографии [13].

Пример 2. В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, рассмотрим область D, точки $x = (x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ которой удовлетворяют условию $|x_1| < 1, ..., |x_{n-2}| < 1$, $x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1$.

В области D зададим отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, полагая $f(x) = x$, если $x_{n-1}^2 + x_n^2 = 0$. Если же $x_{n-1}^2 + x_n^2 \neq 0$, то пусть $x_{n-1} = r\cos\varphi$, $x_n = r\sin\varphi$, где $r = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, и в этом случае полагаем $f(x) = (x_1, ..., x_{n-2}, r\cos r^p\varphi, r\sin r^p\varphi)$, где $p < 0$ – произвольное число.

Отображение f, очевидно, непрерывно и ограничено в D, при этом оно локально гомеоморфно в $x \in D$ и $r \neq 0$.

Все точки множества $D^{n-2} = \{x = (x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \in D : x_{n-1} = x_n = 0\}$ отображение f переводит в себя и каждая окружность с центром на D^{n-2}, лежащая в двумерной плоскости, ортогональной D^{n-2}, при отображении f переходит в себя. Отсюда легко видно, что f открыто. Далее, очевидно, отображение f непрерывно дифференцируемо в точках $x \in D \setminus D^{n-2}$ и $J(x,f) > 0$. Поскольку $(n-1)$-мерная мера Лебега множества D^{n-2} равна нулю и сужение f на любую прямую, не проходящую через D^{n-2}, непрерывно дифференцируемо, то f есть ACL-отображение. Если точка x обходит описанную выше окружность один раз в каком-либо направлении, то точка $f(x)$ обойдет ту же окружность $r^p > 1$ раз.

Для каждого натурального m можно выбрать компакт F и число $r > 0$ так, чтобы шар радиуса r с центром на D^{n-2} лежал в F и целая часть числа r^p была бы не меньше m. Это означает, что ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места.

Поскольку $J(x,f) > 0$ при $x \in D \setminus D^{n-2}$, то $N(y, fD) = \mu(y, f, G)$ для всякой подобласти G, $\overline{G} \subset D$, и $y \notin f(\partial D)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_{n-2}, y_{n-1}, y_n)$, $y_{n-1}^2 + y_n^2 \neq 0$. Следовательно, ограниченность на компактах степени отображения f также не имеет места.

Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – произвольные числа. Убедимся, что можно подобрать $p < 0$ так, чтобы $\int\limits_D K_I^\alpha(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x < \infty$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^3} K_O^\beta(x,f)d\sigma_x < \infty$.

Легко подсчитывается, что $K_O(x,f) = K_I(x,f) = J(x,f) = 1$, если $x \in D^{n-2}$. Если же $x \in D \setminus D^{n-2}$, то $J(x,f) = r^p$,

$$n^{-\frac{n}{2}} r^{(n-1)p} \leq K_O(x,f) \leq \left(n + 4\pi^2\rho^2\right)^{\frac{n}{2}} r^{(n-1)p},$$

$$K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f) \leq \left(n + 4\pi^2\rho^2\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} r^{(n-1)^2 p}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_D K_I^\alpha(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x \leq C_1 \int\limits_{|x_1|<1} \frac{dx_1}{1+|x|^2} \int\limits_{|x_{n-2}|<1} dx_2 \int\limits_{x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1} r^{\alpha(\mathrm{n}-1)^2 p + p} dr \leq$$
$$\leq C_2 \int\limits_0^1 r^{\alpha(\mathrm{n}-1)^2 p + p + 1} dr < \infty,$$

если $0 > p > -\dfrac{2}{\alpha(n-1)^2 + 1}$.

Аналогично, $\int\limits_D K_O^\beta(x,f)d\sigma_x \leq C_3 \int\limits_0^1 r^{\beta(n-1)p+1} dr < \infty$, если $0 > p > -\dfrac{2}{\beta(n-1)}$.

