

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/41/4

А.Р. Чехлов

**ВПОЛНЕ ИНЕРТНЫЕ ПОДГРУППЫ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП
КОНЕЧНОГО РАНГА И ИХ СОИЗМЕРИМОСТЬ**

Показано, что каждая вполне инертная подгруппа вполне разложимой группы G конечного ранга соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда типы прямых слагаемых ранга 1 группы G либо равны, либо несравнимы, причем все прямые слагаемые ранга 1 группы G не делятся ни на одно простое число p .

Ключевые слова: фактор-группа, вполне инвариантная подгруппа, соизмеримые подгруппы, делимая оболочка, ранг группы.

Все группы, если специально не оговорено, предполагаются абелевыми. Напомним, что подгруппа H группы G называется *чистой*, если $H \cap nG = nH$ для каждого натурального n ; *вполне инвариантной*, если $\varphi H \subseteq H$ для всякого φ из кольца эндоморфизмов $E(G)$ группы G . Подгруппа H группы G называется *вполне инертной*, если фактор-группа $(H + \varphi H)/H$ конечна (эквивалентно подгруппа $H \cap \varphi H$ имеет конечный индекс в φH) для всякого $\varphi \in E(G)$; если это свойство выполнено только для фиксированного φ , то подгруппа H называется *φ -инертной*. Ясно, что каждая конечная подгруппа и подгруппа, имеющая конечный индекс в некоторой вполне инвариантной подгруппе, являются вполне инертными. Если H – чистая подгруппа группы без кручения G , то фактор-группа G/H также является группой без кручения. Отсюда следует, что все чистые вполне инертные подгруппы групп без кручения вполне инвариантны. Сумма и пересечение двух вполне инертных подгрупп снова являются вполне инертными подгруппами [1, лемма 2.2]; в случае же бесконечного семейства вполне инертных подгрупп ни их сумма, ни их пересечение вполне инертными подгруппами в общем случае не являются [1, пример 2.7]. Подгруппы H, K произвольной (в том числе и некоммутативной) группы G называются *соизмеримыми*, если подгруппа $K \cap H$ имеет конечный индекс в H и в K . Ясно, что в группе без кручения чистые соизмеримые подгруппы совпадают.

Вполне инертные подгруппы абелевых групп изучались в [1–3]. Соизмеримость является отношением эквивалентности [2, лемма 2.3]. Ясно, что подгруппа H группы G вполне инертна тогда и только тогда, когда H соизмерима с $H + \varphi H$ для каждого $\varphi \in E(G)$. Подгруппа, соизмеримая с некоторой вполне инертной подгруппой, сама является вполне инертной [1, следствие 2.9]. Согласно [2], всякая вполне инертная подгруппа свободной группы соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; а в [3] показано, что всякая вполне инертная подгруппа p -группы, разложимой в прямую сумму циклических групп, также соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; делимые группы таким свойством в общем случае не обладают [1]. В [3, теорема 4.2] построен пример сепарабельной p -группы континуальной мощности, содержащей вполне инертные подгруппы, не соизмеримые с вполне инвариантными подгруппами.

В [4–7] и в др. работах исследовались *инертные* подгруппы некоммутативных групп (согласно [4], термин *инертная подгруппа* предложен профессором О. Кегелем), т.е. такие подгруппы H группы G , что $H \cap H^g$ имеет конечный индекс в H для любого $g \in G$, где H^g – подгруппа, сопряженная с H при помощи элемента g . Интересный пример инертной подгруппы – подгруппа $SL(n, \mathbb{Z})$ в $SL(n, \mathbb{Q})$ [4]. Каждая нормальная подгруппа инертна; всякая подгруппа конечного индекса из нормальной подгруппы инертна; и, более общо, подгруппы, соизмеримые с инертными подгруппами, сами инертны.

Отметим также, что в [8] изучались такие автоморфизмы φ абелевой группы G , что H и φH соизмеримы для всякой подгруппы H группы G .

Если B , G – группы и X – непустое подмножество в B , то через $\text{Hom}(B, G)X$ обозначим подгруппу в G , порожденную всеми подмножествами fX , где $f \in \text{Hom}(B, G)$.

Некоторые примеры вполне инертных подгрупп построены в [1–3], приведем также следующие.

Пример 1 [1, лемма 2.3]. В группе без кручения G конечного ранга всякая конечно порожденная подгруппа H максимального ранга вполне инертна.

