

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2016

№ 4(42)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenschikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Igor A. Aleksandrov, Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бубенчиков А.М., Казакиявичюс С.М., Костарев А.А., Щербаков Н.Р., Щербакова И.В. Математическое моделирование профильной фрезы для обработки деталей цилиндрической передачи	5
Кыров В.А. Собственно гельмгольца плоскость как финслерова геометрия	15
Мисяков В.М. Вполне транзитивные, транзитивные абелевы группы и некоторые их обобщения	23
Рахмелевич И.В. О решениях двумерного уравнения Монжа – Ампера со степенной нелинейностью по первым производным	33
Славолюбова Я.В. Ассоциированные контактные метрические структуры на 7-мерной единичной сфере S^7	44

МЕХАНИКА

Борзенко Е.И., Дьякова О.А. Исследование течения вязкой жидкости в Т-образном канале с условиями прилипания – скольжение на твердой стенке	58
Дорогов Ю.И. Устойчивость горизонтального упругого стержня	70
Ершов И.В. Устойчивость течения Куэтта двухатомного газа в условиях вязкой стратификации и возбуждения колебательной моды	84
Лобода Е.Л., Матвиенко О.В., Агафонцев М.В., Рейно В.В. Оценка масштабов турбулентности в пламени при диффузионном горении дизельного топлива	100
Марценко А.А., Шваб А.В. Динамика плотного слоя гранулированной среды в пневматическом циркуляционном аппарате	115
Тузov Ю.В., Папиров И.И. Влияние параметров прокатки на структуру и механические характеристики бериллиевых листов	123
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	133

CONTENTS

MATHEMATICS

Bubenchikov A.M., Kazakavichyus S.M., Kostarev A.A., Scherbakov N.R., Scherbakova I.V. Mathematical simulation of a profile cutter for processing parts of a cylindrical gear	5
Kyrov V.F. The properly helmholtz plane as Finsler geometry	15
Misyakov V.M. Fully transitive, transitive abelian groups and some their generalizations.....	23
Rakhmelevich I.V. On solutions of the Monge – Ampere equation with power-law non-linearity with respect to first derivatives	33
Slavolyubova Ya.V. Associated contact metric structures on the 7-dimensional unit sphere S^7	44

MECHANICS

Borzenko E.I., Diakova O.A. Investigation of viscous fluid flow in T-shaped channel with no slip/slip boundary conditions on the solid wall	58
Dorogov Yu.I. Stability of a horizontal elastic bar	70
Ershov I.V. Stability of the Couette flow of a diatomic gas in conditions of viscous stratification and vibrational mode excitation	84
Loboda E.L., Matvienko O.V., Agafontsev M.V., Reyno V.V. Evaluation of the turbulence scale in a flame at the diffusion combustion of diesel fuel	100
Martsenko A.A., Shvab A.V. The dynamics of a dense layer of granular medium in the circulating pneumatic apparatus.....	115
Tuzov Yu.V., Papirov I.I. Effect of the rolling parameters on the structure and mechanical properties of the beryllium sheets	123
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	133

МАТЕМАТИКА

УДК 514.8, 62.342

DOI 10.17223/19988621/42/1

**А.М. Бубенчиков, С.М. Казакиявичюс, А.А. Костарев,
Н.Р. Щербаков, И.В. Щербакова**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЬНОЙ ФРЕЗЫ
ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ**

При обработке поверхностей деталей передаточного механизма используются различные типы фрез (сферические, тороидальные и др.). Стоимость специального профильного инструмента несколько выше, чем таких фрез. Но увеличение стоимости инструмента окупается значительным сокращением машинного времени обработки деталей. Построена математическая модель поверхности профильной фрезы (как поверхности вращения) для обработки деталей цилиндрической передачи с эксцентриково-циклоидальным зацеплением. Создана компьютерная программа для определения радиусов круговых сечений фрезы для заданного набора смещений по оси вращения.

***Ключевые слова:** профильная фреза, эксцентриково-циклоидальное зацепление, касание кривых.*

В [1, 2] были построены математические модели процесса формообразования деталей цилиндрического и конического передаточного механизмов с эксцентриково-циклоидальным зацеплением (ЭЦ-зацеплением [3]) с помощью сферических и тороидальных фрез. В [4] было рассмотрено построение поверхности профильной фрезы для обработки входной детали цилиндрического механизма с ЭЦ-зацеплением. В данной работе моделируется построение поверхности профильной фрезы для обработки обеих деталей (входной и выходной) цилиндрического механизма с ЭЦ-зацеплением. Профильные фрезы позволяют получать поверхность впадины зубчатых колёс методом копирования «за один заход», в отличие от сферических и тороидальных фрез, обработка которыми происходит последовательным (многозаходным) удалением части металла с заготовки детали. Увеличение стоимости профильного инструмента окупается значительным сокращением машинного времени обработки деталей. Входную и выходную детали передаточного механизма принято называть «шестерней» и «колесом» соответственно.

**1. Моделирование поверхности профильной фрезы
для обработки зуба шестерни**

Выпишем константы, входящие в уравнения поверхностей деталей:

A_w – межцентровое расстояние (расстояние между параллельными осями вращения деталей);

ε – эксцентриситет;

z_1 – количество зубьев шестерни;

z_2 – количество зубьев колеса;

$n = z_2/z_1 + 1$;

ρ – радиус окружности сечения зуба шестерни;

l – размер деталей по оси вращения;

r_c – радиус цилиндрического барабана, на котором расположены зубья шестерни;

K – количество сечений поверхности фрезы;

μ_i – высота подъема сечения ($i = 0, 1, \dots, K$);

r_i – радиусы окружностей сечения фрезы, для различных значений μ_i ;

η – сдвиг оси фрезы.

Поверхность зуба шестерни в цилиндрической передаче с ЭЦ-зацеплением [1] образована окружностями, расположенными в параллельных плоскостях, причем центры этих окружностей лежат на винтовой линии, принадлежащей цилиндру радиуса ε (червячный элемент). Примем ось вращения колеса за ось OZ , а ось вращения шестерни направим по прямой, параллельной оси OZ , смещенной вдоль оси OX на величину Aw . Тогда параметрические уравнения поверхности зуба шестерни можно записать в виде вектор-функции двух аргументов:

$$S(v, \alpha) = \begin{pmatrix} Aw - \varepsilon \cos v + \rho \cos \alpha \\ -\varepsilon \sin v + \rho \sin \alpha \\ \frac{lr v z_1}{2\pi} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha = 0, \dots, 2\pi$, $v = 0, \dots, 2\pi/z_1$.

Поверхность фрезы будем строить как семейство окружностей в плоскостях, перпендикулярных оси фрезы, с центрами, лежащими на этой оси. При этом радиус каждой из этих окружностей будет определяться из условия касания ее с плоской кривой – сечением зуба плоскостью окружности. Идеальная прямая оси фрезы пересекает ось вращения шестерни под прямым углом и расположена на равных удалениях от зубьев шестерни. На практике, дабы при обработке одной боковой поверхности зуба избежать контакта с другой боковой поверхностью, вводят величину η малого параллельного сдвига оси фрезы (сохраняя перпендикулярность оси вращения шестерни). На рис. 1 изображено положение оси фрезы в плоском сечении шестерни, перпендикулярном оси ее вращения, для $z_1 = 4$. Четыре окружности – сечения зубьев шестерни имеют радиус ρ , большая окружность – радиус r_c .

При таком расположении оси фрезы ее уравнения в плоскости сечения имеют вид

$$Osf(\mu) = \begin{pmatrix} Aw - r_c \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + \eta \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ r_c \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + \eta \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При $\mu = 0$ из (2) получаем координаты точки M_0 , через которую проходит плоскость первой окружности сечения поверхности фрезы. Положение плоскости последней такой окружности определяет точка пересечения M_1 оси фрезы с касательной к окружности сечения зуба шестерни, перпендикулярной этой оси (см. рис. 1). Запишем уравнение этой касательной в нормальном виде:

$$\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left[x - \left(Aw - \rho \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) - \varepsilon \right) \right] - \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left(y - \rho \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right) = 0. \quad (3)$$

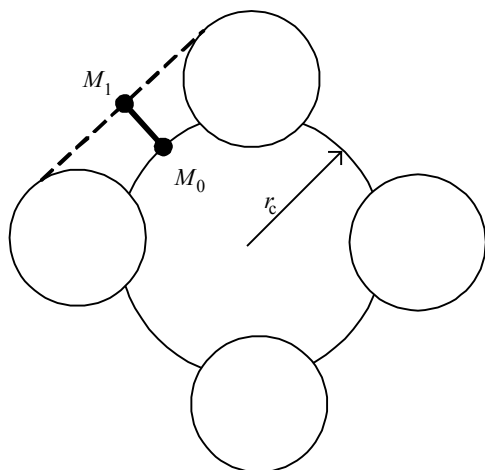


Рис. 1. Сечение входной детали (шестерни) цилиндрической передачи в ЭЦ-зацеплении для $z_1 = 4$. Показано положение оси профильной фрезы и касательной к окружности сечения первого зуба шестерни, перпендикулярной оси фрезы (пунктирная линия)

Fig. 1. Cross section of the cylindrical transmission inlet part (gear) in EC-gearing for $z_1 = 4$. Position of the profile cutter axis and tangent to the section circle of the first gear tooth perpendicular to the cutter axis (dashed line)

Тогда расстояние μ_1 от точки M_0 до касательной (3) получится в результате подстановки в (3) координат точки M_0 :

$$\mu_1 = \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + \rho - r_c.$$

Таким образом, плоскости, перпендикулярные оси фрезы, в которых располагаются окружности, образующие поверхность фрезы, проходят через точки M_0 и M_1 оси фрезы, т.е. при изменении параметра μ в (2) от 0 до μ_1 . Уравнения семейства этих плоскостей можно записать в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left[x - \left(Aw - (r_c + \mu) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right) \right] - \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left[y - (r_c + \mu) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right] = 0, \quad (4)$$

где $\mu = 0, \dots, \mu_1$.

Теперь получим уравнения семейства кривых – сечений поверхности зуба шестерни плоскостями семейства (4). Для этого подставим в (4) вместо x и y две первые координаты вектор-функции (1), задающей поверхность зуба шестерни. В результате получим соотношение между параметрами v , α , и μ , из которого можно получить выражение v через α и μ :

$$v(\alpha, \mu) = \frac{-\pi}{z_1} + \arccos\left(\frac{\rho \cos\left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1}\right) + r_c + \mu}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), получаем искомые уравнения семейства плоских кривых – сечений зуба шестерни плоскостями семейства (4):

$$\text{Sem}(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} Aw - \varepsilon \cos(v(\alpha, \mu)) + \rho \cos \alpha \\ -\varepsilon \sin(v(\alpha, \mu)) + \rho \sin \alpha \\ \frac{lr v(\alpha, \mu) z_1}{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Именно этих кривых должны касаться окружности, образующие поверхность профильной фрезы. Эти окружности располагаются в плоскостях семейства (4), их центры лежат на оси фрезы (2), а радиусы r меняются в зависимости от

параметра μ семейства (4). Исходя из этого, запишем уравнения семейства таких окружностей (пока с произвольным радиусом r) в виде

$$Okr(\beta, \mu) = \begin{pmatrix} Aw - (r_c + \mu) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r \cos \beta + \eta) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ (r_c + \mu) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r \cos \beta + \eta) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ r \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В формулах (5) – (7) $\mu = 0, \dots, \mu_1$. В каждом сечении μ окружность (7) должна касаться кривой (6), т.е. должно обращаться в нуль скалярное произведение векторов:

$$(M_0 - Sem(\alpha, \mu), Sem'(\alpha, \mu)) = 0, \quad (8)$$

здесь $M_0 = Osf(0)$, а через $Sem'(\alpha, \mu)$ обозначена производная вектор-функции $Sem(\alpha, \mu)$ по параметру α :

$$Sem'(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} \varepsilon \sin(v(\alpha, \mu)) v'(\alpha, \mu) - \rho \sin \alpha \\ \varepsilon \cos(v(\alpha, \mu)) v'(\alpha, \mu) - \rho \cos \alpha \\ \frac{lr v'(\alpha, \mu) z_1}{2\pi} \end{pmatrix},$$

$$v'(\alpha, \mu) = \frac{\rho \sin\left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1}\right)}{\left(\varepsilon^2 - \left[\rho \cos\left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1}\right) + r_c + \mu\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для решения уравнения (8) составлена компьютерная программа, которая для каждого значения

$$\mu_i = \frac{\mu_1}{K} i$$

(K – задаваемое количество сечений поверхности фрезы) определяет начальное приближение для нахождения корня функции в левой части уравнения (8), а затем с помощью встроенной функции *root* пакета MathCad находит этот корень α_i . Далее, для определения радиуса окружности r_i , касающейся сечения зуба шестерни, соответствующего μ_i , потребуем наличия общей точки у этих кривых, т.е. приравняем координаты вектор-функций (6) и (7). Равенство вторых и третьих координат дает систему двух уравнений:

$$r \cos \beta = \frac{-\varepsilon \sin(v(\alpha, \mu)) + \rho \sin \alpha - (r_c + \mu) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right)} - \eta,$$

$$r \sin \beta = \frac{lr v(\alpha, \mu) z_1}{2\pi},$$

из которой находим искомые радиусы окружностей для каждого значения μ_i :

$$r_i = \sqrt{\left\{ \frac{-\varepsilon \sin(v(\alpha_i, \mu_i)) + \rho \sin \alpha_i - (r_c + \mu_i) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right)} - \eta \right\}^2 + \left\{ \frac{lr v(\alpha_i, \mu_i) z_1}{2\pi} \right\}^2}.$$

Таким образом, поверхность профильной фрезы получена как семейство окружностей вида (7), т.е. как поверхность вращения:

$$Fr(\beta, i) = \begin{pmatrix} Aw - (r_c + \mu_i) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r_i \cos \beta + \eta) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ (r_c + \mu_i) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r_i \cos \beta + \eta) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ r_i \sin \beta \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 изображена профильная фреза, смоделированная по вышеописанной схеме. Показана плоскость сечения фрезы, перпендикулярная ее оси. В этой плоскости выделена линия сечения зуба шестерни; этой линии касается окружность сечения фрезы.

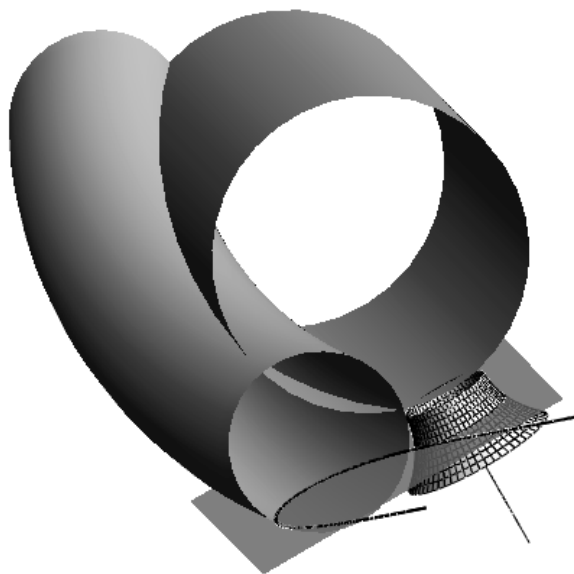


Рис. 2. Профильная фреза для обработки поверхности зуба шестерни в передаче с ЭЦ-зацеплением. Показана плоскость сечения, перпендикулярная оси фрезы, и линия сечения зуба шестерни этой плоскостью

Fig. 2. Profile cutter for processing the surface of the gear tooth in a transmission with EC-gearing. The cross section plane (perpendicular to the cutter axis) and line of the tooth section by this plane are shown

2. Моделирование поверхности профильной фрезы для обработки зуба колеса

Поверхность выходной детали (колеса) образована вращением плоской циклоидальной кривой вокруг оси вращения колеса с одновременным смещением ее вдоль этой оси. Этой кривой является эквидистанта эпитрохоиды [5]. Зададим эпитрохоиду в виде вектор-функции аргумента $\tau = 0, \dots, 2\pi l$:

$$Te(\tau) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \tau + Aw \cos \frac{\tau}{n} \\ -\varepsilon \sin \tau + Aw \sin \frac{\tau}{n} \end{pmatrix}.$$

Эквидистанту эпитрохоиды (кривую, удаленную по нормальям от эпитрохоиды на величину ρ) запишем в виде

$$E(\tau) = Te(\tau) + \rho \frac{Ne(\tau)}{|Ne(\tau)|}, \quad (9)$$

где

$$Ne(\tau) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \tau - \frac{Aw}{n} \cos \frac{\tau}{n} \\ \varepsilon \sin \tau - \frac{Aw}{n} \sin \frac{\tau}{n} \end{pmatrix}$$

– вектор нормали в точке эпитрохоиды.

Поверхность выходной детали запишем в виде вектор-функции двух аргументов:

$$Ev(v, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \frac{v}{n-1} E(\tau)_1 + \sin \frac{v}{n-1} E(\tau)_2 \\ -\sin \frac{v}{n-1} E(\tau)_1 + \cos \frac{v}{n-1} E(\tau)_2 \\ \frac{lr}{2\pi} v \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $v = 0, \dots, 2\pi$ – угол поворота входной детали, $v/(n-1)$ – угол поворота эквидистанты. Здесь обозначения $E(\tau)_1$, $E(\tau)_2$ означают соответствующие координаты вектор-функции (9), которые являются скалярными функциями.

Ось OX лежит на оси симметрии первого профиля зуба колеса и проходит через точку $Ev(0,0)$. Начальное положение оси фрезы – параллельно оси OX со смещением по оси OY на малую величину η . Это смещение, как и в случае шестерни (см. п.1), необходимо для того, чтобы при обработке одной боковой поверхности зуба не касаться другой боковой поверхности. Уравнение оси фрезы можно записать в виде вектор-функции

$$Osf(\mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем уравнение семейства плоскостей, перпендикулярных оси фрезы, в виде

$$X = E(0)_1 + \mu \quad (11)$$

и найдем кривые, получающиеся в сечениях этими плоскостями поверхности (10). Для этого приравняем правую часть (11) первой координате вектор-функции (10) и из получившегося уравнения

$$\cos\left(\frac{\nu}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \sin\left(\frac{\nu}{n-1}\right)E(\tau)_2 = E(0)_1 + \mu$$

найдем зависимость между параметрами ν и τ :

$$\nu(\tau, \mu) = (n-1) \cdot \arctg \left(\frac{E(\tau)_1 [E(\tau)_2 (E(0)_1 + \mu) + Ed(\tau, \mu)]}{E(\tau)_1^2 (E(0)_1 + \mu) - E(\tau)_2 Ed(\tau, \mu)} \right),$$

где
$$Ed(\tau, \mu) = \sqrt{-E(\tau)_1^2 ((E(0)_1 + \mu)^2 - E(\tau)_1^2 - E(\tau)_2^2)}.$$

Подставляя $\nu(\tau, \mu)$ в (10) вместо ν , получаем уравнение семейства сечений зуба колеса плоскостями, перпендикулярными оси фрезы (μ – параметр семейства):

$$Sem(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ -\sin\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_2 \\ \nu(\tau, \mu) \frac{z}{2\pi} lr \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Этих кривых должны касаться окружности, образующие поверхность профильной фрезы. Эти окружности располагаются в плоскостях семейства (13), их центры лежат на оси фрезы, а радиусы r меняются в зависимости от параметра μ семейства (13). Исходя из этого, запишем уравнения семейства таких окружностей в виде

$$Okr(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ r \cos(\alpha) + \eta \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Требование касания окружностей (14) с плоскими кривыми сечений (13) осуществляется как и в п.1 в два этапа. Во-первых, приравниваем координаты вектор-функций (13) и (14), что приводит к системе двух уравнений (первые координаты совпадают тождественно), из которых можно найти зависимости r и α от τ для каждого значения μ :

$$r(\tau, \mu) = \sqrt{\left[-\sin\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_2 - \eta \right]^2 + \left(\nu(\tau, \mu) \frac{z}{2\pi} lr \right)^2}, \quad (15)$$

$$\alpha(\tau, \mu) = \arctg \frac{lr \nu(\tau, \mu) z}{2\pi \left[-\sin\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_2 - \eta \right]} + \pi. \quad (16)$$

Во-вторых, как и в п.1 (см. (8)), должно обращаться в нуль скалярное произведение векторов:

$$(Osf(\mu) - Sem(\tau, \mu), Sem'(\tau, \mu)) = 0.$$

Это уравнение на τ при переходе к координатам имеет весьма громоздкий вид и решается с помощью специальной компьютерной программы. В результате для каждого значения высоты подъема сечения μ получаем значение $\tau\mu = \tau(\mu)$. Подставляя в (15) $\tau(\mu)$ получаем значения радиусов $r(\mu)$ окружностей сечений фрезы для каждого значения μ . Теперь из (14) получается уравнение поверхности фрезы:

$$Fr(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ r(\mu) \cos(\alpha) + \eta \\ r(\mu) \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Если $\tau(\mu)$ подставить в (16), то получим параметр $\alpha(\mu)$ точки касания окружности сечения фрезы с кривой сечения зуба колеса (для каждого значения μ). Координаты всех точек касания получатся при подстановке $\alpha(\mu)$ в (17). Эти точки показаны на рис. 3.

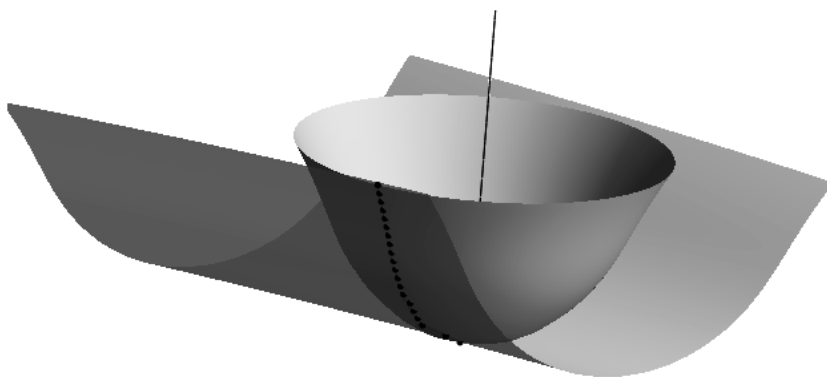


Рис. 3. Профильная фреза для обработки зуба колеса

Fig. 3 Profile cutter for processing the wheel tooth

Полученные координаты точек поверхности профильного инструмента используются для изготовления такого инструмента на специальных станках. Это с успехом используется в ЗАО «Технология маркет» (Томск, ОЭЗ) при необходимости резкого сокращения времени обработки зубчатых колёс для мелкосерийного производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камчатный С.А., Сквородин А.В., Становской А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса сближения поверхностей при формообразовании деталей передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 15–24.
2. Камчатный С.А., Кузнецов В.М., Сквородин А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса формообразования деталей конического передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2014. 2(28). С. 5–17.
3. Kazakyavichyus S.M., Stanovskoy V.V., Remneva T.A., Kuznetsov W.M., Bubentchikov A.M., Shcherbakov N.R.. Perfomance of eccentric-cycloid engagement with change in the interaxial distance: Modification of tooth configuration // Russian Engineering Research. 2011. V. 31. No. 3. P. 197–199.

4. Bubenchikov A.M., Kazakavitschyus S.M., Shcherbakov N.R. Mathematical simulation of a profile cutter as a surface of revolution // IOP Conf. Series. Materials Science and Engineering. 124 (2016) 012095. doi:10.1088/1757-899X/124/1/012095.
5. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 118.

Статья поступила 16.05.2016 г.

Bubenchikov A.M, Kazakavichyus S.M., Kostarev A.A., Scherbakov N.R., Scherbakova I.V. (2016) MATHEMATICAL SIMULATION OF A PROFILE CUTTER FOR PROCESSING PARTS OF A CYLINDRICAL GEAR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42), pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/42/1

Various types of cutters (spherical, toroidal, etc.) are used for processing surfaces of transmission gear parts. The cost of a special forming tool is somewhat higher than that of such cutters. However, the increase in the cost pays a significant reduction in time necessary for processing parts. The paper presents mathematical simulation of a profile cutter (as a surface of revolution) for processing parts of a cylindrical transmission gear with an eccentrically cycloidal gearing (EC-gearing). In part 1 this problem is solved for the input part. The surface of the cutter is constructed as a family of circles with increasing radii in planes perpendicular to the axis of the cutter, the centres lying on this axis. We have obtained an equation for the family of curves, which are cross sections of the tooth surface of the gear by these planes. It is these curves that must be touched by circles forming the surface of the profile cutter. The requirement of the circles touching the curves of the family leads to a system of equations which allows finding the radii of the circles depending on the height of the cross section rise. The solution to this system is found analytically, which eventually leads to one equation for one unknown. The root of this transcendental equation is found numerically. A similar scheme is used in part 2 to find the equation of the profile cutter's surface for the output part. A computer program has been made aiming to specify the radii of the cutter's circular cross-sections for a given set of displacements along the axis of rotation. The work provided substantial assistance in manufacturing EC-engagement parts for gears of various types.

Keywords: profile cutter, eccentrically cycloidal (EC) gearing, contingency of curves.

BUBENCHIKOV Aleksey Michailovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: alexy121@mail.ru

KAZAKAVITSCHJUS Sergei Matveevich
(CJSC Technology market Tomsk, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tm@ec-gearing.ru

KOSTAREV Artem Andreevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: artem_kost@bk.ru

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nrs@math.tsu.ru

SHCHERBAKOVA Irina Vladimirovna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nrs@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Kamchatnyy S.A., Skovorodin A.V., Stanovskoy A.V., Shcherbakov N.R. (2012) Matematicheskoe modelirovanie protsessa sblizheniya poverkhnostey pri formoobrazovanii detaley peredatochnogo mekhanizma s ETs-zatsepleniem [Mathematical simulation of the process of surface approaching when generating the geometry of details of the driving gear with EC-gearing]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 15–24.
2. Kamchatnyy S.A., Kuznetsov W.M., Skovorodin A.V., Shcherbakov N.R. (2014) Matematicheskoe modelirovanie protsessa formoobrazovaniya detaley konicheskogo peredatochnogo mekhanizma s ETs-zatsepleniem [Mathematical simulation of the formbuilding of the conic driving gear details]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 5–17.
3. Kazakyavichyus S.M. et al. (2011) Performance of eccentric-cycloid engagement with change in the interaxial distance: Modification of tooth configuration. *Russian Engineering Research*. 31(3). pp. 197–199.
4. Bubenichikov A.M., Kazakavitschyus S. M., Shcherbakov N. R. Mathematical simulation of a profile cutter as a surface of revolution. *IOP Conf. Series. Materials Science and Engineering*. 124 (2016) 012095. doi:10.1088/1757-899X/124/1/012095.
5. Savelov A.A. (1960) *Flat Curves*. Moscow: St. Publ. Phys. Math. Lit.

УДК 514.756:514.763.6
DOI 10.17223/19988621/42/2

В.А. Кыров

СОБСТВЕННО ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ПЛОСКОСТЬ КАК ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

Г.Г. Михайличенко была построена полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий. Она содержит как хорошо известные геометрии (евклидову, псевдоевклидову, симплектическую, сферическую и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцеву, псевдогельмгольцеву, дуальногельмгольцеву и симплициальную). Простой анализ доказывает однородность метрической функции собственно гельмгольцевой геометрии, поэтому данная геометрия принадлежит классу финслеровых пространств. Применяются методы финслеровой геометрии для исследования собственно гельмгольцевой двумерной геометрии: проверяются аксиомы, находится финслеров метрический тензор, финслеров основной тензор, вычисляется специальный тензор кривизны.

Ключевые слова: метрическая функция, собственно гельмгольцева геометрия, финслерова геометрия.

Г.Г. Михайличенко в начале 80-х годов 20 века была построена полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий [1], то есть геометрий, для которых шесть взаимных расстояний между четырьмя произвольными точками функционально связаны. В таких геометриях расстояние понимается в обобщенном смысле как значение некоторой функции, называемой метрической. Выполнение метрических аксиом не предполагается. Все эти геометрии наделены максимальной подвижностью, то есть для них существуют группы движений максимальной размерности, равной трем [2, 3]. Классификация таких двумерных геометрий содержит как хорошо известные геометрии (евклидову, псевдоевклидову, симплектическую, сферическую и т.д.), так и неизвестные (собственно гельмгольцеву, псевдогельмгольцеву, дуальногельмгольцеву и симплициальную). В данной работе применяются методы изучения финслеровых пространств для исследования собственно гельмгольцевой двумерной геометрии.

1. Собственно гельмгольцева плоскость

Рассмотрим арифметическую плоскость R^2 и метрическую функцию в ней [1]:

$$f(x, y) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2] e^{2\gamma \arctg \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

где $\gamma = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, функция $\arctg \frac{x^2}{x^1}$ принадлежит классу C^∞ , причем при

$x^1 > 0$, $\arctg \frac{x^2}{x^1} \in (-\pi/2, \pi/2)$, а при $x^1 < 0$, $\arctg \frac{x^2}{x^1} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Рассмотрим

касательную плоскость $T_x(R^2)$ к R^2 в произвольной точке $x = (x^1, x^2)$. Обозна-

чим через $T(R^2)$ касательное расслоение. Зададим в прямом произведении $R^2 \times T(R^2)$ метрическую функцию

$$f(u) = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}}, \quad (1)$$

где $u \in T_x(R^2)$. Касательный вектор $u \in T_x(R^2)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (1). Множество неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D_x(R^2) \subset T_x(R^2)$. Пусть $D(R^2) \subset T(R^2)$ – расслоение неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (1) определена в прямом произведении $R^2 \times D(R^2)$.

Определение 1. Тройка $(R^2, D(R^2), f)$ задает собственно гельмгольцеву двумерную геометрию (плоскость).

Теорема 1. Метрическая функция (1) положительно однородна.

Доказательство. Действительно,

$$f(\lambda u) = \sqrt{(\lambda u^1)^2 + (\lambda u^2)^2} e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{\lambda u^2}{\lambda u^1}} = \lambda f(u),$$

для любого $\lambda > 0$. □

Таким образом, собственно гельмгольцева двумерная геометрия принадлежит классу финслеровых пространств [4].

