Вестник Томского государственного университета
Философия. Социология. Политология. 2016. № 2 (34)

УДК 1(091)
DOI: 10.17223/1998863Х/34/21

К.А. Родин

МЕТАФОРА ЗЕРКАЛА И ЭКСТЕНСИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ[1]

Рассматривается понятие экстенсиональной пропозициональной функции Фр.П. Рамсея в контексте программы логицизма Б. Рассела и в контексте различия между интенсиональным и экстенсиональным подходом в философии математики. Проводится анализ аргументов Л. Витгенштейна против использования экстенсиональной функции в порядке замещения некоторых выражений со знаком равенства (тождества) и неравенства. Уточняется метафора зеркала, используемая Витгенштейном в рамках возражения к теории тождества Фр.П. Рамсея. Специализируются некоторые общие моменты несогласия Витгенштейна с программой логицизма.
Ключевые слова: *экстенсиональная функция, тождество, основания математики.*

0. В системе **PM** (Principia Mathematica) Уайтхеда и Рассела класс задается через пропозициональную функцию: некоторый определенный класс будет включать элементы (значения переменной x), удовлетворяющие некоторую определенную пропозициональную функцию fx. Пропозициональная функция fx приписывает аргументам некоторое свойство, и, следовательно, в системе **PM** классы определяются через свойство. А если требуется рассмотреть класс, состоящий из двух индивидов a и b (или любого конечного обозримого количества индивидов), такой класс возможно задать через соответствующую функцию <x=a или x =b> [1]. Понятие класса играет существенную роль в логицистской программе обоснования математики. Задание класса через свойство предполагает особый взгляд на природу математики: Фр. П. Рамсей указывает, что определение класса через свойство исключает из рассмотрения бесконечные неопределимые классы [2. С. 39–40] (разбирая взгляды Рамсея, мы опираемся на работу В.А. Суровцева [3]). Но бесконечные неопределимые классы существенны в математике (опять – при определенном понимании природы математики), и, следовательно, необходимо найти способ включить их в рассмотрение, считает Рамсей. Действительно, определение Рассела предполагает невозможным объединение в единый класс бесконечного числа произвольных элементов, но – только элементов, которые «по-настоящему» обладают некоторым свойством. Задание класса через отличительное свойство называется интенсиональным (в отличие от экстенсионального – когда класс задается перечислением элементов, через объем). Аналогично можно сказать о понятии функции: согласно интенсиональному пониманию функции, функция определяется через формулу. Благодаря формуле (в широком понимании – правилу или алгоритму соотнесения) элементы из области (множества) определения функции соотносятся с элементами из области (множества) значений функции. Например, для функции «x – голубого цвета» множество объектов соотносятся со множеством значений <истина, ложь> благодаря свойству «быть голубого цвета» и возможности

[1] Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации (МК-5659.2016.6).

верификации (понятие пропозициональной функции опирается на интенсиональное понимание). Современное определение функции (восходит к Дирихле) основано на **произвольном** соотнесении элементов множеств: функция есть подмножество A×B для области определения A и области значений B – притом для любого x из множества A существует единственный y из множества B (x, y принадлежат подмножеству A×B). Таким образом, функция соотносит элементы одного множества с элементами другого множества произвольно, вне формулы, алгоритма или правила. Вполне поэтому можно согласиться с Витгенштейном, что «теория множеств началась с понятия функции у Дирихле» [4. С. 102]. Раз Рамсей настаивает на экстенсиональном характере математики, для Рамсея в рамках логицизма должна существовать возможность говорить о бесконечных классах экстенсионально, т.е. через соотнесение объемов (например, теория множеств «основана» на произвольном соотнесении элементов или объемов множеств вне интенсионального определения). Рамсей попытался экстенсионализировать теорию Рассела. В рамках такого проекта Рамсей вводит понятие экстенсиональной функции (далее нас преимущественно будет интересовать определение экстенсиональной функции и критика понятия экстенсиональной функции Витгенштейном).

1. Для Фр. Рамсея определение **PM** для знака тождества не сообразуется с математической практикой (как и интенсиональный подход к понятию функции [2. С. 39–51]). Проект Рамсея по исправлению недостатков программы логицизма связан с особым пониманием математических псевдопропозиций как тавтологий (как показал Мэрион [5], часто такой взгляд был основан на неверном прочтении положений из ЛФТ [6] Витгенштейна). Понятие экстенсиональной функции предоставляет возможность выражать математические тавтологии средствами логики. Экстенсиональная пропозициональная функция (экстенсиональная функция описывается в четвертом разделе работы Рамсея под названием «Основания математики») проистекает «из соответствия, осуществимого или неосуществимого, которое к каждому индивиду присоединяет особую пропозицию. Индивид является аргументом функции, пропозиция – значением функции» [2. С. 75 и далее]. Рамсей приводит и пример такой функции:

Так, ф(Сократ) может быть: Королева Англии умерла.
ф(Платон) – Эйнштейн великий человек.

