

УДК 519.6:532.516

DOI 10.17223/19988621/41/9

Б.О. Цыденов

ЧИСЛЕННОЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ГИДРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЕРИОД РАЗВИТИЯ ВЕСЕННЕГО ТЕРМОБАРА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ «НУТРИЕНТ – ФИТОПЛАНКТОН – ЗООПЛАНКТОН»¹

Описывается биологическая модель для воспроизведения динамики биомасс планктона в период развития весеннего речного термобара в глубоком озере. Численное моделирование гидробиологических процессов осуществляется с помощью модели Франкса и др. «нутриент – фитопланктон – зоопланктон». Проведена верификация разработанной модели на основе имеющихся в литературе результатов расчётов других авторов. На примере канадского озера Камлупс исследовано влияние притока отдельных биологических составляющих модели планктона за счёт стока реки Томпсон на их пространственно-временное распределение в водоёме.

Ключевые слова: *планктон, термобар, математическая модель, численный эксперимент, озеро Камлупс.*

Весной и осенью в озёрах умеренных широт возникает природное явление, представляющее собой узкую зону, в которой происходит погружение воды, имеющей наибольшую плотность, от поверхности до дна. Такой феномен впервые обнаружил швейцарский лимнолог Франсуа Форель на Женевском озере в 1880 году и назвал термобаром (франц. *barre thermique* – температурная преграда) [1]. Результаты исследований этого уникального явления отражены в публикациях как отечественных [2–6 и др.], так и зарубежных [7–9 и др.] учёных.

Термобар оказывает огромное влияние на экосистему озера, так как он препятствует горизонтальному перемешиванию между двумя циркуляционными ячейками с разными характеристиками воды (температурой, минерализацией, скоростью течения и т.д.) и формирует барьер между областями с благоприятными (с теплой водной массой) и менее благоприятными (с холодной водной массой) условиями для роста планктонных сообществ. Известно, что благодаря нисходящему течению термобар может аккумулировать в себе планктон и другие организмы на поверхности с локальным максимумом популяции [10, 11]. Кроме того, некоторые виды планктона (в частности, диатомовые водоросли), несмотря на значительную скорость погружения воды внутри фронта термобара, имеют тенденцию оставаться в эвфотической зоне [12], в то время как нисходящий перенос органических веществ ведёт к росту микробиологической активности в глубоководной части озера [10]. Исследование роли термобара на жизнедеятельность планктонных сообществ имеет неопределимое научное и практическое значение, поскольку планктон служит важным индикатором для оценки качества воды в озере, продуктивности и жизнеспособности водной экосистемы. Важно также отметить, что

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60041 мол_а_дк.

планктон – основа пищевой базы для многих видов рыбы, поэтому информация о распространении планктона и времени его роста и убыли в определенных районах водоёма важна в планировании и выборе оптимальных сроков вылова рыбы рыбопромысловыми организациями.

Единственными исследователями, занимавшимися численным исследованием эффектов термобара на популяцию планктона, являются В. Ботт, Э. Кай, П.Р. Холланд [13, 8].

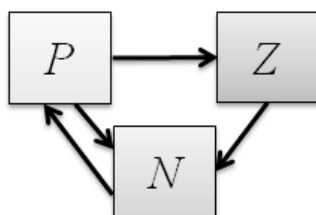


Рис. 1. Концептуальное представление модели Франкса и др. [14]. Стрелками показаны пути потока питательных веществ между P (фитопланктоном), Z (зоопланктоном) и N (нутриентом)

Fig. 1. Conceptual view of the model of Franks et al. [14]. The arrows indicate the direction of the nutrient flow between P (phytoplankton), Z (zooplankton), and N (nutrient)

Целью данной работы является разработка и верификация математической модели на основе модели Франкса и др. «нутриент – фитопланктон – зоопланктон» [14] (рис. 1) для исследования распределения биомасс планктона во время весенней эволюции термобара на примере озера Камлупс, а также анализ влияния речной концентрации биологических компонентов на их распределение в водоёме.