Действительно, фактор-группа G/H периодична, поэтому если $\varphi \in E(G)$, то фактор-группа $\varphi H / (H \cap \varphi H)$ как конечно порожденная периодическая группа конечна.

Пример 2. Пусть A – группа без кручения, p, q – различные простые числа, $pA \neq A$, $qA \neq A$, и $G = (\oplus_{\alpha} A) \oplus (\oplus_{\beta} A)$, где α и β – равные бесконечные кардиналы. Тогда подгруппа $H = (\oplus_{\alpha} pA) \oplus (\oplus_{\beta} qA)$ не является вполне инертной.

Имеем $|G/H| \geq \aleph_0$, и легко строится эндоморфизм φ группы G со свойством $H + \varphi H = G$.

Пример 3. В группе без кручения G ранга 1 каждая ее подгруппа H является вполне инертной.

Действительно, всякий эндоморфизм φ группы G действует как умножение на некоторое рациональное число m/n . Поэтому $n(H + \varphi H) \subseteq H$. Значит, фактор-группа $(H + \varphi H)/H \cong \varphi H / (H \cap \varphi H)$ конечна как ограниченный гомоморфный образ группы φH ранга ≤ 1 .

В [1, определение 1.3] абелева группа называется *инертной*, если она вполне инертна в своей делимой оболочке. Поскольку группа существенна в своей делимой оболочке, то из инъективности делимых групп следует, что инертные группы совпадают с классом групп, являющихся вполне инертными подгруппами в каждом своем существенном расширении. Пример 3 отражает тот факт, что всякая группа без кручения ранга 1 инертна [1, пример 4.7]. Группа без кручения инертна тогда и только тогда, когда она является однородной вполне разложимой группой конечного ранга [1, теорема 4.9].

Пример 4. Пусть G – группа без кручения ранга 1. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) всякая вполне инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой;

б) всякая подгруппа группы G является вполне инвариантной;

с) $pG \neq G$ для каждого простого числа p .

а) $\Rightarrow$ с). Если $pG = G$, то всякая ненулевая вполне инвариантная подгруппа группы G также p -делима, поэтому она не может быть соизмеримой с циклической подгруппой группы G , которая согласно примеру 3 вполне инертна. с) $\Rightarrow$ б).

Если $pG \neq G$ для всякого простого числа p , то кольцо эндоморфизмов группы G изоморфно кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$, поэтому всякая подгруппа группы G вполне инвариантна. Импликация $b) \Rightarrow a)$ очевидна.

Итак, во всякой группе без кручения ранга 1, p -делимой хотя бы для одного простого числа p , имеются вполне инертные подгруппы, не соизмеримые с вполне инвариантными подгруппами.

Пример 5. Пусть H – вполне инертная подгруппа группы A , не соизмеримая ни с одной ее вполне инвариантной подгруппой; B – такая группа, что $\text{Hom}(B, A) = 0$. Тогда $H \oplus B$ – вполне инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, не соизмеримая ни с одной вполне инвариантной подгруппой группы G .

Хорошо известно, что делимая часть $D = D(G)$ всякой группы G всегда выделяется прямым слагаемым $G = D \oplus R$ (R – редуцированная часть группы G); D определяется однозначно, а R – с точностью до изоморфизма. Если X – вполне инвариантная подгруппа в G , то $X = (D \cap X) \oplus (R \cap X)$. Из инъективности делимых групп следует, что если хотя бы одна из подгрупп $D \cap X$ или $R \cap X$ не является периодической, то $D \cap X = D$. Для вполне инертных подгрупп это свойство уже не справедливо.

Пример 6. а) Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus R$, где $\mathbb{Q}$ – аддитивная группа рациональных чисел (т.е. делимая группа без кручения ранга 1), R – редуцированная группа без кручения ранга 1, $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ и $0 \neq b \in R$. Тогда подгруппа $H = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ является вполне инертной.

б) Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, где $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ – квазициклическая p -группа (т.е. делимая p -группа ранга 1), $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ и X – нетривиальная подгруппа в $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Тогда подгруппа $H = \langle a \rangle \oplus X$ является вполне инертной.

с) Пусть $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – аддитивная группа целых чисел и X – нетривиальная подгруппа в $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Тогда подгруппа $H = X \oplus \mathbb{Z}$ является вполне инертной.

д) Пусть $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus A$, где группа A не имеет ненулевых p -делимых факторгрупп. Тогда подгруппа A вполне инертна в G .