Таким образом, оба этих интеграла конечны одновременно, если

$$0 > p > \max\left\{-\frac{2}{\beta(n-1)}, -\frac{2}{\alpha(n-1)^2 + 1}\right\}.$$

Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ – кривая, $N(\gamma, y, I)$ – функция кратности (число точек $t \in I$, таких, что $y(t) = y$) и ρ – произвольная борелевская функция. Обозначим через dl – элемент длины на кривой γ. Так как по следствию из теоремы 1.6 [7] класс множеств, измеримых по одномерной мере Хаусдорфа (Λ_1 -измеримых), включает в себя класс борелевских множеств, то функции $N(\gamma, y, I)$ и ρ являются Λ_1-измеримыми. Тогда $\int\limits_{\gamma}\rho\frac{dl}{1+|x|^2}$ совпадает с интегралом $\int\limits_{\gamma}\rho(y)N(\gamma,y,I)\frac{d\Lambda_1}{1+|\gamma(t)|^2}$, (*) определенным посредством одномерной меры Хаусдорфа.

Если кривая γ есть кривая Жордана, то из теоремы 1.11 [7] следует, что интеграл (*) совпадает с обычным интегралом $\int\limits_{\gamma}\rho ds$, определенным посредством длин частичных дуг.

Теорема 1. Пусть $f:D\to\mathbb{R}^n$ – отображение с $K^*_{O,s}$-суммируемой характеристикой. Пусть A – борелевское множество в D, такое, что $N(f,A)<\infty$. Если Γ – семейство кривых в A, то

$$M^s(\Gamma)\le N^{s-1}(f,A)(K^*_{O,s})^s M^{s-1}_{\frac{ns}{n-1}}(f\Gamma),\ \text{где}\ s>1.$$

Доказательство. Предположим, что $\rho^*\wedge f\Gamma$. Определим $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{\rho^*(f(x))L(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}{\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

Пусть Γ_0 – семейство всех спрямляемых кривых $\gamma\in\Gamma$, таких, что f абсолютно непрерывно на γ. Тогда если γ_0 – параметризация γ посредством ее длины дуги, то $f\circ\gamma$ абсолютно непрерывно и $M(\Gamma)=M(\Gamma_0)$ [7].

Используя теорему 5.3 [14], получим

$$\int\limits_{\gamma}\rho ds_x=\int\limits_{\gamma}\rho\frac{ds}{1+|x|^2}=\int\limits_{\gamma}\frac{\rho^*(f(x))L(x,f)\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}{\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}\frac{ds}{1+|x|^2}\ge$$

$$\ge\int\limits_{f\circ\gamma}\frac{\rho^*(f(x))\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{1}{s}}}{\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}\frac{ds^*}{1+|f(x)|^2}=\int\limits_{f\circ\gamma}\rho^*(y)\frac{ds^*}{1+|y|^2}\ge 1$$

для всех $\gamma\in\Gamma$. Таким образом $\rho\wedge\Gamma_0$. Докажем оценку для сферического модуля:

$$M(\Gamma)=M(\Gamma_0)+M(\Gamma\setminus\Gamma_0)\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^n\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus A}\rho^n\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}+\int\limits_{A}\rho^n\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}=$$

$$=\int\limits_{A}\frac{\rho^n_*(f(x))L^n(x,f)J^{\frac{s-1}{s}}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n(s-1)}{s}}}{\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{n(s-1)}{s}}J^{\frac{s-1}{s}}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^n}dx.$$

Применим к последнему интегралу неравенство Гёльдера с показателями $p=\dfrac{s}{s-1}$ и $q=s$, получим

$$M(\Gamma)\le\left[\int_A\left(\frac{\rho_*^n(f(x))J^{\frac{s-1}{s}}(x,f)}{\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{n(s-1)}{s}}}\right)^{\frac{s}{s-1}}dx\right]^{\frac{s-1}{s}}\left[\int_A\left(\frac{L^n(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n(s-1)}{s}}}{J^{\frac{s-1}{s}}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^s dx\right]^{\frac{1}{s}}=$$

$$=\left[\int_A\left(\frac{\rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(f(x))J(x,f)}{\left(1+|f(x)|^2\right)^n}dx\right)\right]^{\frac{s-1}{s}}\left[\int_A\frac{L^s(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{n(s-1)}}{J^{s-1}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{ns}}dx\right]^{\frac{1}{s}}. \qquad (1)$$