Математическая модель

Уравнения термогидродинамической модели

Негидростатическая модель для воспроизведения термогидродинамических процессов в глубоком озере, учитывающая влияние силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и записанная в приближении Буссинеска, включает в себя следующие уравнения [15]:

а) уравнения количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \cdot \Omega_z v - 2 \cdot \Omega_y w;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \cdot \Omega_x w - 2 \cdot \Omega_z u;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \cdot \frac{\rho}{\rho_0} + 2 \cdot \Omega_y u - 2 \cdot \Omega_x v;$$

б) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

в) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{sol}}{\partial z};$$

г) уравнение баланса солёности в озере

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial wS}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right),$$

где u, v – горизонтальные компоненты скорости; w – вертикальная компонента скорости; Ω_x, Ω_y и Ω_z – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; g – ускорение свободного падения; c_p – удельная теплоёмкость; T – температура; S – солёность; p – давление; ρ_0 – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, температуре T_L и солёности S_L (T_L и S_L – характерная температура и солёность озера соответственно). Коротковолновая солнечная радиация, проникающая в воду, рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра

$$H_{sol} = H_{Ssol,0} \cdot \exp(-\varepsilon_{abs} d),$$

где $H_{Ssol,0}$ – поток солнечной радиации на свободной поверхности, ε_{abs} – коэффициент поглощения, $d = |L_z - z|$ – глубина.

Для замыкания системы уравнений используется двухпараметрическая k – ω -модель турбулентности Уилкокса [16], состоящая из уравнений для кинетической энергии и частоты турбулентных пульсаций и алгебраических соотношений для определения турбулентной диффузии [17].

В качестве уравнения состояния $\rho = \rho(T, S, p)$ выбрано уравнение Чена – Миллера [18], принятое UNESCO. Данное уравнение состояния связывает плотность воды с температурой, солёностью, давлением и справедливо в диапазоне $0 \leq T \leq 30$ °C, $0 \leq S \leq 0.6$ г/кг, $0 \leq p \leq 180$ бар.

Уравнения модели планктона

Перенос биомасс планктона описывается с помощью конвективно-диффузионных уравнений вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial u\Psi}{\partial x} + \frac{\partial w\Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + S_\Psi,$$

где Ψ – концентрация биологического компонента (нутриента, фитопланктона, зоопланктона); S_Ψ – источниковый член для соответствующей биологической составляющей, которая представляет результат взаимодействия с остальными биоконпонентами модели. Для численного исследования динамики планктонных популяций в данной работе используется модель «нутриент (N) – фитопланктон (P) – зоопланктон (Z)» Франкса и др. [14]. Расчетные формулы, определяющие значения источниковых членов в N–P–Z-модели, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Взаимодействие фитопланктона (P), зоопланктона (Z) и нутриента (N)

Обозначение	Расчетная формула
S_P	$(G - m_P)P - IZ$
S_Z	$[(1 - \gamma)I - m_Z]Z$
S_N	$(-G + m_P)P + (\gamma I + m_Z)Z$

Интенсивность питания зоопланктона I в модели основана на формулировке Мейзо и Пуле [19] с модификацией Франкса и др. [14]:

$$I = R_m \Lambda P (1 - e^{-\Lambda P}).$$

Переменная G представляет скорость первичного продуцирования фитопланктона и рассчитывается по формуле

$$G = V_m e^{-\eta d} [N/(N+k_s)].$$

Все параметры, связанные с вычислением биологических компонентов в модели планктона, приведены в табл. 2 [8].

Таблица 2

Значения параметров «нутриент – фитопланктон – зоопланктон»-модели

Параметр	Наименование	Значение
V_m	Максимальная скорость роста фитопланктона	2.0 сут^{-1}
η	Коэффициент ослабления света	0.1 м^{-1}
k_s	Константа полунасыщения для поглощения питательных веществ	$0.2 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$
m_p	Смертность фитопланктона	0.1 сут^{-1}
R_m	Максимальная интенсивность питания зоопланктона	0.5 сут^{-1}
Λ	Константа Йвлева для питания зоопланктона	$0.5 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$
γ	Доля неусвоенного питания зоопланктона	0.3
m_z	Смертность зоопланктона	0.2 сут^{-1}

Следует заметить, что размерность некоторых параметров (k_s , Λ) в табл. 2 указана в единицах азота, т.е. символ N в $[\text{ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}]$ обозначает химический элемент азот.

Начальные и граничные условия

Начальные условия для уравнений модели задаются в виде

$$u = 0; v = 0; w = 0; T = T_L; S = S_L; \Psi = \Psi_L \text{ при } t = 0,$$

где T_L , S_L , Ψ_L – температура, солёность и концентрация биологического компонента (нутриента, фитопланктона, зоопланктона) в озере соответственно; t – время. Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности $p = p_a$ методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности.