Действительно, во всех трех первых случаях подгруппа H существенна в G , и в случае а) H – прямая сумма двух бесконечных циклических групп, в случаях б) и с) – прямая сумма бесконечной циклической группы и циклической p -группы. Поэтому для всякого $\varphi \in E(G)$ фактор-группа $\varphi H / (H \cap \varphi H)$ является ограниченной группой конечного ранга, такая группа конечна. д) Следует из того, что fA – конечная подгруппа в $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для каждого $f \in \text{Hom}(A, \mathbb{Z}_{p^\infty})$.

Пример 7. Пусть $A \not\cong \mathbb{Z}$ – группа без кручения ранга 1, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно $\mathbb{Z}$. Тогда если $0 \neq a \in A$ и $H = \langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}$, то H является вполне инертной подгруппой в $G = A \oplus \mathbb{Z}$, не соизмеримой ни с какой вполне инвариантной подгруппой группы G .

Подгруппа H вполне инертна согласно примеру 1. Если теперь F – вполне инвариантная подгруппа, соизмеримая H , то $H/(F \cap H)$ – конечная группа, поэтому $n\mathbb{Z} \subseteq F$ для некоторого натурального n . Откуда $nG \subseteq F$. Имеем $nG \cap H = (nA \cap \langle a \rangle) \oplus n\mathbb{Z}$, поэтому $nG/(nG \cap H) \cong nA/(nA \cap \langle a \rangle)$. Фактор-группа $nA/(nA \cap \langle a \rangle)$ бесконечна, при этом $nG/(nG \cap H)$ вкладывается в $F/(F \cap H)$.

Отметим следующие простые свойства, на которые будем ссылаться.

1. Если H – вполне инертная подгруппа группы G , то для любых $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E(G)$ подгруппа $H + \varphi_1(H) + \dots + \varphi_n(H)$ соизмерима с H .

2. Если подгруппа H соизмерима с подгруппой K , то H соизмерима с $H \cap K$ и с $H + K$, если к тому же $H \subseteq F$, то H соизмерима с $K \cap F$.

3. Если подгруппа H соизмерима с подгруппами H_i , $i = 1, \dots, n$, то H соизмерима с $H_1 + \dots + H_n$ и с $H_1 \cap \dots \cap H_n$.

Фактор-группа $(H + H_1 + \dots + H_n)/H = (H + H_1)/H + \dots + (H + H_n)/H$ конечна как сумма конечного числа конечных групп $(H + H_i)/H$; в частности, конечна и фактор-группа $(H + H_1 \cap \dots \cap H_n)/H$. А фактор-группа

$$(H + H_1 + \dots + H_n)/(H_1 + \dots + H_n) \cong H/(H \cap (H_1 + \dots + H_n))$$

конечна как гомоморфный образ конечной группы $H/(H \cap H_1)$. Осталось установить конечность фактор-группы $H/(H \cap (H_1 \cap \dots \cap H_n))$ и достаточно проверить это для $n = 2$. По условию фактор-группы $H/(H \cap H_1)$ и $H/(H \cap H_2)$ конечны. Конечна и фактор-группа $(H \cap H_2)/(H \cap H_1 \cap H_2)$. В силу изоморфизма

$$H/(H \cap H_2) \cong (H/(H \cap H_1 \cap H_2))/((H \cap H_2)/(H \cap H_1 \cap H_2))$$

если $H/(H \cap H_1 \cap H_2)$ была бы бесконечной, то бесконечной была бы и $H/(H \cap H_2)$.

4. Если подгруппа H соизмерима с подгруппой K , то для всякого гомоморфизма f подгруппа fH соизмерима с fK , если к тому же F соизмерима с U , то $H + F$ соизмерима с $K + U$, а $H \cap F$ соизмерима с $K \cap U$.

Если H имеет конечный индекс в $H + K$, то fH также имеет конечный индекс в $f(H + K) = fH + fK$. Откуда следует, что подгруппа fH соизмерима с fK . Далее по условию фактор-группы $K/(H \cap K)$ и $U/(F \cap U)$ конечны. Поэтому конечны фактор-группы

$$(K \cap U)/(H \cap K \cap U) \text{ и } (H \cap K \cap U)/(H \cap K \cap F \cap U).$$

Имеем

$$(K \cap U)/(H \cap K \cap U) \cong ((K \cap U)/(F \cap H \cap K \cap U))/((H \cap K \cap U)/(F \cap H \cap K \cap U)).$$

Поэтому если бы фактор-группа $(K \cap U)/(F \cap H \cap K \cap U)$ была бы бесконечной, то была бы бесконечной и фактор-группа $(K \cap U)/(H \cap K \cap U)$. Конечность фактор-группы $(H \cap F)/(F \cap H \cap K \cap U)$ доказывается аналогично. Несложно проверить и соизмеримость $H + F$ с $K + U$.