Так как $f\in\hat{W}^1_{n,loc}(D)$, якобиан $J(x,f)$ интегрируем на каждом компактном подмножестве $A\subset D$, тогда, используя теорему 2.2 [15], получим оценку для первого интеграла

$$\int_{A\cap U}\rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(f(x))\frac{J(x,f)dx}{\left(1+|f(x)|^2\right)^n}=\int_{\mathbb{R}^n}\rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(y)N(y,f,A\cap D)\frac{dy}{\left(1+|y|^2\right)^n}\le$$

$$\le N(f,A)\int_{\mathbb{R}^n}\rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(y)\frac{dy}{\left(1+|y|^2\right)^n}. \qquad (2)$$

По определению класса отображений с s-усредненной характеристикой

$$\left(\int_A\frac{L^{ns}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{n(s-1)}}{J^{s-1}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{ns}}dx\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\int_A\frac{L^{ns}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{ns}}{J^{s-1}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{ns}}\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}}=$$

$$=\left(\int_A\frac{L^{ns}(x,f)J(x,f)dx}{J^s(x,f)\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\int_A K_O^s(x,f)J(x,f)\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}}\le K^*_{O,s} \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) имеем

$$M^s(\Gamma)\le N^{s-1}(f,A)(K^*_{O,s})^s M^{s-1}_{\frac{ns}{n-1}}(f\Gamma).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим семейство кривых, асимптотических для некоторого множества I_0. В теореме 2 докажем, что сферический модуль этого семейства кривых порядка $\dfrac{ns}{s-1}$ равен нулю, если равен нулю сферический модуль порядка $\dfrac{ns}{s-1}$ кривых из этого семейства, начинающихся на некотором множестве A, емкость которого больше нуля. Тем самым уточняется результат Ю.Г. Решетняка [13] о независимости понятия емкости нуль от границ области, доказанный для отображений с ограниченным искажением, а также обобщается результат, доказанный в теореме 2 [4] и теорема Iversen–Tsuji на класс отображений с s-усредненной характеристикой.

Пусть I – замкнутое подмножество области U, а $f : U \setminus I \to \mathbb{R}^n$ – отображение с s-усредненной характеристикой. Если A – замкнутое множество в $U \setminus I$, а $I_0 \subset I$, то обозначим через $\Gamma_*(A, I_0)$ семейство кривых $\gamma_*(t)$ в $f(U \setminus I)$, которые допускают асимптотические поднятия $\gamma(t)$ такие, что $\gamma(0) = A$, а $\lim\limits_{t \to 1} \gamma(t) = x \in I_0$.

Теорема 2. Пусть $f : U \setminus I \to \mathbb{R}^n$ – отображение с s-усредненной характеристикой, $s > 1$, $U \setminus I$ связно, $\Gamma_*(I_0)$ – семейство асимптотических кривых для точек $x \in I_0$ и $capA > 0$. Тогда $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*, I_0) = 0$ в том и только в том случае, когда $M_{\frac{ns}{s-1}} \Gamma_*(A, I_0) = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Обобщая теорему 2 [4], рассмотрим r-окрестность множества I, такую, что $capG > 0$, где $G = A \bigcap (U \setminus I_{2r})$. Возьмем функцию $\rho_*(f(x))$, допустимую для семейства $\Gamma_*(A, I_0)$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}} d\sigma_y < \varepsilon,$$

где ε – некоторое число. По условию $M_{\frac{ns}{s-1}} \Gamma_*(A, I_0) = 0$, следовательно, ε можно выбрать сколь угодно малым. Зададим функцию ρ на $U \setminus I$ следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho_*(f(x)) L(x, f) \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}{\left(1 + |f(x)|^2\right)^{\frac{s-1}{s}}}, & x \in f(U \setminus I), \\ 0, & x \notin f(U \setminus I). \end{cases}$$