Граничные условия имеют следующий вид:

а) на поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \frac{\partial v}{\partial z} = 0; w = 0; D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{H_{net}}{\rho_0 \cdot c_p}; \frac{\partial S}{\partial z} = 0; \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

где тепловой поток H_{net} включает в себя длинноволновую радиацию, а также потоки скрытого и чувствительного тепла [20].

б) на твёрдых границах (на дне)

$$u = 0; v = 0; w = 0; \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \frac{\partial S}{\partial n} = 0; \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на границе входа реки (левой границе)

$$u = u_R; v = 0; w = 0; T = T_R; S = S_R; \Psi = \Psi_R,$$

где u_R – скорость речного притока; T_R, S_R, Ψ_R – температура, солёность и концентрация биологического компонента (нутриента, фитопланктона, зоопланктона) в устье реки соответственно.

г) на открытой границе задаются условия радиационного типа [21]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\phi = u, v, T, S, \Psi)$$

и простые градиентные условия

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Численный метод решения уравнений модели

Решение задачи основано на методе конечного объёма, согласно которому скалярные величины (концентрация фитопланктона, зоопланктона, нутриента, теплофизические характеристики воды и т.д.) определяются в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости – в средних точках на границах ячеек. В целях приближения расчётной области к прибрежному профилю озера применяется метод блокировки фиктивных областей [22]: приравниваются нулю компоненты скорости в выключенной зоне за счёт использования больших значений коэффициентов вязкости в этой зоне.

Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка – Николсон. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме QUICK [23] второго порядка. Для согласования рассчитываемых полей скорости и давления разработана процедура SIMPLED (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations with Density correction) для течений с плавучестью [24], представляющая собой модификацию метода SIMPLE Патанкара [22]. Алгоритм SIMPLED корректирует поля скорости и давления с учетом вариации плотности в гравитационном члене уравнения количества движения для вертикальной составляющей. Системы разностных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом релаксации.

Область исследования и условия для численных экспериментов

В качестве исследуемой области выбрано вертикальное сечение озера Камлупс, соответствующее направлению впадения р. Томпсон, начало системы координат совпадает с устьем реки (см. рис. 2, а). Озеро Камлупс находится на юго-западе Канады (провинция Британская Колумбия) в 340 км северо-восточнее Ванкувера и расположено между $50^{\circ}26' - 50^{\circ}45'$ с. ш. и $120^{\circ}03' - 120^{\circ}32'$ з. д. по течению реки Томпсон, имеет вытянутую форму (см. рис. 2, а). Упрощенная геометрия расчётной области имеет протяженность 10 км и глубину 150 м (см. рис. 2, б). Глубина участка на границе раздела река – озеро составляет 15 м.

Начальное распределение температуры в озере Камлупс имеет постоянное значение, равное 2.4°C , в то время как температура воды в реке соответствует 3.6°C и нагревается на 0.2°C в сутки. Река Томпсон впадает в озеро со скоростью 0.01 м/с, минерализация воды в озере и реке составляет 0.1 г/кг. Поток тепла, поступающий на водную гладь, принят равным 170 Вт/м² [8], коэффициент погло-

печения проникающей в воду солнечной радиации – 0.3 м^{-1} . Начальная концентрация фитопланктона, зоопланктона и нутриента в озере составляет 1.0, 1.0 и $4.0 \text{ ммольN} \cdot \text{м}^{-3}$ соответственно [8]. Расчётная область (см. рис. 2, б) покрывается равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25 \text{ м}$ и $h_z = 3 \text{ м}$. Шаг по времени равен 60 с.

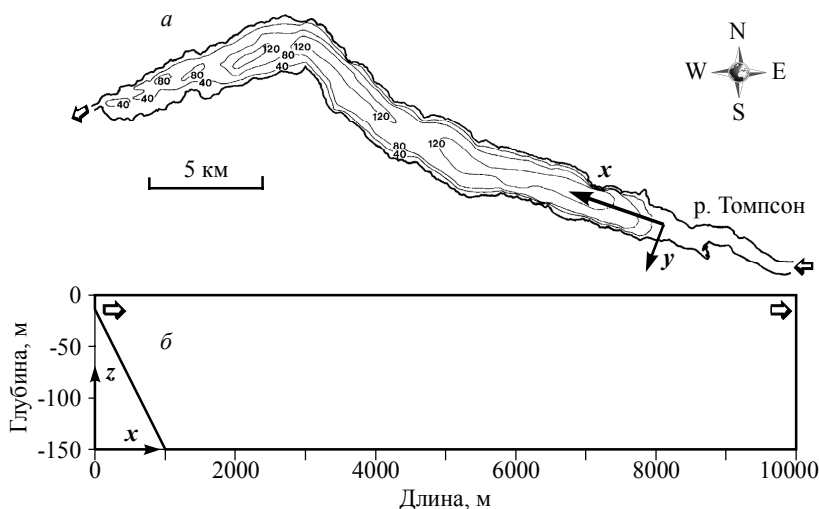


Рис. 2. Морфометрия оз. Камлупс: *а* – батиметрия оз. Камлупс, *б* – расчётная область (продольное сечение)