5. Если H – вполне инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то подгруппа $H \cap A$ вполне инертна в A , подгруппа $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ соизмерима с H , а если $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$, то подгруппа $H \cap A + \varphi(H \cap B)$ соизмерима с $H \cap A$.

Первое утверждение доказано в [3, лемма 3.2]. Если теперь $\pi: G \rightarrow A$ и $\theta: G \rightarrow B$ – проекции, то $H \subseteq (\pi H) \oplus (\theta H)$, поэтому по свойству 1 подгруппа $(\pi H) \oplus (\theta H)$ соизмерима с H . Далее $H + \pi H$ и $H + \theta H$ соизмеримы с H , а так как

$$(H + \pi H)/H \cong \pi H/(H \cap \pi H) \text{ и } (H + \theta H)/H \cong \theta H/(H \cap \theta H),$$

где $H \cap \pi H = H \cap A$ и $H \cap \theta H = H \cap B$, то $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ соизмерима с $(\pi H) \oplus (\theta H)$ и, значит, с H , а πH соизмерима с $H \cap A$. Подгруппа $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ ввиду вполне инертности соизмерима с $(H \cap A + \varphi(H \cap B)) \oplus (H \cap B) = (H \cap A) \oplus (H \cap B) + \pi \varphi \theta((H \cap A) \oplus (H \cap B))$, поэтому $H \cap A = \pi((H \cap A) \oplus (H \cap B))$ соизмерима с $H \cap A + \varphi(H \cap B) = \pi((H \cap A + \varphi(H \cap B)) \oplus (H \cap B))$.

6. Если H – вполне инертная подгруппа группы без кручения G , то $\varphi H \subseteq H_*$ для всякого $\varphi \in E(G)$, где H_* – чистая оболочка подгруппы H в G . В частности, подгруппа H_* вполне инвариантна в G [1, лемма 2.1].

Это свойство вытекает из того, что H_*/H совпадает с периодической частью фактор-группы G/H . В частности, в неприводимой группе без кручения G ненулевая вполне инертная подгруппа будет существенной в G . Неприводимыми, например, являются однородные вполне разложимые группы без кручения.

Напомним, что если H – подгруппа группы G , то $E(G)H = \sum_{\varphi \in E(G)} \varphi H$ является наименьшей вполне инвариантной подгруппой, содержащей H ; а $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n H$ – наименьшая φ -инвариантная подгруппа, содержащая H .

7. *Вполне инертная подгруппа H группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу конечного индекса K , имеющую конечный индекс в $E(G)K$.*

Достаточность следует из транзитивного свойства соизмеримости. *Необходимость.* Пусть H соизмерима с вполне инвариантной подгруппой F . Тогда $K = H \cap F$ имеет конечный индекс в F , а так как $E(G)K \subseteq F$, то K имеет конечный индекс в $E(G)K$.

8. *Если вполне инертная подгруппа H группы G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения, то H содержит делимую часть $D = D(G)$ группы G ; а если H содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, то H содержит p -компоненту группы D .*

Делимая часть $D(H)$ группы H выделяется прямым слагаемым в G . Всякая делимая группа ранга 1 является гомоморфным образом группы $\mathbb{Q}$. Поэтому если $D(H)$ группа непериодическая, то она содержит прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$. Получаем, что для каждой делимой подгруппы D' ранга 1 группы D существует такой эндоморфизм φ группы G , что $H \cap \varphi H$ является подгруппой конечного индекса в D' . Делимые группы не имеют собственных подгрупп конечного индекса, поэтому $D \subseteq H$. В случае подгруппы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ рассуждения аналогичны.

Через G_p обозначим p -компоненту группы G .