Очевидно, метрическая функция (1) положительна, то есть $f(u) > 0$, где $(u^1)^2 + (u^2)^2 \neq 0, u \in D(R^2)$.

Теорема 2. Собственно гельмгольцева плоскость является положительно определенным двумерным финслеровым пространством.

Доказательство. Вычисляем производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial f^2}{\partial u^1} = 2(u^1 - \gamma u^2) e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}}, \quad \frac{\partial f^2}{\partial u^2} = 2(u^2 + \gamma u^1) e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^1 \partial u^1} = 2 \frac{(u^1)^2 + (1 + 2\gamma^2)(u^2)^2 - 2\gamma u^1 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^1 \partial u^2} = 2 \frac{\gamma((u^1)^2 - (u^2)^2) - 2\gamma^2 u^1 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

$$\frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^2 \partial u^2} = 2 \frac{(1 + 2\gamma^2)(u^1)^2 + (u^2)^2 + 2\gamma u^1 u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}}.$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^1 \partial u^1} & \frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^1 \partial u^2} \\ \frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^2 \partial u^1} & \frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^2 \partial u^2} \end{vmatrix} = (1 + \gamma^2) e^{4\gamma \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Элемент в левом верхнем углу данного определителя, очевидно, положителен:

$$\frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^1 \partial u^1} = 2 \frac{(u^1 - \gamma u^2)^2 + (1 + \gamma^2)(u^2)^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} e^{2\gamma \arctg \frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Из полученных результатов следует, что квадратичная форма

$$\frac{\partial f^2(x, u)}{\partial u^i \partial u^j} \xi^i \xi^j = 2g_{ij} \xi^i \xi^j \quad (2)$$

положительно определена. $\square$

2. Собственно гельмгольцево двумерное многообразие

Это многообразие определено в работе автора [5], и локальное его изучение было темой кандидатской диссертации. В этом пункте все индексы принимают значения 1 и 2. Рассмотрим касательную плоскость $T_x(M)$ к двумерному многообразию M в произвольной точке x и касательное расслоение $T(M)$. В прямом произведении $M \times T(M)$ зададим метрическую функцию, которая в координатной окрестности $U \subset M$ имеет явный вид:

$$f(x, u) = \sqrt{(a_i u^i)^2 + (b_i u^i)^2} e^{\gamma \arctg \frac{b_i u^i}{a_i u^i}}, \quad (3)$$

где $u \in T_x(M)$, а $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$ — функции класса C^3 , $\gamma = \text{const}$, $\gamma \neq 0$. В каждой точке x векторы $a_i u^i$, $b_i u^i$ линейно независимы, то есть $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Касательный вектор $u \in T_x(M)$ называется *неизотропным*, если для него определено значение метрической функции (3). Множество неизотропных касательных векторов в точке x обозначим через $D_x(M) \subset T_x(M)$. Пусть $D(M) \subset T(M)$ — расслоение неизотропных касательных векторов. Очевидно, метрическая функция (3) определена в прямом произведении $M \times D(M)$.

Определение 2. Тройка $(M, D(M), f)$ задает геометрию двумерного собственно гельмгольцева многообразия.

Заметим, что для собственно гельмгольцевой плоскости $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

Теорема 3. Метрическая функция (3) положительно однородна.

Доказательство. Действительно,

$$f(x, \lambda u) = \sqrt{(a_i \lambda u^i)^2 + (b_i \lambda u^i)^2} e^{\gamma \arctg \frac{b_i \lambda u^i}{a_i \lambda u^i}} = \lambda f(x, u),$$

для любого $\lambda > 0$. $\square$

Итак, геометрия двумерного собственно гельмгольцева многообразия принадлежит классу финслеровых пространств [4].

Метрическая функция положительна, то есть $f(x, u) > 0$, где

$$(a_i u^i)^2 + (b_i u^i)^2 \neq 0, u \in D_x(M).$$

Терема 4. Собственно гельмгольцево двумерное многообразие $(M, D(M), f)$ является положительно определенным двумерным финслеровым пространством.

Доказательство. Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$\frac{\partial f^2(x, u)}{\partial u^i} = 2[(a_i + \gamma b_i)(1) + (b_i - \gamma a_i)(2)]e^{\frac{2\gamma \operatorname{arctg}(2)}{(1)}},$$

где для удобства введены обозначения

$$(1) = a_k u^k, (2) = b_k u^k.$$

Потом вычисляются компоненты финслерова метрического тензора

$$g_{ij}(x, u) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2(x, u)}{\partial u^i \partial u^j} \text{ собственно гельмгольцева двумерного многообразия:}$$

$$g_{ij} = \frac{A_{ij}(1)^2 + B_{ij}(2)^2 + C_{ij}(1)(2)}{(1)^2 + (2)^2} e^{\frac{2\gamma \operatorname{arctg}(2)}{(1)}},$$

где введены сокращающие обозначения:

$$A_{ij} = a_i a_j + \gamma a_i b_j + \gamma b_i a_j + (1 + 2\gamma^2) b_i b_j,$$

$$B_{ij} = (1 + 2\gamma^2) a_i a_j - \gamma a_i b_j - \gamma b_i a_j + b_i b_j,$$

$$C_{ij} = -2\gamma(a_i a_j + \gamma a_i b_j + \gamma b_i a_j - b_i b_j).$$

Затем вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = (1 + \gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 e^{\frac{4\gamma \operatorname{arctg}(2)}{(1)} \frac{u^2}{u^1}} > 0.$$

Нетрудно также доказать, что $g_{11} > 0$. Из полученных результатов следует, что квадратичная форма (2) положительно определена. $\square$

Очевидно, метрический тензор положительно однороден степени 0 и симметричен по индексам.

Предложение 1. Контравариантный финслеров метрический тензор собственно гельмгольцева двумерного многообразия задается формулой

$$g^{ij} = \frac{A^{ij}(1)^2 + B^{ij}(2)^2 + C^{ij}(1)(2)}{(1 + \gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 ((1)^2 + (2)^2)} e^{\frac{-2\gamma \operatorname{arctg}(2)}{(1)}},$$

где $A^{11} = A_{22}$, $A^{21} = -A_{12}$, $A^{22} = A_{11}$, $B^{11} = B_{22}$, $B^{21} = -B_{12}$, $B^{22} = B_{11}$, $C^{11} = C_{22}$, $C^{21} = -C_{12}$, $C^{22} = C_{11}$.

Доказательство. Контравариантный финслеров метрический тензор g^{ij} определяется из формулы $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$, где δ_k^i – символ Кронекера. Тогда

$$g^{22} = \frac{A_{11}(1)^2 + B_{11}(2)^2 + C_{11}(1)(2)}{(1 + \gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 ((1)^2 + (2)^2)} e^{\frac{-2\gamma \operatorname{arctg}(2)}{(1)}},$$

$$g^{21} = -\frac{A_{21}(1)^2 + B_{21}(2)^2 + C_{21}(1)(2)}{(1 + \gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 ((1)^2 + (2)^2)} e^{\frac{-2\gamma \operatorname{arctg}(2)}{(1)}},$$

$$g^{11} = \frac{A_{22}(1)^2 + B_{22}(2)^2 + C_{22}(1)(2)}{(1 + \gamma^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 ((1)^2 + (2)^2)} e^{-2\gamma \arctg \frac{(2)}{(1)}}.$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} A^{11} &= A_{22}, \quad A^{21} = -A_{12}, \quad A^{22} = A_{11}, \\ B^{11} &= B_{22}, \quad B^{21} = -B_{12}, \quad B^{22} = B_{11}, \\ C^{11} &= C_{22}, \quad C^{21} = -C_{12}, \quad C^{22} = C_{11}, \end{aligned}$$

то для компонент контравариантного метрического тензора получим исходную формулу. $\square$

Основной финслеров тензор [4] определяется формулой

$$C_{ijk}(x, u) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}(x, u)}{\partial u^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 f^2(x, u)}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k},$$

а дополнительный тензор – формулой

$$A_{ijk}(x, u) = f(x, u) C_{ijk}(x, u).$$

Очевидна полная симметрия по индексам:

$$C_{ijk} = C_{ikj} = C_{kji} = C_{jik} \quad \text{и} \quad A_{ijk} = A_{ijl} = A_{kji} = A_{jik}.$$

Предложение 2. Основной и дополнительный финслеровы тензоры собственно гельмгольца двумерного многообразия задаются формулами

$$C_{ijk} = \frac{2\gamma(1 + \gamma^2) p_{ijk}}{((1)^2 + (2)^2)^2} e^{2\gamma \arctg \frac{(2)}{(1)}}, \quad A_{ijk} = \frac{2\gamma(1 + \gamma^2) p_{ijk}}{((1)^2 + (2)^2)^{3/2}} e^{3\gamma \arctg \frac{(2)}{(1)}}, \quad (4)$$

где введено обозначение $p_{ijk} = (b_k(1) - a_k(2))(b_j(1) - a_j(2))(b_i(1) - a_i(2))$.

Доказательство. Для доказательства необходимо вычислить производные от компонент метрического тензора и привести подобные. $\square$

Определим единичный вектор, а также ковариантный нормальный к нему вектор:

$$l^i = \frac{u^i}{f(x, u)}, \quad m_i = -\varepsilon_{ik} l^k, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\Delta} \\ -\sqrt{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Точные вычисления приводят к выражениям для собственно гельмгольца двумерного многообразия:

$$l^i = \frac{u^i e^{-\gamma \arctg \frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}}, \quad m_i = \frac{\sqrt{(1 + \gamma^2)}(b_i(1) - a_i(2)) e^{\gamma \arctg \frac{(2)}{(1)}}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}}.$$

В финслеровой геометрии доказано соотношение

$$A_{ijk} = J m_i m_j m_k, \quad (5)$$

где J – скаляр [4].

Предложение 3. Финслеров скаляр J собственно гельмгольца двумерного многообразия вычисляется по формуле

$$J = \frac{2\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} = \text{const.}$$

Доказательство. Найдем сначала тройное произведение:

$$\begin{aligned} m_i m_j m_k &= \frac{(1+\gamma^2)^{3/2} (b_i(1)-a_i(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2)) e^{3\gamma \operatorname{arctg} \frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2 + (2)^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{(1+\gamma^2)^{3/2} p_{ijk} e^{3\gamma \operatorname{arctg} \frac{(2)}{(1)}}}{((1)^2 + (2)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Подставляя найденное произведение и выражение для тензора A_{ijk} , вычисленное в предложении 2, в формулу (5), получаем выражение для скаляра J . $\square$

Следует отметить, что в теории двумерных финслеровых пространств этот скаляр является важной характеристикой, который для двумерного собственно гельмгольца многообразия принимает постоянное значение. Заметим, что для римановых двумерных многообразий этот скаляр равен нулю.

По вышенайденным тензорам (4) строим новые тензоры

$$C_{jk}^i = g^{il} C_{jlk}, \quad A_{jk}^i(x, u) = f(x, u) C_{jk}^i(x, u).$$

В явном виде для двумерного собственно гельмгольца многообразия они имеют вид

$$\begin{aligned} C_{jk}^i &= \frac{-2\gamma(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i + \gamma b^i)(1) + (b^i - \gamma a^i)(2))}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)((1)^2 + (2)^2)^2}, \\ A_{jk}^i &= \frac{-2\gamma(b_k(1)-a_k(2))(b_j(1)-a_j(2))((a^i + \gamma b^i)(1) + (b^i - \gamma a^i)(2))}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)((1)^2 + (2)^2)^{3/2}} e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{(2)}{(1)}}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $a^i = a_i, b^i = b_i$.

С помощью последнего тензора можно определить финслеров специальный тензор кривизны [4]:

$$S_{jkh}^i = A_{kr}^i A_{jh}^r - A_{rh}^i A_{jk}^r. \quad (7)$$

Теорема 5. Финслеров специальный тензор кривизны для собственно гельмгольца двумерного многообразия равен нулю.

Доказательство. Действительно, воспользуемся выражением (6) для тензора A_{jk}^i при вычислении финслерова специального тензора кривизны (7):

$$\begin{aligned} S_{jkh}^i &= \frac{4\gamma^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 ((1)^2 + (2)^2)^3} e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{(2)}{(1)}} \times \\ &\times [((a^i + \gamma b^i)(1) + (b^i - \gamma a^i)(2))(b_j(1)-a_j(2))(b_k(1)-a_k(2))(b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)- \\ &- a_r(2)) \times ((a^r + \gamma b^r)(1) + (b^r - \gamma a^r)(2)) - ((a^i + \gamma b^i)(1) + (b^i - \gamma a^i)(2))(b_j(1)- \\ &- a_j(2))(b_k(1)-a_k(2)) \times (b_h(1)-a_h(2))(b_r(1)-a_r(2))((a^r + \gamma b^r)(1) + (b^r - \gamma a^r)(2))] = 0. \end{aligned}$$

Проведенные вычисления доказывают, что $S_{jkl}^i = 0$. $\square$

Автором [5] проводилось исследование кривизны двумерного собственно гельмгольцева многообразия, построенной через согласованную связность. Найден соответствующий тензор кривизны:

$$R_{jkl}^i = -\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s + \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s,$$

где символы Кристоффеля согласованной связности определяются по формуле

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} h^{lk} \left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right) - \gamma h^{lk} (\lambda_{jkl} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}),$$

причем $h_{ij} = a_i a_j + b_i b_j + \gamma(a_i b_j - a_j b_i)$, $\lambda_{ijk} = b_j \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x^k}$. Оказалось, что $R_{jkl}^i \neq 0$.

Заключение

В классификации Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий [1] кроме собственно гельмгольцевой геометрии получены еще две на тот момент неизученные геометрии с однородными метрическими функциями:

$$f(x, y) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2] e^{\frac{2\beta \operatorname{Ar}(c) \theta h}{x^1 - y^1} \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}}, \quad f(x, y) = (x^1 - y^1) e^{\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}},$$

где $\beta = \text{const}$, $\beta \neq 1, 0$. Эти геометрии называются соответственно псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой. Они также принадлежат классу финслеровых пространств.

В работе В.Х. Льва [6] приводится классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий, среди которых есть собственно гельмгольцева геометрия с метрической функцией:

$$f(x, y) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2] e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1} + 2z^1 + 2z^2}.$$

Для этой метрической функции не выполняется основное свойство финслеровой геометрии – свойство однородности, то есть данная геометрия не принадлежит классу финслеровых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805.
2. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметрии в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288.
3. Богданова Р.А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 12–22.
4. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
5. Кыров В.А. Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 6. С. 1343–1361.
6. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып. 125. С. 90–103.

Kyrov V.F. (2016) THE PROPERLY HELMHOLTZ PLANE AS FINSLER GEOMETRY. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 15–22

DOI 10.17223/19988621/42/2

G.G. Mikhailichenko has built the complete classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries, i.e. geometries for which the six mutual distances between the four arbitrary points are functionally connected. In these geometries, the distance is understood in the generalized sense as the value of a function called a metric. The validity of metric axioms is not supposed. All these geometries are endowed with the maximum mobility, that is, there are groups of motions of maximum dimensionality equal to 3. Classification of such two-dimensional geometries includes both well-known geometries (Euclidean, the pseudo-Euclidean, symplectic, spherical, etc.), and unknown ones (the Helmholtz, pseudo-Helmholtz, dual Helmholtz, and simplicial geometries).

In this paper, we use methods of Finsler geometry to study the properly Helmholtz two-dimensional geometry. In the first section, we introduce the definition of the properly Helmholtz plane, and then we prove that it is a positive definite Finsler space (we check homogeneity and positivity of the metric function, as well as the positive definiteness of the Finsler metric tensor). The second section defines the properly Helmholtz two-dimensional manifold and proves that it is also a positive definite Finsler space. Then we calculate the basic Finsler tensor C_{ijk} and additional A_{ijk} tensor. With the help of these tensors, we find the Finsler scalar J and prove that the special Finsler curvature tensor S'_{jkl} for the properly Helmholtz two-dimensional manifold is zero.

Keywords: metric function, the properly Helmholtz geometry, Finsler geometry.

KYROV Vladimir Alexandrovich ((Candidate of Physics and Mathematics,
Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation)
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

REFERENCES

1. Mikhaylitchenko G.G. (1981) Dvumernye geometrii [Two-dimensional geometries]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 260(4). pp. 803–805.
2. Michailichenko G.G. (1983) On group and phenomenological symmetries in geometry. *Soviet Math. Dokl.* 27(2). pp. 325–326.
3. Bogdanova R.A. (2009) Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak reshenie funktsional'nogo uravneniya [Groups of motions of two-dimensional Helmholtz geometries as a solution of a functional equation]. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki – Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 12(4). pp. 12–22.
4. Rund H. (1959) *The differential geometry of Finsler spaces*. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verl.
5. Kyrov V.A. (2005) Two-dimensional Helmholtz spaces. *Siberian Mathematical Journal*. 46(6). pp. 1082–1096. DOI 10.1007/s11202-005-0103-1.
6. Lev V.H. (1988) Trekhmernye geometrii v teorii fizicheskikh struktur [Three-dimensional geometries in the theory of physical structures]. *Vychislitel'nye sistemy – Computation Systems*. 125. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ. pp. 90–103.

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/42/3

В.М. Мисяков

**ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНЫЕ, ТРАНЗИТИВНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ
И НЕКОТОРЫЕ ИХ ОБОБЩЕНИЯ**

При исследовании абелевых групп большое значение имеет свойство гомоморфизмов, отображающих подгруппы данной группы в саму группу, – продолжаться до эндоморфизма всей группы. Так, например, (вполне) транзитивные группы без кручения можно определить как группы, в которых все (гомоморфизмы) сохраняющие высоты элементов гомоморфизмы из любой сервантной подгруппы ранга 1 в саму группу продолжаются до (эндоморфизмов) автоморфизмов всей группы. Приведены некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слабо транзитивной. Рассмотрены связи между этими понятиями. Известно, что прямое слагаемое вполне транзитивной группы будет вполне транзитивной группой. Существуют транзитивные p -группы, которые имеют нетранзитивное прямое слагаемое. В то же время остаётся открытым вопрос: «Замкнут ли класс транзитивных групп без кручения относительно взятия прямых слагаемых?» Предлагаются некоторые необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой. Хорошо известен критерий Корнера о (вполне) транзитивности редуцированной p -группы. Ниже данный результат обобщается на произвольные редуцированные абелевы группы.

Ключевые слова: абелева группа, (вполне) транзитивность, эндотранзитивность, слабая транзитивность, автоморфизм.

Термин (вполне) транзитивность был введен И. Капланским в [1] при исследовании модулей над полным кольцом дискретного нормирования. Впервые вполне транзитивные абелевы группы без кручения изучались в работе П. А. Крылова [2] (он называл эти группы транзитивными). Определение (вполне) транзитивной произвольной абелевой группы было введено Ю.Б. Добрусиным в [3]. Описание (вполне) транзитивных групп остается до сих пор открытым вопросом, хотя исследования, связанные с этими объектами, постоянно ведутся. Так (вполне) транзитивные периодические группы рассматривались в работах [4–13]; без кручения – в [2, 3, 14–24]; смешанные – в [25–29]; слабо транзитивные группы без кручения – в [30–32]; В данной статье показываются некоторые связи между этими понятиями, даются некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слабо транзитивной. В [33] вводятся коммутаторно и стого коммутаторно вполне транзитивные абелевы группы, изучаются их свойства и показываются связи с вполне транзитивными группами. В [34, 35] рассматриваются (вполне) транзитивные модули.

В работе [4] Корнер рассматривает следующее понятие: пусть Φ – подкольцо с единицей кольца $E(G)$, и H есть Φ -инвариантная подгруппа редуцированной p -группы G , тогда он говорит, что Φ действует (вполне) транзитивно на H , если

для любых $x, y \in H$, таких, что $(U_G(x) \leq U_G(y)) \rightarrow U_G(x) = U_G(y)$, следует существование (элемента $\varphi \in \Phi$) обратимого элемента $\varphi \in \Phi$, такого, что $\varphi(x) = y$. Допуская вольность речи, будем говорить, что подгруппа H (вполне) транзитивна над Φ . Таким образом, G – (вполне) транзитивная группа в смысле Капланского тогда и только тогда, когда $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на G . В теореме 6 даются некоторые необходимые и достаточные условия (вполне) транзитивного действия кольца $E(G)$ на произвольной редуцированной группе G .

В [36] ставится проблема 41.1: «Замкнут ли класс транзитивных (сильно однородных) групп без кручения относительно взятия прямых слагаемых?» Напомним, что однородные транзитивные группы без кручения называются сильно однородными. В теореме 9 даются необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой.

В работе под словом «группа» понимается редуцированная абелева группа. Все стандартные определения и обозначения можно найти в [37, 38]. Если G – группа, то через $\text{Aut}(G)$ ($E(G)$) будем обозначать группу (кольцо) всех её автоморфизмов (эндоморфизмов); через $H(a)_A$ – высотную матрицу элемента a в подгруппе A группы G ; через $H_p(a)_A$ – строку высотной матрицы $H(a)_A$, соответствующую простому числу p ; через $T_p(G)$ – p -компоненту периодической части $T(G)$ группы G .

Напомним, что редуцированная группа G называется (вполне) транзитивной, если для каждой пары элементов $a, b \in G$ таких, что $(H(a) \leq H(b)) \rightarrow H(a) = H(b)$, следует существование $(\varphi \in E(G)) \varphi \in \text{Aut}(G)$, переводящего элемент a в элемент b .

Рассмотрим связанные с ненулевым элементом $a \in G$ вполне характеристические подгруппы группы G :

$$bfc(a) = \{b \in G \mid H(a) \leq H(b)\},$$

$$lfc(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi \in E(G), \varphi(a) = b\},$$

которые будем называть соответственно большой и малой вполне характеристическими подгруппами группы G , содержащими элемент a .

Замечание 1. Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм $\psi_a: E^+(G) \rightarrow lfc(a)$, действующий по правилу: $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in E^+(G)$.

Далее рассмотрим некоторые эквивалентные условия вполне транзитивности группы G .

Предложение 1. Для группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G – вполне транзитивная группа;
- 2) $bfc(a) = lfc(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$;
- 3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм $\psi_a: E^+(G) \rightarrow bfc(a)$, действующий по правилу: $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in E^+(G)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный элемент группы G . Так как $lfc(a) \subseteq bfc(a)$, то пусть $c \in bfc(a)$. Тогда $H(a) \leq H(c)$. Поскольку G – вполне транзитивная группа, то существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(a) = c$. Следовательно, $c \in lfc(a)$ и $bfc(a) = lfc(a)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$, такие, что $H(a) \leq H(b)$. Так как $b \in bfc(a)$ и $bfc(a) = lfc(a)$, то существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(a) = b$.

2) $\Rightarrow$ 3). Следует из условия и замечания 1.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный элемент группы G . Так как $lfc(a) \subseteq bfc(a)$, то пусть c – произвольный элемент подгруппы $bfc(a)$. Тогда для элемента c найдётся $\eta \in E^+(G)$ такой, что $c = \psi_a(\eta) = \eta(a)$. Следовательно, $c \in lfc(a)$ и $bfc(a) = lfc(a)$.

По аналогии с вполне характеристическими подгруппами группы G , связанными с ненулевым элементом $a \in G$, рассмотрим характеристические подмножества группы G :

$$bc(a) = \{b \in G \mid H(b) = H(a)\},$$

$$lc(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi \in \text{Aut}(G), \varphi(a) = b\},$$

которые будем называть соответственно большим и малым характеристическими подмножествами группы G , содержащими элемент a . Здесь под характеристическим подмножеством группы G понимается подмножество, замкнутое относительно действия автоморфизмов группы G .

Замечание 2. Для произвольного ненулевого элемента $a \in G$ существует следующая связь между вышеопределёнными вполне характеристическими подгруппами и характеристическими подмножествами:

$$lc(a) \subseteq lfc(a) \subseteq bfc(a) \text{ и}$$

$$lc(a) \subseteq bc(a) \subseteq bfc(a).$$

Далее термин «слабо транзитивная группа», введённый для групп без кручения в [30], определим для произвольной абелевой группы.

Определение 1. Группу G будем называть слабо транзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$ из существования эндоморфизмов $\varphi, \psi \in E(G)$, таких, что $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = x$, следует существование $\alpha \in \text{Aut}(G)$, такого, что $\alpha(x) = y$.

Для некоторой характеристики слабо транзитивных групп нам потребуется следующее подмножество, определяемое для любого ненулевого элемента $a \in G$,

$$weak(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi, \psi \in E(G), \varphi(a) = b, \psi(b) = a\}.$$

Замечание 3. Легко проверяется, что $lc(a) \subseteq weak(a) \subseteq bc(a)$ и $lc(a) \subseteq weak(a) \subseteq lfc(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Лемма 2. Группа G слабо транзитивна тогда и только тогда, когда $lc(a) = weak(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G – слабо транзитивная группа. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in G$ и для любого $x \in weak(a)$ существуют $\varphi, \psi \in E(G)$, такие, что $\varphi(x) = a$ и $\psi(a) = x$. Так как G – слабо транзитивная группа, то существует $\alpha \in \text{Aut}(G)$, такой, что $\alpha(a) = x$. Следовательно, $x \in lc(a)$. Из замечания 3 следует обратное включение.

Достаточность. Рассмотрим произвольные $x, y \in G$ и $\varphi, \psi \in E(G)$, такие, что $\varphi(x) = y$ и $\psi(y) = x$. Тогда $y \in weak(x) = lc(x)$. Поэтому найдётся $\alpha \in \text{Aut}(G)$, такой, что $\alpha(x) = y$.

Замечание 4. Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение $\psi_a : \text{Aut}(G) \rightarrow lc(a)$, действующее по правилу: $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in \text{Aut}(G)$.

Поскольку всякая транзитивная группа является слабо транзитивной, то представляет интерес нахождение такого дополнительного условия, при котором сла-

бо транзитивная группа будет транзитивной. В следующем утверждении предлагается такое условие.

Предложение 3. Для группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G – транзитивная группа;
- 2) $bc(a) = lc(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$;
- 3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение $\psi_a: Aut(G) \rightarrow bc(a)$, действующее по правилу: $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in Aut(G)$;

4) G – слабо транзитивная группа и $weak(a) = bc(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный ненулевой элемент группы G и $c \in bc(a)$. Тогда $H(c) = H(a)$. Следовательно, будут существовать $\varphi \in Aut(G)$, такой, что $\varphi(a) = c$. Тогда $c \in lc(a)$ и $bc(a) \subseteq lc(a)$. Обратное включение следует из замечания 2.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные ненулевые элементы $a, b \in G$ такие, что $H(a) = H(b)$. Тогда $b \in bc(a)$. Поскольку $bc(a) = lc(a)$, то найдется $\varphi \in Aut(G)$ такой, что $\varphi(a) = b$.

2) $\Rightarrow$ 3). Следует из условия и замечания 4.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть a – произвольный ненулевой элемент группы G . Поскольку $lc(a) \subseteq bc(a)$, то пусть $x \in bc(a)$. Так как $\psi_a: Aut(G) \rightarrow bc(a)$ – эпиморфизм, то существует $\varphi \in Aut(G)$ такой, что $x = \psi_a(\varphi) = \varphi(a)$. Следовательно, $x \in lc(a)$ и $bc(a) = lc(a)$.

Эквивалентность условий 2) и 4) следует из замечания 3 и леммы 2.

Определение 2. Группа G называется эндотранзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$, таких, что $H(x) = H(y)$ следует существование $\varphi \in E(G)$, такого, что $\varphi(x) = y$.

В монографии [36] сформулирована проблема 44: «Существуют ли слабо транзитивные группы без кручения (здесь под термином «слабая транзитивность» понимается термин «эндотранзитивность»), не являющиеся ни транзитивными, ни вполне транзитивными?». Замечание 4 и следующая лемма дают надежду, что такие группы могут существовать.

Лемма 4. Редуцированная группа G эндотранзитивна тогда и только тогда, когда $bc(a) \subseteq lfc(a)$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольные $0 \neq a \in G$ и $x \in bc(a)$, тогда $H(a) = H(x)$. Так как G – эндотранзитивная группа, то существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(a) = x$. Следовательно, $x \in lfc(a)$.

Достаточность. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$, такие, что $H(a) = H(b)$. Тогда $b \in bc(a) \subseteq lfc(a)$. Следовательно, найдётся эндоморфизм $\varphi \in E(G)$ такой, что $\varphi(a) = b$. Таким образом, G – эндотранзитивная группа.

Замечание 5. Из предложений 1 и 4, замечания 4 и леммы 4 следует хорошо известный результат, что если группа (вполне) транзитивна, то она эндотранзитивна.

Для полноты изложения напомним следующую лемму, доказанную Корнером в [4].

Лемма 5 [4]. Редуцированная p -группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на p^0G .

Распространим понятие, введённое Корнером для p -групп, на произвольные редуцированные абелевы группы. При этом, в отличие от него, считаем, что для любого $a \in A$ высотная матрица $H(a)$ берётся в подгруппе A группы G .

Определение 3. Пусть Φ – подкольцо с единицей кольца $E(G)$ и A есть Φ -инвариантная подгруппа редуцированной абелевой группы G . Будем говорить, что Φ действует (вполне) транзитивно на A или подгруппа A (вполне) транзитивна над Φ , если для любых $x, y \in A$, таких, что $(H(x)_A \leq H(y)_A)$ $H(x)_A = H(y)_A$, следует существование (элемента $\varphi \in \Phi$) обратимого элемента $\varphi \in \Phi$, такого, что $\varphi(x) = y$.

В следующем утверждении рассматривается свойство (вполне) транзитивности для произвольной редуцированной группы.

Теорема 6. Редуцированная группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и произвольного простого числа p .

Доказательство. Докажем теорему для случая вполне транзитивности, транзитивный случай доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть p – произвольное простое число, если G – p -делимая группа, то для любого порядкового числа σ следует, что $p^\sigma G = G$, то есть $p^\sigma G$ – вполне транзитивная группа над $E(G)$.