Экстенсиональная функция произвольно сопоставляет индивидам случайные пропозиции и не является предикативной (не приписывает, не предицирует индивидам никакого свойства).

Для Витгенштейна экстенсиональная пропозициональная функция представляется нонсенсом по двум аргументам. Первое возражение Витгенштейна связано с определением x=y (в системе PM – эт. пропозициональная функция наряду с другими пропозициональными функциями) через экстенсиональные функции. Второе возражение основано на метафоре зеркала.

2. В **PM** определение знака тождества восходит к принципу тождества неразличимых Лейбница:

$x=y. =_{def}: (\phi): \phi!x. \supset . \phi!y$ (PM 13.01): когда каждая предикативная функция, удовлетворяющая x, удовлетворяет также и y, x и y называются тождественными. Аргументы Витгенштейна против такого определения можно сформулировать таким образом:

I. Знак тождества не может ничего говорить об отношении объектов. Действительно, сказать о двух объектах «объекты тождественны» бессмысленно, а сказать о самотождестве одного объекта – значит, вообще ничего не сказать (ЛФТ 5.5303). Поэтому очевидно, что равенство не является отношением между объектами: например, предложение «$(x): fx. \supset . x=a$» говорит только, что a удовлетворяет f, а не что только вещи, имеющие определенное отношение к a, удовлетворяют f (ЛФТ 5.5301).

II. Знак тождества в определении из **PM** не приводит к тавтологии (логической необходимости) и поэтому оказывается ненужным в правильной логической нотации. Нет противоречия в представлении о существовании двух действительно различных (нетождественных) объектов при единовременном совпадении элементарных свойств данных объектов. Объекты будут удовлетворять определению тождества и не будут тождественными (ЛФТ 5.5302).

Устранение знака тождества из системы Рассела приводит к ряду серьезных последствий для логицистской программы обоснования математики. Например, мы не можем включить в рассмотрение конечные классы, задаваемые с помощью знака равенства (мы уже исключили из рассмотрения неопределимые бесконечные классы), и остаемся только с классами, определимыми через предикативные функции. Становится невозможным определить класс с двумя или одним элементом (невозможным становится и определение числа). Рамсей, принимая критику Витгенштейна, не может из-за экстенсионалистской установки допустить такие последствия устранения знака тождества. Рамсей поэтому переопределяет тождество через экстенсиональные функции. Действительно, $(\phi_e). \phi_e x \equiv \phi_e y$ означает, что для любой экстенсиональной функции пропозиция, соотнесённая с x, эквивалентна пропозиции, соотнесенной с y. Когда $x=y$, мы получим тавтологию, ведь выражение оказывается произведением значений (тавтологий) вида $p\equiv p$, $q\equiv q$, $r\equiv r$, а если $x\neq y$, тогда некоторая экстенсиональная функция некоторую пропозицию p припишет некоторому x, а пропозицию $\sim p$ – некоторому y, и, значит, получается противоречие $p\equiv\sim p$ (и все логическое произведение обращается в противоречие). Таким образом, Рамсей предлагает заменить определение тождества Рассела из **PM** на структурно подобное определение тождества через экстенсиональные функции.

Для Витгенштейна нет такой «вещи», как экстенсионально заданные – вне правила или алгоритма – бесконечные множества (подобные множества фигурирует в определении экстенсиональной функции как область определения функции и область значения функции: множество индивидов и множество случайных пропозиций соответственно). И экстенсиональные функции Витгенштейн отрицает потому, что для Витгенштейна не существует функции вне правила соотнесения элементов одного множества с элементами другого множества. Витгенштейн относительно экстенсиональных функций независимо воспроизводит возражение Кронекера к определению функции Дирихле (подробнее об этом: [5. С. 9]). Суть возражения: в отсутствие правила соотнесения экстенсиональную функцию можно задать только через некоторую «идеальную» таблицу. Возражение встречается и у Витгенштейна в The Big Typescript [7. С. 370–390] в разделе «Основания математики» (весь раздел целиком был включен составителями в «Философскую грамматику» [8. С. 289–320]). Действительно, утверждает Витгенштейн, пропозициональную экстенсиональную функцию возможно задать только через таблицу определенного вида:

