УДК 519.17

О КОЛИЧЕСТВЕ ШПЕРНЕРОВЫХ ВЕРШИН В ДЕРЕВЕ

В. Н. Салий

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Вершина v дерева T называется шпернеровой вершиной, если входящее дерево $T(v)$, полученное из T ориентацией всех рёбер в направлении к v, обладает шпернеровым свойством: в нём среди наибольших (по числу элементов) подмножеств, состоящих из попарно недостижимых вершин, по крайней мере в одном все вершины равноудалены от v. Приводятся явные способы подсчёта количества шпернеровых вершин в деревьях некоторых типов.

Ключевые слова: *дерево, шпернерова вершина, цепь, звезда, пальма, шеренга, гусеница, кортеж пальм.*

DOI 10.17223/20710410/32/8

ON THE NUMBER OF SPERNER VERTICES IN A TREE

V. N. Salii

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: SaliiVN@info.sgu.ru

A vertex v of a tree T is called a Sperner vertex if the in-tree $T(v)$ obtained from T by orientation of all edges towards v has the Sperner property, i. e. there exists a largest subset A of mutually unreachable vertices in it such that all vertices in A are equidistant to v. Some explicit methods to count the number of Sperner vertices in certain special trees are presented.

Keywords: *graph, Sperner vertex, path, star, palm-tree, rank, caterpillar, train of palm-trees.*

Пусть $G = (V, \alpha)$ — бесконтурный (ориентированный) граф с множеством вершин V и отношением смежности вершин α. *Антицепью* в G называется набор вершин $A \subseteq V$, такой, что никакая вершина, принадлежащая A, недостижима из других вершин этого множества. Например, антицепью является совокупность всех источников графа G, т. е. его вершин, недостижимых из других вершин. Антицепи с наибольшим числом вершин по определению являются главными. Под *высотой вершины* $v \in V$ понимается наибольшая из длин цепей в G, началом которых служит v. Например, все стоки графа G, т. е. вершины, из которых недостижимы другие вершины, имеют высоту 0. Антицепь A будем называть *правильной*, если она состоит из вершин с одинаковой высотой. Говорят, что граф G *обладает шпернеровым свойством*, или что он является *шпернеровым графом*, если среди его главных антицепей есть хотя бы одна правильная. Это равносильно тому, что множество V вершин графа G, упорядоченное отношением достижимости вершин, является шпернеровым упорядоченным множеством. Определяющее свойство для антицепей в конечных упорядоченных множествах впервые рассмотрел Е. Шпернер в 1928 г. [1]. С тех пор оно интенсивно изучается в различных конкретных ситуациях (см., например, ссылки в [2]).

Пусть $T = (V, \alpha)$ — некоторое дерево (неориентированный связный граф без циклов) и $v \in V$ — одна из его вершин. Любая другая вершина u дерева T связана с v единственной цепью. Ориентируя рёбра всех подобных цепей в направлении к v, получим бесконтурный граф с единственным стоком v — входящее дерево $T(v)$ с корнем v. Если $T(v)$ окажется шпернеровым графом, вершина v называется шпернеровой.

Сколько шпернеровых вершин может иметь произвольное дерево?

Вершины всякого дерева по своим степеням разбиваются на три класса: висячие (или листья) имеют степень 1, у проходных вершин степень равна 2, у точек ветвления она не менее 3. *Типом вершины* v в дереве T назовём пару $t(v) = (h(v), b(v))$, где $h(v)$ — наименьшее из расстояний от v до отличных от v висячих вершин; $b(v)$ — наибольшее из расстояний от v до отличных от v точек ветвления.

Теорема 1 (см. также [3, теорема 2]). Вершина v дерева T шпернерова тогда и только тогда, когда $h(v) > b(v)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть v — шпернерова вершина. Тогда во входящем дереве $T(v)$ существует правильная главная антицепь A, все вершины которой имеют одну и ту же высоту $k > 0$. Если $h(v) < k$, то ближайшая к v висячая вершина u дерева T не входит в A. Но если это так, то, присоединив к главной антицепи A вершину u, получим в $T(v)$ антицепь большей, чем у A, длины, что невозможно. Значит, $h(v) \geqslant k$. Допустим, что $b(v) \geqslant h(v)$. Это означает, что в T есть точка ветвления w, удалённая от v не менее чем на k, т. е. имеющая в $T(v)$ высоту $\geqslant k$. Вершина w достижима в T не менее чем из двух висячих вершин. При этом w либо сама входит в антицепь A, либо в A имеется единственная вершина, достижимая из w. Заменив эту вершину (или саму w, если $w \in A$) парой висячих вершин, из которых достижима w, получим антицепь большей, чем у A, длины, что невозможно. Значит, $b(v) < k$ и $h(v) > b(v)$.