Пусть $pG \neq G$. Проведём доказательство индукцией по σ . Если $\sigma = 0$, то $E(G)$ действует вполне транзитивно на G .

Пусть для любого δ , такого, что $0 \leq \delta < \sigma$, утверждение теоремы выполняется. Покажем, что $E(G)$ действует вполне транзитивно на $p^\sigma G$. Пусть $a, b \in p^\sigma G$ и $H(a)_{p^\sigma G} \leq H(b)_{p^\sigma G}$. Тогда $H_p(a)_{p^\sigma G} \leq H_p(b)_{p^\sigma G}$, где

$$H_p(a)_{p^\sigma G} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots) \text{ и } H_p(b)_{p^\sigma G} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \dots).$$

Пусть σ – изолированное порядковое число, тогда $p^\sigma G = p(p^{\sigma-1}G)$ и, следовательно, существуют элементы $c_1, c_2 \in p^{\sigma-1}G$, такие, что $a = pc_1, b = pc_2$. Тогда $H_p(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = (\mu, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots)$ и $H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \dots)$, причём $H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(a)_{p^\sigma G}$ и $H_q(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(b)_{p^\sigma G}$ для любого простого числа q , $q \neq p$. Если $\mu \leq \nu$, то $H(c_1)_{p^{\sigma-1}G} \leq H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$. Так как, по предположению индукции, подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $E(G)$, то существует $\varphi \in E(G)$ такой, что $\varphi(c_1) = c_2$. Тогда $p\varphi(c_1) = pc_2$ и $\varphi(a) = b$.

Пусть $\nu < \mu$. Допустим, что между ν и β_0 есть скачок (в противном случае $\mu \leq \nu$). Тогда ν -й инвариант Ульма – Капланского группы $T_p(p^{\sigma-1}G)$ отличен от

нуля, то есть существует $d \in p^{\sigma-1}G$, такой, что $o(d)=p$ и $H_p(d)_{p^{\sigma-1}G}=(v, \infty, \dots)$.

Рассмотрим элемент $c_1 + d \in p^{\sigma-1}G$. Так как

$$H_p(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G}=(v, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots) \leq H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$$

и

$$H_q(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G}$$

для любого простого q , $q \neq p$, то $H(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G} \leq H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$. Поскольку, по предположению индукции, подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $E(G)$, то существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(c_1 + d) = c_2$. Тогда $p\varphi(c_1 + d) = pc_2$ и $\varphi(a) = b$.

Пусть σ – предельное порядковое число, то есть $p^\sigma G = \bigcap_{\delta < \sigma} p^\delta G$. Следовательно, $a, b \in p^\delta G$ для любого $\delta < \sigma$. Тогда по определению обобщённой высоты $h_p^*(a)_{p^\delta G} = h_p^*(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$ и, следовательно, $h_p^*(p^k a)_{p^\delta G} = h_p^*(p^k a)_{p^\sigma G}$ для любых $\delta < \sigma$ и натурального k , то есть $H_p(a)_{p^\delta G} = H_p(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Поскольку $H_q(a)_{p^\delta G} = H_q(a)_{p^\sigma G}$ для любых $\delta < \sigma$ и простого q , $q \neq p$, то $H(a)_{p^\delta G} = H(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Аналогичные рассуждения показывают, что $H(b)_{p^\delta G} = H(b)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Тогда $H(a)_{p^\delta G} \leq H(b)_{p^\delta G}$. По предположению индукции подгруппа $p^\delta G$ вполне транзитивна над $E(G)$ для любого $\delta < \sigma$, то есть существует $\varphi \in E(G)$, такой, что $\varphi(a) = b$.

Достаточность. Пусть $E(G)$ действует вполне транзитивно на подгруппе $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и для любого простого числа p . Тогда, в частности, $E(G)$ действует вполне транзитивно на $p^0 G = G$, то есть G – вполне транзитивная группа.

Следствие 7. Для редуцированной p -группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G – (вполне) транзитивная группа;
- 2) $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^0 G$ (в смысле Корнера);
- 3) $E(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ (в смысле определения 3).

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2), 1) и 3) получаем из леммы 5 и теоремы 6 соответственно.

Введём следующее понятие.

Определение 4. Пусть $G = A \oplus B$. Будем говорить, что автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G , если для любого $a \in A$ и для любого $x \in bc(a)$ из существования $\varphi \in \text{Aut} G$, такого, что $\varphi r(a) = r(x)$, следует

существование $\psi \in \text{Aut} A$, такого, что $\pi \varphi \rho(a) = \psi(a)$, где $\rho: A \rightarrow G$ и $\pi: G \rightarrow A$ – канонические вложение и проекция соответственно.

Теорема 8. Прямое слагаемое A транзитивной группы G является транзитивной группой тогда и только тогда, когда автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G .

Доказательство. Необходимость. Пусть $G = A \oplus B$, причём G и A – транзитивные группы. Пусть $\rho: A \rightarrow G$ и $\pi: G \rightarrow A$ – канонические вложение и проекция соответственно. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in A$ и для любого $x \in bc(a)$ из транзитивности группы A следует существование $\psi \in \text{Aut} A$, такого, что $\psi(a) = x$.

Рассмотрим элемент ρx . Так как $H(\rho x) = H(\rho a)$, то из транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \text{Aut} G$, такого, что $\varphi \rho a = \rho x$. Следовательно, $\pi \varphi \rho a = x = \psi(a)$.

Достаточность. Для транзитивности группы A , согласно предложению 3, достаточно показать, что для любого ненулевого элемента $a \in A$ следует, что $bc(a) = lc(a)$. Для произвольного элемента $x \in bc(a)$ имеем $H(x) = H(a)$. Поскольку $H(\rho x) = H(\rho a)$, то из транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \text{Aut} G$, такого, что $\varphi \rho(a) = \rho(x)$. Поскольку автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы группы A , то существует $\psi \in \text{Aut} A$, такой, что $x = \pi \varphi \rho(a) = \psi(a)$. Следовательно, $bc(a) = lc(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplansky I.* Infinite abelian groups. Ann. Arbor: Michigan, 1954.
2. *Крылов П.А.* О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник аспирантских работ по математике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. С. 15–20.
3. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985. Вып. 5. С. 31–41.
4. *Corner A.L.S.* The independence of Kaplansky's notions of transitivity and fully transitivity // Quart. J. Math. Oxford. 1976. V. 27. No. 105. P. 15–20.
5. *Carroll D., Goldsmith B.* On transitive and fully transitive abelian p -groups // Proc. Royal Irish Academy. 1996. V. 96A. No. 1. P. 33–41.
6. *Danchev P.V., Goldsmith B.* On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p -groups // J. Commut. Algebra. 2011. V. 3. No. 3. P. 301–319.
7. *Files S., Goldsmith B.* Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. No. 6. P. 1605–1610.
8. *Goldsmith B., Strüngmann L.* Some transitivity results for torsion Abelian groups // Houston J. Math. 2007. V. 33. No. 4. P. 941–957.
9. *Griffith P.* Transitive and fully transitive primary abelian groups // Pacific J. Math. 1968. V. 25. No. 2. P. 249–254.
10. *Hill P.* On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Am. Math. Soc. 1969. V. 22. No. 2. P. 414–417.
11. *Paras A., Strüngmann L.* Fully transitive p -groups with finite first Ulm subgroup // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131. P. 371–377.
12. *Danchev P., Goldsmith B.* On projectively fully transitive Abelian p -groups // Results Math. 2013. V. 63. Issue 3. P. 1109–1130.
13. *Meggiben C.* A nontransitive, fully transitive primary group // Journ. Algebra. 1969. V. 13. P. 571–574.

14. Добрусин Ю.Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск: Изд.-во Том. ун-та. 1986. Вып. 4. С. 36–53.
15. Крылов П.А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1988. С. 81–99.
16. Крылов П.А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549–560.
17. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56–92.
18. Чехлов А.Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p -ранга // Алгебра и логика. 2001. Т.40. № 6. С. 698–715.
19. Chekhlov A.R., Danchev P.V. On abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // Communications in Algebra. 2015. V. 43. Issue 12. P. 5059–5073.
20. Чехлов А.Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714–719.
21. Göbel R., Shelah S. Uniquely Transitive Torsion-free Abelian Groups. URL: <http://www.arXiv:math/0404259> (дата обращения: 02.04.2016).
22. Hausen J. E-transitive torsion-free abelian groups // J. Algebra. 1987. V. 107. P. 17–27.
23. Dugas M., Shelah S. E-transitive groups in L // Contemp. Math. 1989. V. 87. P. 191–199.
24. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
25. Files S. On trasitive mixed abelian groups // Abelian Group Theory: Proceedings of the International Conference at Colorado Springs. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 1996. V. 182. P. 243–251.
26. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундам. и прикл. мат. 2002. Т. 8. Вып. 2. С. 407–473.
27. Гриншпон С.Я., Мисяков В.М. О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. 1986. С. 12–27.
28. Гриншпон С.Я., Мисяков В.М. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп // Абелевы группы и модули. 1991. С. 23–30.
29. Мисяков В.М. Вполне транзитивность редуцированных абелевых групп // Абелевы группы и модули. 1994. С. 134–156.
30. Goldsmith B., Strüngmann L. Torsion-free weakly transitive abelian groups // Communications in Algebra. 2005. V. 33. P. 1177–1191.
31. Meehan C., Strüngmann L. Rational rings related to weakly transitive torsion-free groups // Journal of Algebra and Its Applications. 2009. V. 8. No. 5. P. 723–732.
32. Чехлов А.Р. Слабо транзитивные Е-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 620–627.
33. Chekhlov A.R., Danchev P.V. On commutator fully transitive Abelian groups // J. Group Theory. 2015. V. 18. P. 623–647.
34. Files S. Transitivity and full transitivity for nontorsion modules // J. Algebra. 1997. V. 197. P. 468–478.
35. Hennecke G., Strüngmann L. Transitivity and full transitivity for p -local modules // Archiv der Mathematik. 2000. V. 74. P. 321–329.
36. Крылов П.А., Михалёв А.В., Туганбаев А.А. Связи абелевых групп и их колец. Томск: Томский государственный университет, 2002. 464 с.
37. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. I. 335 с.
38. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. 1977. Т. II. 416 с.

Misyakov V.M. (2016) FULLY TRANSITIVE, TRANSITIVE ABELIAN GROUPS AND SOME THEIR GENERALIZATIONS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 23–32

DOI 10.17223/19988621/42/3

In the study of Abelian groups, the fact that homomorphisms mapping subgroups of a group into this group can be extended to an endomorphism of the whole group is an important property of homomorphisms. For example, (fully) transitive torsion-free groups can be defined as groups in which all (homomorphisms) height-preserving homomorphisms from any pure rank 1 subgroup into this group are extended to (endomorphisms) automorphisms of the group. In this paper, some equivalent feasibility conditions for a group to be (fully) transitive, endotransitive, or weakly transitive are given. Relations between these notions are also shown.

It is easy to show that a direct summand of a fully transitive group is a fully transitive group. There exist transitive p -groups which have a nontransitive direct summand. At the same time, the question whether the class of torsion free transitive groups is closed with respect to taking direct summands remains open. In this paper, some necessary and sufficient conditions under which a direct summand of an arbitrary transitive group is a transitive group are proposed.

There is a well-known Corner's criterion on (full) transitivity of a reduced p -group. Below, this result is generalized to arbitrary reduced Abelian groups.

Keywords: abelian group, (fully) transitive, endotransitive, weakly transitive, automorphism.

MISYAKOV Victor Mikhajlovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: mvm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Kaplansky I. (1954) *Infinite abelian groups*. Ann. Arbor: Michigan.
2. Krylov P.A. (1973) O vpolne kharakteristicheskikh podgruppakh abelevykh grupp bez krucheniya [On fully invariant subgroups of abelian torsion-free groups]. *Collected works of postgraduates on mathematics*. Tomsk: TGU publ. pp. 15–20.
3. Dobrushin Yu.B. (1985) On extensions of partial endomorphisms of torsionfree abelian groups, II. *Abelian Groups and Modules*. pp. 31–41. (In Russian)
4. Corner A.L.S. (1976) The independence of Kaplansky's notions of transitivity and fully transitivity. *Quart. J. Math. Oxford*. 27(105). pp. 15–20.
5. Carroll D., Goldsmith B. (1996) On transitive and fully transitive abelian p -groups. *Proc. Royal Irish Academy*. 96A(1). pp. 33–41.
6. Danchev P.V., Goldsmith B. (2011) On socle-regularity and some notions of transitivity for abelian p -groups. *J. Commut. Algebra*. 3(3). pp. 301–319. DOI 10.1216/JCA-2011-3-3-301.
7. Files S., Goldsmith B. (1998) Transitive and fully transitive groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(6). pp. 1605–1610.
8. Goldsmith B., Strümgmann L. (2007) Some transitivity results for torsion abelian groups. *Houston J. Math.* 33(4). pp. 941–957.
9. Griffith P. (1968) Transitive and fully transitive primary abelian groups. *Pacific J. Math.* 25(2). pp. 249–254.
10. Hill P. (1969) On transitive and fully transitive primary groups. *Proc. Am. Math. Soc.* 22(2). pp. 414–417.
11. Paras A., Strümgmann L. (2003) Fully transitive p -groups with finite first Ulm subgroup. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131. pp. 371–377.
12. P. Danchev P., Goldsmith B. (2013) On projectively fully transitive Abelian p -groups. *Results Math.* 63(3). pp.1109–1130. DOI 10.1007/s00025-012-0256-8.
13. Meggiben C. (1969) A nontransitive, fully transitive primary group. *Journ. Algebra*. 13. pp. 571–574.

14. Dobrushin Yu.B. (1986) On extensions of partial endomorphisms of torsionfree abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 36–53. (In Russian)
15. Krylov P.A. (1988) Some examples of quasi-pure injective and transitive abelian groups without torsion. *Abelian Groups and Modules*. pp. 81 – 99. (In Russian)
16. Krylov P.A. (1990) Fully transitive torsion-free Abelian groups. *Algebra and Logic*. 29(5). pp. 362–370.
17. Grinshpon S.Ya. (1982) On the structure of fully invariant subgroups of abelian torsion-free groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 56–92. (In Russian)
18. Chekhlov A.R. (2001) Totally transitive torsion-free groups of finite p -rank. *Algebra and Logic*. 40(6). pp. 391–400.
19. Chekhlov A.R., Danchev P.V. (2015) On abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic. *Communications in Algebra*. 43(12). pp. 5059–5073. DOI 10.1080/00927872.2015.1008011.
20. Chekhlov A.R. (2001) On decomposable fully transitive torsion-free groups. *Sib. Math. J.* 42(3). pp. 605–609.
21. Göbel R., Shelah S. (2016) Uniquely Transitive Torsion-free Abelian Groups. URL: <http://www.arXiv:math/0404259>.
22. Hausen J. (1987) E-transitive torsion-free abelian groups. *J. Algebra*. 107. pp. 17–27.
23. Dugas M., Shelah S. (1989) E-transitive groups in L. *Contemp. Math*. 87. pp. 191–199.
24. Chekhlov A.R. (2001) On a class of endotransitive groups. *Math. Notes*. 69(6). pp. 863–867. DOI 10.1023/A:1010298919298.
25. Files S. (1996) On trasitive mixed abelian groups. *Abelian Group Theory: Proceedings of the International Conference at Colorado Springs. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. 182. pp. 243–251.
26. Grinshpon S.Ya. (2002) Vpolne kharakteristicheskie podgruppy abelevykh grupp i vpolne tranzitivnost' [Fully invariant subgroups of Abelian groups and full transitivity]. *Fundam. Prikl. Mat. – Fundamental and Applied Mathematics*. 8(2). pp. 407–473.
27. Grinshpon S.Ya., Misyakov V.M. (1986) Fully transitive abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 12–27. (In Russian)
28. Grinshpon S.Ya., Misyakov V.M. (1991) Fully transitivity of direct products of abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 23–30. (In Russian)
29. Misyakov V.M. (1994) On complete transitivity of reduced abelian groups. *Abelian Groups and Modules*. pp. 134–156. (In Russian)
30. Goldsmith B., Strüngmann L. (2005) Torsion-free weakly transitive abelian groups. *Communications in Algebra*. 33. pp. 1177–1191.
31. Meehan C., Strüngmann L. (2009) Rational rings related to weakly transitive torsion-free groups. *Journal of Algebra and Its Applications*. 8(5). pp. 723–732. DOI 10.1142/S02194988090003576.
32. Chekhlov A.R. (2013) Torsion-free weakly transitive E-engel abelian groups. *Math. Notes*. 94(4). pp. 583–589. DOI 10.4213/mzm9378.
33. Chekhlov A.R., Danchev P.V. (2015) On commutator fully transitive Abelian groups. *J. Group Theory*. 18. pp. 623–647. DOI 10.1515/jgth-2015-0014.
34. Files S. (1997) Transitivity and full transitivity for nontorsion modules. *J. Algebra*. 197. pp. 468–478.
35. Hennecke G., Strüngmann L. (2000) Transitivity and full transitivity for p -local modules. *Archiv der Mathematik*. 74. pp. 321–329.
36. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. (2003) *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. DOI 10.1007/978-94-017-0345-1.
37. Fuchs L. (1970) *Infinite Abelian Groups. V. I*. New York – London: Academic Press.
38. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian Groups. V. II*. New York – London: Academic Press.

И.В. Рахмелевич

О РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА – АМПЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ПЕРВЫМ ПРОИЗВОДНЫМ

Рассматривается двумерное уравнение Монжа – Ампера, включающее нелинейность произвольного вида от искомой функции и степенные нелинейности по первым производным. Для решения данного уравнения используется метод функционального разделения переменных. Исследованы случаи, когда одна из неизвестных функций, используемых в методе разделения переменных, является линейной, а также когда эти функции являются произвольными. Проанализированы решения для различных значений параметров, характеризующих нелинейность.

Ключевые слова: уравнение Монжа – Ампера, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.

Уравнение Монжа – Ампера является одним из наиболее интенсивно исследуемых уравнений нелинейной математической физики благодаря многочисленным приложениям в различных областях науки, в том числе в газовой динамике, метеорологии, дифференциальной геометрии и других [1–4]. Наряду с классическим видом этого уравнения представляет интерес его дальнейшие обобщения, связанные с усложнением входящего в его состав нелинейного дифференциального оператора. Целью настоящей работы является изучение точных решений модифицированного уравнения Монжа – Ампера, правая часть которого содержит степенные нелинейности по производным и произвольную нелинейность от искомой функции. При этом в качестве основного метода исследования применяется метод разделения переменных, который остается одним из самых эффективных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [5–13].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Монжа – Ампера с нелинейной правой частью следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = g(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\beta_2}. \quad (1)$$

Здесь $g(u)$ – некоторая заданная функция, β_1, β_2 – вещественные параметры.

Для нахождения решений уравнения (1) будем использовать функциональное разделение переменных [5] аддитивного типа, т.е. решения этого уравнения будем искать в виде

$$u(x, y) = U(z); \quad (2)$$

$$z = X(x) + Y(y), \quad (3)$$

где $U(z), X(x), Y(y)$ – неизвестные функции, которые должны быть определены в дальнейшем. Подстановка выражений (2), (3) в уравнение (1) после некоторых преобразований дает

$$\begin{aligned} [U'(z)]^2 X''(x)Y''(y) + U'(z)U''(z) \{X''(x)[Y'(y)]^2 + [X'(x)]^2 Y''(y)\} = \\ = g(U)[U'(z)]^{\beta_\Sigma} [X'(x)]^{\beta_1} [Y'(y)]^{\beta_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее всюду $\beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2$.

Рассмотрим решения уравнения (4) для частных случаев, когда одна из неизвестных функций $U(z), X(x), Y(y)$ является линейной.

1. $Y(y) = c_2 y$. Тогда указанное уравнение принимает вид

$$\frac{U''(z)[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma}}{g(U)} = c_2^{\beta_2-2} \frac{[X'(x)]^{\beta_1}}{X''(x)} \quad (5)$$

Уравнение (5) продифференцируем почленно по y , откуда следует уравнение для $U(z)$:

$$\frac{U''(z)[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma}}{g(U)} = \alpha, \quad (6)$$

где α – некоторая постоянная. Учитывая (6), из (5) получаем уравнение для $X(x)$:

$$\frac{X''(x)}{[X'(x)]^{\beta_1}} = A_1, \quad A_1 = \frac{c_2^{\beta_2-2}}{\alpha}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) выражается следующими формулами:

при $\beta_1 = 1$:

$$X(x) = X_0 + X_1 \exp(A_1 x); \quad (8)$$

при $\beta_1 = 2$:

$$X(x) = X_0 - \frac{1}{A_1} \ln(x - x_0); \quad (9)$$

при $\beta_1 \neq 1, \beta_1 \neq 2$:

$$X(x) = X_0 + \frac{V_1}{\theta} (x - x_0)^\theta, \quad (10)$$

где $\theta = \frac{\beta_1 - 2}{\beta_1 - 1}$, $V_1 = \{(1 - \beta_1)A_1\}^{\frac{1}{1-\beta_1}}$; X_0, X_1 – произвольные постоянные.

Для нахождения функции $U(z)$ используем уравнение (6). Умножив это уравнение почленно на $U'(z)$, запишем его в виде

$$U''(z)[U'(z)]^{2-\beta_\Sigma} = \alpha \frac{d}{dz} G(U), \quad (11)$$

где $G(U) = \int g(U) dU$.

Далее рассмотрим частные случаи.

Случай а). $\beta_{\Sigma} \neq 3$.

Понизив порядок уравнения (11), приводим его к уравнению первого порядка:

$$[U'(z)]^{3-\beta_{\Sigma}} - \alpha(3-\beta_{\Sigma})G(U) = A, \quad (12)$$

где A – произвольная постоянная.

Уравнение (12) сводится к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого можно записать в неявной форме:

$$z - z_0 = \int \frac{dU}{[\alpha(3-\beta_{\Sigma})G(U) + A]^{1/(3-\beta_{\Sigma})}}. \quad (13)$$

Здесь и всюду далее z_0 – произвольная постоянная.

Случай б). $\beta_{\Sigma} = 3$.

Тогда уравнение (11) принимает вид

$$\frac{U''(z)}{U'(z)} = \alpha \frac{d}{dz} G(U). \quad (14)$$

Понижая порядок уравнения (14) и решая полученное уравнение первого порядка, находим решение в неявной форме:

$$z - z_0 = A \int \exp(-\alpha G(U)) dU. \quad (15)$$

Учитывая выражение (3), окончательно получаем следующие решения в неявной форме для случая линейной зависимости от переменной y :

$$X(x) + c_2 y - z_0 = \int \frac{dU}{[\alpha(3-\beta_{\Sigma})G(U) + A]^{1/(3-\beta_{\Sigma})}} \quad (16)$$

для $\beta_{\Sigma} \neq 3$;

$$X(x) + c_2 y - z_0 = A \int \exp(-\alpha G(U)) dU \quad (17)$$

для $\beta_{\Sigma} = 3$.

Функция $X(x)$, входящая в (16) и (17), определяется одним из выражений (8), (9) и (10) в зависимости от значения β_1 .

Для некоторых простейших случаев из (16) и (17) можно получить решения уравнения (1) в явном виде. Пусть $g(u) = g_0 = \text{const}$, т.е. уравнение (1) не содержит явно искомой функции. Тогда, вычисляя интегралы в (16) и (17), получим следующие решения:

1) при $\beta_{\Sigma} = 2$:

$$u(x, y) = U_0 \exp[\alpha g_0 (X(x) + c_2 y)],$$

где U_0 – новая произвольная постоянная;

2) при $\beta_{\Sigma} = 3$:

$$u(x, y) = -\frac{1}{\alpha g_0} \ln(X(x) + c_2 y - z_0);$$

3) при $\beta_\Sigma \neq 2, \beta_\Sigma \neq 3$:

$$u(x, y) = \frac{1}{\alpha g_0 (3 - \beta_\Sigma)} [\alpha g_0 (2 - \beta_\Sigma) (X(x) + c_2 y - z_0)]^{\frac{3 - \beta_\Sigma}{2 - \beta_\Sigma}}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить решения, аналогичные приведенным выше, для случая линейной зависимости $X(x) = c_1 x$.

2. $U(z) = z$

В этом случае уравнение (4) можно привести к виду

$$\{[X'(x)]^{-\beta_1} X''(x)\} \cdot \{[Y'(y)]^{-\beta_2} Y''(y)\} = g(U). \quad (18)$$

Далее, введем обозначения

$$[X'(x)]^{-\beta_1} X''(x) = \varphi(x), \quad [Y'(y)]^{-\beta_2} Y''(y) = \psi(y),$$

с учетом которых (18) принимает вид

$$\varphi(x)\psi(y) = g(z) \quad (18a)$$

Логарифмируя (18a) и дифференцируя полученное соотношение по x и по y , с учетом (3) получаем

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln g(z) = 0,$$

откуда находим

$$g(z) = g_0 \exp(\lambda z). \quad (19)$$

Из (18) и (19) следуют уравнения для функций $X(x), Y(y)$:

$$\begin{aligned} [X'(x)]^{-\beta_1} X''(x) &= A_1 \exp(\lambda X), \\ [Y'(y)]^{-\beta_2} Y''(y) &= A_2 \exp(\lambda Y), \end{aligned} \quad (20)$$

где A_1, A_2 – некоторые постоянные, связанные соотношением $A_1 A_2 = g_0$.

а) $\lambda = 0$. Тогда первое из уравнений (20) совпадает с уравнением (7), поэтому его решение определяется формулами (8), (9) и (10). Второе из уравнений (20) также с точностью до обозначений совпадает с (7), поэтому выражения для $Y(y)$ получаются из (8), (9) и (10) путем замены $x \rightarrow y$, $X_0, X_1 \rightarrow Y_0, Y_1$, $A_1 \rightarrow A_2$, $\beta_1 \rightarrow \beta_2$.

б) $\lambda \neq 0$. В этом случае решение первого из уравнений (20) можно записать в неявном виде

$$x - x_0 = \begin{cases} \int (\tilde{A}_1 \exp(\lambda X) + B_1)^{1/(\beta_1 - 2)} dX & \text{при } \beta_1 \neq 2, \\ B_1 \int \exp(\tilde{A}_1 \exp(\lambda X)) dX & \text{при } \beta_1 = 2, \end{cases} \quad (21)$$

где B_1 – произвольная постоянная,

$$\tilde{A}_1 = \begin{cases} A_1 (2 - \beta_1) / \lambda & \text{при } \beta_1 \neq 2, \\ A_1 / \lambda & \text{при } \beta_1 = 2. \end{cases}$$

Аналогичный вид имеет решение для второго уравнения (20).

2. Общий случай уравнения Монжа – Ампера со степенными нелинейностями

В данном параграфе рассмотрим общий случай уравнения (1), причем будем предполагать, что для всех неизвестных функций выполнены условия

$$U'(z) \neq \text{const}, X'(x) \neq \text{const}, Y'(y) \neq \text{const} \quad (22)$$

(альтернативные случаи рассмотрены в предыдущем разделе).

Тогда, разделив почленно уравнение (4) на $U'(z)U''(z)X''(x)Y''(y)$, преобразуем его к виду

$$\frac{U'(z)}{U''(z)} + \frac{[X'(x)]^2}{X''(x)} + \frac{[Y'(y)]^2}{Y''(y)} = \frac{g(U)[U'(z)]^{\beta_2-1}}{U''(z)} \cdot \frac{[X'(x)]^{\beta_1}}{X''(x)} \cdot \frac{[Y'(y)]^{\beta_2}}{Y''(y)}. \quad (23)$$

Уравнение (1) допускает разделение переменных, если каждая из функций $U(z), X(x), Y(y)$ может быть определена в результате решения некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Уравнение (23) может быть сведено к ОДУ относительно $U(z)$ только в том случае, если функции $X(x), Y(y)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{[X'(x)]^2}{X''(x)} + \frac{[Y'(y)]^2}{Y''(y)} = \xi(z), \quad \frac{[X'(x)]^{\beta_1}}{X''(x)} \cdot \frac{[Y'(y)]^{\beta_2}}{Y''(y)} = \eta(z), \quad (24)$$

где $\xi(z), \eta(z)$ – некоторые неизвестные функции.

Дифференцируя первое из уравнений (24) по x и по y , получаем уравнение $\xi''(z)=0$. Подставляя его решение $\xi(z)=az+a_0$ в первое из уравнений (24), получаем

$$\left(\frac{[X'(x)]^2}{X''(x)} - aX(x) \right) + \left(\frac{[Y'(y)]^2}{Y''(y)} - aY(y) \right) = a_0. \quad (25)$$

Из (25) следует, что функции $X(x), Y(y)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{[X'(x)]^2}{X''(x)} = aX(x) + a_1; \quad (26a)$$

$$\frac{[Y'(y)]^2}{Y''(y)} = aY(y) + a_2, \quad (26b)$$

где постоянные a_1, a_2 связаны соотношением $a_1 + a_2 = a_0$.