Fig. 2. Kamloops Lake morphometry: (*a*) bathymetry and (*b*) computational domain (longitudinal section)

Результаты моделирования

С целью оценки влияния концентрации биомасс в устье реки проведена серия вычислительных экспериментов с переменными значениями одного из биологических компонентов в модели планктона при фиксированных значениях остальных составляющих (см. табл. 3).

Таблица 3

Концентрация нутриента (N_R), фитопланктона (P_R) и зоопланктона (Z_R) в устье реки при численных экспериментах

№ вычислительного эксперимента	N_R	P_R	Z_R
1	4.0	1.0	1.0
2	увеличивается на $0.05 \text{ ммольN} \cdot \text{м}^{-3}$ в сутки	1.0	1.0
3	4.0	увеличивается на $0.05 \text{ ммольN} \cdot \text{м}^{-3}$ в сутки	1.0
4	4.0	1.0	увеличивается на $0.05 \text{ ммольN} \cdot \text{м}^{-3}$ в сутки

В качестве базового случая рассматривается эксперимент №1, при котором речная концентрация фитопланктона, зоопланктона и нутриента на протяжении всего моделируемого периода имеет постоянное значение, совпадающее с озёрной [8]. Для верификации разработанной модели построены горизонтальные профили составляющих модели планктона на 8, 16 и 24 сутки численного эксперимента (рис. 3).

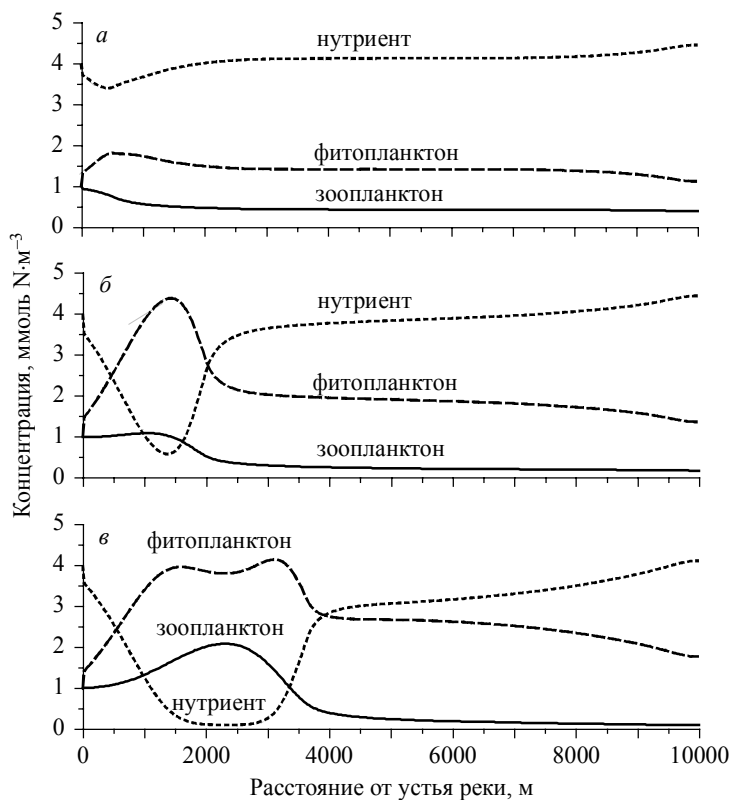


Рис. 3. Профили биологических компонентов на глубине 4.5 м, полученные на 8 (а), 16 (б) и 24 (в) сутки моделирования в вычислительном эксперименте № 1

Fig. 3. Profiles of biological components at 4.5 m depth after 8 (a), 16 (б), and 24 (в) days in simulation 1