Обозначим через A_ε множество точек $x \in \partial I_r$, для которых найдутся асимптотические поднятия γ, обладающие следующими свойствами:

1) образ γ принадлежит $\Gamma_*(A, I_0)$;

2) дуга γ' кривой γ, соединяющая G с точкой x, лежит в $U \setminus I_{r/2}$;

3) $\int\limits_{\gamma'} \rho ds < 1/2$.

В силу допустимости функции $\rho_*(f(x))$ аналогично теореме 1 можно доказать, что функция ρ на $U \setminus I$ также допустима для семейства, состоящего из поднятий кривых из $\Gamma_*(A, I_0)$, и поэтому для любой кривой γ_1, идущей из $x \in A_\varepsilon$ в I_0, будем иметь $\int\limits_{\gamma_1} \rho(x) d\gamma_x \geq 1/2$, если $f \circ \gamma_1 \in \Gamma_*(I_0)$.

Пусть функция кратности $N = N\left(U \setminus I_{r/2}\right)$ и $D_\varepsilon = \partial I_r \setminus A_\varepsilon$. В силу определения множества D_ε для любой кривой $\gamma \subset U \setminus I_{r/2}$, соединяющей G и D_ε, будем иметь $\int\limits_\gamma \rho d\gamma_x \geq 1/2$, а тогда, используя теорему 2.2 [13], теорему 1 и наши допущения, получим

$$M(\Gamma(G, D_\varepsilon)) \leq N(U \setminus I_{r/2}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} 2\rho(x))^n \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n} =$$

$$= 2^n N(U \setminus I) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\rho_*(f(x)))^n L^n(x,f) J^{\frac{s-1}{s}}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n(s-1)}{s}}}{\left(1+|f(x)|^2\right)^{\frac{n(s-1)}{s}} J^{\frac{s-1}{s}}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^n} dx \leq$$

$$\leq 2^n N(U \setminus I) \left[\int\limits_{U \setminus I} \frac{(\rho_*(y))^{\frac{ns}{s-1}} J^{\frac{s-1}{s}}(x,f) dx}{1+\left(1+|f(x)|^2\right)^n}\right]^{\frac{s-1}{s}} \left[\int\limits_{U \setminus I} \frac{L^{ns}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{n(s-1)} dx}{J^{s-1}(x,f)\left(1+|x|^2\right)^{ns}}\right]^{\frac{1}{s}} =$$

$$= 2^n N(U \setminus I) \int\limits_{U \setminus I} (\rho_*(y))^{\frac{ns}{s-1}} d\sigma_y \left(\int\limits_{U \setminus I} K_O^s(x,f) J(x,f) \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}} =$$

$$= 2^n N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^* \varepsilon',$$

где $\varepsilon' = c\varepsilon^{\frac{s-1}{s}}$, c – постоянная.

Возьмем две последовательности:

$$\varepsilon_k = \left(2^{k+n} p N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^*\right)^{\frac{s-1}{s}}, \quad \varepsilon_k{}' = \left(c \cdot 2^{k+n} p N^{\frac{s-1}{s}} K_{O,s}^*\right)^{-1}.$$

Перейдем теперь к семейству асимптотических кривых для $x \in I_0$ и $capA > 0$. Для этих кривых существуют поднятия, идущие из A_ε в I_0. Как уже доказано, сферический модуль этого семейства порядка $\frac{ns}{s-1}$ меньше, чем $2^n \left(K_{O,s}^*\right)^2 \varepsilon$, в силу того, что $\rho_*(y)$ допустима для $\Gamma_*(I_0)$ и интеграл по таким кривым от функции ρ_* больше $\frac{1}{2}\left(K_{O,s}^*\right)^{-\frac{2}{n}}$.