Аналогичным образом, логарифмируя второе из уравнений (24) и дифференцируя его по x и по y , получаем

$$\eta(z) = b \exp(\lambda z), \quad (27)$$

где b, λ – произвольные постоянные. Подставляя (27) во второе уравнение (24), с учетом (3), находим

$$\left\{ \frac{[X'(x)]^{\beta_1}}{X''(x)} \cdot \exp(-\lambda X(x)) \right\} \cdot \left\{ \frac{[Y'(y)]^{\beta_2}}{Y''(y)} \cdot \exp(-\lambda Y(y)) \right\} = b. \quad (28)$$

Из (28) следует вторая пара уравнений, которым должны удовлетворять $X(x), Y(y)$:

$$\frac{[X'(x)]^{\beta_1}}{X''(x)} = b_1 \exp(\lambda X(x)), \quad (29a)$$

$$\frac{[Y'(y)]^{\beta_2}}{Y''(y)} = b_2 \exp(\lambda Y(y)), \quad (29б)$$

причем постоянные b_1, b_2 связаны соотношением $b_1 b_2 = b$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять системе двух уравнений (26a), (29a), а функция $Y(y)$ – системе уравнений (26б), (29б), причем каждая из этих систем является переопределенной. Из (23) и (24) следует уравнение для функции $U(z)$:

$$\frac{U'(z)}{U''(z)} + \xi(z) - \frac{g(U)[U'(z)]^{\beta_2-1}}{U''(z)} \eta(z) = 0$$

или, с учетом выражений для $\xi(z)$, $\eta(z)$:

$$U''(z)(az + a_0) + U'(z) - bg(U)[U'(z)]^{\beta_2-1} \exp(\lambda z) = 0. \quad (30)$$

Для нахождения функций $X(x), Y(y)$ рассмотрим системы уравнений (26a), (29a) и (26б), (29б) соответственно. Исключая $X''(x)$ из системы (26a), (29a), получаем ОДУ первого порядка:

$$X'(x) = (p_1 X(x) + q_1)^{v_1} \exp(-\lambda_1 X(x)), \quad (31)$$

где
$$p_1 = \frac{a}{b_1}, \quad q_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{2 - \beta_1}, \quad v_1 = \frac{1}{2 - \beta_1}. \quad (31a)$$

Из уравнения (31) следует

$$\frac{[X'(x)]^2}{X''(x)} = \frac{p_1 X(x) + q_1}{v_1 - \lambda_1(p_1 X(x) + q_1)}. \quad (32)$$

Аналогичным образом, исключая $Y''(y)$ из системы (26б), (29б), получаем уравнение:

$$Y'(y) = (p_2 Y(y) + q_2)^{v_2} \exp(-\lambda_2 Y(y)), \quad (33)$$

где
$$p_2 = \frac{a}{b_2}, \quad q_2 = \frac{a_2}{b_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{2 - \beta_2}, \quad v_2 = \frac{1}{2 - \beta_2}. \quad (33a)$$

Аналогично уравнению (32), из (33) находим

$$\frac{[Y'(y)]^2}{Y''(y)} = \frac{p_2 Y(y) + q_2}{v_2 - \lambda_2(p_2 Y(y) + q_2)}. \quad (34)$$

Используя уравнения (32) и (34), найдем условия совместности систем (26a), (29a) и (26б), (29б).

Сравнивая правые части уравнений (32) и (26а), (34) и (26б), находим, что системы уравнений (26а), (29а) и (26б), (29б) являются совместными в следующих случаях:

Случай 1)

$$\lambda=0, \quad \frac{p_1}{v_1}=\frac{p_2}{v_2}=a, \quad \frac{q_1}{v_1}=a_1, \quad \frac{q_2}{v_2}=a_2. \quad (35)$$

Из соотношений (35) с учетом (31а) следует, что $b_1=2-\beta_1, b_2=2-\beta_2$.

Функцию $X(x)$ определяем в результате решения уравнения (31):

$$X(x)=k_1 S_1(x)-\frac{q_1}{p_1}; \quad (36)$$

$$S_1(x)=\begin{cases} (x-x_0)^{\frac{2-\beta_1}{1-\beta_1}} & \text{при } \beta_1 \neq 1, \\ \exp(p_1 x) & \text{при } \beta_1 = 1. \end{cases} \quad (36a)$$

При этом $k_1 = p_1^{\frac{1}{1-\beta_1}} \left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1} \right)^{\frac{2-\beta_1}{1-\beta_1}}$ в случае $\beta_1 \neq 1$ и k_1 – произвольное в случае $\beta_1 = 1$.

Подставив (36) в уравнение (26а), находим

$$a=2-\beta_1. \quad (36b)$$

Аналогичным образом находим функцию $Y(y)$ из уравнения (33):

$$Y(y)=k_2 S_2(y)-\frac{q_2}{p_2}; \quad (37)$$

$$S_2(y)=\begin{cases} (y-y_0)^{\frac{2-\beta_2}{1-\beta_2}} & \text{при } \beta_2 \neq 1, \\ \exp(p_2 y) & \text{при } \beta_2 = 1. \end{cases} \quad (37a)$$

Здесь $k_2 = p_2^{\frac{1}{1-\beta_2}} \left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_2} \right)^{\frac{2-\beta_2}{1-\beta_2}}$ в случае $\beta_2 \neq 1$ и k_2 – произвольное в случае $\beta_2 = 1$.

Подставив (37) в уравнение (26б), находим

$$a=2-\beta_2. \quad (37b)$$

Из сопоставления (37а) и (37б) следует, что в рассматриваемом случае решение существует, только если выполняется условие $\beta_1=\beta_2=\beta$. Отсюда с учетом (31а) и (33а) следует, что $p_1=p_2=1, k_1=k_2=k$.

Для данного случая уравнение (30) для функции $U(z)$ приводится к виду

$$a\tilde{z}U''(\tilde{z})+U'(\tilde{z})-bg(U)[U'(\tilde{z})]^{\beta_2-1}=0. \quad (38)$$

При этом использована замена переменной $\tilde{z}=z+\frac{a_0}{a}$.

Рассмотрим случай, когда $g(u)=g_0 u^\gamma$, т.е. уравнение содержит степенные нелинейности как по производным, так и по неизвестной функции. Покажем, что в

этом случае уравнение (38) имеет частное решение вида

$$U = U_0 \tilde{z}^\sigma. \quad (39)$$

Подставляя (39) в уравнение (38), находим

$$\sigma = \frac{2(\beta-1)}{2\beta+\gamma-2}, \quad U_0 = \frac{1}{\sigma^\sigma} \left(\frac{1+a(\sigma-1)}{bg_0} \right)^{\frac{1}{2\beta+\gamma-2}}. \quad (40)$$

Тогда из (36), (37) и (39), возвращаясь к старой переменной z , окончательно получаем решение уравнения (1):

$$u(x, y) = u_0 (S_1(x) + S_2(y))^\sigma, \quad (41)$$

где $S_1(x), S_2(y)$ определяются выражениями (36а), (37а), $u_0 = U_0 k^\sigma$.

Рассмотрим решение при особых значениях параметров, определяемых соотношениями

$$\beta = 1; \quad (42a)$$

$$2\beta + \gamma - 2 = 0. \quad (42б)$$

а) Если выполнено условие (42а), а условие (42б) не выполняется, т.е. $\beta = 1$, $\gamma \neq 0$, то решение (41) вырождается в константу $u(x, y) = u_0$;

б) Если выполнено условие (42б), а условие (42а) не выполняется, то решение (41) не существует;

в) Если выполняются оба условия (42а), (42б), то уравнение (1) имеет решение следующего вида:

$$u(x, y) = (k_1 \exp(p_1 x) + k_2 \exp(p_2 y))^{\frac{g_0}{p_1 p_2}},$$

где p_1, p_2, k_1, k_2 – произвольные постоянные.

Случай 2)

$$a = 0, \quad \frac{q_1}{v_1 - \lambda_1 q_1} = a_1, \quad \frac{q_2}{v_2 - \lambda_2 q_2} = a_2. \quad (43)$$

Тогда из уравнений (26а) и (29а) с учетом (43) находим функцию $X(x)$; из уравнений (26б) и (29б) с учетом (43) находим функцию $Y(y)$:

$$X(x) = X_0 - a_1 \ln(x - x_0); \quad (44)$$

$$Y(y) = Y_0 - a_2 \ln(y - y_0). \quad (45)$$

Здесь x_0, y_0 – произвольные постоянные; X_0, Y_0 определяются выражениями

$$X_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left(-\frac{(-a_1)^{\beta_1-1}}{b_1} \right), \quad Y_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left(-\frac{(-a_2)^{\beta_2-1}}{b_2} \right).$$

При этом уравнение (30) принимает вид

$$a_0 U''(z) + U'(z) - bg(U) [U'(z)]^{\beta_1 + \beta_2 - 1} \exp(\lambda z) = 0. \quad (46)$$

Таким образом, в данном случае решение (2) содержит функции $X(x)$, $Y(y)$, определяемые выражениями (44), (45) и функцию $U(z)$, являющуюся решением уравнения (46).

Случай 3)

$$\beta_1 = \beta_2 = 2, \quad \lambda = 0, \quad a = 0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2. \quad (47)$$

Тогда уравнение (30) упрощается так:

$$a_0 U''(z) + U'(z) - bg(U)[U'(z)]^3 = 0, \quad (48)$$

а функции $X(x), Y(y)$ находим из уравнений (26а) и (26б) с учетом (47). Решая уравнение (48) и опуская промежуточные преобразования, находим

$$u(x, y) = \pm a_0 \left(\frac{1}{bg_0} \right)^{1/2} \arcsin(w(x, y)) \quad \text{при} \quad a_0 \neq 0, bg_0 > 0; \quad (49)$$

$$u(x, y) = \pm a_0 \left(-\frac{1}{bg_0} \right)^{1/2} \ln \left\{ w(x, y) + \sqrt{1 + w^2(x, y)} \right\} \quad \text{при} \quad a_0 \neq 0, bg_0 < 0; \quad (50)$$

$$u(x, y) = \pm a_0 \left(\frac{1}{bg_0} \right)^{1/2} \{a_1 \ln|x - x_0| + a_2 \ln|y - y_0|\} \quad \text{при} \quad a_0 = 0, bg_0 < 0, \quad (51)$$

где $w(x, y) = C_0 (x - x_0)^{-a_1/a_0} (y - y_0)^{-a_2/a_0}$. Решения уравнения (1), определяемые формулами (49) – (51), получены в предположении, что $g(u) = g_0$.

Заключение

Таким образом, в данной работе исследовано двумерное уравнение Монжа – Ампера, содержащее степенные нелинейности по первым производным и нелинейность произвольного вида по неизвестной функции. С помощью метода функционального разделения переменных получен ряд точных решений данного уравнения. В частности, рассмотрен случай, когда одна из функций $U(z), X(x), Y(y)$, вводимых при разделении переменных, является линейной, а также общий случай, когда указанные функции могут быть произвольными. Получены точные решения в явном виде для уравнения, не содержащего явно искомой функции. Проанализирован вид решений в зависимости от значений параметров, характеризующих нелинейность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
2. Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник. 1990. Т. 181. № 12. С. 1607–1622.
3. Шабловский О.Н. Параметрические решения уравнения Монжа – Ампера и течения газа с переменной энтропией // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 105–118. DOI 10.17223/19988621/33/11.
4. Кушнер А.Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа – Ампера и инварианты Лапласа // Доклады РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 1–4.
5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
6. Полянин А.Д., Журов А.И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 606–611.

7. Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
8. Рахмелевич И.В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1. С. 42–50.
9. Рахмелевич И.В. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 4-1. С. 374–381.
10. Рахмелевич И.В. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 12–19. DOI 10.17223/19988621/33/2.
11. Рахмелевич И.В. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 18–25. DOI 10.17223/19988621/35/3.
12. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. V. 26. P. 1901–1913.
13. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation // Journal of Physics A. 1994. V. 27. P. L291–L297.

Статья поступила 16.03.2016 г.

Rakhmelevich I.V. (2016) ON SOLUTIONS OF THE MONGE – AMPERE EQUATION WITH POWER-LAW NON-LINEARITY WITH RESPECT TO FIRST DERIVATIVES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 33–43

DOI 10.17223/19988621/42/4

In this work, the two-dimensional Monge – Ampere equation the right-hand side of which includes arbitrary non-linearity with respect to the unknown function and power-law nonlinearity with respect to its first derivatives is considered. To solve this equation, the method of functional separation of variables is used. We study the case when one of the unknown functions used in the method of separation of variables is linear and also the case when all these functions are arbitrary. The exact solutions in the implicit form of the considered equation are received in the presence of arbitrary nonlinearity with respect to the unknown function. For the case when the equation does not contain unknown function explicitly, its solutions are found in an explicit form. The solutions have been analyzed for different values of parameters characterizing the nonlinearity.

Keywords: Monge – Ampere equation, functional separation of variables, power-law non-linearity.

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

REFERENCES

1. Polyanin A.D. and Zaitsev V.F. (2004) *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.
2. Khabirov S.V. (1992) Nonisentropic one-dimensional gas motions constructed by means of the contact group of the nonhomogeneous Monge – Ampère equation. *Mathematics of the USSR – Sbornik*. 71(2). pp. 447–462. DOI 10.1070/SM1992v071n02ABEH001405.
3. Shablovsky O.N. (2015) Parametricheskie resheniya uravneniya Monzha – Ampera i techeniya gaza s peremennoy entropiey [Parametric solutions for the Monge – Ampere equation and gas flows with variable entropy]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 105–118. DOI 10.17223/19988621/33/11.

4. Kushner A.G. (2008) Transformation of hyperbolic Monge – Ampère equations into linear equations with constant coefficients. *Doklady Mathematics*. 78(3). pp. 907–909.
5. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. (2005) Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods of solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ.
6. Polyanin A.D., Zhurov A.I. (2002) The generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics. *Doklady Mathematics*. 65(1). pp. 129–134.
7. Rakhmelevich I.V. (2013) O primenении metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, sodержashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh [On application of the variable separation method to mathematical physics equations containing homogeneous functions of derivatives]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(23). pp. 37–44.
8. Rakhmelevich I.V. (2014) Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, sodержashchikh mul'tiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh [On equations of mathematical physics containing multi-homogeneous functions of derivatives]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(27). pp. 42–50.
9. Rakhmelevich I.V. (2014) O resheniyakh mnogomernogo uravneniya Klero s mul'tiodnorodnoy funktsiey ot proizvodnykh [On the Solutions of Multi-dimensional Clairaut Equation with Multi-homogeneous Function of the Derivatives]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika, mekhanika, informatika*. 14(4-1). pp. 374–381.
10. Rakhmelevich I.V. (2015) O dvumernykh giperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynost'yu po proizvodnym [On two-dimensional hyperbolic equations with power-law nonlinearity in the derivatives]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 12–19. DOI 10.17223/19988621/33/2.
11. Rakhmelevich I.V. (2015) O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost'yami [On some new solutions of the multi-dimensional first order partial differential equation with power-law nonlinearities]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 18–25. DOI 10.17223/19988621/35/3.
12. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. (1993) Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*. 26. pp. 1901–1913.
13. Zhdanov R.Z. (1994) Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*. 27. pp. L291–L297.

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/42/5

Я.В. Славолюбова¹

АССОЦИИРОВАННЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА 7-МЕРНОЙ ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ S^7

Построены новые примеры ассоциированных контактных метрических структур (η, ξ, ϕ, g^J) на 7-мерной единичной сфере S^7 . Для полученных структур установлено соответствие ассоциированных метрик g^J неинтегрируемому семейству ассоциированных почти комплексных структур J в 3-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$.

Ключевые слова: контактные структуры, ассоциированные контактные метрические структуры, 7-мерная сфера.

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия о контактных многообразиях.

Определение 1 ([1]). Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M^{2n+1} класса C^∞ называется контактным многообразием или имеет контактную структуру, если на нём задана глобальная дифференциальная 1-форма η , такая, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

всюду на M^{2n+1} .

Контактная структура задает $2n$ -мерное распределение

$$E = \{X \in TM^{2n+1} : \eta(X) = 0\},$$

которое называют контактным распределением, и ненулевое векторное поле ξ , такое, что

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, X) = 0$$

для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Это векторное поле определяет 1-мерное распределение, дополнительное к распределению E , и называется характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2 ([1]). Говорят, что дифференцируемое многообразие M^{2n+1} имеет (η, ξ, ϕ) -структуру, если оно допускает поле ϕ эндоморфизмов касательных пространств, векторное поле ξ и 1-форму η , удовлетворяющую условиям

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad (1)$$

где I – тождественное преобразование TM^{2n+1} .

Также имеют место следующие условия: $\phi\xi = 0$ и $\eta \circ \phi = 0$ в определении (η, ξ, ϕ) -структуры, вытекающие из условий (1).

Определение 3 ([1]). Если многообразие M^{2n+1} с заданной (η, ξ, ϕ) -структурой допускает риманову метрику g , такую, что

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке фонда гранта Президента РФ (проект НШ-4382.2014.1)

для любых векторных полей X, Y , тогда говорят, что M^{2n+1} имеет (η, ξ, ϕ, g) -структуру или почти контактную метрическую структуру и g называется совместимой метрикой.

Определение 4 ([1]). Пусть многообразие M^{2n+1} имеет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, ϕ, g) , g – совместимая метрика и пусть определена 2-форма $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi}(X, Y) = g(X, \phi Y).$$

Почти контактную метрическую структуру (η, ξ, ϕ, g) с $\tilde{\Phi} = d\eta$ называют ассоциированной почти контактной метрической структурой для контактной структуры η или более проще её также называют контактной метрической структурой (η, ξ, ϕ, g) , а метрику g – ассоциированной метрикой.

2. Контактная метрическая структура на 7-мерной единичной сфере S^7

Рассмотрим S^7 как сферу в пространстве $\mathbb{C}^4$, то есть $S^7 = \{(z^1, z^2, z^3, z^4) \in \mathbb{C}^4 : |z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2 + |z^4|^2 = 1\}$.

На сфере S^7 действуем справа группой $G = \{e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Её можно отождествить с единичной сферой S^1 . Группа G действует по правилу

$$z \cdot e^{it} = (z^1 \cdot e^{it}, z^2 \cdot e^{it}, z^3 \cdot e^{it}, z^4 \cdot e^{it}).$$

Тогда $S^7/S^1 = \mathbb{CP}^3$. Получим отображение $S^7 \rightarrow \mathbb{CP}^3$, которое называется расслоением Хопфа. Прообразом каждой точки пространства $\mathbb{CP}^3$ при этом отображении является окружность $S^1 = \{e^{it}\}$. Контактная структура на сфере S^7 строится следующим образом.

Действие S^1 на S^7 порождает характеристическое векторное поле ξ [2]. Его значение в комплексных координатах пространства $\mathbb{C}^4$

$$\xi(z) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (z \cdot e^{it}) = z \cdot i \cdot e^{it} \Big|_{t=0} = i \cdot z = i(z^1, z^2, z^3, z^4).$$

Контактная форма определяется как $\eta(X) = g_0(\xi, X)$ для всех векторных полей X на сфере S^7 , где g_0 – риманова метрика на сфере S^7 .

Вычислим риманову метрику g_0 в комплексных координатах:

$$g_0(\xi, X) = (\xi, X)|_{\mathbb{C}^4}, \quad X = (X^1, X^2, X^3, X^4);$$

$$(\xi, X) = (i \cdot z, X) = i(z^1 \bar{X}^1 + z^2 \bar{X}^2 + z^3 \bar{X}^3 + z^4 \bar{X}^4),$$

где $d\bar{z}^i(X) = \bar{X}^i$, $i = \overline{1, 4}$. Получим выражение формы η в комплексных координатах пространства $\mathbb{C}^4$:

$$\eta = iz^1 d\bar{z}^1 + iz^2 d\bar{z}^2 + iz^3 d\bar{z}^3 + iz^4 d\bar{z}^4. \quad (2)$$

С учётом в данном выражении для формы η соотношения $z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 + z^3 \bar{z}^3 + z^4 \bar{z}^4 = 1$ на координаты (z^1, z^2, z^3, z^4) получим ограничение формы η в пространстве $\mathbb{C}^4$ на сферу S^7 .

Проверим условие $\eta \wedge (d\eta)^3 \neq 0$ на S^7 . Для этого найдем это выражение в $\mathbb{C}^4$, а затем ограничим его на S^7 .

$$\begin{aligned}\eta \wedge (d\eta)^3 = & 6z^4 \wedge dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2 \wedge dz^3 \wedge d\bar{z}^3 \wedge d\bar{z}^4 + \\ & + 6z^3 \wedge dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2 \wedge dz^4 \wedge d\bar{z}^4 \wedge d\bar{z}^3 + \\ & + 6z^2 \wedge dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^3 \wedge d\bar{z}^3 \wedge dz^4 \wedge d\bar{z}^4 \wedge d\bar{z}^2 + \\ & + 6z^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2 \wedge dz^3 \wedge d\bar{z}^3 \wedge dz^4 \wedge d\bar{z}^4 \wedge d\bar{z}^1 = 6i_z \mu,\end{aligned}$$

где $\mu = dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2 \wedge dz^3 \wedge d\bar{z}^3 \wedge dz^4 \wedge d\bar{z}^4$. Нетрудно заметить, что вычисленное выражение $\eta \wedge (d\eta)^3 \neq 0$ в ограничении на сферу S^7 . Следовательно, так определённая 1-форма $\eta(X) = g_0(\xi, X)$ является контактной формой.

Определим по контактной форме η контактное распределение E : $E = \{X \in TS^7: \eta(X) = 0\}$. Очевидно $X \perp r$, где r – радиус сферы, $r = (z^1, z^2, z^3, z^4)$. Контактное распределение задается уравнениями:

$$\begin{cases} i(z^1 \bar{X}^1 + z^2 \bar{X}^2 + z^3 \bar{X}^3 + z^4 \bar{X}^4) = 0, \\ z^1 X^1 + z^2 X^2 + z^3 X^3 + z^4 X^4 = 0, \end{cases}$$

где $X \in E$, $X = (X^1, \dots, X^4)$ – искомые координаты.

Аффинор ϕ определяется из соотношения $d\eta(X, Y) = g_0(X, \phi Y)$ и обладает свойствами $\phi^2|_E = -I$ и $\phi(\xi) = 0$.

Таким образом, определены все характеристики контактной структуры на сфере S^7 : $\eta, d\eta, \xi, E, \phi$.

3. Связь между контактной структурой на сфере S^7 и почти комплексной структурой в пространстве $\mathbb{CP}^3$

При отображении $S^7 \rightarrow \mathbb{CP}^3$ контактные метрические структуры и почти комплексные структуры соответствуют друг другу, то есть данное отображение аффинор ϕ переводит в почти комплексную структуру J .

Рассмотрим проекцию $\pi: \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^3$. Используя естественную комплексную координатную систему (z^1, z^2, z^3, z^4) в пространстве $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$, имеем фундаментальную форму Φ в пространстве $\mathbb{CP}^3$, а также метрику Фубини – Штуди $g(X, Y) = \Phi(JX, Y)$ для любых векторных полей X, Y .

Докажем, что $d\eta = \pi^* \Phi$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ форму

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} = & -4i\partial\bar{\partial}\ln\left(\sum_{k=1}^4 z^k \bar{z}^k\right) = -4i\partial\left(\frac{\sum_{k=1}^4 z^k d\bar{z}^k}{\sum_{k=1}^4 z^k \bar{z}^k}\right) = \\ = & -4i\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^4 z^k \bar{z}^k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^4 dz^k d\bar{z}^k\right) - \left(\sum_{k=1}^4 \bar{z}^k dz^k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^4 z^k d\bar{z}^k\right)}{\left(\sum_{k=1}^4 z^k \bar{z}^k\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Форма $\tilde{\Phi}$ проектируется на форму Φ , то есть $\pi^* \Phi = \tilde{\Phi}$. Рассмотрим ограничение формы $\tilde{\Phi}$ в пространстве $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ на сферу S^7 :

$$S^7 = \{ (z^1, z^2, z^3, z^4) \in \mathbb{C}^4 : |z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2 + |z^4|^2 = 1 \},$$

$$z \in S^7 : z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 + z^3 \bar{z}^3 + z^4 \bar{z}^4 = 1.$$

Продифференцировав равенство

$$z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 + z^3 \bar{z}^3 + z^4 \bar{z}^4 = 1,$$

получим

$$\sum_{k=1}^4 \bar{z}^k dz^k + \sum_{k=1}^4 z^k d\bar{z}^k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^4 \bar{z}^k dz^k = - \sum_{k=1}^4 z^k d\bar{z}^k.$$

$$\tilde{\Phi}|_{S^7} = -4i \left(\left(\sum_{k=1}^4 dz^k \wedge d\bar{z}^k \right) + \left(\sum_{k=1}^4 z^k d\bar{z}^k \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^4 \bar{z}^k dz^k \right) \right) = -4i \sum_{k=1}^4 dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

Рассмотрим глобальную дифференциальную 1-форму η (2), определенную в разделе 2,

$$\eta = iz^1 d\bar{z}^1 + iz^2 d\bar{z}^2 + iz^3 d\bar{z}^3 + iz^4 d\bar{z}^4 = i \sum_{k=1}^4 z^k d\bar{z}^k.$$

Вычислим внешний дифференциал формы η :

$$d\eta = i \sum_{k=1}^4 dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

Сравнивая выражения формы $\tilde{\Phi}|_{S^7}$ и дифференциала $d\eta$, получим $d\eta = \tilde{\Phi}|_{S^7}$ или $d\eta = \pi^* \Phi|_{S^7}$ с точностью до коэффициента из $\mathbb{C}$.

4. Метрика Фубини – Штуди

Пусть $\mathbb{CP}^3$ есть 3-мерное комплексное проективное пространство с однородными координатами $z^0, z^1, \dots, z^3$. Пусть U_0 – открытое подмножество в пространстве

$\mathbb{CP}^3$, определенное условием $z^0 \neq 0$. Пусть $w^k = \frac{z^k}{z^0}$, $k = 0, \dots, 3$. Метрика Фубини –

Штуди в пространстве $\mathbb{CP}^3$ определяется (в координатной плоскости U_0) следующим образом:

$$ds^2 = 4 \frac{(1 + \sum_{i=1}^3 w^i \bar{w}^i) (\sum_{i=1}^3 dw^i \cdot d\bar{w}^i) - (\sum_{i=1}^3 \bar{w}^i dw^i) \cdot (\sum_{i=1}^3 w^i d\bar{w}^i)}{(1 + \sum_{i=1}^3 w^i \bar{w}^i)}.$$

Данная метрика в пространстве $\mathbb{CP}^3$ кэлерова.

Определим метрику в пространстве $\mathbf{CP}^3$ в комплексных локальных координатах w^1, w^2, w^3 .

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= 4 \frac{(1 + \sum_{i=1}^3 w^i \bar{w}^i)(\sum_{i=1}^3 dw^i \cdot d\bar{w}^i) - (\sum_{i=1}^3 \bar{w}^i dw^i) \cdot (\sum_{i=1}^3 w^i d\bar{w}^i)}{(1 + \sum_{i=1}^3 w^i \bar{w}^i)} = \\
 &= \frac{4}{(1 + \|w\|^2)^2} \left[\left(1 + \sum_{i=1}^3 w^i \cdot \bar{w}^i \right) (dw^1 \cdot d\bar{w}^1 + dw^2 \cdot d\bar{w}^2 + dw^3 \cdot d\bar{w}^3) - \right. \\
 &\quad \left. - (\bar{w}^1 \cdot dw^1 + \bar{w}^2 \cdot dw^2 + \bar{w}^3 \cdot dw^3) (w^1 d\bar{w}^1 + w^2 d\bar{w}^2 + w^3 d\bar{w}^3) \right] = \\
 &= \frac{4}{(1 + \|w\|^2)^2} \left[(1 + w^2 \bar{w}^2 + w^3 \bar{w}^3) dw^1 \cdot d\bar{w}^1 + (1 + w^1 \bar{w}^1 + w^3 \bar{w}^3) \times \right. \\
 &\quad \times dw^2 \cdot d\bar{w}^2 + (1 + w^1 \bar{w}^1 + w^2 \bar{w}^2) dw^3 \cdot d\bar{w}^3 - \bar{w}^1 w^2 dw^1 \cdot d\bar{w}^2 - \\
 &\quad \left. - \bar{w}^2 w^3 dw^2 \cdot d\bar{w}^3 - \bar{w}^3 w^1 dw^3 \cdot d\bar{w}^1 - \bar{w}^3 w^2 dw^3 \cdot d\bar{w}^2 \right] = \\
 &= \frac{2}{(1 + \|w\|^2)^2} \left[(1 + w^2 \bar{w}^2 + w^3 \bar{w}^3) dw^1 \otimes d\bar{w}^1 + (1 + w^2 \bar{w}^2 + w^3 \bar{w}^3) d\bar{w}^1 \otimes dw^1 + \right. \\
 &\quad + (1 + w^1 \bar{w}^1 + w^3 \bar{w}^3) dw^2 \otimes d\bar{w}^2 + (1 + w^1 \bar{w}^1 + w^3 \bar{w}^3) d\bar{w}^2 \otimes dw^2 + \\
 &\quad + (1 + w^1 \bar{w}^1 + w^2 \bar{w}^2) dw^3 \otimes d\bar{w}^3 + (1 + w^1 \bar{w}^1 + w^2 \bar{w}^2) d\bar{w}^3 \otimes dw^3 - \\
 &\quad - \bar{w}^1 w^2 dw^1 \otimes d\bar{w}^2 - \bar{w}^1 w^2 d\bar{w}^2 \otimes dw^1 - \bar{w}^1 w^3 dw^1 \otimes d\bar{w}^3 - \\
 &\quad - \bar{w}^1 w^3 d\bar{w}^3 \otimes dw^1 - \bar{w}^2 w^1 dw^2 \otimes d\bar{w}^1 - \bar{w}^2 w^1 d\bar{w}^1 \otimes dw^2 - \\
 &\quad - \bar{w}^2 w^3 dw^2 \otimes d\bar{w}^3 - \bar{w}^2 w^3 d\bar{w}^3 \otimes dw^2 - \bar{w}^3 w^1 dw^3 \otimes d\bar{w}^1 - \\
 &\quad \left. - \bar{w}^3 w^1 d\bar{w}^1 \otimes dw^3 - \bar{w}^3 w^2 dw^3 \otimes d\bar{w}^2 - \bar{w}^3 w^2 d\bar{w}^2 \otimes dw^3 \right].
 \end{aligned}$$

Матрица метрики g имеет вид

$$g = m_1 \begin{pmatrix} & & W^1 & -w^2 \bar{w}^1 & -w^3 \bar{w}^1 \\ & 0 & -w^1 \bar{w}^2 & W^2 & -w^3 \bar{w}^2 \\ & & -w^1 \bar{w}^3 & -w^2 \bar{w}^3 & W^3 \\ W^1 & -w^1 \bar{w}^2 & -w^1 \bar{w}^3 & & \\ -w^2 \bar{w}^1 & W^2 & -w^2 \bar{w}^3 & 0 & \\ -w^3 \bar{w}^1 & -w^3 \bar{w}^2 & W^3 & & \end{pmatrix},$$

где

$$m_1 = \frac{2}{(1 + \|w\|^2)^2}, \quad W^1 = 1 + \|w\|^2 - w^1 \bar{w}^1, \quad W^2 = 1 + \|w\|^2 - w^2 \bar{w}^2, \quad W^3 = 1 + \|w\|^2 - w^3 \bar{w}^3.$$

Рассмотрим правый верхний блок и приведём его к более удобному виду:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{(1+\|w\|^2)^2} \begin{pmatrix} W^1 & -w^2 \bar{w}^1 & -w^3 \bar{w}^1 \\ -w^1 \bar{w}^2 & W^2 & -w^3 \bar{w}^2 \\ -w^1 \bar{w}^3 & -w^2 \bar{w}^3 & W^3 \end{pmatrix} = \\
 & = \frac{2}{(1+\|w\|^2)^2} \left((1+\|w\|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^1 \bar{w}^1 & w^2 \bar{w}^1 & w^3 \bar{w}^1 \\ w^1 \bar{w}^2 & w^2 \bar{w}^2 & w^3 \bar{w}^2 \\ w^1 \bar{w}^3 & w^2 \bar{w}^3 & w^3 \bar{w}^3 \end{pmatrix} \right) = \\
 & = \frac{2}{(1+\|w\|^2)^2} \left((1+\|w\|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{w}^1 \\ \bar{w}^2 \\ \bar{w}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 & w^2 & w^3 \end{pmatrix} \right) = \\
 & = \frac{2}{(1+\|w\|^2)^2} \left((1+\|w\|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \bar{w} w^t \right).
 \end{aligned}$$

Тогда метрика примет вид

$$g = \frac{2}{(1+\|w\|^2)^2} \left((1+\|w\|^2) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \bar{w} w^t \\ w \bar{w}^t & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Обозначим компоненты:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{\alpha\bar{\beta}} \\ (b_{\alpha\bar{\beta}})^t & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(b_{\alpha\bar{\beta}}) = \begin{pmatrix} w^1 \bar{w}^1 & w^2 \bar{w}^1 & w^3 \bar{w}^1 \\ w^1 \bar{w}^2 & w^2 \bar{w}^2 & w^3 \bar{w}^2 \\ w^1 \bar{w}^3 & w^2 \bar{w}^3 & w^3 \bar{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Ввиду данных обозначений метрика g может быть представлена матрицей:

$$g = \frac{2}{(1+\|w\|^2)^2} \left((1+\|w\|^2) A - B \right). \quad (3)$$

Фундаментальная 2-форма эрмитовой метрики g задается:

$$\Phi = -2i \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dw^\alpha \wedge d\bar{w}^\beta,$$

где $g_{\alpha\bar{\beta}}$ – элементы матрицы эрмитовой формы

$$ds^2 = 2 \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \cdot d\bar{z}^\beta.$$

5. Ассоциированные контактные метрические структуры на S^7 и ассоциированные почти комплексные структуры на $\mathbf{CP}^3$

Из определения контактной метрической структуры следует, что $d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$. Если зафиксировать η , $d\eta$, ξ , то по аффинору ϕ можно определить метрику g . То есть за счет вариаций аффинора ϕ можем построить новые примеры ассоциированных контактных метрических структур. Так как при отображении $S^7 \rightarrow \mathbf{CP}^3$ существует связь между контактной метрической структурой и почти комплексной структурой, аффинор ϕ соответствует почти комплексной структуре J , то необходимо построить новые примеры ассоциированных почти комплексных структур в пространстве $\mathbf{CP}^3$.