Сравнение полученных значений концентрации биологических компонентов на глубине 4.5 м с результатами расчетов Холланда и др. (рис. 11 в [8]) показывает качественное согласование. Однако следует также заметить, что имеет место незначительное количественное различие, связанное с эффектом минерализации речного притока [25] (в работе [8] отсутствует точное значение солености в реке Томпсон). Видно, что на 8 сутки моделирования в области расположения термобара (рис. 4, а) происходит уменьшение нутриента (рис. 4, б) вследствие роста популяции фитопланктона (рис. 4, в). Весенний прогрев озера приводит к тому, что наибольшая концентрация фитопланктона сосредоточена в поверхностном слое водной толщи вблизи температуры максимальной плотности, в то время как опускное течение внутри фронта термобара увлекает зоопланктон в глубинную

часть (рис. 4, *з*). Однако по мере развития термобара и бурного цветения фитопланктона наблюдается локальный максимум концентрации зоопланктона в приповерхностной области (рис. 3, *б* и *в*). В финальной стадии моделирования истощение нутриента и активный рост численности зоопланктона ограничивают дальнейшее увеличение биомассы фитопланктона. Вследствие интенсивного выедания зоопланктоном популяций фитопланктона концентрация последнего в районе термобара сокращается, слева и справа термического фронта формируются новые области с локальными максимумами (рис. 3, *в*).

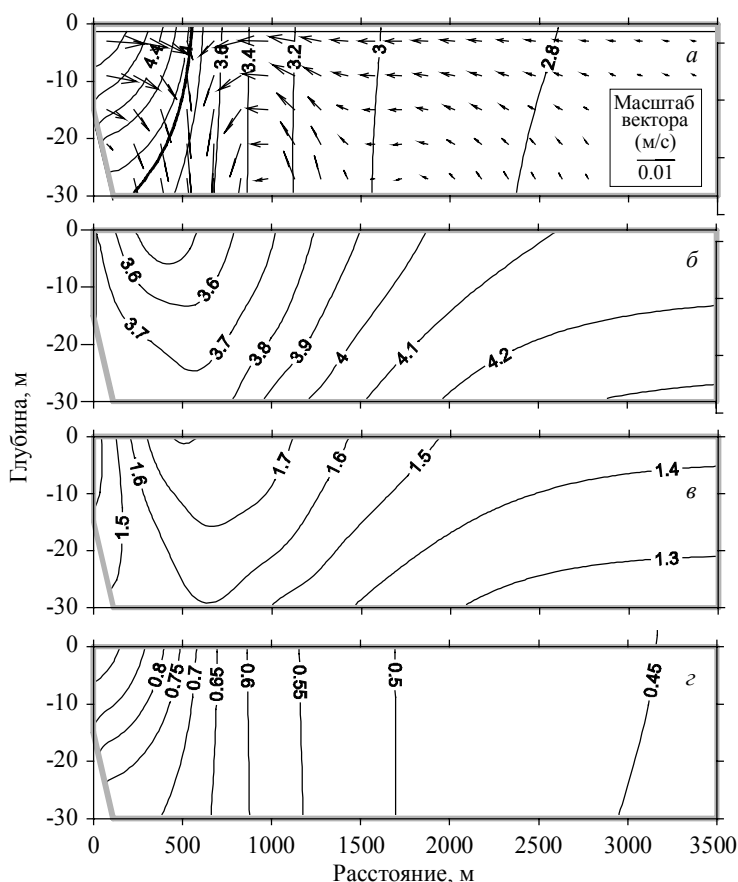


Рис. 4. Термодинамическая и гидробиологическая картина на 8 сутки вычислительного эксперимента № 1: *a* – векторное поле скорости [м/с], изотермы [°C], и температура максимальной плотности [жирная линия]; *б* – концентрация нутриента [ммольN·м⁻³], *в* – концентрация фитопланктона [ммольN·м⁻³], *з* – концентрация зоопланктона [ммольN·м⁻³]

Fig. 4. Thermodynamic and hydrobiological pattern after 8 days of simulation 1: (*a*) velocity vector field [m/s], isotherms [°C], and temperature of maximum density [bold line]; (*б*) nutrient concentrations [mmolN·m⁻³], (*в*) phytoplankton concentrations [mmolN·m⁻³], and (*з*) zooplankton concentrations [mmolN·m⁻³]

Результаты вычислительных экспериментов с переменными значениями концентрации нутриента, фитопланктона и зоопланктона, поступающих в озеро Камлупс из реки Томпсон, представлены на рис. 5. На основе полученных численных данных установлено, что согласно модели Франкса и др. более высокая речная концентрация нутриента не играет существенной роли на динамику биомасс фито- и зоопланктона (рис. 5, а). Увеличение фитопланктона в реке приводит к снижению нутриента в области расположения термобара и незначительному росту зоопланктона в водоёме (рис. 5, б). Монотонно растущее поступление зоопланктона из реки оказывает отрицательное влияние на популяцию фитопланктона, что способствует сохранению количества нутриента в зоне термобарической неустойчивости (рис. 5, в).