Рассмотрим семейство множеств $A_p = \bigcup A_{\varepsilon_k}$ и $D_p = \bigcap D_{\varepsilon_k} = \partial I_r \setminus A_p$ и семейство асимптотических поднятий, соединяющих D_p и G в $U \setminus I_{r/2}$. Тогда получаем, что для сферического модуля этого семейства выполняется равенство

$M\left(\Gamma\left(D_p, G, U \setminus I_{r/2}\right)\right) = \lim\limits_{k\to\infty} 2^n N^{\frac{s-1}{s}} K^*_{O,s}\varepsilon'_k = 0$, а так как для рассматриваемого нами модуля доказано свойство 2 [9]

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i), \qquad (*)$$

то тогда в силу теоремы 1 модуль семейства асимптотических кривых из $\Gamma_*(I_0)$, допускающих поднятия, которые пересекают A_p, не превосходит $\dfrac{1}{p^{\frac{s}{s-1}}}$ в силу выбора ε_k и ε'_k.

Возьмем множества $D = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} D_p$ и обозначим через $\tilde{A} = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} A_p$. Заметим, что $\tilde{A} \cup D = \partial I_r$.

Так как $M\left(\Gamma\left(D_p, G, U \setminus I_{r/2}\right)\right) = 0$ и выполняется неравенство (*), то имеем в силу теоремы 1, что $M(\Gamma(G, D)) = 0$ и $M_{\frac{ns}{s-1}}\left(\Gamma_*(\tilde{A}, I_0)\right) = 0$.

Остается показать, что $M(\Gamma(D)) = 0$, где $\Gamma(D)$ – семейство асимптотических поднятий γ, соединяющих точки $x \in U \setminus (I_{r/2} \cup D)$ с D. Учитывая то, что $M(\Gamma(G, D)) = 0$, можем выбрать функцию $\rho \in L_n\left(\mathbb{R}^n\right)$ такую, что $\int\limits_{\gamma} \rho d\gamma_x = \infty$ по любой кривой $\gamma \in \Gamma(G, D)$. Используя теперь теорему 1 и свойства, доказанные в [9], покажем, что $M(\Gamma(D)) = 0$.

Для этого, следуя [16], рассмотрим функцию $r_\varepsilon = \varepsilon d_1(x, \partial U \cup G \cup D)$, где $\varepsilon < 1$, $d_1 = \min(d, 1)$, и по ней определим функцию $\tilde{\rho}_\varepsilon(x)$:

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \int\limits_{B(0;1)} \rho(x + r_\varepsilon y) d\sigma_y, & \text{при } y \in B(0;1), \\ 0, & \text{при } y \notin U. \end{cases}$$

Функция $\tilde{\rho}_\varepsilon(x)$ непрерывна в $Q = U \setminus \left(I_{r/2} \cup G \cup D\right)$ и является допустимой для семейства кривых $\gamma \in \Gamma(G, D)$. Действительно, пусть $\gamma \in \Gamma(G, D)$ – некоторая спрямляемая кривая, тогда её образ γ^* при отображении $z(x) = x + r_\varepsilon y$ тоже будет спрямляемой кривой из $\Gamma(G, D)$, причем между элементами длин этих кривых имеет место соотношение $d\gamma^* \le (1+\varepsilon) d\gamma$ [16]. Учитывая, что $\rho(x)$ допустима для Γ, имеем в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{\gamma} \tilde{\rho}(x) d\gamma_x = \frac{1+\varepsilon}{m(B_n)} \int\limits_{\gamma} \left\{ \int\limits_{B_n} \rho(z(x)) d\sigma_y \right\} d\gamma_x = \frac{1+\varepsilon}{m(B_n)} \int\limits_{B_n} \left\{ \frac{1}{1+\varepsilon} \left\{ \int\limits_{\gamma^*} \rho d\gamma^*_x \right\} \right\} d\sigma_y \ge 1.$$

Точно так же, как и в [16], можно показать, что $\int\limits_{\gamma} \tilde{\rho}(x)\, d\gamma_x = \infty$ для $\gamma \in \Gamma(G, D)$.