Большой класс почти комплексных структур образуют ассоциированные почти комплексные структуры. Почти комплексная структура J называется положительной ассоциированной с формой Φ , если для любых векторных полей X, Y выполняются условия: $\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$ и $\Phi(X, JX) > 0$, если $X \neq 0$ [3].

Построим в пространстве $\mathbf{CP}^3$ ассоциированную почти комплексную структуру J , отличную от стандартной почти комплексной структуры J_0 . Положительную ассоциированную почти комплексную структуру можно получить в следующем виде:

$$J = J_0(1 + R)(1 - R)^{-1},$$

где R – симметрический эндоморфизм $R: TCP^3 \rightarrow TCP^3$, антикоммутирующий с почти комплексной структурой J_0 . При этом $R = (1 - JJ_0)^{-1}(1 + JJ_0)$, $J_0 = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$.

Матрица R , антикоммутирующая с матрицей J_0 , имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ R_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } R_\alpha^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} r_1^{\bar{1}} & r_2^{\bar{1}} & r_3^{\bar{1}} \\ r_1^{\bar{2}} & r_2^{\bar{2}} & r_3^{\bar{2}} \\ r_1^{\bar{3}} & r_2^{\bar{3}} & r_3^{\bar{3}} \end{pmatrix}.$$

Это легко проверить. Вычислив $J_0 R$ и $R J_0$:

$$\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ R_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ -iR_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ R_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ iR_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & i\overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ -iR_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix},$$

видим, что $J_0 R = -R J_0$.

Для симметричности оператора R достаточно, чтобы матрица $gR = g_{\alpha\bar{\beta}} R_\gamma^{\bar{\beta}}$ была бы симметрической. Из выражения (3) метрики g следует, что для этого матрицы AR и BR должны быть симметрическими.

Вычислим матрицу AR :

$$AR = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} \\ R_\alpha^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{R_\alpha^{\bar{\beta}}} & 0 \\ 0 & R_\alpha^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Для симметричности матрицы AR достаточно взять матрицу $R_{\alpha}^{\bar{\beta}}$ симметрической, а именно:

$$R_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} r_1^{\bar{1}} & r_2^{\bar{1}} & r_3^{\bar{1}} \\ r_2^{\bar{1}} & r_2^{\bar{2}} & r_3^{\bar{2}} \\ r_3^{\bar{1}} & r_3^{\bar{2}} & r_3^{\bar{3}} \end{pmatrix}.$$

Для симметричности матрицы BR достаточно выполнения следующего равенства:

$$b_{\alpha\bar{\beta}} R_{\gamma}^{\bar{\beta}} = b_{\gamma\bar{\beta}} R_{\alpha}^{\bar{\beta}}.$$

В результате произведения матриц $b_{\alpha\bar{\beta}}$ и $R_{\alpha}^{\bar{\beta}}$, получим

$$\begin{pmatrix} w^1 \bar{w}^1 & w^2 \bar{w}^1 & w^3 \bar{w}^1 \\ w^1 \bar{w}^2 & w^2 \bar{w}^2 & w^3 \bar{w}^2 \\ w^1 \bar{w}^3 & w^2 \bar{w}^3 & w^3 \bar{w}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{\bar{1}} & r_2^{\bar{1}} & r_3^{\bar{1}} \\ r_2^{\bar{1}} & r_2^{\bar{2}} & r_3^{\bar{2}} \\ r_3^{\bar{1}} & r_3^{\bar{2}} & r_3^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wr_{11} & wr_{12} & wr_{13} \\ wr_{21} & wr_{22} & wr_{23} \\ wr_{31} & wr_{32} & wr_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} wr_{11} &= w^1 \bar{w}^1 r_1^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^1 r_2^{\bar{1}} + w^3 \bar{w}^1 r_3^{\bar{1}}; \quad wr_{12} = w^1 \bar{w}^1 r_2^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^1 r_2^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^1 r_3^{\bar{2}}; \\ wr_{13} &= w^1 \bar{w}^1 r_3^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^1 r_3^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^1 r_3^{\bar{3}}; \quad wr_{21} = w^1 \bar{w}^2 r_1^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^2 r_2^{\bar{1}} + w^3 \bar{w}^2 r_3^{\bar{1}}; \\ wr_{22} &= w^1 \bar{w}^2 r_2^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^2 r_2^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^2 r_3^{\bar{2}}; \quad wr_{23} = w^1 \bar{w}^2 r_3^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^2 r_3^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^2 r_3^{\bar{3}}; \\ wr_{31} &= w^1 \bar{w}^3 r_1^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^3 r_2^{\bar{1}} + w^3 \bar{w}^3 r_3^{\bar{1}}; \quad wr_{32} = w^1 \bar{w}^3 r_2^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^3 r_2^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^3 r_3^{\bar{2}}; \\ wr_{33} &= w^1 \bar{w}^3 r_3^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^3 r_3^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^3 r_3^{\bar{3}}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство $b_{\alpha\bar{\beta}} R_{\gamma}^{\bar{\beta}} = b_{\gamma\bar{\beta}} R_{\alpha}^{\bar{\beta}}$, имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} w^1 \bar{w}^1 r_2^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^1 r_2^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^1 r_3^{\bar{2}} = w^1 \bar{w}^2 r_1^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^2 r_2^{\bar{1}} + w^3 \bar{w}^2 r_3^{\bar{1}}, \\ w^1 \bar{w}^1 r_3^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^1 r_3^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^1 r_3^{\bar{3}} = w^1 \bar{w}^3 r_1^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^3 r_2^{\bar{1}} + w^3 \bar{w}^3 r_3^{\bar{1}}, \\ w^1 \bar{w}^2 r_3^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^2 r_3^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^2 r_3^{\bar{3}} = w^1 \bar{w}^3 r_2^{\bar{1}} + w^2 \bar{w}^3 r_2^{\bar{2}} + w^3 \bar{w}^3 r_3^{\bar{2}}. \end{cases} \quad (4)$$

Решая данную систему, получим общее решение:

$$\begin{aligned} r_2^{\bar{1}} &= \frac{\bar{w}^2}{\bar{w}^3} r_3^{\bar{1}} - \frac{w^2}{w^1} r_2^{\bar{2}} + \frac{(w^2 \bar{w}^2 - w^3 \bar{w}^3)}{w^1 \bar{w}^3} r_3^{\bar{2}} + \frac{w^3 \bar{w}^2}{w^1 \bar{w}^3} r_3^{\bar{3}}; \\ r_1^{\bar{1}} &= -\frac{(w^2 \bar{w}^2 - w^1 \bar{w}^1 + w^3 \bar{w}^3)}{w^1 \bar{w}^3} r_3^{\bar{1}} + \frac{(w^2)^2}{(w^1)^2} r_2^{\bar{2}} - \frac{w^3 (w^2 \bar{w}^2 - w^1 \bar{w}^1)}{(w^1)^2 \bar{w}^3} r_3^{\bar{3}}, \end{aligned}$$

где комплексные числа $r_3^{\bar{1}}$, $r_2^{\bar{2}}$, $r_3^{\bar{2}}$, $r_3^{\bar{3}}$ – любые.

Можно найти несколько частных решений системы (4) и соответствующие им ассоциированные почти комплексные структуры.

Случай 1. Пусть $r_3^{\bar{1}}=0$, $r_3^{\bar{2}}=0$, $r_3^{\bar{3}}=w^1w^2\bar{w}^3$, $r_2^{\bar{2}}=w^1\bar{w}^2w^3$, тогда $r_2^{\bar{1}}=0$, $r_1^{\bar{1}}=\bar{w}^1w^2w^3$.

Следовательно,

$$R_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \bar{w}^1w^2w^3 & 0 & 0 \\ 0 & w^1\bar{w}^2w^3 & 0 \\ 0 & 0 & w^1w^2\bar{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм $R:TCP^3 \rightarrow TCP^3$ определен только в локальной карте U_0 . Продолжим его на всё пространство $\mathbf{CP}^3$ нулем, т.е. $R|_{TCP^3 \setminus (\pi')^{-1}(U_0)} = 0$, где $\pi': TCP^3 \rightarrow CP^3$ – естественная проекция. Для этого умножим матрицу R на гладкую функцию $\frac{1}{f(w)}$, обращающуюся в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастают выражения: $\bar{w}^1w^2w^3$, $w^1\bar{w}^2w^3$ или $w^1w^2\bar{w}^3$. В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1 + \|w\|)^4$.

Окончательно имеем вид эндоморфизма

$$R = \frac{1}{f(w)} \begin{pmatrix} 0 & R_{\alpha}^{\bar{\beta}} \\ R_{\alpha}^{\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Определенная данным эндоморфизмом R почти комплексная структура $J = J_0(1+R)(1-R)^{-1}$ совпадает со стандартной структурой J_0 в «бесконечной точке» пространства $\mathbf{CP}^3$, $J(\infty) = J_0(\infty)$.

Проведем простые вычисления для нахождения $(1+R)(1-R)^{-1}$:

$$(1-R)(1+R) = (1-R)(1+R);$$

$$(1-R)^{-1}(1-R)(1+R) = (1+R);$$

$$(1-R)^{-1} = (1+R)(1-R^2)^{-1}.$$

$$R^2 = \frac{1}{(f(w))^2} \begin{pmatrix} R_{\gamma}^{\bar{\beta}} R_{\alpha}^{\bar{\gamma}} & 0 \\ 0 & R_{\gamma}^{\bar{\beta}} R_{\bar{\alpha}}^{\gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{((f(w))^2} |w^1w^2w^3|^2 I;$$

$$1-R^2 = \left(1 - \frac{1}{((f(w))^2} |w^1w^2w^3|^2\right) I > 0;$$

$$(1-R)^{-1} = (1+R)(1-R^2)^{-1} = \frac{(f(w))^2}{((f(w))^2 - |w^1w^2w^3|^2)} (1+R);$$

$$(1+R)(1-R^2)^{-1} = \frac{(f(w))^2}{((f(w))^2 - |w^1w^2w^3|^2)} (1+2R+R^2);$$

$$(1+R)(1-R)^{-1} = I + 2R + 2 \frac{|w^1w^2w^3|^2}{((f(w))^2 - |w^1w^2w^3|^2)} (I+R).$$

Окончательно получим

$$J = J_0 + 2J_0 \left(\frac{((f(w))^2}{((f(w))^2 - |w^1 w^2 w^3|^2)} R + \frac{|w^1 w^2 w^3|^2}{((f(w))^2 - |w^1 w^2 w^3|^2)} I \right).$$

Нетрудно проверить, что $J^2 = -1$. При вычислении используем равенство $RJ_0 = -J_0 R$.

Найдем еще три частных решения системы (4).

Случай 2. Пусть $r_3^{\bar{1}} = -w^1 w^2 \bar{w}^3$, $r_2^{\bar{2}} = 0$, $r_2^{\bar{3}} = (w^1)^2 \bar{w}^3$, $r_3^{\bar{3}} = (w^1)^2 \bar{w}^3$, тогда $r_1^{\bar{2}} = w^1 w^3 (\bar{w}^2 - \bar{w}^3)$, $r_1^{\bar{1}} = w^3 (2w^2 \bar{w}^3 - w^2 \bar{w}^2 + w^1 \bar{w}^1)$.

Следовательно,

$$R_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} w^3 (2w^2 \bar{w}^3 + w^1 \bar{w}^1 - w^2 \bar{w}^2) & w^1 w^3 (\bar{w}^2 - \bar{w}^3) & -w^1 w^2 \bar{w}^3 \\ w^1 w^3 (\bar{w}^2 - \bar{w}^3) & 0 & (w^1)^2 \bar{w}^3 \\ -w^1 w^2 \bar{w}^3 & (w^1)^2 \bar{w}^3 & (w^1)^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм $R: TCP^3 \rightarrow TCP^3$ определен только в локальной карте U_0 . Продолжим его на всё пространство $\mathbf{CP}^3$ нулем. Для этого умножим матрицу R на гладкую функцию $1/f(w)$, обращающуюся в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастают элементы матрицы $R_{\alpha}^{\bar{\beta}}$: $w^3 (2w^2 \bar{w}^3 + w^1 \bar{w}^1 - w^2 \bar{w}^2)$, $w^1 w^3 (\bar{w}^2 - \bar{w}^3)$, $-w^1 w^2 \bar{w}^3$, $(w^1)^2 \bar{w}^3$. В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1 + \|w\|)^4$.

Случай 3. Пусть $r_3^{\bar{1}} = 0$, $r_2^{\bar{2}} = 0$, $r_3^{\bar{3}} = 0$, $r_3^{\bar{2}} = (w^1)^2 \bar{w}^3$, тогда $r_2^{\bar{1}} = w^1 (w^2 \bar{w}^2 - w^3 \bar{w}^3)$, $r_1^{\bar{1}} = w^2 (w^1 \bar{w}^1 - w^2 \bar{w}^2 + w^3 \bar{w}^3)$.

Следовательно,

$$R_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} w^2 (w^1 \bar{w}^1 - w^2 \bar{w}^2 + w^3 \bar{w}^3) & w^1 (w^2 \bar{w}^2 - w^3 \bar{w}^3) & 0 \\ w^1 (w^2 \bar{w}^2 - w^3 \bar{w}^3) & 0 & (w^1)^2 \bar{w}^3 \\ 0 & (w^1)^2 \bar{w}^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм $R: TCP^3 \rightarrow TCP^3$ определен только в локальной карте U_0 . Продолжим его на всё пространство $\mathbf{CP}^3$ нулем. Для этого умножим R на гладкую функцию $1/f(w)$, обращающуюся в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастают элементы матрицы $R_{\alpha}^{\bar{\beta}}$. В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1 + \|w\|)^4$.

Случай 4. Пусть $r_3^{\bar{1}} = 0$, $r_2^{\bar{2}} = 0$, $r_3^{\bar{2}} = 0$, $r_3^{\bar{3}} = (w^1)^2 \bar{w}^3$, тогда $r_1^{\bar{1}} = w^3 (w^1 \bar{w}^1 - w^2 \bar{w}^2)$, $r_2^{\bar{1}} = w^1 \bar{w}^2 w^3$.

Следовательно,

$$R_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} w^3 (w^1 \bar{w}^1 - w^2 \bar{w}^2) & w^1 \bar{w}^2 w^3 & 0 \\ w^1 \bar{w}^2 w^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (w^1)^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix}.$$

Матрица эндоморфизма R имеет вид

$$R = \frac{1}{f(w)} \begin{pmatrix} 0 & \overline{R_\alpha^\beta} \\ R_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве функции $f(w)$, например, можно взять функцию вида $f(w) = (1 + \|w\|)^4$.

Более подробно рассмотрим случай 1. Для эндоморфизма R , соответствующего первому случаю, найдем соответствующую почти комплексную структуру J . В качестве функции $f(w)$ возьмем следующую функцию: $f(w) = (1 + |w|)^4$. Тогда матрица почти комплексной структуры J имеет вид

$$J = f_1(w^1, w^2, w^3) \begin{pmatrix} iI & if_2(w^1, w^2, w^3) \overline{R_\alpha^\beta} \\ -if_2(w^1, w^2, w^3) R_\alpha^\beta & -iI \end{pmatrix},$$

где

$$f_1(w^1, w^2, w^3) = \frac{(1 + |w|)^8 + |w^1 w^2 w^3|^2}{(1 + |w|)^8 - |w^1 w^2 w^3|^2},$$

$$f_2(w^1, w^2, w^3) = \frac{2(1 + |w|)^4}{(1 + |w|)^8 + |w^1 w^2 w^3|^2}.$$

Проверим найденную почти контактную структуру на интегрируемость. Найдем выражение для матрицы почти комплексной структуры J в действительных координатах пространства $\mathbf{R}^8$.

Имеют место следующие соответствия:

$$f_1(w^1, w^2, w^3) \rightarrow f_1(x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3),$$

$$f_2(w^1, w^2, w^3) \rightarrow f_2(x^1, y^1, x^2, y^2, x^3, y^3),$$

$$(1 + |w|)^8 = \left(1 + \sqrt{(x^1)^2 + (y^1)^2 + (x^2)^2 + (y^2)^2 + (x^3)^2 + (y^3)^2}\right)^4,$$

$$|w^1 w^2 w^3|^2 = (x^1 x^2 x^3 - x^3 y^1 y^2 - x^1 y^2 y^3 - x^2 y^1 y^3)^2 +$$

$$+ (x^1 x^3 y^2 + y^1 x^2 x^3 + x^1 x^2 y^3 - y^1 y^2 y^3)^2.$$

Таким образом, в действительных координатах матрица почти комплексной метрической структуры J имеет следующий вид:

$$J = f_1 \begin{pmatrix} if_2(\overline{R_\alpha^\beta} - R_\alpha^\beta) & -2I + f_2(R_\alpha^\beta + \overline{R_\alpha^\beta}) \\ -2I - f_2(R_\alpha^\beta + \overline{R_\alpha^\beta}) & if_2(\overline{R_\alpha^\beta} - R_\alpha^\beta) \end{pmatrix},$$

где

$$if_2(\overline{R_\alpha^\beta} - R_\alpha^\beta) = 2f_2 \begin{pmatrix} \text{Im}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Im}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Im}_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Im}_1 = x^1 x^3 y^2 - x^2 x^3 y^1 + x^1 x^2 y^3 + y^1 y^2 y^3,$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}_2 &= x^2 x^3 y^1 - x^1 x^3 y^2 + x^1 x^2 y^3 + y^1 y^2 y^3, \\
\text{Im}_3 &= x^1 x^3 y^2 + x^2 x^3 y^1 - x^1 x^2 y^3 + y^1 y^2 y^3, \\
-2I \mp f_2 (\overline{R_\alpha^\beta} + R_\alpha^\beta) &= -2f_2 \begin{pmatrix} 1 \pm f_2 \text{Re}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \pm f_2 \text{Re}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \pm f_2 \text{Re}_3 \end{pmatrix}, \\
\text{Re}_1 &= x^1 x^2 x^3 + x^3 y^1 y^2 - x^1 y^2 y^3 + x^2 y^1 y^3, \\
\text{Re}_2 &= x^1 x^2 x^3 + x^3 y^1 y^2 - x^2 y^1 y^3 + x^1 y^2 y^3, \\
\text{Re}_3 &= x^1 x^2 x^3 - x^3 y^1 y^2 + x^1 y^2 y^3 + x^2 y^1 y^3.
\end{aligned}$$

Вычисляя тензор Нейенхейса N для почти комплексной структуры J с помощью системы аналитических вычислений *Maple*, получим $N \neq 0$ (108 ненулевых компонент). Следовательно, построенная структура J не интегрируема.

Полученная структура позволяет получить новые классы ассоциированных контактных метрических структур (η, ξ, ϕ, g) .

Вычислим ассоциированную метрику g^J в матричном виде. Согласно равенству $g(X, Y) = \Phi(JX, Y)$, имеем

$$\Phi_0 = -g_0 J_0.$$

Следовательно, форма Φ_0 имеет матрицу вида

$$\Phi_0 = - \begin{pmatrix} 0 & g_{\alpha\bar{\beta}} \\ g_{\alpha\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ig_{\alpha\bar{\beta}} \\ -ig_{\alpha\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись полученным выражением, имеем

$$\begin{aligned}
g^J &= \Phi_0 J = f_1(w^1, w^2, w^3) \begin{pmatrix} 0 & ig_{\alpha\bar{\beta}} \\ -ig_{\alpha\bar{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} iI & if_2(w^1, w^2, w^3) \overline{R_\gamma^\beta} \\ -if_2(w^1, w^2, w^3) R_\gamma^{\bar{\beta}} & -iI \end{pmatrix} = \\
&= f_1(w^1, w^2, w^3) \begin{pmatrix} f_2(w^1, w^2, w^3) g_{\alpha\bar{\beta}} \overline{R_\gamma^\beta} & g_{\alpha\bar{\beta}} I \\ \overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} I & f_2(w^1, w^2, w^3) \overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} \overline{R_\gamma^\beta} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\bar{\beta}} \overline{R_\gamma^\beta} &= m_1 \begin{pmatrix} W^1 & -w^2 \bar{w}^1 & -w^3 \bar{w}^1 \\ -w^1 \bar{w}^2 & W^2 & -w^3 \bar{w}^2 \\ -w^1 \bar{w}^3 & -w^2 \bar{w}^3 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}^1 w^2 w^3 & 0 & 0 \\ 0 & w^1 \bar{w}^2 w^3 & 0 \\ 0 & 0 & w^1 w^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix} = \\
&= m_1 \begin{pmatrix} W^1 \bar{w}^1 w^2 w^3 & -w^1 \bar{w}^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 & -w^1 \bar{w}^1 w^2 w^3 \bar{w}^3 \\ -w^1 \bar{w}^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 & W^2 w^1 \bar{w}^2 w^3 & -w^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 \bar{w}^3 \\ -w^1 \bar{w}^1 w^2 w^3 \bar{w}^3 & -w^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 \bar{w}^3 & W^3 w^1 w^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица ассоциированной метрики g^J имеет следующий вид:

$$g^J = \begin{pmatrix} g_{\lambda\mu} & g_{\lambda\bar{\mu}} \\ g_{\bar{\lambda}\mu} & g_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \end{pmatrix},$$

где $g_{\bar{\lambda}\mu} = \overline{g_{\lambda\bar{\mu}}}$ и $g_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = \overline{g_{\lambda\mu}}$,

$$g_{\lambda\mu} = m_1 f_1 f_2 \begin{pmatrix} W^1 \bar{w}^1 w^2 \bar{w}^3 & -w^1 \bar{w}^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 & -w^1 \bar{w}^1 w^2 w^3 \bar{w}^3 \\ -w^1 \bar{w}^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 & W^2 w^1 \bar{w}^2 w^3 & -w^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 \bar{w}^3 \\ -w^1 \bar{w}^1 w^2 w^3 \bar{w}^3 & -w^1 w^2 \bar{w}^2 w^3 \bar{w}^3 & W^3 w^1 w^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix},$$

$$g_{\lambda\bar{\mu}} = m_1 f_1 \begin{pmatrix} W^1 & -w^2 \bar{w}^1 & -w^3 \bar{w}^1 \\ -w^1 \bar{w}^2 & W^2 & -w^3 \bar{w}^2 \\ -w^1 \bar{w}^3 & -w^2 \bar{w}^3 & W^3 \end{pmatrix},$$

$$m_1 = \frac{2}{(1 + \|w\|^2)^2}, \quad W^1 = 1 + \|w\|^2 - w^1 \bar{w}^1,$$

$$W^2 = 1 + \|w\|^2 - w^2 \bar{w}^2, \quad W^3 = 1 + \|w\|^2 - w^3 \bar{w}^3,$$

$$f_1(w^1, w^2, w^3) = \frac{(1 + |w|)^8 + |w^1 w^2 w^3|^2}{(1 + |w|)^8 - |w^1 w^2 w^3|^2},$$

$$f_2(w^1, w^2, w^3) = \frac{2(1 + |w|)^4}{(1 + |w|)^8 + |w^1 w^2 w^3|^2}.$$

Аналогичным образом были рассмотрены случаи 2–4.

Таким образом, построены новые примеры ассоциированных контактных метрических структур (η, ξ, ϕ, g^J) на 7-мерной единичной сфере S^7 . Кроме того, найденное семейство ассоциированных метрик g^J соответствует неинтегрируемому семейству ассоциированных почти комплексных структур J в 3-мерном комплексном проективном пространстве $\mathbf{CP}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blair D.E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. V. 203. Birkhäuser Boston, 2002. 304 p.
2. Славолубова Я.В. Контактные метрические структуры на нечетномерных единичных сферах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6(32). С. 46–54.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1 и Т.2. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья поступила 15.12.2015 г.

Slavolyubova Ya.V. (2016) ASSOCIATED CONTACT METRIC STRUCTURES ON THE 7-DIMENSIONAL UNIT SPHERE S^7 . *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 44–57

DOI 10.17223/19988621/42/5

In this paper, we construct new examples of associated contact metric structures (η, ξ, φ, g') on the 7-dimensional unit sphere S^7 , other than standard.

The construction involved a Hopf bundle $\pi: S^7 \rightarrow \mathbf{CP}^3$. This projection maps affinor φ into an almost complex structure J . Therefore, it became necessary to build new examples of associated almost complex structures J in the 3-dimensional complex projective space $\mathbf{CP}^3$.

Let Φ be a nondegenerate 2-form (a Fubini–Study form). An almost complex structure J is called positively associated with the form Φ if the following conditions are satisfied for any vector fields X, Y :

$$\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y) \text{ and } \Phi(X, JX) > 0, \text{ if } X \neq 0.$$

Each positively associated almost complex structure J defines a Riemannian metric g' by the equality $g(X, Y) = \Phi(X, JY)$; the metric is also called associated. The associated metric has the following properties:

$$g(JX, JY) = g(X, Y), g(JX, Y) = \Phi(X, Y).$$

The positively associated almost complex structure can be obtained as follows:

$$J = J_0(1 + R)(1 - R)^{-1},$$

where R is a symmetric endomorphism $R: TCP^3 \rightarrow TCP^3$ anticommuting with the standard structure J_0 ,

$$J_0 = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}.$$

In this paper, we have found a series of matrices R satisfying these conditions. Each matrix of this kind defines an associated almost complex structure in the space $\mathbf{CP}^3$. One of these matrices,

$$R = \frac{1}{(1 + |w|)^4} \begin{pmatrix} 0 & \bar{R}_\alpha^\beta \\ R_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix},$$

where the block $R_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \bar{w}^1 w^2 w^3 & 0 & 0 \\ 0 & w^1 \bar{w}^2 w^3 & 0 \\ 0 & 0 & w^1 w^2 \bar{w}^3 \end{pmatrix}$, has been considered in more detail.

For this endomorphism, the relevant almost complex structure J and a Hermite metric g' have been found in the space $\mathbf{CP}^3$. It has been verified that the constructed structure J is not integrable.

Keywords: contact structures, associated contact metric structures, 7-dimensional sphere.

SLAVOLYUBOVA Yaroslava Viktorovna (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: jar1984@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. (2002) Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. *Progress in Mathematics*. 203. Birkhäuser Boston.
2. Slavolyubova Ya.V. (2014) Kontaktnye metricheskie struktury na nechetnomernykh edinichnykh sferakh [Contact metric structures on odd-dimensional unit spheres]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6 (32). pp. 46–54.
3. Kobayashi Sh., Nomizu K. (1963) *Foundations of differential geometry. Vol. 1, 2*. New York, London: Interscience Publishers.