$fa =_{def} p$

$fb =_{def} q$

$fc =_{def} r$

Подобная таблица конечна или же в некотором неясном смысле «идеальна». И хотя возможно заменить символы fa, fb, fc некоторыми известными пропозициями p, q, r и сказать, что таблица определяет функцию, значит «либо ничего не сказать, либо сказать то же самое, что говорят три определения» [9. С. 316]. Ничего не говорит Витгенштейну и определение тождества через экстенсиональные функции. Определение $(\phi_e).\ \phi_e x \equiv \phi_e y$ оказывается чем-то вроде набора из двух утверждений:

I. $(\phi_e).\ \phi_e x \equiv \phi_e x$: каждая пропозиция эквивалентна себе.

II. $(\phi_e).\ \phi_e x \equiv \phi_e y$: каждая пропозиция эквивалентна каждой пропозиции.

В первом случаем мы можем записать $x=x =_{def}$ тавтология (и далее возможно определить тавтологию через множество {a=a, b=b, c=c} самотождественных объектов), а $x=y =_{def}$ противоречие. Как и в случае с таблицей, для Витгенштейна нет в таком случае никакого **определения** или задания тождества. Вернее, даны определения лишь только для двух знаков: x=x и x=y.

Кроме того, Витгенштейн замечает, что математические уравнения имеют «x=y» форму. Правильное (correct) уравнение формы x=y должно быть тавтологией, а ошибочное уравнение такой же формы – противоречием, потому что правильное уравнение всегда можно привести к форме x=x (в отличие от неправильного). **Но** отсюда не следует, что уравнение формы x=y – будучи действительно тавтологией – должно иметь форму x=x или фактически приводиться к таковой. Перейдем к другому возражению Витгенштейна (с использованием метафоры зеркала).

3. Витгенштейн пишет ([8. С. 315] цитата встречается и в «Философских заметках» [9. С. 143]):

Теория тождества Рамсея содержит ошибку, которую совершил бы любой, кто сказал бы, что возможно использовать картинку с тем же успехом, что и зеркало, пусть даже для единственного положения. Когда такое утверждаем, мы игнорируем, что для зеркала существенно как раз именно то, что из него можно вывести положение тела перед ним, тогда как в случае с картинкой необходимо знать [заранее], что положения, продублированные перед вами, могут объяснить картинку как зеркальный образ.

В рамках теории тождества Рамсея экстенсиональные функции, как и определение знака тождества, основываются на произвольном (внешнем) соотнесении элементов. Определение:

$x=y =_{def} (\phi_e).\ \phi_e x \equiv \phi_e y$ (Витгенштейн для удобства обозначает $(\phi_e).\ \phi_e x \equiv$ $\equiv \phi_e y$ через Q(x, y)) как бы рисует нам одну картинку при x=y (в нотации Витгенштейна будет x=x) и другую при x≠y (в нотации Витгенштейна: x=y). По такой картинке мы не можем сказать ничего о том, имеет ли место равенство/неравенство (в действительности) или же нет. По тексту письма Витгенштейна Рамсею (см. в [4. С. 189–190]) легко восстанавливается полное значение метафоры зеркала. Аргумент Витгенштейн таков: рассмотрим случай, когда Q(x, y) – противоречие (и, стало быть, есть некоторые два нетождественных объекта a и b). Тогда некоторая функция f (якобы в таком случае существующая) будет приписывать некоторому индивиду a пропозицию p, а индивиду b – пропозицию ~p (Витгенштейн называет такую функцию критической f_k). Но давайте, далее, предположим, что значение a и b одно и то же (ведь высказать такой тезис не бессмысленно, в противном случае было бы бессмысленным и утверждение о том, что два объекта – различны (что a и b имеют разные значения), потому что отрицание бессмыслицы дает бессмыслицу, а рассматриваемые тезисы как раз противоположны), a=b. Тогда заменим в критической функции f_k b на a и получим: f_k(a): p и f_k(a): ~p. Критическая функция стала бессмысленной, как и, следовательно, Q(x, y) (потому что не отражает противоречия). Рассмотрим иной случай: пусть c=d (c и d имеют одно значение), но предположим, что небессмысленно, c≠d. Но поскольку Q(x, y) в случае равенства c=d обратилось в тавтологию, критическая функция, которая могла бы сработать для обратного предположения, отсутствует. Здесь, хотя и возможно предположить, что значения c и d нетождественны, Q(x, y) все равно остается тавтологией (останется нарисованной картинкой, не является отображением).