9. *Если $G = D \oplus R$, где $D = F \oplus (\oplus_p D_p)$ – делимая часть группы G , F – делимая часть без кручения, $\oplus_p D_p$ – периодическая часть группы D и H – такая вполне инертная подгруппа группы G , что подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то подгруппа $H \cap F$ существенна в F , причем $D \subseteq H$, если ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен. Если же подгруппа $H \cap R_p$ не является ограниченной, то $D_p \subseteq H$.*

Если подгруппа $H \cap R$ не является периодической, то она содержит бесконечную циклическую подгруппу. Поскольку делимые группы инъективны, то отсюда следует, что $H \cap D' \neq 0$ для всякой делимой подгруппы без кручения D' ранга 1, в частности $H \cap F$ существенна в F . Если же ранг без кручения подгруппы $H \cap R$ бесконечен, то она содержит свободную группу K бесконечного ранга, всякая счетная группа является гомоморфным образом группы K ; откуда следует, что H содержит каждую подгруппу ранга 1 группы D , значит, $D \subseteq H$. Если группа $H \cap R_p$ неограниченная, то существует эпиморфизм $H \cap R_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$, откуда следует, что $D_p \subseteq H$.

Очевидно, что если A – вполне инвариантное прямое слагаемое группы G , то всякая вполне инертная подгруппа группы A будет вполне инертной подгруппой группы G . Справедливость следующего свойства также очевидна.

10. 1) Пусть $G = A \oplus B$. Вполне инертная подгруппа H группы A является вполне инертной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда fH – конечная группа для каждого $f \in \text{Hom}(A, B)$. В частности, если A – вполне инертное прямое слагаемое в G , то $\text{Hom}(A, B)A$ – периодическая подгруппа в B .

2) Если B – группа без кручения, а H – существенная вполне инертная подгруппа группы A , то H будет вполне инертной подгруппой группы $G = A \oplus B$ тогда и только тогда, когда A – вполне инвариантное прямое слагаемое в G .

Напомним следующие понятия. Если $\chi_1 = (k_1, k_2, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, l_2, \dots)$ – характеристики, то их произведением называется характеристика $\chi_1 \chi_2 = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \dots)$, где ∞ плюс нечто есть ∞ . Частное $\chi_1 : \chi_2$ двух характеристик $\chi_1 \geq \chi_2$ определяется как наибольшая характеристика χ , для которой $\chi \chi_2 \leq \chi_1$. Исходя из этих понятий, определяют произведение и частное типов.

Предложение 1 [9, предложение 85.4]. Пусть A и C – группы без кручения ранга 1. Если неравенство $t(A) \leq t(C)$ не имеет места, то $\text{Hom}(A, C) = 0$. Если же $t(A) \leq t(C)$, то $\text{Hom}(A, C)$ является группой без кручения ранга 1 и имеет тип $t(C) : t(A)$.

Теорема 2. Пусть $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, где $r(G_i) = 1$, – вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Каждая вполне инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG_i \neq G_i$ для всякого $i = 1, \dots, n$ и для всякого простого числа p , причем при всех $i, j = 1, \dots, n$ типы $t(G_i), t(G_j)$ либо равны, либо несравнимы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть вполне инертная подгруппа $H = \langle g_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle$, где $0 \neq g_i \in G_i$, соизмерима с вполне инвариантной подгруппой F . Из соизмеримости H и F следует $r(F) = r(H) = n$. Отсюда можно вывести, что для всякого i найдётся ненулевой элемент $f_i \in F \cap G_i$. Пусть $pG_i = G_i$. Тогда вполне инвариантная подгруппа $E(G_i) \langle f_i \rangle$ группы G_i тоже p -делима, причём она содержится в группе $E(G)F = F$. По свойству 4 подгруппа $\pi_i F$ соизмерима с $\pi_i H$. Но так как $\pi_i F$ содержит ненулевую p -делимую группу, то $(\pi_i F + \pi_i H) / \pi_i H$ есть бесконечная группа – противоречие. Пусть $t(G_i) < t(G_j)$. Тогда $\text{Hom}(G_i, G_j) \langle f_i \rangle$ – это подгруппа типа $t(G_j) : t(G_i)$, содержащаяся и в G_j и в F . По свойству 4 подгруппа $\pi_j F$ соизмерима с $\pi_j H$. Но так как $\pi_j F$ содержит подгруппу типа $t(G_j) : t(G_i)$, строго большего, чем тип группы $\langle g_j \rangle$, то $(\pi_j F + \pi_j H) / \pi_j H$ есть бесконечная группа – противоречие.