Далее, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в [4], и в силу теоремы 1 получим, что $M(\Gamma(D)) = 0$.

Так как r можно выбрать произвольно, то рассмотрим последовательность $r_k = \frac{1}{k}$. Заметим, что любая кривая $\gamma_* \in \Gamma_*(I_0)$ имеет асимптотические поднятия, начинающиеся в $U \setminus I_{r_k}$ при некотором k. Так как $U \setminus I$ связно, то k можно выбрать настолько большим, что начало этой кривой попадает в связную компоненту $U \setminus I_{r_k}$, которая содержит часть множества A ненулевой ёмкости. Это поднятие пересекает либо $\tilde{A}$, либо D. В силу уже доказанной теоремы 1 и неравенства (*) мы видим, что в первом случае рассматриваемый сферический модуль порядка $\frac{ns}{s-1}$, то есть $M_{\frac{ns}{s-1}}\left(\Gamma_*\left(\tilde{A}, I_0\right)\right) = 0$, а во втором $M(\Gamma(D)) = 0$, а следовательно, $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*(D, I_0)) = 0$. Отсюда делаем заключение, что $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*(I_0)) = 0$.

Теорема 3. Пусть $f : U \setminus I \to \mathbb{R}^n$ – отображение с s-усредненной характеристикой, $s > 1$, где I – замкнутое подмножество U, $\dim I \le n-2$ и Γ_* – семейство кривых, асимптотических для точек $x \in I$. Если $M_{\frac{ns}{s-1}}(\Gamma_*) = 0$, $cap\left(\mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus I)\right) > 0$, то f продолжается до s-непрерывного отображения на U.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x \in I$ и найдутся две последовательности $x_i \to x, x_i' \to x$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что $q\left(f(x_i), f\left(x_i'\right)\right) \ge a > 0$, где $q(x, y)$ – сферическое расстояние. По условию $\dim I \le n-2$, тогда существует кривая $\gamma_i \in \Gamma\left(x_i, x_i'\right)$, причем $d(\gamma_i) < 2d\left(x_i, x_i'\right)$. Обозначая через $F = \mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus I)$, получаем [17] $M_{\frac{ns}{s-1}}\left(\Gamma\left(F, \gamma_i^*\right)\right) \ge \delta > 0$. С другой стороны, поднятие γ кривой $\gamma_* \in \Gamma\left(F, \gamma_i^*\right)$ выходит либо на ∂U, либо на I. Во втором случае кривая $\gamma_* \in \Gamma_*$ и модуль семейства таких кривых есть нуль в силу теоремы 2, а модуль кривых, которые выходят на ∂U, как следует из теоремы 1, стремится к нулю. Следовательно, f продолжается на I непрерывно.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением, обобщающие квазирегулярные отображения. Здесь модульная техника играет ключевую роль. Профессор О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q-гомеоморфизмов, так называемые Q-отображения [18–21]. Отображения с s-усредненной характеристикой – негомеоморфные пространственные отображения, являются естественным обобщением класса отображений с искажением, ограниченным в среднем на случай произвольной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. В то же время теорема об оценке модуля, доказанная в [6], указывает на непосредственную связь исследуемых нами отображений с вышеназванными классами Q-отображений [19–20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vuorinen M.* On the Iversen–Tsuji theorem for quasiregular mappings // Mathematica Scandinavica. 1977. V. 41. P. 90–98.
2. *Martio O. and Rickman S.* Boundary behavior of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. 1972. Ser. A I 507. P. 1–17.
3. *Лаврентьев М.А.* Об одном дифференциальном признаке гомеоморфности отображений трехмерных областей // ДАН СССР. 1938. Т. 20. № 4. С. 241–242.
4. *Полецкий Е.А.* О стирании особенностей квазиконформных отображений // Матем. сб. 1973. Т. 92 (134). № 2 (10). С. 242–256.
5. *Alipova K.A.*, *Elizarova M.A.*, *Malyutina A.N.* Examples of the mappings with *s*-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской Междунар. конф. (29 июня –5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В.В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17. ISBN: 978-5-8021-2121-4.
6. *Malyutina A.*, *Elizarova M.* Mappings with *s*-averaged characteristic. Definition and properties. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 121 p. ISBN: 978-3-8484-1319-5.
7. *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
8. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. 1970. Т. 83(125). № 2(10). С. 261–273.
9. *Малютина А.Н.*, *Кривошеина И.И.*, *Баталова Н.Н.* Искажение сферического модуля семейств кривых // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 179–195.
10. *Väisälä J.* Lectures on *n*-dimensional quasiconformal mappings (Lecture Notes in Mathematics 229). Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.
11. *Väisälä Ju.* Removable sets for quasiconformal mappings in space // J. Mech. 1969. V. 19. No. 1. P. 49–51.
12. *Кругликов В.И.*, *Пайков В.И.* Непрерывные отображения с конечным интегралом Дирихле // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 5. С. 1049–1052.
13. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 286 с.
14. *Väisälä J.* Two new characterization for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. 1965. V. 362. P. 1–12.
15. *Малютина А.Н.*, *Елизарова М.А.* Оценки искажения модулей для отображений с *s*-усредненной характеристикой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 5–15.
16. *Асеев В.В.* Об одном свойстве модуля // ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 3. С. 513–514.
17. *Martio O.*, *Rickman S.*, *Väisälä J.* Distortion and singularities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1970. No. 455. P. 1–13.
18. *Игнатьев А.А.*, *Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Український математичний вісник. 2005. Т. 2. № 3. С. 395–417.
19. *Мартио О.*, *Рязанов В.*, *Сребро У. и Якубов Э.* К теории *Q*-гомеоморфизмов // ДАН России. 2001. Т. 381. № 1. С. 20–22.
20. *Martio O.*, *Ryazanov V.*, *Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. 2004. V. 93. P. 215–236.
21. *Рязанов В.И.*, *Севостьянов Е.А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 3. С. 665–679.