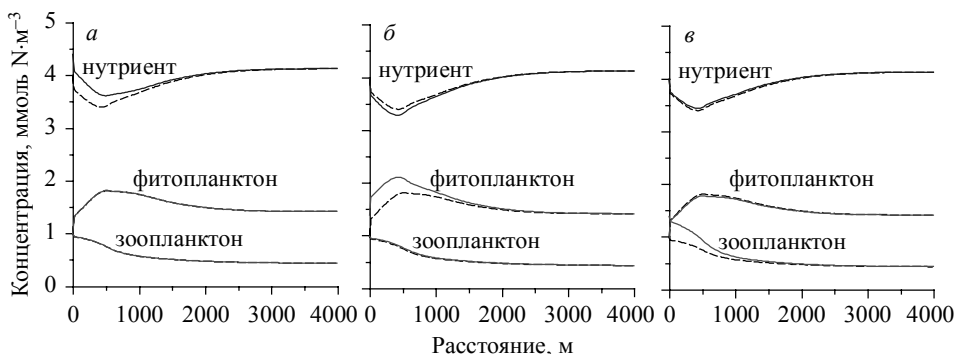


Рис. 5. Профили биологических компонентов на глубине 4.5 м, полученные на 8 суток моделирования в вычислительных экспериментах № 2 (а), № 3 (б) и № 4 (в). Пунктиром показаны профили, соответствующие эксперименту №1

Fig. 5. Profiles of biological components at 4.5 m depth after 8 days in simulations 2 (а), 3 (б), and 4 (в). Dash line indicates the results of simulation 1

Заключение

Разработана биологическая модель взаимодействия нутриента, фитопланктона и зоопланктона для исследования влияния речного термобара в глубоком озере. Осуществлено сопряжение построенной биологической модели с гидродинамической моделью расчёта термобара. Проведена апробация модели на примере хорошо изученного канадского озера Камлупс. Исследовано влияние речной концентрации биологических компонентов на их распределение в озере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Forel F.A. La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879-1880. Lac Léman. L'Écho des Alpes. 1880. No. 3. P. 149–161.
2. Тихомиров А.И. О термическом баре в Якимварском заливе Ладожского озера // Изв. ВГО. 1959. № 91(5). С. 424–438.
3. Шерстянкин П.П. Динамика вод Селенгинского мелководья в начале лета по данным распределения оптических характеристик и температуры воды // Элементы гидрометеорологического режима озера Байкал. М.-Л.: Наука, 1964. Т. 5(25). С. 29–37.
4. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savel'eva O.S. Model of formation and development of spring thermal bar // Water Resources. 2001. No. 28(2). P. 201–204.