Достаточность. Пусть H – вполне инертная подгруппа группы G . Согласно свойству 5, достаточно показать, что подгруппа $(H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n)$ соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой. Поскольку $pG_i \neq G_i$ для всякого простого числа p и для всех $i = 1, \dots, n$, то группа $\text{Hom}(G_i, G_j)$ либо изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$ (если тип группы G_i равен типу группы G_j), либо $\text{Hom}(G_i, G_j) = 0$ (если тип группы G_i не сравним с типом группы G_j). Поэтому для всякой подгруппы $X \subseteq G_i$ имеет место равенство $\text{Hom}(G_i, G_j)X = fX$, где f – гомоморфизм, порождающий группу $\text{Hom}(G_i, G_j)$ (все другие гомоморфизмы этой группы являются целыми кратными гомоморфизма f). А поскольку $\text{Hom}(G, G_i) \cong \text{Hom}(G_1, G_i) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(G_n, G_i)$, то отсюда следует, что если $\underline{H}_i = \text{Hom}(G, G_i)((H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n))$, то $H \cap G_i \subseteq \underline{H}_i$ и $H \cap G_i$ соизмерима с $\underline{H}_i$. Значит, $\underline{H} = \underline{H}_1 \oplus \dots \oplus \underline{H}_n$ соизмерима с $(H \cap G_1) \oplus \dots \oplus (H \cap G_n)$. Ясно, что $\underline{H}_i$ – вполне инвариантная подгруппа группы G_i и поскольку $\text{Hom}(G_i, G_j)\underline{H}_i \subseteq \underline{H}_j$, то подгруппа $\underline{H}$ вполне инвариантна в G .

Следствие 3.1) Если G – однородная вполне разложимая группа конечного ранга, то всякая ее вполне инертная подгруппа соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG \neq G$ для всякого простого числа p .

2) В однородной вполне разложимой группе G конечного ранга вполне инертная подгруппа H соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pH = H$ для всякого простого числа p со свойством $pG = G$.

Представляет интерес изучение вполне инертных подгрупп групп, исследуемых в [10–15]. Отметим, что в ряде случаев автор получил ответ, когда каждая вполне инертная подгруппа вполне разложимой группы без кручения бесконечного ранга соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой.

В заключение отметим, что в [16] изучались *сильно инвариантные* подгруппы, т.е. такие подгруппы N группы G , что $fN \subseteq N$ для всякого $f \in \text{Hom}(N, G)$. А *сильно инертной* (S. Breaz, G. Călugăreanu) называется подгруппа N группы G такая, что $fN \cap N$ имеет конечный индекс в fN для каждого $f \in \text{Hom}(N, G)$. В каждой группе G ее подгруппа $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$ сильно инертна, семейство сильно инертных подгрупп замкнуто относительно конечных сумм, но не пересечений. Если всякий гомоморфизм из $\text{Hom}(N, G)$ продолжается до эндоморфизма группы G (например, если N – прямое слагаемое в G), то вполне инертная подгруппа N будет сильно инертной. Вышеупомянутыми двумя авторами получен также ряд других интересных свойств сильно инертных подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. Fully inert subgroups of divisible Abelian groups // J. Group Theory. 2013. V. 16. No 6. P. 915–939.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar. 2014. V. 69. No 1. P. 69–78. DOI 10.1007/s10998-014-0041-4.
3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of Abelian p -groups // J. of Algebra. 2014. V. 419. P. 332–349.
4. Беляев В.В. Инертные подгруппы в бесконечных простых группах // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 4. С. 17–23.
5. Беляев В.В. Локально конечные группы с конечной неотделимой подгруппой // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 2. С. 23–41.
6. Belyaev V.V., Kuzucuoglu M., Seçkin E. Totally inert groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 151–156.
7. Dixon M.R., Evans M.J., Tortora A. On totally inert simple groups // Cent. Eur. J. Math. 2010. V. 8. No 1. P. 22–25. DOI 10.2478/s11533-009-0067-7.
8. Dardano U., Rinauro S. Inertial automorphisms of an abelian group // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2012. V. 127. P. 213–233. DOI 10.4171/RSMUP/127-11.
9. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 417 с.
10. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
11. Чехлов А.Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 2. С. 451–464.
12. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
13. Чехлов А.Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1157–1165.
14. Чехлов А.Р. Об абелевых группах, близких к Е-разрешимым // Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17. № 8. С. 183–219.