Статья поступила 20.04.2015 г.

Malyutina A.N., Alipova K.A. (2016) ON BOUNDARY PROPERTIES OF SPATIAL NON-HOMEOMORPHIC MAPPINGS WITH AN S-AVERAGED CHARACTERISTIC. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 16–30

DOI 10.17223/19988621/41/2

In this paper, we continue to develop the geometric method of modules of curve families for studying analytical and geometrical properties of nonhomeomorphic mappings with s-averaged characteristic. We consider the question of the erasure of special sets under mappings with s-averaged characteristic. In this work, in contrast to previous results which require that the mapping is homeomorphic or the capacity of singular points is zero, nonhomeomorphic mappings with s-averaged characteristic are considered and a weaker condition is taken as constraints. We generalize the theorem which is known in the case $n = 2$ as Iversen–Tsuji's theorem for the case $n \geq 3$. There are well-known examples demonstrating the existence of essential singularities for which Hausdorff's measure $\Lambda_\beta \neq 0$ at some $\beta \neq 0$ for mappings with an s-averaged characteristic. The work presents some examples which illustrate distinctive properties of the considered class of mappings. A theorem about the module distortion for families of curves under mappings with allowance for multiplicity and, as a consequence, the characteristic property of the spherical module of families of curves asymptotic to a special boundary set is proved. The mappings are extended to continuous ones if the dimension of the set of singular points I dim $I \leq n$–2 and $s > 1$. The results are applicable to many classes of mappings of subclasses $W_n^1(U)$.

Keywords: spatial mappings with s-averaged characteristics, method of modules, desingularization, estimates of the distortion, asymptotic lifts.