МЕХАНИКА

УДК 532.542.2

DOI 10.17223/19988621/42/6

Е.И. Борзенко, О.А. Дьякова

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В Т-ОБРАЗНОМ КАНАЛЕ С УСЛОВИЯМИ
ПРИЛИПАНИЕ – СКОЛЬЖЕНИЕ НА ТВЕРДОЙ СТЕНКЕ¹**

Исследуется плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в Т-образном канале. Рассматриваются три модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой: условие прилипания, условие проскальзывания Навье и условие проскальзывания с предельным напряжением. Движение жидкости обеспечивается заданием однородных профилей давления в граничных сечениях канала. Задача решается численно методом контрольного объема с использованием процедуры SIMPLE. В результате проведенного исследования выявлены характерные режимы течений для рассматриваемых моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой. Продемонстрировано влияние основных параметров задачи на картину течения. Построены критериальные зависимости, описывающие характеристики течения в условиях математической постановки, сформулированной в настоящей работе.

Ключевые слова: *течение, вязкая жидкость, граничное условие, Т-образный канал, численное моделирование.*

Технология переработки полимерных композиций, которые в текучем состоянии представляют собой вязкие среды, сопровождается сложными гидродинамическими и теплофизическими процессами; дополнительные трудности вносит геометрия области течения. При изучении течений жидкости в каналах различной конфигурации необходимо знать механизм взаимодействия жидкости с твердой поверхностью. При математическом моделировании задач о течении вязкой жидкости на стенке традиционно используется условие прилипания. Однако экспериментальные данные [1, 2] показывают нарушение условия прилипания на твердой границе, в результате чего реализуется условие скольжения.

В работе [3] исследуется задача об установившемся ламинарном течении вязкой жидкости в микроканалах с учетом условия скольжения Максвелла на твердых стенках. Численная реализация условия скольжения Навье для метода конечных элементов применительно к плоским и пространственным течениям подробно рассмотрена в [4]. Авторы работы [5] исследуют течение ньютоновской несжимаемой жидкости в Т-образном канале, как с учетом прилипания, так и с учетом скольжения по закону Навье на твердых границах. Различные модели взаимо-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№15-08-02256 а) и в рамках государственного задания № 2014/223 (код проекта 1943).

действия жидкости с твердой стенкой в случае течения ньютоновской несжимаемой жидкости в изогнутом под прямым углом канале описываются в [6].

В настоящей работе реализуются три модели взаимодействия вязкой жидкости с твердой стенкой: условие прилипания, условие скольжения Навье и условие скольжения с предельным напряжением. Выявлены характерные режимы течений для рассматриваемых моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой с образованием циркуляционных зон в потоке. Выполнена оценка степени влияния основных параметров на картину течения. Построены критериальные зависимости, описывающие характеристики течения в условиях математической постановки, сформулированной в настоящей работе.

Постановка задачи

Рассматривается плоское установившееся течение ньютоновской несжимаемой жидкости в Т-образном канале. Область течения ограничивается твердыми стенками MNF , EGC , AB и граничными сечениями AM , FE , BC (рис. 1). В сечениях AM , FE и BC задаются однородные профили давления, которые обеспечивают движение жидкости. При этом расстояние от этих сечений до угловых точек N и G должно быть достаточно большим для того, чтобы избежать влияния течения в окрестности этих точек на характер течения вблизи границ.

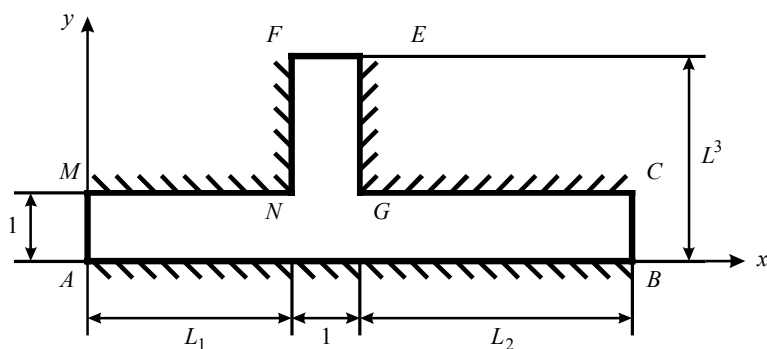


Рис. 1. Область течения

Fig. 1. Flow region

Математическая постановка включает в себя уравнения Навье – Стокса и неразрывности, которые в безразмерных переменных в векторном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\text{Re} \nabla p + \Delta \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{U}$ – вектор скорости с компонентами (U, V) в декартовой системе координат, p – давление, $\text{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$ – число Рейнольдса, ρ – плотность жидкости, μ – динамическая вязкость. В качестве безразмерных масштабов длины и скорости ис-

пользуются величины: L – ширина граничного сечения AM и $U_0 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$ соответ-

венно, где $\Delta p = p_{AM} - p_{BC}$ – перепад давлений между граничными сечениями AM и BC . Безразмерное давление определяется соотношением $\frac{p^* - p_{BC}}{p_{AM} - p_{BC}}$, здесь p^* – размерное давление.

Граничные условия для давления имеют вид

$$\begin{aligned} p_{AM} &= p_1, \text{ если } x=0, 0 \leq y \leq 1, \\ p_{BC} &= 0, \text{ если } x=L_1+L_2+1, 0 \leq y \leq 1, \\ p_{FE} &= p_2, \text{ если } L_1 \leq x \leq L_1+1, y=L_3. \end{aligned}$$

На твердых стенках реализуются три вида граничных условий, соответствующие следующим моделям взаимодействия жидкости с твердой стенкой:

Модель I: Традиционное условие прилипания, состоящее в равенстве нулю вектора скорости на твердых границах.

Модель II: Условие проскальзывания Навье, согласно которому касательная скорость на стенке прямо пропорциональна касательному напряжению, а нормальная скорость равна нулю.

Модель III: Условие проскальзывания с предельным напряжением подразумевает, что значение касательной скорости равно нулю в случае, если касательное напряжение не превышает некоего предельного значения τ_0 , а в случае его превышения – поведение жидкости аналогично модели Навье.

В табл. 1 представлена математическая запись граничных условий на твердых стенках в безразмерных переменных, а рис. 2 демонстрирует зависимость касательной скорости на твердой стенке от касательного напряжения для исследуемых моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой.

Таблица 1

Математическая запись граничных условий в безразмерных переменных для исследуемых моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой

Номер модели	Название модели (условия)	Математическая запись граничного условия
Модель I	Условие прилипания	$U_s = 0, U_n = 0$
Модель II	Условие проскальзывания Навье	$\begin{cases} U_s = \beta \frac{dU_s}{dn}, \\ U_n = 0, \end{cases}$
Модель III	Условие проскальзывания с предельным напряжением	$\begin{cases} U_n = 0, U_s = 0, & \text{если } \tau \leq \tau_0, \\ U_n = 0, U_s = \beta \left(\left \frac{dU_s}{dn} \right - \tau_0 \right), & \text{если } \tau > \tau_0 \end{cases}$

Здесь $\beta = \beta^* \mu / L$ – безразмерный коэффициент проскальзывания, β^* – размерный коэффициент проскальзывания, U_s – касательная скорость, U_n – нормальная скорость, $\tau_0 = \frac{\tau_0^* L}{\mu U_0}$ – безразмерное предельное напряжение, τ_0^* – размерное предельное напряжение.

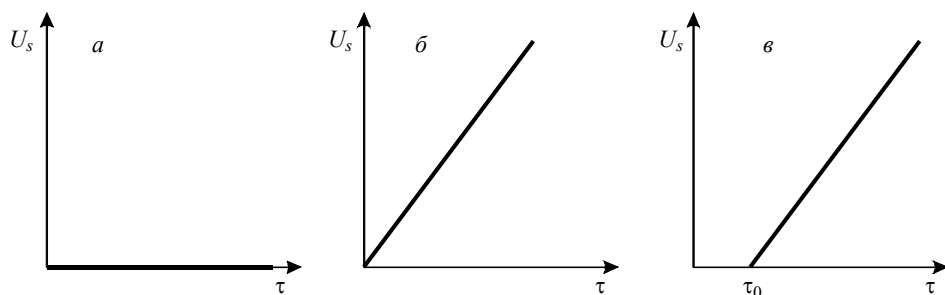


Рис. 2. Зависимость касательной скорости на твердой стенке от касательного напряжения для различных моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой: *a* – условие прилипания, *б* – условие проскальзывания Навье, *в* – условие проскальзывания с предельным напряжением

Fig. 2. Tangential velocity on the solid wall as a function of shear stress for different models of fluid interaction with solid walls: (*a*) no-slip boundary condition, (*б*) Navier slip boundary condition, and (*в*) slip boundary condition with the limit stress

Решение поставленной задачи сводится к отысканию полей скорости и давления, которые будут удовлетворять уравнениям системы (1) с заданными граничными условиями.

Метод решения

Задача решается численно. Для нахождения стационарных полей скорости и давления используется метод установления. Выбранный метод подразумевает добавление производной искомой функции U по времени в первое уравнение системы (1). Полученная система дискретизируется конечно-разностным методом с использованием процедуры SIMPLE [7]; используется квадратная разнесенная сетка. Расчет на каждом шаге по времени сопровождается организацией итерационного процесса, состоящего из двух стадий. На первом этапе рассчитываются поля скорости, удовлетворяющие разностным аналогам уравнений движения. На второй стадии корректируются поля давления и скорости, с целью удовлетворения уравнению неразрывности.

В ходе верификации численной методики, разработанной для исследования поставленной задачи, были выполнены тестовые расчеты. Для проверки аппроксимационной сходимости был проведен ряд расчетов на последовательности секток. На рис.3 представлено распределение скорости U в сечении протекания BC . Результаты на сетке с шагом по пространству $1/20$ и $1/40$ практически не отличаются, поэтому все дальнейшие расчеты проводились на сетке с шагом по пространству $1/20$.

Кроме того, для подтверждения работоспособности программы была решена задача о плоском течении ньютоновской несжимаемой жидкости в Т-образном канале, исследованная в работе [8]. В соответствии с ее постановкой в граничном сечении BC задается параболический профиль скорости Пуазейля, в граничных сечениях AM и FE – нулевое давление, а на твердых стенках выполняется условие прилипания. Сравнение результатов расчета течения по описанной методике с результатами, полученными с помощью программного модуля Ansys Fluent, используемого авторами работы [8], представлены на рис. 4 и 5. Наблюдается качественное согласование результатов.

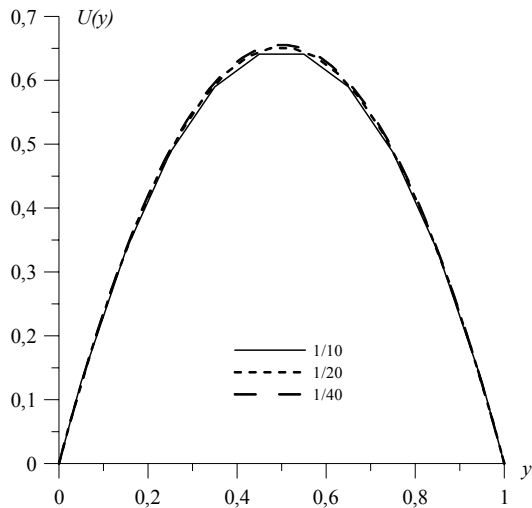


Рис. 3. Распределение скорости U в граничном сечении BC (модель I, $Re = 30$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$)
Fig. 3. Distribution of the velocity U in boundary section BC (model I, $Re = 30$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$)

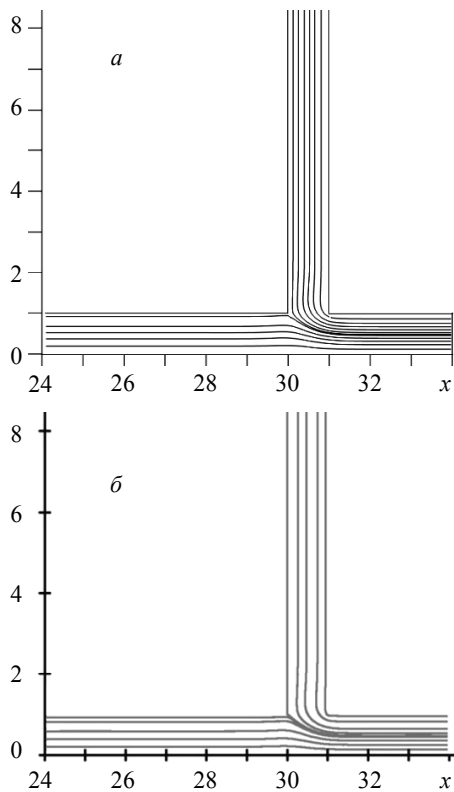


Рис. 4. Распределение линий тока при $Re = 5$ ($L_1 = 30$, $L_2 = 10$, $L_3 = 26$, a – настоящая работа, b – расчеты [8])
Fig. 4. Streamline distribution for $Re = 5$ ($L_1 = 30$, $L_2 = 10$, $L_3 = 26$, (a) present paper, (b) results from [8])

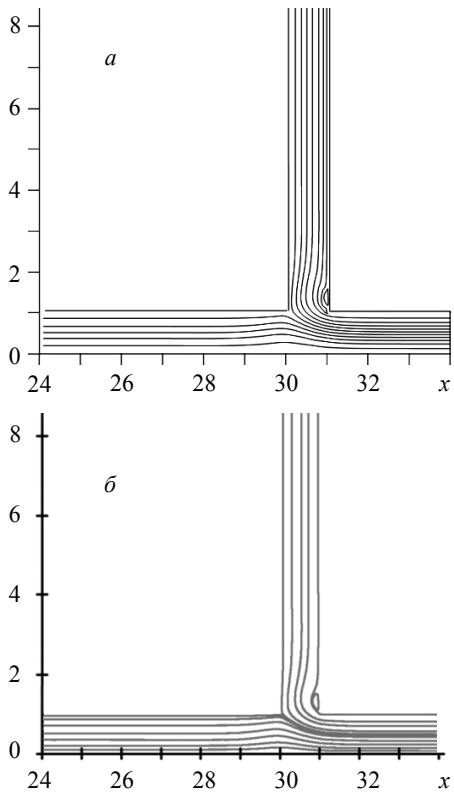


Рис. 5. Распределение линий тока при $Re = 30$ ($L_1 = 30$, $L_2 = 10$, $L_3 = 26$, a – настоящая работа, b – расчеты [8])
Fig. 5. Streamline distribution for $Re = 30$ ($L_1 = 30$, $L_2 = 10$, $L_3 = 26$, (a) present paper, (b) results from [8])

Результаты расчетов

Численные расчеты показали, что для описанных выше моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой формируется установившийся режим течения. В окрестностях границ AM , FE и BC реализуется плоскопараллельное течение с параболическим профилем скорости и однородным распределением давления. В окрестности сечений, содержащих угловые точки, формируются переходные участки течения. На рис. 6 представлена картина течения при $Re = 30$ для модели I с условием прилипания, а на рис. 7 – соответствующее поле давления.

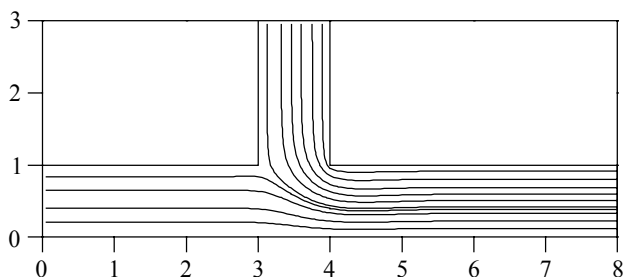


Рис. 6. Распределение линий тока при $Re = 30$ (модель I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$)
Fig. 6. Streamline distribution for $Re = 30$ (model I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$)

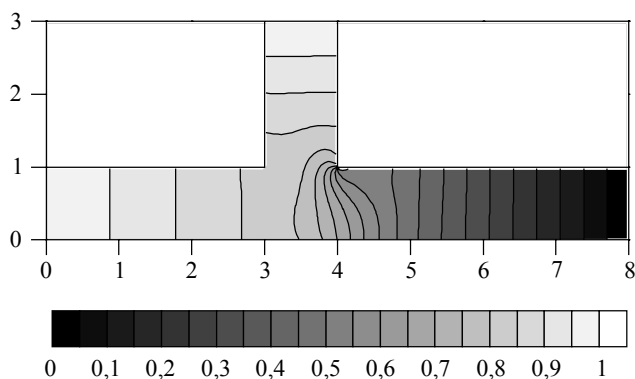


Рис. 7. Поле давления при $Re = 30$ (модель I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$)
Fig. 7. Pressure field for $Re = 30$ (model I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$)

Сначала проводились параметрические исследования для модели I. На рис. 8 представлено распределение линий тока при различных значениях числа Re . Из рисунка видно, что увеличение значения этого безразмерного критерия приводит к изменению режима течения. Так, при $Re < 30$ в канале реализуется движение без образования циркуляционных зон в потоке жидкости. Через сечения AM и FE жидкость втекает, а через сечение BC вытекает. Увеличение числа Re приводит к росту влияния инерционных сил, в результате чего поток жидкости, движущийся от границы FE , начинает сильнее прижимать поток от границы AM , что приводит к образованию циркуляционной зоны вблизи твердой границы AB и уменьшению расхода через сечение BC . Дальнейшее поведение течения жидкости характеризуется ростом размеров образовавшейся циркуляционной зоны. При достижении критического значения $Re = 43$ высота циркуляционной зоны достигает 1 безраз-

мерной единицы и происходит изменение режима течения, для которого характерно разделение потока, движущегося от границы FE , на две части. В результате через сечение FE жидкость подается в канал, а через сечения AM и BC вытекает из него. При этом происходит уменьшение размеров циркуляционной зоны с увеличением значений числа Re .

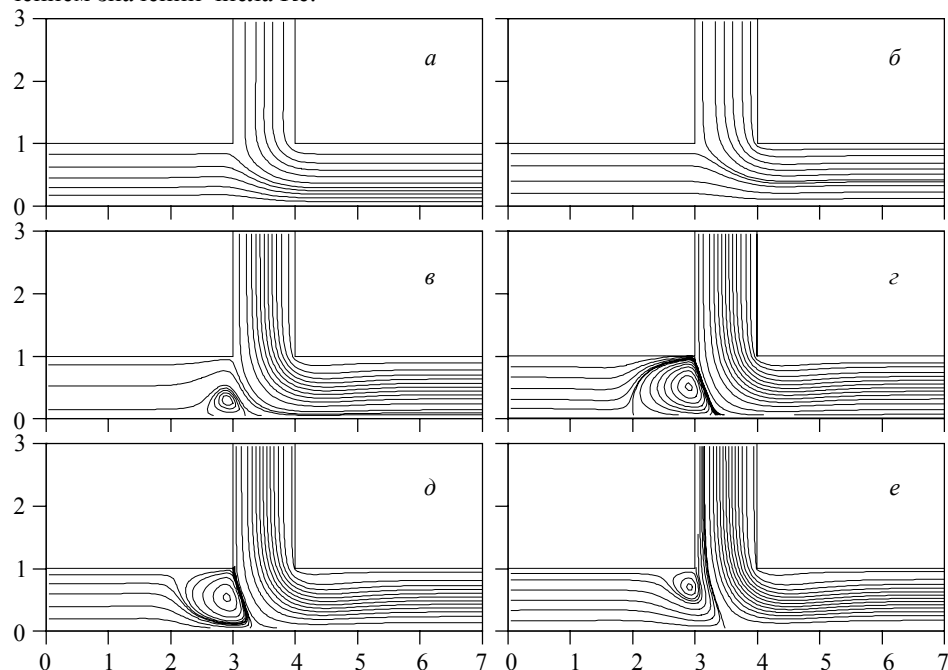


Рис. 8. Распределение линий тока при различных значениях числа Re (модель I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, а – $Re = 1$, б – $Re = 30$, в – $Re = 40$, г – $Re = 43$, д – $Re = 43.5$, е – $Re = 50$)

Fig. 8. Streamline distribution for different values of Reynolds number (model I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $Re = (a) 1$, $(б) 30$, $(в) 40$, $(г) 43$, $(д) 43.5$, and $(e) 50$)

Соответствующее поведение дополнительно описывается зависимостью расхода через граничные сечения AM , FE и BC от числа Re , представленного на рис. 9. Таким образом, увеличение значения числа Re приводит к возрастанию расхода через сечение BC и уменьшению его значения через сечение EF . В свою очередь расход через сечение AM сначала плавно возрастает, достигая своего максимального значения 0.5 безразмерных единиц, а затем уменьшается до отрицательных значений, проходя при этом через нулевое значение при $Re = 43$ безразмерных единиц, что свидетельствует о смене режима течения.

В рамках параметрических исследований модели I также были изучены расходно-напорные характеристики течения. Рис. 10 демонстрирует зависимость расхода через сечения AM , FE и BC от давления на границе FE , задаваемого в диапазоне значений 1–2 безразмерных единиц. Исследования показали, что увеличение давления на границе FE приводит к увеличению количества жидкости, протекающей через сечение BC , и уменьшению расхода через сечение FE . При этом расход через сечение AM также уменьшается, достигая нулевого значения при $p_{FE} = 1.295$, что свидетельствует о переходе из одного режима течения в другой.

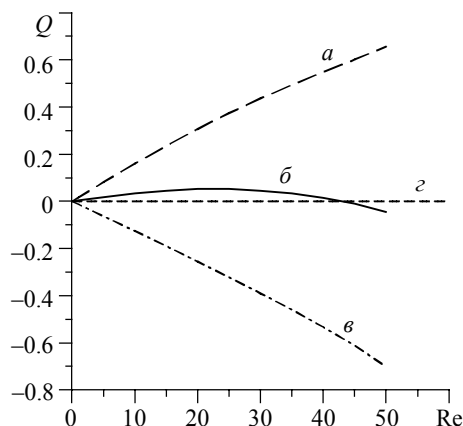


Рис. 9. Зависимость расхода через сечения AM , FE и BC от числа Re (модель I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $a - Q_{BC}$, $b - Q_{AM}$, $c - Q_{EF}$, $d - Q = 0$)

Fig. 9. Flow rate through the sections AM , FE , and BC as a function of Reynolds number (model I, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, (a) Q_{BC} , (b) Q_{AM} , (c) Q_{EF} , and (d) $Q = 0$)

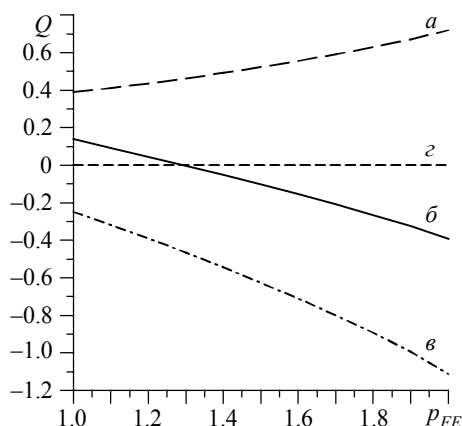


Рис. 10. Зависимость расхода через сечения AM , FE и BC от давления на границе FE (модель I, $Re = 30$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $a - Q_{BC}$, $b - Q_{AM}$, $c - Q_{EF}$, $d - Q = 0$)

Fig. 10. Flow rate through the sections AM , FE , and BC as a function of pressure on the boundary FE (model I, $Re = 30$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, (a) Q_{BC} , (b) Q_{AM} , (c) Q_{EF} , and (d) $Q = 0$)

Новый режим течения характеризуется разделением потока жидкости, движущегося от границы FE . При этом характер зависимости картины течения от давления, задаваемого в этом сечении, аналогичен тому, что наблюдается при исследовании влияния числа Re на картину течения, описанную выше.

Далее были проведены параметрические исследования модели с условием проскальзывания Навье (модель II). Было установлено, что характер изменения картины течения в зависимости от коэффициента проскальзывания β подобен тому, что имеет место в случае модели с условием прилипания в зависимости от числа Re . На рис.11 представлена зависимость расхода через граничные сечения AM , FE и BC от коэффициента проскальзывания для модели II ($\beta = 0-4$ безразмерных единиц). Из рис.11 видно, что изменение режима течения происходит при $\beta = 0.136$ безразмерных единиц, которое является критическим значением для этой модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой.

Параметрические исследования для модели проскальзывания с предельным напряжением показали, что для модели III также существует критическое значение параметра τ_0 , соответствующее смене режима течения. На рис. 12 представлена зависимость расхода через граничные сечения AM , FE и BC от предельного напряжения при $\beta = 0.2$ безразмерных единиц. Переход из одного режима в другой происходит при $\tau_0 = 0.72$ безразмерных единиц. Рис. 12 показывает, что для каждого сечения протекания существует такое значение предельного напряжения, после которого не происходит количественного изменения в расходе жидкости. Распределение линий тока при различных значениях параметра модели τ_0 (рис. 13) свидетельствует о том, что новый режим течения характеризуется увеличением размеров циркуляционной зоны, которая образуется вблизи угла MNF , если предельное напряжение τ_0 не превышает своего критического значения.

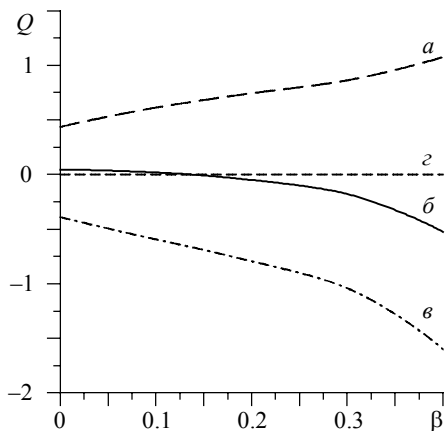


Рис. 11. Зависимость расхода через сечения AM , FE и BC от коэффициента проскальзывания β (модель II, $Re = 30$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $a - Q_{BC}$, $b - Q_{AM}$, $c - Q_{EF}$, $d - Q = 0$)

Fig.11. Flow rate through the sections AM , FE , and BC as a function of slip coefficient β (model II, $Re = 30$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, (a) Q_{BC} , (b) Q_{AM} , (c) Q_{EF} , and (d) $Q = 0$)

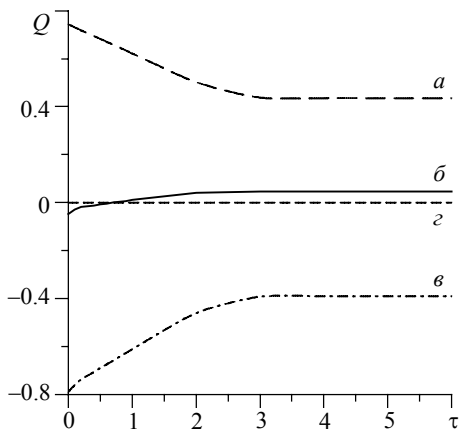


Рис. 12. Зависимость расхода через сечения AM , FE и BC от предельного напряжения τ_0 (модель III, $Re = 30$, $\beta = 0.2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $a - Q_{BC}$, $b - Q_{AM}$, $c - Q_{EF}$, $d - Q = 0$)

Fig.12. Flow rate through the sections AM , FE , and BC as a function of ultimate stress τ_0 (model III, $Re = 30$, $\beta = 0.2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, (a) Q_{BC} , (b) Q_{AM} , (c) Q_{EF} , and (d) $Q = 0$)

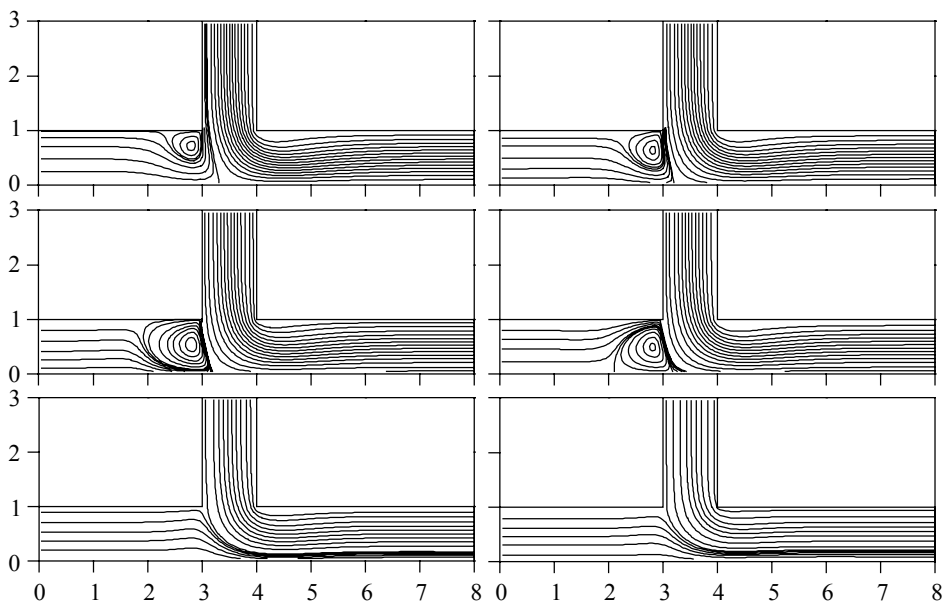


Рис. 13. Распределение линий тока при различных значениях предельного напряжения τ_0 (модель III, $Re = 30$, $\beta = 0.2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $a - \tau_0 = 0$, $b - \tau_0 = 0.4$, $c - \tau_0 = 0.72$, $d - \tau_0 = 0.8$, $e - \tau_0 = 2$, $f - \tau_0 = 4$)

Fig. 13. Streamline distribution for different values of ultimate stress τ_0 (model III, $Re = 30$, $\beta = 0.2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1.2$, $\tau_0 = (a) 0$, $(b) 0.4$, $(c) 0.72$, $(d) 0.8$, $(e) 2$, and $(f) 4$)

Дальнейшее увеличение τ_0 приводит к смене режима, при этом циркуляционная зона уменьшается и смещается в сторону границы AB , полностью исчезая при $\tau_0 = 2$ безразмерным единицам.