15. Chekhlov A.R., Danchev P.V. On Abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // Comm. Algebra. 2015. V. 43. No. 12. P. 5059–5073. DOI 10.1080/00927872.2015.1008011.
16. Călugăreanu G. Strongly invariant subgroups // Glasg. Math. J. 2015. V. 57. No. 2. P. 431–443. DOI 10.1017/S0017089514000391.

Статья поступила 21.03.2016 г.

Chekhlov A.R. (2016) FULLY INERT SUBGROUPS OF COMPLETELY DECOMPOSABLE FINITE RANK GROUPS AND THEIR COMMENSURABILITY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 42–50

DOI 10.17223/19988621/41/4

A subgroup H of an Abelian group G is said to be fully inert in G if the subgroup $H \cap \varphi H$ has a finite index in φH for any endomorphism φ of the group G . Subgroups H and K of the group G are said to be commensurable if the subgroup $K \cap H$ has a finite index in H and in K . Some properties of fully inert and commensurable groups in the context of direct decompositions of the group and operations on subgroups are proved. For example, if a subgroup H is commensurable with a subgroup K , then H is commensurable with $H \cap K$ and with $H + K$; if a subgroup H is commensurable with a subgroup K , then the subgroup fH is commensurable with fK for any homomorphism f . The main result of the paper is that every fully inert subgroup of a completely decomposable finite rank torsion-free group G is commensurable with a fully invariant subgroup if and only if types of rank 1 direct summands of the group G are either equal or incomparable, and all rank 1 direct summands of the group G are not divisible by any prime number p .

Keywords: factor group, fully invariant subgroup, commensurable subgroups, divisible hull, rank of the group.

CHEKHOV Andrey Rostislavovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. (2013) Fully inert subgroups of divisible Abelian groups *J. Group Theory*. 16(6). pp. 915–939.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of free Abelian groups. *Period. Math. Hungar.* 69(1). pp. 69–78. DOI 10.1007/s10998-014-0041-4.
3. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. (2014) Fully inert subgroups of Abelian p -groups. *J. of Algebra*. 419. pp. 332–349.
4. Belyaev V.V. (1993) Inert subgroups in infinite simple groups. *Sib. Math. J.* 34(4). pp. 606–611. DOI 10.1007/BF00975160.
5. Belyaev V.V. (1993) Locally finite groups containing a finite inseparable subgroup. *Sib. Math. J.* 34(2). pp. 198–232.
6. Belyaev V.V., Kuzucuoglu M., Seçkin E. (1999) Totally inert groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 102. pp. 151–156.
7. Dixon M.R., Evans M.J., Tortora A. (2010) On totally inert simple groups. *Cent. Eur. J. Math.* 8(1). pp. 22–25. DOI 10.2478/s11533-009-0067-7.
8. Dardano U., Rinauro S. (2012) Inertial automorphisms of an abelian group. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 127. pp. 213–233. DOI 10.4171/RSMUP/127-11.
9. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups. Vol. II*. New York and London: Academic Press.
10. Chekhlov A.R. (2001) On a class of endotransitive groups. *Math. Notes*. 69(5-6). pp. 863–867. DOI 10.4213/mzm709.
11. Chekhlov A.R. (2012) On the projective commutant of Abelian groups. *Sib. Math. J.* 53(2). pp. 361–370. DOI 10.1134/S0037446612020188.

12. Chekhlov A.R. (2012) Abelian groups with nilpotent commutators of endomorphisms. *Russian Math.* 56(10). pp. 50–61. DOI 10.3103/S1066369X12100052.
13. Chekhlov A.R. (2012) On projectively soluble abelian groups. *Sib. Math. J.* 53(5). pp. 927–933. DOI 10.1134/S0037446612050175.
14. Chekhlov A.R. (2014) On Abelian Groups Close to E-Solvable Groups. *J. Math. Sci.* 197(5). pp. 708–733. DOI 10.1007/s10958-014-1755-9.
15. Chekhlov A.R., Danchev P.V. (2015) On Abelian Groups Having All Proper Fully Invariant Subgroups Isomorphic. *Comm. Algebra.* 43(12). pp. 5059–5073. DOI 10.1080/00927872.2015.1008011.
16. Călugăreanu G. (2015) Strongly invariant subgroups. *Glasg. Math. J.* 57(2). pp. 431–443. DOI 10.1017/S0017089514000391.