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nmd@math.tsu.ru

ALIPOVA Kseniya Aleksandrovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ksusha_ast@mail.ru

REFERENCES

1. Vuorinen M. (1977) On the Iversen – Tsuji theorem for quasiregular mappings. *Mathematica Scandinavica.* V. 41. pp. 90–98.
2. Martio O. and Rickman S. (1972) Boundary behavior of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn*. Ser. A I 507. pp. 1–17.
3. Lavrentyev M. A. (1938) Ob odnom differentsial'nom priznake gomeomorfnosti otobrazheniy trekhmernykh oblastey [On a certain differential characteristic of homeomorphic mappings of three-dimensional domains]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 20(4). pp. 241–242.
4. Poleckii E.A (1973) On the removal of singularities of quasiconformal mappings. *Mathematics of the USSR – Sbornik*. 21(2), pp. 240–254. DOI 10.1070/SM1973v021n02ABEH002015
5. Alipova K.A., Elizarova M.A., Malyutina A.N. (2014) Examples of the mappings with s-averaged characteristic. *Kompleksnyy analiz i ego prilozheniya* [Complex Analysis and Its Applications]. Proc. of the International Conference. Petrozavodsk: PetrGU Publ. pp. 12–17. URL: http://piccana.karelia.ru/_docs/2014/atezis14.pdf (Accessed 14.05.2016).
6. Malyutina A., Elizarova M. (2013) *Mappings with s-averaged characteristic. Definition and properties*. LAP LAMBERT Academic Publishing.
7. Sychev A.V. (1983) *Moduli i prostranstvennye kvazikonformnye otobrazheniya* [Modules and spatial quasiconformal mappings]. Novosibirsk: Nauka.
8. Poleckii E.A. (1970) The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings. *Mathematics of the USSR – Sbornik*. 12(2). pp. 260–270.
9. Malyutina A.N., Krivosheina I.I., Batalova N.N. (2001) Iskazhenie sfericheskogo modulya semeystv krivykh [Distortion of the spherical module of families of curves]. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre – Researches on Mathematical Analysis and Algebra.* 3. Tomsk: TGU Publ. pp. 179–195.

10. Väisälä J. (1971) *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings* (Lecture Notes in Mathematics 229). Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
11. Väisälä Ju. (1969) Removable sets for quasiconformal mappings in space. *J. Mech.* 19(1). pp. 49–51.
12. Kruglikov V.I., Paykov V.I. (1979) Nepreryvnye otobrazheniya s konechnym integralom Dirikhle [Continuous mappings with a finite Dirichlet integral]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 249(5). pp. 1049–1052.
13. Reshetnyak Yu.G. (1982) Prostranstvennye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem [Spatial mappings with bounded distortion]. Novosibirsk: Nauka.
14. Väisälä Ju. (1965) Two new characterization for quasiconformality. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A1*. 362. pp. 1–12.
15. Malyutina A.N., Elizarova M.A. (2010) Otsenki iskazheniya moduley dlya otobrazheniy s *s*-usrednennoy kharakteristikoy [Estimations of distortion of the modules for the mappings with *s*-average characteristic]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 5–15.
16. Aseev V.V. (1971) Ob odnom svoystve modulya [On a property of the modulus]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 200(3). pp. 513–514.
17. Martio O., Rickman S., Väisälä J. (1970) Distortion and singularities for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1*. 455. pp. 1–13.
18. Ignat'ev A.A., Ryazanov V.I. (2005) Konechnoe srednee kolebanie v teorii otobrazheniy [Finite mean oscillation in the theory of mappings]. *Ukraïns'kiy matematichniy visnik – Ukrainian mathematical bulletin*. 2(3). pp. 395–417.
19. Martio O. et al. (2001) K teorii *Q*-gomeomorfizmov [A contribution to the theory of *Q*-homeomorphisms]. *Dokl. Ross. Akad. Nauk.* 381(1). pp. 20–22.
20. Martio O. et al. (2004) Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math.* 93. pp. 215–236.
21. Ryazanov V.I., Sevost'yanov E.A. (2011) Equicontinuity of mean quasiconformal mappings. *Siberian Mathematical Journal*. 52(3). pp. 524–536. DOI 10.1134/S0037446611030153.