Достаточность. Пусть для вершины v дерева T выполняется неравенство $h(v) > b(v)$. Обозначим через A совокупность всех вершин дерева $T(v)$, имеющих высоту $k = h(v)$. Так как все точки ветвления лежат в $T(v)$ ниже уровня k, каждая вершина, входящая в антицепь A, достижима в точности из одной висячей вершины дерева T. Значит, количество вершин в A равно количеству висячих вершин дерева T и, следовательно, A имеет наибольшее возможное для антицепей в $T(v)$ количество элементов, т. е. A — главная в $T(v)$ антицепь. При этом она составлена из вершин с одинаковой высотой, т. е. является правильной. ■

В [3] предложен полиномиальный алгоритм для проверки свойства шпернеровости у произвольной предъявленной вершины дерева. Разумеется, его можно использовать и для установления количества $s(T)$ шпернеровых вершин в дереве T. Вместе с тем представляют интерес и явные способы вычисления величины $s(T)$ для деревьев того или иного частного вида. Приведём некоторые примеры таких расчётов.

1. Цепь (path) $P_n = v_0v_1 \ldots v_n$. Здесь нет точек ветвления и каждая вершина является шпернеровой: $s(P_n) = n + 1$.

2. Звезда (star) S_n, $n \geqslant 3$, — дерево с единственной точкой ветвления (центр звезды) v_0 и n висячими вершинами (лучи) $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Определив типы лучевых вершин $t(v_i) = (2, 1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, убеждаемся, что все они являются шпернеровыми. Входящее дерево $T(v_0)$ имеет правильную главную антицепь, состоящую из лучевых вершин, так что и v_0 — шпернерова, и, следовательно, $s(S_n) = n + 1$.

3. Пальма (palm-tree) $PT_{(l,n)}$, $l \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ — цепь $u_0u_1 \ldots u_l$ (ствол), концевая вершина которой u_l (верхушка) является центром звезды с лучами (листьями) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Для корня u_0 имеем $t(u_0) = (l+1, l)$, для листьев $t(\lambda_i) = (2, 1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для верхушки $h(u_l) = 1$, так что все эти $n+2$ вершин — шпернеровы. Для проходных вершин u_i, $0 < i < l$, ствола имеем $b(u_i) = l - i$, $h(u_i) = \min(i, l+1-i)$. При $i \geqslant l+1-i$, т. е. $i \geqslant [(l+1)/2]$, вершина u_i будет шпернеровой. Таких вершин в стволе имеется $[(l-1)/2]$, так что $s(PT_{(l,n)}) = n + 2 + [(l-1)/2]$.

4. Шеренга (rank) $R = (P^0(v_0^0), P^1(v_0^1), \ldots, P^n(v_0^n); P_n = v_0^0 v_0^1 \ldots v_0^n)$ — объединение некоторого количества $n \geqslant 2$ цепей с выделенными (в каждой по одной) концевыми вершинами, в свою очередь образующими цепь.

Теорема 2. Для любого целого $k \geqslant 1$ существует шеренга, имеющая в точности k шпернеровых вершин.