Любое предположение (x=y или x≠y) позволяет нам нарисовать картинку (Q(x, y) или ~Q(x, y)) соответственно). В предположении тождества объектов картинка как бы застывает и не есть «действительное» отображение тождества через тавтологию. У Витгенштейна отображение понимается всегда как внутреннее отношение между образом и отображаемым, тогда как при Q(x, y) тавтология соотносится с тождеством внешним способом (мы знаем, что в данном конкретном случае картинка Q(x, y) может быть интерпретирована как отображение тождества). Кажется, Рамсей понял возражение Витгенштейна (из упомянутого выше письма) не совсем точно и – вне очевидного для Витгенштейна различия между зеркальным отображением и картинкой. В известных ответных замечаниях можно наблюдать некоторое недоумение Рамсея. Рамсею представляется, что возражение Витгенштейна направлено против тезиса, что функция Q(x, y) способна **говорить** нечто о тождестве или нетождестве некоторых объектов (чего Рамсей, конечно, никогда не утверждал) (Фогелин, например, считает: Витгенштейн действительно неправильно понял цель Рамсея и недоумение Рамсея поэтому справедливо [10]). Но Витгенштейн утверждает бессмысленность функции Q(x, y) потому, что такая функция не заменяет (знака) тождества, а просто подставляет картинку тавтологии вместо знака тождества там, где мы **предположили** реальное тождество. Такое предположение (или «внешнее» знание) оказывается решающим. Действительно, можно заменить утверждение (∃x): fx. x≠a: существует такой x, что выполняет функцию f и нетождествен a на (∃x): fx. ~Q(x, a). Если вдруг действительно существует такой x, что выполняет функцию f и нетождествен a, функция Q(x, a) становится противоречием, но мы пишем сразу

~Q(x, a) (что можно прочесть как: неверно, что «имеется» тавтология), будто уверены, что действительно есть такой x, что выполняет f и нетождествен a. Получается, что замена (формально правомерная) не просто переписывает исходное утверждение, но переписывает в предположении, что исходное утверждение истинно (будто заранее известно, что $x \neq a$) (см. также ЛФТ 5.5352). Добавление предположения об истинности исходного утверждения к исходному утверждению и позволяет из Q(x, y) сделать замену-картинку ~Q(x, a). Или можно взять и другой пример из Рамсея [2. С. 37]. Рамсей рассматривает выражение:

$$\exists (m, n).\ \hat{x}(\phi x) \in m.\ \hat{x}(\psi x) \in n.\ m^2 = n^3 + 2:$$

ϕ и ψ – простые предикативные функции и определяют каждая некоторый класс (известно число элементов каждого класса: n и m). $m^2 = n^3 + 2$ была бы тавтологией для тех значений m и n, что удовлетворяют уравнению, и противоречием для остальных. Но чтобы заменить математическое уравнение тавтологией (тем самым убрать уравнение из исходного выражения), нужно предположить, что m и n действительно обращают равенство в тавтологию вида x=x. Например, $1^2 = (-1)^3 + 2$. Вне такого предположения замена уравнения на некоторую функцию Q сомнительна, ведь такая функция не отображает (в смысле зеркала) $m^2 = n^3 + 2$, но дает одну картинку при выполнении равенства и другую в обратном случае. Можно сказать, что главная проблема с функцией Q(x, y) не связана с тем, что она формально заменяет некоторые знаки вида x=y и $x \neq y$ неправильно (замена возможна) или что Рамсей пытается сказать о тождестве объектов (такое невозможно). Для Витгенштейна Q(x, y) – никакая не функция, а лишь одна картинка в одном случае и другая в другом. [Кроме того, возвращаясь к определению тождества, необходимо ли, чтобы при $x \neq y$ среди множества экстенсиональных функций нашлась хотя бы одна, приписывающая x пропозицию p, а y – ~p. Даже при бесконечном множестве экстенсиональных функций все равно возможно, чтобы все приписывали x и y одну пропозицию p (приписывая различные пропозиции иным различным индивидам)]. Еще один пример (и аргумент в поддержку возражения Витгенштейна) связан с попыткой «переписать» аксиому бесконечности так, чтобы устранить эмпирическую проблему количества вещей в мире. Выражение ($\exists$x): x=x представляется Рамсею логической суммой тавтологий для всех значений переменной. Однако если предположить, что в мире нет индивидов (самотождественных объектов), выражение сразу становится бессмысленным (подобное рассуждение применимо к двух, трем и так далее объектам). Как и в случае с заменой знака тождества, из предположения о несуществовании индивида (индивидов) следует, что утверждение о существовании индивидов не имеет смысла. И обратно: из предположения о существовании индивидов (выраженного картинкой тавтологии) следует, что утверждение о несуществовании индивидов не имеет смысла. Витгенштейн скажет, что из бессмыслицы и следует бессмыслица (по теме Рамсей и аксиома бесконечности см. подробнее [3. С. 203–232].