Заключение

Исследовано плоское установившееся течение ньютоновской несжимаемой жидкости в Т-образном канале. В рамках работы реализована математическая постановка, учитывающая различные модели взаимодействия жидкости с твердой стенкой: условие прилипания, условие проскальзывания Навье и условие проскальзывания с предельным напряжением. Для модели с условием прилипания (модель I) были проведены параметрические исследования картины течения в зависимости от числа Re , изменяющегося в диапазоне от 0.1 до 50 безразмерных единиц, а также в зависимости от значения давления, задаваемого на границе EF ($p_{FE} = 1-2$ безразмерные единицы). Для модели с условием проскальзывания Навье (модель II) было исследовано, как меняется характер течения в зависимости от коэффициента проскальзывания β , изменяющегося в диапазоне от 0 до 0.4 безразмерных единиц. Третий этап исследований был посвящен модели проскальзывания с предельным напряжением (модель III). В частности, были проведены параметрические исследования картины течения в зависимости от предельного напряжения $\tau_0 = 0-6$ безразмерных единиц.

В результате проведенного исследования выявлены характерные режимы течений для описанных моделей взаимодействия жидкости с твердой стенкой с образованием циркуляционных зон в потоке. Выполнена оценка степени влияния основных параметров на картину течения. Построены критериальные зависимости, описывающие характеристики течения в условиях постановки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. 2005. V. 39. P. 2859–2897.
2. Янков В.И. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008.
3. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section // Journal of Fluids engineering. 2009. V. 131. P. 031201-1–031201-8.
4. Volker J. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equation – numerical test s and aspects of the implementation // Journal of computational and applied mechanics. 2002. V. 147. P. 287–300.
5. Minakov A., Rudyak V., Dektereva A., Gavrilov A. Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2013. V. 43. P. 161–169.
6. Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 35–44.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
8. Khandelwal V. et al. Laminar flow of non-Newtonian shear-thinning fluids in a T-channel // Computers & Fluids. 2015. V. 108. P. 79–91.

Borzenko E.I., Diakova O.A. (2016) INVESTIGATION OF VISCOUS FLUID FLOW IN T-SHAPED CHANNEL WITH NO SLIP/SLIP BOUNDARY CONDITIONS ON THE SOLID WALL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 58–69

DOI 10.17223/19988621/42/6

The planar flow of a Newtonian incompressible fluid in a T-shaped channel is investigated. Three models of fluid interaction with solid walls are considered:

(a) Traditional no-slip boundary condition implying the vanishing velocity vector on the solid walls.

(b) Navier slip boundary condition according to which the tangential velocity on the solid wall is linearly proportional to the shear stress and the normal velocity is equal to zero.

(c) Slip boundary condition with ultimate shear stress supposes that the tangential velocity on the solid wall is equal to zero when the shear stress does not exceed a certain ultimate shear stress; if the shear stress is more than the ultimate shear stress, the behavior of the fluid is similar to the Navier model.

The fluid flow is provided by uniform pressure profiles in boundary sections of the channel. The problem is numerically solved using the finite difference method based on the SIMPLE procedure.

As a result, the characteristic flow regimes have been found for described models of fluid interaction with a solid wall. The effect of Reynolds number, pressure of boundary sections, and parameters of the models on the flow pattern was performed. The criterion dependences describing the main flow characteristics under mathematical conditions of the present work have been plotted.

Keywords: flow, viscous fluid, boundary condition, T-shaped channel, numerical simulation.

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

DLAKOVA Olga Alekseevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: olga.dyakova.1992@mail.ru

REFERENCES

1. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. (2005) Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*. 39. pp. 2859–2897. DOI 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
2. Yankov V.I. (2008) *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techenie polimerov v kanalakh* [Processing of fiber-forming polymers. Fundamentals of polymer rheology and polymer flow in channels]. Moscow, Izhevsk: Science Publishing Center “Regular and chaotic dynamics”, Institute of Computer Science.
3. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. (2009) Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section. *Journal of Fluids Engineering*. 131. pp. 031201-1 – 031201-8. DOI 10.1115/1.3059699.
4. Volker J. (2002) Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equation – numerical test s and aspects of the implementation. *Journal of Computational and Applied Mechanics*. 147. pp.287–300. DOI 10.1002/fld.1074.
5. Minakov A., Rudyak V., Dektereva A., Gavrillov A. (2013) Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 43. pp. 161–169. DOI 10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.04.002.
6. Borzenko E.I., Dyakova O.A., Shrager G.R. (2014) Issledovanie yavleniya proskal'zyvaniya v sluchae techeniya vyazkoy zhidkosti v izognutom kanale [Studying the slip phenomenon in the case of a viscous fluid flow in a curved channel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univer-*

-
- siteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 35–44.
7. Patankar S.V. (1981) Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
 8. Khandelwal V. et al. (2015) Laminar flow of non-Newtonian shear-thinning fluids in a T-channel. *Computers & Fluids*. 108. pp.79–91. DOI 10.1016/j.compfluid.2014.11.030.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/42/7

Ю.И. Дорогов

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Исследуется устойчивость горизонтального стержня, лежащего на абсолютно жестком основании и находящегося под действием силы тяжести. Установлено значение критической силы, при котором становится возможной смена прямолинейной формы равновесия на изогнутую. Это значение превосходит значение силы, вычисленное по формуле Эйлера, и зависит от плотности материала стержня. Исследован частичный изгиб стержня в процессе потери устойчивости и найдены условия, при которых такой изгиб становится возможным.

Ключевые слова: *устойчивость горизонтального стержня; влияние силы тяжести на критическую силу; частичный изгиб.*

1. Устойчивость прямолинейной формы равновесия горизонтального стержня

При исследовании потери устойчивости стержня, как правило, предполагается, что стержень вертикальный и невесомый [1–3]. В [4] рассмотрена задача об устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса. Устойчивость сжатого стержня при наличии поперечной нагрузки рассматривалась в [1–3]. В [1, 2, 5] исследовалась устойчивость сжатого стержня на линейно-упругом основании или в упругой среде, когда его изгибу препятствует распределенная поперечная нагрузка, пропорциональная величине прогибов. В работах [6–14] исследовалось влияние разрушения опор, особенностей приложения нагрузки и особенностей опирания на процесс потери устойчивости. Потеря устойчивости стержня при наличии препятствий изгибу исследовалась в [15–17]. Влияние силы тяжести на критическую силу – в [17–19].

В данной работе исследуется устойчивость упругого прямолинейного горизонтального стержня, сжимаемого силой P , лежащего на абсолютно жесткой плоской поверхности, не допускающей смещения точек стержня вниз, но не ограничивающей их перемещение вверх (рис. 1).

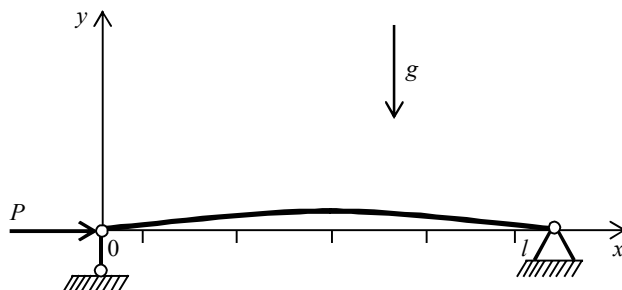


Рис. 1. Горизонтальный упругий стержень на жёстком основании

Fig. 1. Horizontal elastic bar on a rigid base

Стержень постоянного поперечного сечения с моментом инерции J и площадью поперечного сечения S имеет длину L . Его концы шарнирно закреплены. Один конец неподвижен, а другой смещается по мере укорочения стержня и последующего изгиба. Расстояние между концами стержня обозначено l . На стержень действует сила тяжести, распределенная равномерно с интенсивностью $q = \rho g S$ по его длине, где ρ – плотность материала стержня; g – ускорение свободного падения. Действие опор на стержень определяется сосредоточенными силами реакции, а действие горизонтальной опорной плоскости непрерывно распределено по поверхности контакта. Задача является статически неопределимой, реакции опор и жесткой поверхности не могут быть найдены из условий равновесия.

При отсутствии опорной плоскости прямолинейная форма равновесия стержня невозможна. Уже в исходном состоянии при нулевом значении сжимающей силы стержень имеет начальную погибь, обусловленную своим весом.

Опорная плоскость препятствует прогибу стержня под действием силы тяжести и, в частности, исключает начальную погибь. Стержень может изгибаться только вверх, против действия силы тяжести. Если при отсутствии опорной плоскости сила тяжести увеличивает изгиб стержня, делая изначально прямолинейную форму равновесия невозможной, то при наличии опорной плоскости сила тяжести направлена против прогиба и способствует устойчивости прямолинейной формы равновесия.

В процессе сжатия и последующего изгиба стержня его подвижный конец перемещается в направлении действия сжимающей силы. Это перемещение складывается из абсолютной деформации стержня на этапе сжатия, пока форма равновесия остается прямолинейной, и смещения конца изогнутого стержня, приближенно равного разности его длины и проекции на первоначальную ось

$$\Delta = \varepsilon L + L - l. \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon = P/ES$ – относительная деформация сжатия стержня, E – модуль упругости материала стержня.

Принята система координат с центром в подвижном шарнире. Ось Ox направлена вдоль прямолинейной оси стержня в сторону его неподвижного конца, ось Oy направлена вертикально вверх – в сторону смещения точек оси после потери устойчивости. На начальном этапе изгиба, когда прогибы незначительны, можно принять, что кривизна изогнутой оси стержня равна второй производной функции прогиба $y(x)$. Уравнение равновесия моментов преобразуется к неоднородному линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'''' + \alpha^2 y'' = -\beta; \quad \alpha^2 = P/EJ; \quad \beta = \rho g S/EJ. \quad (1.2)$$

В соответствии с условиями закрепления, граничные условия запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0. \quad (1.3)$$

Дифференциальное уравнение (1.2) соответствует прогибам сжимаемого стержня, находящегося под действием силы тяжести как в случае наличия плоской поверхности, препятствующей прогибам стержня вниз, так и в случае отсутствия такой поверхности. Среди решений данного уравнения, удовлетворяющих граничным условиям (1.3), имеются положительные решения, соответствующие изгибу стержня выпуклостью вверх, и отрицательные решения, соответствующие естественному изгибу стержня вниз при отсутствии опорной плоскости.

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка (1.2) имеет вид

$$y = -\frac{\beta x^2}{2\alpha^2} + C_1 x + C_2 + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x. \quad (1.4)$$

Подставляя общее решение (1.4) в граничные условия (1.3) и выражая неопределенные коэффициенты, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\beta l}{2\alpha^2}, \quad C_2 = -C_3 = \beta/\alpha^4, \\ 2\sin \frac{\alpha l}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha^4} \sin \frac{\alpha l}{2} + C_4 \cos \frac{\alpha l}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Последнее уравнение системы имеет два решения. В первом случае $\alpha l \neq 2\pi$ и $C_4 = -\beta \alpha^{-4} \operatorname{tg}(\alpha l/2)$. Коэффициент C_4 остается неопределенным, так как неопределена длина проекции стержня l . Решение краевой задачи запишется в виде

$$y = \frac{\beta}{2\alpha^2} x(l-x) + \frac{\beta}{\alpha^4} (1 - \cos \alpha x) + C_4 \sin \alpha x \quad (1.5)$$

Физическому смыслу данной задачи удовлетворяет только положительное решение. Отрицательное соответствует изгибу стержня под действием сжимающей силы и силы тяжести в случае отсутствия опорной поверхности. Если $\alpha l < \pi$, решение будет отрицательным. Положительное решение становится возможным при $\alpha l > \pi$. Для $\alpha l = \pi$ формула (1.5) дает бесконечные прогибы, за счет последнего неограниченного слагаемого. Следовательно, значение $\alpha l = \pi$ соответствует наименьшему значению нагрузки, при котором становится возможной изогнутая форма равновесия горизонтального стержня, лежащего на жесткой поверхности. Это значение может быть найдено по классической формуле Эйлера для длины l :

$$P_l = \pi^2 EJ/l^2. \quad (1.6)$$

Второй случай, когда $\alpha l = 2\pi$ и коэффициент C_4 также оказывается неопределенным, соответствует значительно большей продольной нагрузке и выходит за рамки данного исследования.

Решение (1.5) не может являться уравнением изогнутой оси стержня, так как, с одной стороны, допускает бесконечные прогибы при значениях $\alpha l \rightarrow \pi + 0$, а с другой – содержит неопределенную величину l .

Бесконечность прогибов является следствием неточности линеаризованного дифференциального уравнения, при составлении которого кривизна заменялась второй производной функции прогиба и, кроме того, допускалось неограниченное увеличение длины изогнутого стержня. На самом деле, изменение длины стержня незначительно по сравнению с самой длиной.

Полученный результат позволяет сделать следующее заключение: 1) изогнутая форма равновесия стержня, лежащего на жесткой горизонтальной опоре, невозможна при значениях сжимающей силы, меньших, чем соответствующее значение силы Эйлера $P_e = \pi^2 EJ/L^2$; 2) неограниченность последнего слагаемого в выражении (1.5), при значениях $\alpha l \rightarrow \pi + 0$, указывает на то, что остальные слагаемые

не играют существенной роли по сравнению с последним. Поэтому выражение (1.5) может быть заменено приближенным равенством

$$y = C \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (1.7)$$

Здесь C – неопределенный и неограниченный при $\alpha l \rightarrow \pi$ коэффициент.

Для определения коэффициента C будем считать, что длина оси стержня не изменяется, то есть из всех возможных кривых, удовлетворяющих уравнению (1.7), выбираем ту, которая удовлетворяет дополнительному изопериметрическому условию, выражающему постоянство длины стержня

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1.8)$$

Здесь y' – тангенс угла наклона касательной к оси стержня.

Как и при выводе дифференциального уравнения, ограничимся рассмотрением только тех кривых изгиба стержня, для которых $y'(x) \ll 1$. Тогда условие (1.8), с учетом разложения подынтегрального выражения в ряд Маклорена с двумя первыми членами, можно заменить приближенным равенством

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{y'^2}{2} \right] dx.$$

Подставим первую производную функции (1.7) в подынтегральное выражение и интегрируем его. Из полученного уравнения выразим зависимость коэффициента C от длины проекции l :

$$C = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (1.9)$$

Для невесомого стержня сила Эйлера представляет собой нижнюю границу значений сжимающей силы, при которых становятся возможными изогнутые формы равновесия. При этом прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой и любое, сколь угодно малое, возмущение вынуждает стержень изменить прямолинейную форму равновесия на устойчивую криволинейную форму равновесия. Таким образом, для невесомого стержня сила, хоть немного превосходящая силу Эйлера, не только может удерживать его в изогнутом состоянии, но и принуждает стержень изогнуться и сменить неустойчивую прямолинейную форму равновесия на устойчивую криволинейную форму равновесия. Для весо-мого горизонтального стержня, лежащего на жестком основании, это не верно. Сжимающая сила, лишь незначительно превосходящая силу Эйлера, способна удерживать стержень в соответствующем изогнутом состоянии, но не может принудить его к такому состоянию. Прямолинейная форма равновесия остается устойчивой. Действительно, пусть ось стержня приобрела некоторое случайное отклонение $y(x)$ от горизонтальной прямой и пусть функция, выражающая это отклонение, раскладывается в ряд Фурье по синусам

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{l}. \quad (1.10)$$

Здесь коэффициенты Фурье b_k положительны, так как $y(x) \geq 0$.

Стержень будет устойчивым, если сумма моментов внешних сил и внутренних усилий в каждом сечении будет направлена таким образом, чтобы стремиться вернуть стержень в исходное невозмущенное состояние. То есть стержень устойчив, если

$$Py - 0.5\rho g Sx(l-x) + EJy'' < 0.$$

Подставляя (1.10) в последнее неравенство, преобразуем его к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (P - k^2 P_l) b_k \sin \frac{\pi k x}{l} - 0.5\rho g Sx(l-x) < 0. \quad (1.11)$$

Неравенство (1.11) будет выполняться при некоторых достаточно малых положительных значениях $P - P_l$.

Таким образом, при сколь угодно малом отклонении, внешние силы стремятся вернуть стержень в исходное состояние. Сила P , незначительно превосходящая силу Эйлера, не способна изогнуть стержень, и, следовательно, потери устойчивости прямолинейной формы равновесия не происходит. Сила Эйлера не является нижней границей значений сжимающей силы, при которых стержень может принять изогнутое состояние равновесия.

2. Критическая сила

Линейная плотность энергии сжато-изогнутого силой P_l стержня

$$\tau = \frac{P_l^2}{2ES} + \frac{EJ\kappa^2}{2}.$$

Здесь κ – кривизна изогнутой оси стержня. Приняв $\kappa = y''$, учитывая (1.7), (1.9) и интегрируя τ по длине стержня, получим упругую потенциальную энергию, накопленную в стержне в процессе сжатия и изгиба

$$W = \frac{P_l^2 L}{2ES} + P_l(L-l).$$

Изменение гравитационной потенциальной энергии стержня, обусловленное его подъемом над опорной поверхностью вследствие изгиба, равно

$$\Pi = \rho g S \int_0^l y dx.$$

Подставляя в подынтегральное выражение функцию (1.7), с учетом формулы (1.9), после интегрирования получим

$$\Pi = \frac{4\rho g S}{\pi^2} l^{3/2} \sqrt{L-l}.$$

Полная механическая энергия, накопленная стержнем в изогнутом состоянии, равна $W + \Pi$.

Работа силы P_l на перемещении Δ , определяемом формулой (1.1), равна

$$A = \frac{P_l^2 L}{2ES} + P_l(L-l).$$

Сравнивая полученную работу с полной механической энергией, накопленной стержнем, приходим к неравенству $A < W + \Pi$. Таким образом, работы силы P_l недостаточно для того, чтобы стержень смог изогнуться и преодолеть силу тяжести. Работа сжимающей силы P_l полностью исчерпывается упругой энергией, накапливаемой в стержне $A = W$. В случае невесомого или вертикального стержня, когда энергия не расходуется на преодоление силы тяжести, сила P_l , удерживающая стержень в изогнутом состоянии, является также и силой, приводящей его к этому состоянию. В рассматриваемом случае, силы, способной удержать стержень в изогнутом состоянии равновесия, оказывается недостаточно, чтобы привести его к такому состоянию.

Для того чтобы консервативная система перешла из одного равновесного состояния в другое, необходимо, чтобы разность потенциальных энергий системы в этих состояниях равнялась работе внешних сил, приложенных к системе.

Рассмотрим жесткое нагружение стержня, при котором задается перемещение конца стержня, а величина сжимающей нагрузки определяется в соответствии с этим перемещением. Такое нагружение может быть реализовано в статически неопределимой системе, элементом которой является исследуемый стержень. Предположим, что стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия вплоть до нагрузки $P > P_l$, соответствующей перемещению Δ , после чего теряет устойчивость и изгибается. До тех пор пока он сжимается, сохраняя прямолинейную форму равновесия, нагрузка растёт пропорционально абсолютной деформации

$$P = ES\Delta/L. \quad (2.1)$$

После потери устойчивости и изгиба, стержень примет изогнутую форму, соответствующую значению сжимающей силы, меньшему, чем то, которое было достигнуто в процессе сжатия. При выбранном способе нагружения, в процессе изгиба сжимающая сила уменьшится. Концы стержня при этом повернутся, оставаясь неподвижными. Вследствие уменьшения сжимающей силы, деформация сжатия стержня также пропорционально уменьшится. Перемещение Δ его подвижного конца определяется формулой (1.1), в которой $\varepsilon = P_l/ES$ – оставшаяся относительная деформация сжатия стержня после его выпучивания.

Подставляя Δ в формулу (2.1), получим

$$P = P_l + ES(L-l)/L. \quad (2.2)$$

Продольная сосредоточенная сила совершает работу только на стадии сжатия стержня, так как при изгибе концы стержня неподвижны. Эта работа равна

$$A = P\Delta/2.$$

В последнюю формулу подставим выражения для P и Δ . После выполнения элементарных преобразований запишем

$$A = \frac{P_l^2 L}{2ES} + P_l(L-l) + \frac{ES}{2L}(L-l)^2.$$

Приравняв работу сжимающей силы к полной механической энергии, накапливаемой в стержне, получим уравнение

$$A = W + \Pi.$$

Учитывая, что на начальном этапе изгиба длина горизонтальной проекции стержня незначительно отличается от длины стержня, преобразуем последнее равенство к виду

$$L - l = 4 \left(\frac{\rho g}{\pi^2 E} \right)^{2/3} L^{5/3}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.2) и учитывая, что в начале процесса изгиба $P_l \approx P_e$, получим

$$P_* = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} + 4SE^{1/3} \left(\frac{\rho g L}{\pi^2} \right)^{2/3}. \quad (2.3)$$

Значение силы, определяемое выражением (2.3), является критическим значением сжимающей силы, под действием которой горизонтальный стержень, лежащий на жесткой поверхности, начнет изгибаться. Критическая сила представляет собой сумму силы Эйлера и компоненты, определяемой влиянием веса. Эта вторая компонента увеличивается вместе с длиной стержня. Поэтому критическая сила увеличивается с увеличением длины, а не уменьшается, как это следовало из формулы Эйлера. Функция $P_*(L)$, выражающая зависимость критической силы от длины стержня, имеет минимум при

$$L_{\min} = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \frac{\pi^5 c^2 i^3}{g} \right)^{1/4}.$$

Здесь $i = \sqrt{J/S}$ – радиус инерции сечения стержня, $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в материале стержня. Так, например, для стали $L_{\min} = 150,77i^{3/4}$.

Минимальное значение критической силы

$$P_{\min} = 4 \left(\frac{4}{3} \right)^{3/4} \rho c S \sqrt{\frac{gi}{\pi}}.$$

При этом второе слагаемое в (2.3), обусловленное учетом силы тяжести, составляет 3/4 от найденного значения, то есть в три раза превышает силу, найденную по формуле Эйлера.

3. Частичный изгиб стержня

При потере устойчивости вертикальный стержень изгибается сразу по всей длине. Это также верно и для невесомого горизонтального стержня. Для длинного тяжелого горизонтального стержня, лежащего на абсолютно жесткой поверхности, в процессе потери устойчивости становится возможным частичный изгиб. Изгибается только часть стержня, в то время как другая его часть остается прямой и горизонтальной (рис. 2). В соответствии с этим граничные условия должны быть записаны не для концов стержня, а для концов его изогнутой части. Обозначим длину изогнутой части стержня Λ , а длину проекции изогнутой части на плоскость опоры λ .

Полагая, что изогнутая часть начинается у одного из концов стержня, поместим начало системы координат в этом конце и направим ось абсцисс горизонтально в сторону другого конца стержня, а ось ординат вертикально вверх.

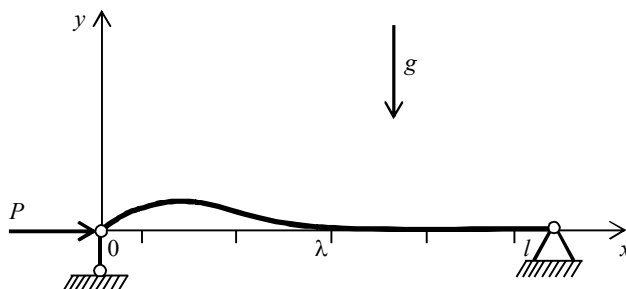


Рис. 2. Изгиб части стержня

Fig. 2. Partial bend of the bar

Функция прогибов оси изогнутой части удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.2).

Граничные условия на конце стержня соответствуют условиям шарнирного закрепления. Граничные условия на границе изогнутой и прямолинейной частей стержня являются условиями непрерывности и гладкости изогнутой оси. При указанном выборе системы координат, граничные условия запишутся в виде

$$y(0)=y(\lambda)=0, \quad y'(\lambda)=0, \quad y''(0)=0. \quad (3.1)$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка (1.2) имеет вид (1.4).

Физическому смыслу рассматриваемой задачи удовлетворяет положительно определенное решение, которое становится возможным при значениях $\alpha\lambda > v$. Величина $v=4,49341$ является корнем уравнения

$$v = \operatorname{tg} v. \quad (3.2)$$

Таким образом, изогнутая форма равновесия стержня, лежащего на жесткой горизонтальной опоре, становится возможной при значении сжимающей силы

$$P_\lambda = v^2 EJ / \lambda^2.$$

При значениях $\alpha\lambda < v$ граничным условиям (3.1) удовлетворяют только отрицательные решения, которые соответствуют прогибам стержня длины λ с одним шарнирным и одним заделанным концами, сжимаемого продольной силой P и находящегося под действием силы тяжести, при отсутствии опорной плоскости.

И положительное, и отрицательное решения становятся неограниченными при значениях $\alpha\lambda \rightarrow v$.

Пренебрегая конечными слагаемыми в положительном решении, как не играющими существенной роли в сравнении с бесконечным слагаемым, получим приближенное уравнение, описывающее конфигурацию изогнутой оси стержня

$$y = C(\sin \alpha x - \alpha x \cos \alpha \lambda). \quad (3.3)$$

Здесь C – неограниченный при $\alpha\lambda \rightarrow v$ коэффициент, определяемый из граничных условий (3.1). Этот коэффициент, вообще говоря, является неопределенным, так как неопределены величины α и λ . Выразим коэффициент C через величину

ну λ , используя изопериметрическое условие, которое в данном случае запишется в виде

$$\int_0^{\lambda} \sqrt{1+y'^2} dx = \Lambda. \quad (3.4)$$

Заменяем корень в подынтегральном выражении рядом Маклорена с двумя первыми членами и подставим в полученное равенство производную выражения (3.3). После интегрирования и преобразования, для определения C получим уравнение

$$4(\Lambda - \lambda)\lambda = C^2 v^2 \sin^2 v.$$

Учитывая уравнение (3.2) и приближенное равенство $\alpha\lambda = v$, из последнего равенства выразим зависимость коэффициента C от длины проекции λ :

$$C = k\sqrt{\lambda(\Lambda - \lambda)}; \quad k = 2v^{-2}\sqrt{1+v^2} \approx 0,45599.$$

Упругая энергия, накопленная стержнем в процессе сжатия и частичного изгиба, равна

$$W = \frac{P_{\lambda}^2 L}{2ES} + P_{\lambda}(\Lambda - \lambda).$$

Изменение потенциальной гравитационной энергии стержня при $\alpha\lambda \rightarrow v + 0$ может быть преобразовано к виду

$$\Pi = \zeta \rho g S \lambda^{3/2} \sqrt{\Lambda - \lambda}; \quad \zeta = \left(\sqrt{1+v^2} + 1 \right)^2 / v^3.$$

При жестком нагружении перемещение подвижного конца стержня

$$\Delta = \varepsilon L + \Lambda - \lambda. \quad (3.5)$$

Здесь $\varepsilon = P_{\lambda}/ES$ – относительная деформация сжатия стержня, оставшаяся после изгиба его части.

Сжимающая сила, необходимая для того, чтобы абсолютная деформация стержня достигла величины (3.5),

$$P = P_{\lambda} + ES(\Lambda - \lambda)/L. \quad (3.6)$$

Работа силы P на перемещении Δ

$$A = \frac{P\Delta}{2} = \frac{P_{\lambda}^2 L}{2ES} + P_{\lambda}(\Lambda - \lambda) + \frac{ES}{2L}(\Lambda - \lambda)^2.$$

Приравняем найденную работу к полной механической энергии, накопленной стержнем. Приводя в полученном равенстве подобные слагаемые и учитывая, что для начального момента выпучивания $\lambda \approx \Lambda$, после упрощения получим

$$\Lambda - \lambda = \xi \left(\frac{\rho g L}{E} \right)^{2/3} \Lambda; \quad \xi = 2^{2/3} v^{-2} \left(\sqrt{1+v^2} + 1 \right)^{4/3} \approx 0,78246. \quad (3.7)$$

Подставляя разность $\Lambda - \lambda$, найденную по формуле (3.7), в выражение (3.6) получим

$$P = \xi \left(\frac{(\rho g)^2 E}{L} \right)^{1/3} S \Lambda + \frac{v^2 EJ}{\Lambda^2}. \quad (3.8)$$

На рис. 3 изображен схематический график зависимости $P(\Lambda)$. Из этого графика видно, что зависимость $P(\Lambda)$ достигает минимума P_* при некотором значении длины изогнутой части Λ_* . При $P=P_*$ уравнение (3.8) имеет единственное решение $\Lambda=\Lambda_*$, которое может быть найдено как корень уравнения

$$P'(\Lambda)=0.$$

Разрешая последнее уравнение и выполняя преобразования, найдем корень

$$\Lambda_* = \zeta \left(\frac{c^4 i^6 L}{g^2} \right)^{1/9}; \quad \zeta = (2\nu^2/\xi)^{1/3} \approx 3,72312.$$

Если $\Lambda_* < L$, стержень в процессе потери устойчивости начинает изгибаться не по всей длине, а только по части, имеющей длину Λ_* . Если $\Lambda_* > L$, стержень изгибается сразу по всей своей длине.

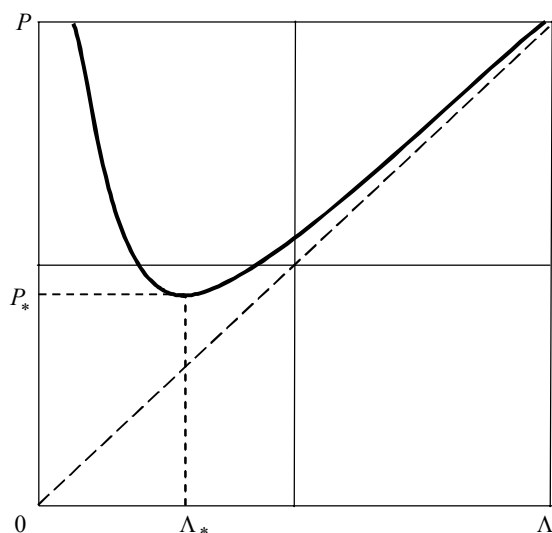


Рис. 3. График зависимости
Fig. 3. Dependency diagram

Подставляя выражение Λ_* в (3.8) и преобразовывая полученное выражение, найдем

$$P_* = 3\psi\rho Sc^{10/9} \left(\frac{g^2 i^3}{L} \right)^{2/9}; \quad \psi = (\nu\xi/2)^{2/3} \approx 1,45659.$$

При $P < P_*$ уравнение (3.8) не имеет решений, и, следовательно, стержень сохраняет устойчивость прямолинейной формы равновесия.