5. Naumenko M.A., Gyzivaty V.V., Karetnikov S.G., Petrova T.N., Protopopova E.V., Kryuchkov A.M. Natural experiment "Thermal Front in Lake Ladoga, 2010" // *Doklady Earth Sciences*. 2012. No. 444(1). P. 601–605.
6. Tsvetova E.A. Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics // *Hydrobiologia*. 1999. No. 407. P. 37–43.
7. Rodgers G.K. A Note on thermocline development and the thermal bar in Lake Ontario // *Symposium of Garda, Int. Assoc. Scientific Hydrology*. 1966. No. 1(70). P. 401–405.
8. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. No. 43(1–2). P. 61–81.
9. Farrow D.E. A model for the evolution of the thermal bar system // *EJAM*. 2013. No. 24(2). P. 161–177.
10. Parfenova V.V., Shimaraev M.N., Kostornova T.Y., Domysheva V.M., Levin L.A., Dryukker V.V., Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Y., Tsekhanovskii V.V., Logacheva N.F. On the vertical distribution of microorganisms in Lake Baikal during spring deep-water renewal // *Microbiology*. 2000. No. 69. P. 357–363.
11. Mortimer C.H. Lake hydrodynamics // *Mitteilugen Int. Ver. Limnol.* 1974. No. 20. P. 124–197.
12. Kelley D.E. Convection in ice-covered lakes: effects on algal suspension // *J. Plankton Res.* 1997. No. 19(12). P. 1859–1880.
13. Botte V., Kay A. A numerical study of plankton population dynamics in a deep lake during the passage of the Spring thermal bar // *J. Mar. Sys.* 2000. No. 26(3). P. 367–386.
14. Franks P.J., Wroblewski, J.S., Flierl G.R. Behavior of a simple plankton model with food-level acclimation by herbivores // *Marine Biology*. 1986. No. 91. P. 121–129.
15. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Численная модель взаимодействия систем «река – озеро» на примере весеннего термобара в озере Камлупс // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2013. № 5(25). С. 102–115.
16. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA Journal*. 1988. No. 26(11). P. 1299–1310.
17. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Применение двухпараметрической $k-\omega$ -модели турбулентности для исследования явления термобара // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 5(31). С. 104–113.
18. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. No. 31(3). P. 657–662.
19. Mayzaud P., Poulet S.A. The importance of the time factor in the response of zooplankton to varying concentrations of naturally occurring particulate matter // *Limnol. Oceanogr.* 1978. No. 23(6). P. 1144–1154.
20. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake // *Proc. SPIE 9680, 21st International Symposium Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*, 2015. P. 1–8.
21. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. No. 21(3). P. 251–269.
22. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 214 p.
23. Leonard B. A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979. No. 19(1). P. 59–98.
24. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Алгоритм SIMPLIFIED согласования полей скорости и давления для численного моделирования термобара в глубоком озере // *Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям: материалы конференции*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. С. 109–113.
25. Цыденов Б.О. Численное моделирование эффекта весеннего термобара в глубоком озере: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2013. 145 с.

Статья поступила 20.02.2016 г.

Tsydenov B.O. (2016) NUMERICAL SIMULATION OF HYDROBIOLOGICAL PROCESSES DURING THE SPRING THERMAL BAR ON THE BASIS OF THE NUTRIENT – PHYTOPLANKTON – ZOOPLANKTON MODEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 86–97.

DOI 10.17223/19988621/41/9

In this paper, a mathematical model for simulating the hydrodynamic and hydrobiological processes in a temperate water body during the evolution of the spring riverine thermal bar is described. A thermal bar is a narrow zone in a lake where the water, which has a maximum density, sinks from the surface to the bottom. Numerical simulation of the dynamics of plankton ecosystems in case of Kamloops Lake (British Columbia, Canada) is accomplished by using the nutrient – phytoplankton – zooplankton model of Franks et al. (1986). The hydrodynamic model, which includes the Coriolis force due to Earth's rotation, is written in the Boussinesq approximation with the continuity, momentum, energy, and salinity equations. Closure of the simultaneous equation system is performed with a two-parameter Wilcox $k-\omega$ turbulence model and algebraic relations for the coefficients of turbulent diffusion. The convection–diffusion equations are solved by a finite volume method to satisfy the integral conservation laws. The numerical algorithm for the flow and temperature fields' indication is based on a Crank Nicolson difference scheme. In the equations, the convective terms are approximated with the QUICK second-order upstream scheme. The systems of grid equations are solved by the under-relaxation method at each time step. The data from numerical experiments have shown qualitative agreement with results obtained by Holland et al. (2003). Simulations with the variable values of the concentrations of the biological components, coming from the Thompson River, have demonstrated that the high riverine nutrient concentrations do not play a significant role in dynamics of the phytoplankton and zooplankton biomasses; increasing of the phytoplankton in the river leads to a reduction of the nutrient at the location of the thermal bar, and the monotone growth of the riverine zooplankton incoming has a negative impact on the phytoplankton population.

Keywords: plankton, thermal bar, mathematical model, numerical experiment, Kamloops Lake.

TSYDENOV Bair Olegovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: btsydenov@gmail.com