4. На примере полемики вокруг экстенсиональных пропозициональных функций хорошо просматривается отношение Витгенштейна к программе логицизма (в исходном варианте Рассела и в изводе Рамсея). Безусловно неприемлемым было для Витгенштейна произвольное экстенсиональное задание множества через объем (Витгенштейн отчетливо сознавал, что понятие функции Дирихле было важным в истории появления теории множеств). И теория классов (для удобства не будем различать между классом и множеством) в **PM** представлялась Витгенштейну излишней: «теория классов в математике совершенно ненужная» (ЛФТ 6.031). Математическая общность (для Витгенштейна) не случайная и не произвольная общность. Витгенштейн путем элиминации знака тождества из правильной логической нотации отвергает понятие эквивалентности, на котором строится определение числа у Фреге и Рассела (по Витгенштейну, любое соответствие должно быть материальным и обозримым (например, чашки и чайные ложки), либо должно основываться на некотором правиле), вообще отвергает теорию классов и теорию множеств и, соответственно, отвергает проект Рамсея по экстенсионализации математики (ведь математика, по Рамсею, должна иметь дело не с предикативными функциями или внутренними отношениями, но с возможными и произвольными отношениями по объему).

Литература

1. *Уайтхед А.Н.* Рассел Б. Основания математики: в 3 томах. Самара: Самарский университет, 2005–2006.

2. *Рамсей Фр.П.* Философские работы / пер. с англ. В.А. Суровцева. М.: Канон+, 2011.

3. *Суровцев В.А.* Ф.П. Рамсей и программа логицизма. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012.

4. *Ludwig* Wittgenstein and the Vienna Circle (from the notes of F. Waismann). Oxford: Blackwell, 1979.

5. *Marion M.* Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1998.

6. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М.: Канон+, 2008.

7. *Wittgenstein L.* The Big Typescript: TS 213. Oxford: Blackwell, 2013.

8. *Wittgenstein L.* Philosophical Grammar. Berkeley & Los Angeles: University of California Press, 2005.

9. *Wittgenstein L.* Philosophical Remarks. Oxford: Blackwell, 1975.

10. *Fogelin R.J.* Wittgenstein on Identity // Synthese 56. P. 141–154.

Rodin K.A. Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation)
DOI: 10.17223/1998863X/34/21

THE MIRROR METAPHOR AND THE NOTION OF AN EXTENSION FUNCTION

Keywords: function in extension, identity, the foundation of mathematics

The aim of this article is to analyze the notion of the extensional propositional function (introduced by Frank P. Ramsey) in the context of logicism program in a field of foundations of mathematics and in the context of opposition between intentionalism and extensionalism. In what follows the article consider Wittgenstein's arguments against the use of function-in-extension as a replacement in place of identity sign. In elucidating the mirror metaphor (used by Wittgenstein in his controversy with Ramsey) I try to make specialized some crucial points of Wittgenstein's disagreement with logicism as a kind of philosophical approach to mathematics.

References

1. Whitehead, A.N. & Rassel, B. (2005–2006) *Osnovaniya matematiki: v 3 tomakh* [Foundations of Mathematics: In 3 vols]. Translated from English. Samara: Samara State University.

2. Ramsay, Fr.P. (2011) *Filosofskie raboty* [Works on Philosophy]. Translated from English by V.A. Surovtsev. Moscow: Kanon+.

3. Surovtsev, V.A. (2012) *F.P. Ramsey i programma logitsizma* [F.P. Ramsay and logicism program]. Tomsk: Tomsk State University.

4. Waismann, F. (1979) *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*. Oxford: Blackwell.

5. Marion, M. (1998) *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

6. Wittgenstein, L. (2008) *Logiko-filosofskiy traktat* [Tractatus Logico-Philosophicus]. Translated from German by I. Dobronravov, D. Lakhuti. Moscow: Kanon+.

7. Wittgenstein, L. (2013) *The Big Typescript: TS 213*. Oxford: Blackwell.

8. Wittgenstein, L. (2005) *Philosophical Grammar*. Berkeley & Los Angeles: University of California Press.

9. Wittgenstein, L. (1975) Philosophical Remarks. Oxford: Blackwell.

10. Fogelin, R.J. (1983) Wittgenstein on Identity. *Synthese*. 56. pp. 141–154.