Доказательство. Построим шеренгу R из шести цепей $P^0 = v_0^0 v_1^0$, $P^1 = v_0^1 v_1^1 v_2^1$, $P^2 = v_0^2 v_1^2 \ldots v_l^2$, $P^3 = v_0^3 v_1^3 v_2^3$, $P^4 = v_0^4 v_1^4$, $P^5 = v_0^5 v_1^5$. Для заданного $k \geqslant 1$ положим $l = 2k-1$. Подсчитаем типы вершин. Для листьев, отличных от v_l^2, получаем: $t(v_1^0) = (4, 5)$, $t(v_2^1) = (4, 5)$, $t(v_2^3) = (4, 4)$, $t(v_1^4) = (3, 4)$, $t(v_1^5) = (3, 5)$ — здесь нет шпернеровых вершин. Для вершин из базисной цепи, отличных от v_0^2, имеем: $t(v_0^0) = (1, 4)$, $t(v_0^1) = (2, 3)$, $t(v_0^3) = (2, 2)$, $t(v_0^4) = (1, 3)$, $t(v_0^5) = (1, 4)$ — и здесь нет шпернеровых вершин. В цепи P^2 при $k = 1$ шпернеровой будет только вершина v_1^2 с $t = (4, 3)$, так как $t(v_0^2) = (1, 2)$. Если $k \geqslant 2$, то шпернеровыми в P^2 будут k вершин $v_{2k-1}^2, v_{k-2}^2, \ldots, v_0^2$, поскольку $t(v_{2k-1}^2) = (2k+2, 2k+1)$, $t(v_{k-2}^2) = (k+1, k)$, $\ldots$, $t(v_0^2) = (3, 2)$. Если же $i \geqslant k-1$, то $h(v_i^2) = 2k-1-i \leqslant i+2 = b(v_i^2)$, и значит, такие вершины — не шпернеровы. В итоге $s(R) = k$. ■

5. Гусеница (caterpillar) — объединение C некоторого количества $k \geqslant 2$ звезд, центры которых образуют (базисную) цепь. Так как у каждого луча u будет $h(u) = 2 \leqslant \leqslant b(u)$ и у центра v каждой звезды $h(v) = 1 < b(v)$, то шпернеровых вершин гусеница не имеет: $s(C) = 0$.

6. Кортеж пальм (train of palms) — объединение TP некоторого количества $n \geqslant 2$ пальм, корни которых образуют (базисную) цепь.

Теорема 3. Для любого целого $k \geqslant 0$ существует кортеж пальм, имеющий в точности k шпернеровых вершин.

Доказательство. Составим кортеж TP_l из шести пальм: $PT^0_{(1,2)}$, $PT^1_{(3,2)}$, $PT^2_{(l,2)}$, $PT^3_{(3,2)}$, $PT^4_{(1,2)}$, $PT^5_{(1,2)}$ с корнями v_0^i, $0 \leqslant i \leqslant 5$, образующими базисную цепь P_5. При вычислении величины $b(v)$ в качестве наиболее удалённой от вершины v точки ветвления выступает v_1^0 или v_1^5. Для всех листьев $h = 2 < b$, и они не шпернеровы. Для корневых вершин, отличных от v_0^2, имеем: $t(v_0^0) = (2, 6)$, $t(v_0^1) = (4, 5)$, $t(v_0^3) = (4, 4)$, $t(v_0^4) = (2, 5)$, $t(v_0^5) = (2, 6)$ — и эти вершины не шпернеровы, также как и верхушки пальм, для которых $h = 1$. При $l = 3$ получаем: $t(v_0^2) = (4, 4)$, $t(v_1^2) = (3, 5)$, $t(v_2^2) = (2, 6)$, и значит, $s(TP_3) = 0$. Если же $l = 2k+3$, $k \geqslant 1$, то в пальме PT^2 шпернеровыми будут вершины v_j^2, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, так как здесь $b = j+4$ и $h = \min(j+5, 2k+4-j) = j+5$, и не будут таковыми вершины v_j^2 при $k \leqslant j \leqslant l-1$: для них $h = \min(j+5, 2k+4-j) = 2k+4-j \leqslant j+4 = b$. В итоге при $k \geqslant 0$ получается $s(TP_{2k+3}) = k$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // Math. Zeitschrift. 1928. V. 27. Nu. 1. S. 544–548.
2. *Салий В. Н.* Шпернерово свойство для многоугольных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. №7. С. 135–137.

3. *Салий В. Н.* Шпернеровы деревья // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 124–127.

REFERENCES

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge. Math. Zeitschrift, 1928, vol. 27, nu. 1, s. 544–548. (in German)
2. *Saliy V. N.* Shpernerovo svoystvo dlya mnogougol'nykh grafov [The Sperner property for polygonal graphs]. Prikladnaya diskretnaya matematika. Prilozhenie, 2014, no. 7, pp. 135–137. (in Russian)
3. *Saliy V. N.* Shpernerovy derev'ya [The Sperner property for trees]. Prikladnaya diskretnaya matematika. Prilozhenie, 2015, no. 8, pp. 124–127. (in Russian)