REFERENCES

1. Forel F.A. (1880) La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879-1880. Lac Léman. *L'Écho des Alpes*. 3. pp. 149–161.
2. Tikhomirov A.I. (1959) O termicheskom bare v Yakimvarskom zalive Ladozhskogo ozera [On the thermal bar in Yakimvarsky Bay of Lake Ladoga]. *Izv. VGO*. 91(5). pp. 424–438.
3. Sherstyankin P.P. (1964) Dinamika vod Selenginskogo melkovod'ya v nachale leta po dannym raspredeleniya opticheskikh kharakteristik i temperatury vody [Dynamics of the Selenga shallow waters at the beginning of summer according to the distribution of optical characteristics and water temperature]. In: *Elementy gidrometeorologicheskogo rezhima ozera Baykal* [Elements of the hydrometeorological regime of Lake Baikal]. Moscow; Leningrad: Nauka. 5(25). pp. 29–37.
4. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savel'eva O.S. (2001) Model of formation and development of spring thermal bar. *Water Resources*. 28(2). pp. 201–204. DOI 10.1023/A:1010339919712.
5. Naumenko M.A., Gyzivaty V.V., Karetnikov S.G., Petrova T.N., Protopopova E.V., Kryuchkov A.M. (2012) Natural experiment "Thermal Front in Lake Ladoga, 2010". *Doklady Earth Sciences*. 444(1). pp. 601–605. DOI 10.1134/S1028334X12030282.
6. Tsvetova E.A. (1999) Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics. *Hydrobiologia*. 407. pp. 37–43. DOI 10.1023/A:1003766220781.
7. Rodgers G.K. (1966) A Note on thermocline development and the thermal bar in Lake Ontario. *Symposium of Garda, Int. Assoc. Scientific Hydrology*. 1(70). pp. 401–405.

8. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *Journal of Marine Systems*. 43(1-2). pp. 61–81. DOI 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
9. Farrow D.E. (2013) A model for the evolution of the thermal bar system. *European Journal of Applied Mathematics*. 24(2). pp. 161–177. DOI 10.1017/S0956792512000344.
10. Parfenova V.V., et al. (2000) On the vertical distribution of microorganisms in Lake Baikal during spring deep-water renewal. *Microbiology*. 69. pp. 357–363.
11. Mortimer C.H. (1974) Lake hydrodynamics. *Jubilee symp. 50 years of limnological research, Mitt. Int. Ver. Limnol.* 20. pp. 124–197.
12. Kelley D.E. (1997) Convection in ice-covered lakes: effects on algal suspension. *Journal of Plankton Research*. 19(12). pp. 1859–1880.
13. Botte V., Kay A. (2000) A numerical study of plankton population dynamics in a deep lake during the passage of the Spring thermal bar. *Journal of Marine Systems*. 26(3). pp. 367–386. DOI 10.1016/S0924-7963(00)00046-4.
14. Franks P.J., Wroblewski, J.S., Flierl G.R. (1986) Behavior of a simple plankton model with food-level acclimation by herbivores. *Marine Biology*. 91(1). pp. 121–129. DOI 10.1007/BF00397577.
15. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2013) Chislennaya model' vzaimodeystviya sistem “reka – ozero” na primere vesennego termobara v ozere Kamlups [Numerical model of river-lake interaction in the case of a spring thermal bar in Kamloops Lake]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(25). pp. 102–115.
16. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*. 26(11). pp. 1299–1310.
17. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2014) Primenenie dvukhparametricheskoy $k-\omega$ modeli turbulentnosti dlya issledovaniya yavleniya termobara [Application of the two-parametric $k-\omega$ turbulence model for studying the thermal bar phenomenon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 104–113.
18. Chen C.T., Millero F.G. (1986) Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 31(3). pp. 657–662.
19. Mayzaud P., Poulet S.A. (1978) The importance of the time factor in the response of zooplankton to varying concentrations of naturally occurring particulate matter. *Limnol. Oceanogr.* 23(6). pp. 1144–1154. DOI 10.4319/lo.1978.23.6.1144.
20. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2015) To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake. *Proc. SPIE 9680, 96800H*. pp. 1–8. DOI 10.1117/12.2205687.
21. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*. 21(3). pp. 251–269. DOI 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
22. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press.
23. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 19(1). pp. 59–98. DOI 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
24. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2014) Algoritm SIMPLED soglasovaniya poley skorosti i davleniya dlya chislennogo modelirovaniya termobara v glubokom ozere [SIMPLED algorithm for harmonization of velocity and pressure fields for numerical simulation of the thermal bar in a deep lake]. *Sed'maya Sibirskaya konferentsiya po parallel'nyim i vysokoproizvoditel'nyim vychisleniyam* [Seventh Siberian Conference on Parallel and High Performance Computing]. Proc. of the Conference. Tomsk: TGU Publ. pp. 109–113.
25. Tsydenov B.O. (2013) *Chislennoe modelirovanie effekta vesennego termobara v glubokom ozere* [Numerical modeling of the effect of the spring thermal bar in a deep lake]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.