При $P > P_*$ уравнение (3.8) имеет два решения. Меньшее решение не соответствует физическому смыслу задачи. В противном случае пришлось бы принять, что с увеличением сжимающей силы длина изогнутой части стержня уменьшает-

ся, а это противоречит наблюдаемому явлению. Большой корень уравнения (3.8) является значением длины изогнутой части стержня при заданном значении сжимающей силы $P > P_*$.

Таким образом, P_* является минимальным значением сжимающей силы, при котором горизонтальный стержень, лежащий на жестком основании, начинает изгибаться. Другими словами, P_* является критическим значением, при котором начинается процесс потери устойчивости горизонтального стержня, лежащего на жестком основании. При этом стержень изгибается не полностью, а только частью длины Λ_* .

По мере увеличения нагрузки, при $P > P_*$, длина Λ изогнутой части стержня увеличивается в соответствии с формулой (3.8), пока не станет равной L . Однако формула (3.8) является справедливой лишь на начальной стадии изгиба, при малых значениях угловых коэффициентов наклона изогнутой оси стержня y' .

Такому частичному изгибу подвержены достаточно длинные стержни. Равенство $\Lambda_* = L$ позволяет определить наименьшую длину стержня, при которой частичный изгиб возможен

$$L_0 = \zeta^{9/8} \left(\frac{c^2 i^3}{g} \right)^{1/4}.$$

Так, например, для стали $L_0 \approx 176,2i^{3/4}$.

Если длина стержня меньше величины L_0 , то стержень при потере устойчивости будет изгибаться по всей длине. Значение критической силы, при котором начнется процесс потери устойчивости, определяется формулой (2.3).

Более длинные стержни при потере устойчивости начнут изгибаться только по части своей длины. По мере увеличения нагрузки изогнутая часть стержня удлинится, пока изгиб не охватит весь стержень.

4. Выводы

1. При сжатии тяжелого горизонтального стержня, лежащего на жестком основании, сила Эйлера не является критической силой, при которой происходит потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия. Критическая сила значительно превосходит силу Эйлера и зависит от плотности материала стержня и его деформационно-прочностных свойств.

2. С увеличением плотности материала критическая сила увеличивается. Поэтому для более плотных и менее упругих материалов учет силы тяжести, при расчете горизонтального стержня на устойчивость, является более актуальным.

3. Критическая сила зависит от длины стержня, и эта зависимость имеет минимум для некоторого значения длины $L_{\min}$. Минимальное значение критической силы в 4 раза превосходит силу Эйлера для данной длины стержня. Для более длинных стержней, критическая сила увеличивается с увеличением длины.

4. Достаточно длинные стержни, для которых $L > L_0$, при потере устойчивости начинают изгибаться не по всей длине, а лишь по ее части. По мере увеличения нагрузки изогнутая часть стержня увеличивается до тех пор, пока не охватит всю длину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
3. Лейтес С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. М.: Государственное издательство по строительству и архитектуре, 1954.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
6. Дорогов Ю.И. О потере устойчивости абсолютно жесткого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. № 3. С. 300–311.
7. Дорогов Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 1. С. 84–96.
8. Дорогов Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 4. С. 575–586.
9. Дорогов Ю.И. Влияние жёсткости и прочности опоры на продольный изгиб стержня // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Естественные науки. 2015. № 3. С. 108–116.
10. Дорогов Ю.И. Об устойчивости формы незакрепленного упругого стержня с жёсткими полками на концах // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 462–473.
11. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с искривленными торцами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. № 2. С. 255–266.
12. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с жёсткими окончаниями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. № 3. С. 16–21.
13. Дорогов Ю.И. Об одном случае потери устойчивости стержня под действием следящей силы // Строительство и реконструкция. 2016. № 1 (63). С. 3–9.
14. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня, вдавливаемого в жёсткий шпур с упругим дном // Строительная механика и расчёт сооружений. 2015. № 3. С. 34–41.
15. Дорогов Ю.И. Применение изопериметрического условия в задачах потери устойчивости стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4 (30). С. 71–81.
16. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня при наличии препятствий выпучиванию // Вестник Томского государственного университета: Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 71–84.
17. Дорогов Ю.И. Потеря устойчивости горизонтального стержня с грузом и упругой опорой посередине // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 2. С. 31–39.
18. Дорогов Ю.И. Об устойчивости горизонтального стержня, лежащего на жёстком основании // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 1. С. 58–65.
19. Дорогов Ю.И. Моделирование потери устойчивости тяжёлого стержня на жёстком основании // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2016. Т. 8. № 1. С. 34–42.

Статья поступила 30.04.16 г.

Dorogov Yu.I. (2016) STABILITY OF A HORIZONTAL ELASTIC BAR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42), pp. 70–83

DOI 10.17223/19988621/42/7

Stability of a horizontal bar lying on an absolutely rigid base in the gravity force is investigated. The base prevents the bar from deflection by the force of gravity and, in particular, excludes the initial deflection. The bar can be bent only upward, against the gravity force. In the absence of the supporting plane, the gravity force increases the bend of the bar, which makes the initial rectilinear form of balance impossible; in the presence of the supporting plane, the gravity force is directed against the deflection and promotes the stability of the rectilinear form of balance.

The possibility of the curved bar balance forms adjacent to a rectilinear form is considered.

It is shown that Euler's force is not the lower bound value of the compressing force, sufficient for transformation of the bar from a rectilinear form of balance to a curved form of balance. The value of a critical force which makes such transition possible is obtained. The critical force significantly exceeds the corresponding value of the force calculated by Euler's formula and depends not only on the stress-related properties of bar material but also on its density. The critical force is determined from the condition of the equality of the compressing force work and total potential energy of the curved bar, including the elastic energy and gravitational energy.

The bend of the bar in process of stability loss in some part of the bar length, while the other part remains rectilinear and horizontal, is investigated. Conditions under which such bend becomes possible are found. It is shown that the length of the curved part of the bar increases with an increase in the compressing force.

Keywords: stability of the horizontal bar, effect of gravity force on the critical force, partial bend.

DOROGOV Yury Ivanovich (Candidate of Technical Sciences,
Branch of Moscow Power Engineering Institute (National Research University)
in Volzhskiy, Volzhskiy, Russian Federation)

E-mail: ydorogov@yandex.ru

REFERENCES

1. Timoshenko S.P. (1971) *Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of bars, plates, and shells]. Moscow: Nauka.
2. Vol'mir A.S. (1967) *Ustoychivost' deformiruemyykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka.
3. Leytes S.D. (1954) *Ustoychivost' szhatykh stal'nykh sterzhney* [Stability of compressed steel bars]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo po stroitel'stvu i arkhitekture [State publishing on construction and architecture].
4. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. (1987) *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem* [Stability and oscillations of elastic systems] Moscow: Nauka.
5. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka.
6. Dorogov Yu.I. (2006) O potere ustoychivosti absolyutno zhestkogo sterzhnya s razrushayushcheysoy oporoy [Stability loss of a rigid bar with crumbling support]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Composite Mechanics and Design*. 3. pp. 300–311.
7. Dorogov Yu.I. (2010) Ustoychivost' uprugogo sterzhnya s razrushayushcheysoy oporoy [Stability of an elastic bar with crumbling support]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Composite Mechanics and Design*. 1. pp. 84–96.
8. Dorogov Yu.I. (2010) Prodol'nyy izgib sterzhnya s razrushayushchimisya zadelkami [Longitudinal bending of the rod with crumbling attachment]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Composite Mechanics and Design*. 4. pp. 575–586.
9. Dorogov Yu.I. (2015) Vliyaniye zhestkosti i prochnosti opory na prodol'nyy izgib sterzhnya [Effect of the support tensile strength and rigidity on longitudinal bend of the rod]. *Vestnik Severnogo (Arkticheskogo) federal'nogo universiteta. Estestvennye nauki – Northern (Arctic) Federal University Journal. Natural Science*. 3. pp. 108–116. DOI 10.17238/issn2227-6572.2015.3.108.
10. Dorogov Yu.I. (2013) The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 3. pp. 338–345.
11. Dorogov Yu.I. (2012) Ustoychivost' sterzhnya s iskrivlennymi tortsami [Stability of the rod with distorted butts]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Composite Mechanics and Design*. 2. pp. 255–266.
12. Dorogov Yu.I. (2013) Ustoychivost' sterzhnya s zhestkimi okonchaniyami [Stability of the rod with rigid butts]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 3. pp.16–21.

13. Dorogov Yu.I. (2016) Ob odnom sluchae poteri ustoychivosti sterzhnya pod deystviem sledyashchey sily [About one case of rod stability loss on effect of the following force]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya – Building and reconstruction*. 1(63). pp. 3–9.
14. Dorogov Yu.I. (2015) Ustoychivost' sterzhnya, vдавливаемого в жесткий шпур с упругим дном [Stability of the column pressed into the rigid blast hole with the elastic bottom]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 3. pp. 34–41.
15. Dorogov Yu.I. (2014) Primenenie izoperimetricheskogo usloviya v zadachakh poteri ustoychivosti sterzhnya [Application of the isoperimetric condition in problems of buckling for a rod]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(30). pp. 71–81.
16. Dorogov Yu.I. (2015) Ustoychivost' sterzhnya pri nalichii prepyatstviy vypuchivaniyu [Stability of a column in the presence of obstacles to buckling]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta: Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*. 4 (36). pp. 71–84. DOI 10.17223/19988621/36/9.
17. Dorogov Yu.I. (2014) Poterya ustoychivosti gorizonta'nogo sterzhnya s gruzom i uprugoy oporoy posredine [Stability loss of the horizontal rod with load and elastic support in the middle]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2. pp. 31–39.
18. Dorogov Yu.I. (2015) Ob ustoychivosti gorizonta'nogo sterzhnya, lezhashchego na zhestkom osnovanii [Stability of the horizontal rod, lying on the rigid base]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1. pp. 58–65.
19. Dorogov Yu.I. (2016) Modelirovanie poteri ustoychivosti tyazhelogo sterzhnya na zhestkom osnovanii [The modeling of loss in stability of a heavy rod placed on a rigid basis]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» – Bulletin of the South Ural State University Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*. 8(1). pp. 34–42. DOI 10.14529/mmph160105.

УДК 532.5:532.517.4

DOI 10.17223/19988621/42/8

И.В. Ершов

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА ДВУХАТОМНОГО ГАЗА В УСЛОВИЯХ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИКАЦИИ И ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ МОДЫ¹

В рамках линейной теории исследована устойчивость вязких двумерных возмущений в сверхзвуковом плоском течении Куэтта совершенного и колебательно-возбужденного газа. В обоих случаях исследовалась альтернатива, когда коэффициенты переноса принимались либо постоянными, либо зависящими от статической температуры потока. Для учета температурной зависимости сдвиговой вязкости использовалась модель Сазерленда, при этом коэффициенты теплопроводности выражались соотношениями Эйкана. Для совершенного газа проведено подробное сравнение характеристик устойчивости I и II акустических мод рассматриваемых моделей вязкости. Показано, что «вязкая» стратификация значительно повышает устойчивость течения по сравнению со случаем постоянной вязкости. Вместе с тем для более простой модели постоянной вязкости сохраняются все характерные особенности развития вязких возмущений, отмеченные для модели Сазерленда. При учете температурной зависимости коэффициентов переноса диссипативный эффект возбуждения колебательной моды сохраняется. Относительное уменьшение инкрементов нарастания вязких возмущений мод I и II, вызванное колебательным возбуждением, одинаково для обеих моделей вязкости. При этом увеличение критического числа Рейнольдса составляет около 12 %.

Ключевые слова: *линейная устойчивость, формула Сазерленда, колебательная релаксация, акустические моды.*

Плоское течение Куэтта широко используется в линейной теории устойчивости в качестве простой модели для исследования влияния различных факторов, таких, как реология, физико-химические процессы, механические характеристики граничных поверхностей на устойчивость потока. В работах [1, 2] рассматривалась линейная устойчивость сверхзвукового течения Куэтта совершенного газа при конечных числах Рейнольдса. Температурная зависимость вязкости описывалась формулой Сазерленда, число Прандтля принималось постоянным, объемная вязкость исключалась из рассмотрения с помощью соотношения Стокса. В [2] была изучена зависимость инкрементов нарастания и критических чисел Рейнольдса наиболее неустойчивых вязких мод от числа Маха потока. Эти исследования на современном этапе при тех же предположениях были продолжены в работе [3], где дополнительно к модели Сазерленда рассматривался случай постоянной вязкости. Основное внимание здесь было посвящено изучению промежуточного интегрального нарастания вязких возмущений на базе немодального энергетического подхода. В рамках классической (модальной) линейной теории сопоставление двух вязкостных моделей ограничилось в основном сравнением

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00274).

критических параметров течения наиболее неустойчивой вязкой моды для нескольких значений числа Маха. Было показано, что «вязкая» стратификация в несколько раз увеличивает критические числа Рейнольдса относительно соответствующих значений для случая постоянной вязкости.

В работе [4], где на основе линейной теории исследовалось влияние колебательного возбуждения на устойчивость сжимаемого течения Куэтта в невязком пределе, было зафиксировано заметное стабилизирующее воздействие колебательной релаксации на невязкие акустические моды. В [5] рассматривалась линейная устойчивость вязких возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно возбужденного и совершенного газа с независимыми от температуры коэффициентами переноса. Основным результатом этой работы состоял в том, что колебательное возбуждение на уровне, который достигим, например, в нерасчетных струях или с помощью лазерной накачки, увеличивает устойчивость течения в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. При этом относительное увеличение критического числа Рейнольдса по сравнению с совершенным газом может достигать 12 %.

В связи с отмеченным в [3] чрезвычайно сильным влиянием «вязкой» стратификации на критические параметры течения возникает естественный вопрос. Сохранится ли в этих условиях заметное стабилизирующее влияние колебательной релаксации? Кроме того, представляет самостоятельный интерес провести подробное сравнение характеристик линейной устойчивости течения Куэтта совершенного газа для двух моделей вязкости. Это позволит сделать заключение о том, насколько в данном случае содержательна более простая модель постоянной вязкости, одним из преимуществ которой является возможность использовать при линеаризации известное точное решение уравнений Навье – Стокса.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается линейная устойчивость плоского вязкого течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. В координатной плоскости поток ограничен двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Считается, что плоскость $y = 0$ покоится, а граница $y = h$ движется равномерно в собственной плоскости со скоростью U_0 . Течение описывается в рамках модели двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока [6–8]. В частности, для вязкости, как и в [1–3], использовалась формула Сазерленда [9]. Обусловленные поступательным λ_t , вращательным λ_r и колебательным λ_v движением молекул газа коэффициенты теплопроводности определяются соотношениями Эйкена [6–8]. Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от статической (поступательной) T и колебательной T_v температур газа и постоянны. В качестве характерных величин для обезразмеривания были выбраны ширина канала h , скорость границы U_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения на движущейся границе канала и образованные из них время $t_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты переноса обезразмеривались на их значения при температуре T_0 . В безразмерных переменных система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right]; \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau} +$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma - 1) M^2 \eta(T)}{2 \text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right]; \quad (3)$$

$$\gamma_v \rho \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right) = \frac{20 \gamma \gamma_v}{33 \text{RePr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right] - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}; \quad (4)$$

$$\gamma M^2 p = \rho T, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}, \quad i, j = 1, 2, \quad (5)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Параметры, входящие в уравнения системы (1) – (5), определяются следующим образом. Коэффициент $\alpha_1 = \eta_{0,b}/\eta_0$ есть отношение объемной и сдвиговой вязкостей. Коэффициент $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $c_v = c_{vt} + c_{vr}$, $c_p = c_v + R$ – соответственно удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении, где выделены составляющие, обусловленные поступательным c_{vt} и вращательным c_{vr} движением молекул газа, R – газовая постоянная. Коэффициент $\gamma_{\text{vib}} = c_{vv}/(c_{vt} + c_{vr} + c_{vv})$ характеризует степень неравновесности колебательной моды, c_{vv} – удельная теплоемкость при постоянном объеме, связанная с колебательным движением молекул газа, τ – характерное время колебательной релаксации. Параметры $\text{Re} = \rho_0 h U_0 / \eta_0$ и $M = U_0 / (\gamma R T_0)^{1/2}$ есть соответственно числа Рейнольдса и Маха несущего потока. $\text{Pr} = \eta_0 c_v / \lambda_0$ – число Прандтля, где коэффициент теплопроводности $\lambda_0 = \lambda_{0t} + \lambda_{0r}$ определяется поступательными и вращательными степенями свободы молекул газа.

Нижний предел $\gamma_{\text{vib}} = 0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равномерное распределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib} . Поскольку закон равномерного распределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1) – (5), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_v может быть достаточно велик. В [6] показано, что при $T = 300$ К неравновесная теплоемкость $c_{vv} \approx 1.8R$. Используя равномерное распределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{\text{vib}} \approx 0.42$. С ростом разрыва между температурами T_v и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. В расчетах максимальное значение параметра γ_{vib} было выбрано равным $\gamma_{\text{vib}} = 0.4$, с тем, чтобы остаться в рамках используемой модели, избегая возбуждения высоких колебательных уровней энергии.

В качестве решения для среднего течения (несущего потока) выбрано равновесное стационарное решение, где $\gamma_{\text{vib}} = 0$ и $T = T_v$. При этом считалось, что гидродинамические переменные среднего течения зависят только от поперечной координаты y :

$$u_x = U_s(y), u_y = 0, T = T_s(y), T_v = T_{v,s}(y) = T_s(y), p = p_s(y) \quad (6)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$U_s(0) = 0, U_s(1) = 1, \left. \frac{dT_s}{dy} \right|_{y=0} = 0, T_s(1) = 1, p_s(0) = p_s(1) = \frac{1}{\gamma M^2}. \quad (7)$$

В силу геометрии профилей среднего течения (6) уравнение неразрывности (1) удовлетворяется автоматически. Уравнение Ландау – Теллера (4) также выполняется тождественно, поскольку для рассматриваемого равновесного решения параметр $\gamma_{\text{vib}} = 0$ и $T = T_v$. При этом из уравнений импульсов (2), энергии (3) и уравнения (7) определяются $\rho_s T_s = 1$, $p_s(y) = 1/(\gamma M^2)$, а профили скорости $U_s(y)$ и температуры $T_s(y)$ вычисляются из системы уравнений:

$$\frac{d}{dy} \left(\eta_s \frac{dU_s}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(\eta_s \frac{dT_s}{dy} \right) + (\gamma - 1) \text{Pr} M^2 \eta_s \left(\frac{dU_s}{dy} \right)^2 = 0, \quad \eta_s = \eta(T_s). \quad (8)$$

Для вязкости, определяемой формулой Сазерленда [2–4]

$$\eta_s(y) = \frac{1,5 T_s^{3/2}(y)}{T_s(y) + 0,5}, \quad (9)$$

и различных чисел Маха M при $\gamma = 1.4$; $\text{Pr} = 3/4$ система (8) с данными Коши (7) интегрировалась численно с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка на интервале $y = [0; 1]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Результаты расчетов зависимостей скорости $U_s(y)$ и температуры $T_s(y)$ для $M = 0.5$; 2 и 5 представлены на рис. 1.

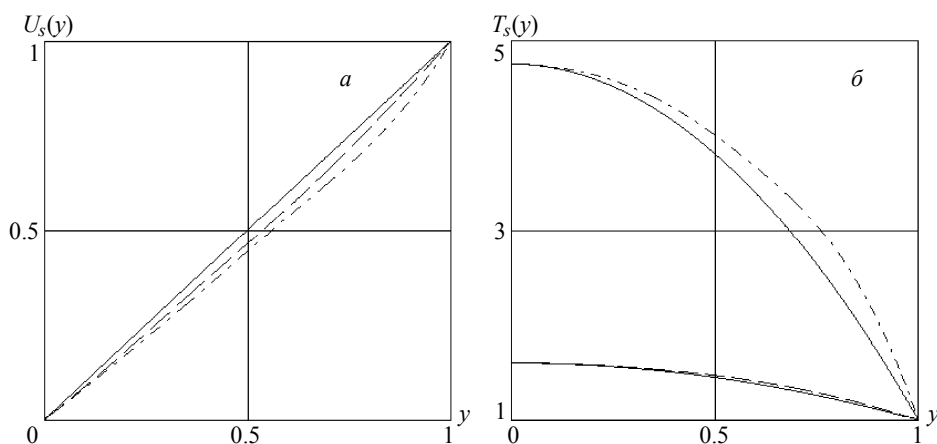


Рис. 1. Профили скорости $U_s(y)$ (а) и температуры $T_s(y)$ (б) среднего течения (сплошная линия – модель постоянной вязкости при $M = 0.5$; штриховая и штрихпунктирная линии – модель Сазерленда (9) при $M = 2$ и 5)

Fig. 1. Profiles of the (a) velocity $U_s(y)$ and (б) temperature $T_s(y)$ of the average flow (the solid line is the constant viscosity model at $M = 0.5$; the dotted and dashed lines are the Sutherland model (9) at $M = 2$ and 5)

Мгновенные значения гидродинамических переменных представим в виде

$$u_x = U_s + \hat{u}_x, u_y = \hat{u}_y, \rho = \rho_s + \hat{\rho}, T = T_s + \hat{T}, T_v = T_{v,s} + \hat{T}_v, \\ p = p_s + \hat{p}, \eta = \eta_s + \hat{\eta} = \eta_s + \eta_{T,s} \hat{T}, \quad \eta_{T,s} = \left. \frac{d\eta}{dT} \right|_{T=T_s}, \quad (10)$$

где возмущения гидродинамических переменных представляются в виде бегущих плоских волн

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}_0(y) e^{i\alpha(x - ct)}, \quad \mathbf{q}(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{\rho}, \hat{T}, \hat{T}_v, \hat{p}), \quad \mathbf{q}_0(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_v, p). \quad (11)$$

Здесь α – волновое число вдоль периодической переменной x , $c = c_r + ic_i$ – комплексная фазовая скорость, i – мнимая единица. Подставляя (10), (11) в уравнения системы (1) – (5) и линеаризуя ее относительно среднего течения, получаем систему уравнений для амплитуды возмущений:

$$D\rho + \alpha\rho'_s v + \rho_s \sigma = 0, \\ \frac{\eta_s}{\text{Re}} \Delta u - \rho_s D u - \alpha\rho_s v U'_s - i\alpha\varepsilon + \frac{\eta_{T,s} T'_s}{\text{Re}} u' + \frac{(\eta_{T,s} U'_s)'}{\text{Re}} \theta + \frac{\eta_{T,s} U'_s}{\text{Re}} \theta' = 0, \\ \frac{\alpha}{\text{Re}} \Delta v - \alpha\rho_s D v - \varepsilon' + \frac{\alpha\eta_{T,s} T'_s}{\text{Re}} v' = 0, \\ \frac{\gamma\eta_s}{\text{RePr}} \Delta \theta - \rho_s D \theta - \alpha\rho_s v T'_s - \alpha(\gamma - 1)\sigma + \frac{2\gamma(\gamma - 1)\eta_s M^2}{\text{Re}} (u' + i\alpha^2 v) U'_s + \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) + \\ + \frac{2\gamma\eta_{T,s} T'_s}{\text{RePr}} \theta' + \left[\frac{\gamma(\eta_{T,s} T'_s)'}{\text{RePr}} + \frac{\gamma(\gamma - 1)\eta_{T,s} M^2 U'^2_s}{\text{Re}} \right] \theta = 0; \quad (12) \\ \frac{20\gamma\gamma_v}{33\text{RePr}} \Delta \theta_v - \gamma_v \rho_s D \theta_v - \alpha\gamma_v \rho_s v T'_s - \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) + \frac{20\gamma\gamma_v \eta_{T,s} T'_s}{33\text{RePr}} \theta'_v + \\ + \frac{20\gamma\gamma_v \eta_{T,s} T'_s}{33\text{RePr}} \theta' + \frac{20\gamma\gamma_v (\eta_{T,s} T'_s)'}{33\text{RePr}} \theta = 0,$$

$$\gamma M^2 p = \rho_s \theta + \rho T_s,$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=0} = v|_{y=1} = \theta|_{y=0} = \theta|_{y=1} = \theta_v|_{y=0} = \theta_v|_{y=1} = p|_{y=0} = p|_{y=1} = 0, \quad (13)$$

$$D = i\alpha(U_s - c), \quad \sigma = v' + iu, \quad \varepsilon = p - \frac{\alpha\eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \sigma, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2.$$

Здесь и далее штрих у функций обозначает дифференцирование по переменной y .

Спектральная задача и метод решения

Система (12) вместе с однородными граничными условиями (13) определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c = c_r + ic_i$, а числа Маха M , Рейнольдса Re и

волновое число α служат параметрами. Для расчета собственных значений $c = c_r + ic_i$ неустойчивых мод система (12) сводилась к матричному виду и далее решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций [10, 11], ранее примененный в работах [12, 13]. Следует отметить, что в работах [1–3], посвященных исследованию линейной устойчивости течения Куэтта в невозбужденном совершенном газе, также применялся метод коллокаций, причем в [1–3] использовался инструмент Matlab. В данном случае спектральная задача записывалась в матричном представлении:

$$A_1 \varphi'' + A_2 \varphi' + A_3 \varphi = c A_4 \varphi, \quad \varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=1} = 0, \quad (14)$$

где $\varphi = (\rho, u, v, \theta, \theta_v)$, а матрицы A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) размера (5×5) имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_s}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha \eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma \eta_s}{\text{RePr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20 \gamma \gamma_v \eta_s}{33 \text{RePr}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_s & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & \frac{i \alpha^2 \eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) & a_5 & 0 \\ -\frac{T_s}{\gamma M^2} & \frac{i \alpha \eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) & \alpha a_2 & -\frac{\rho_s}{\gamma M^2} & 0 \\ 0 & \frac{2 \gamma (\gamma - 1) \eta_s M^2 U'_s}{\text{Re}} & -\alpha (\gamma - 1) & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -i U_s & -i \rho_s & -\rho'_s & 0 & 0 \\ \frac{i \alpha T_s}{\gamma M^2} & -\alpha b_1 & -\alpha \rho_s U'_s & -\frac{i \alpha \rho_s}{\gamma M^2} + a'_5 & 0 \\ -\frac{T'_s}{\gamma M^2} & i \alpha b_5 & -\alpha^2 b_2 & -\frac{\rho'_s}{\gamma M^2} & 0 \\ 0 & -i \alpha (\gamma - 1) & \alpha b_6 & -b_3 & \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} \\ 0 & 0 & -\alpha \gamma_v \rho_s T'_s & \gamma_v b_7 & -\gamma_v b_4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i \alpha \rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \alpha^2 \rho_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \alpha \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \alpha \gamma_v \rho_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\eta_{T,s} T'_s}{\text{Re}}, a_2 = a_1 \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right), a_3 = \frac{2\gamma a_1}{\text{Pr}}, a_4 = \frac{10\gamma_v a_3}{33}, \\
a_5 &= \frac{\eta_{T,s} U'_s}{\text{Re}}, b_1 = i\rho_s U_s + \frac{\eta_s \alpha}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right), b_2 = i\rho_s U_s + \frac{\eta_s \alpha}{\text{Re}}, \\
b_3 &= i\alpha\rho_s U_s + \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} + \frac{\gamma\eta_s \alpha^2}{\text{RePr}} - \frac{\gamma a'_1}{\text{Pr}} - \gamma(\gamma-1)a_5 M^2 U'_s, b_4 = i\alpha\rho_s U_s + \frac{\rho_s}{\tau} + \frac{20\gamma\eta_s \alpha^2}{33\text{RePr}}, \\
b_5 &= a_1 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right), b_6 = \frac{2i\alpha\gamma(\gamma-1)\eta_s M^2 U'_s}{\text{Re}} - \rho_s T'_s, b_7 = \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} + \frac{20\gamma\gamma_v (\eta_{T,s} T'_s)'}{33\text{RePr}}.
\end{aligned}$$

В качестве узлов коллокации выбирались точки Гаусса – Лобатто

$$y_n = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right], \quad n=0,1,\dots,N,$$

в которых полином Чебышева N -й степени имеет экстремумы на отрезке $y = [0, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных D_N^1 [10, 11] размером $(N+1) \times (N+1)$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$ [10, 11].

Построенная таким образом дискретная аппроксимация позволяет свести задачу (14) к обобщенной задаче на собственные значения (линейному спектральному матричному пучку) относительно спектрального параметра c :

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{kj} - cF_{kj})r_j = 0, \quad k=0,1,2,\dots,5N+4, \quad (15)$$

где вектор неизвестных $\mathbf{r}$ размером $5(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{r}(x_2) = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N, u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

а матрицы G, F размером $5(N+1) \times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A_1 \otimes D_N^2 + A_2 \otimes D_N^1 + A_3 \otimes I_N, \quad F = A_4 \otimes I_N$$

(знак « $\otimes$ » обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [14]), I_N – единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$. Однородные граничные условия (13) для уравнения (15) учитываются неявно через оператор D_N^1 и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^k на окаймленные матрицы размером $(N-1) \times (N-1)$, которые получаются при выполнении условий [10, 11]:

$$D_{0,j}^k = D_{N,j}^k = 0, \quad D_{i,0}^k = D_{i,N}^k = 0, \quad i=0,1,\dots,N, \quad j=0,1,\dots,N, \quad k=1,2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (15) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм, который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме [15]. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений чисел Рей-

нольдса Re и Маха M , объемной вязкости α_1 , степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} , времени колебательной релаксации τ и волнового числа α получается набор $(N+1)$ -го собственных значений $c = c_r + ic_i$.

Для проверки точности вычислений параллельно были проведены расчеты собственных значений $c = c_r + ic_i$ с помощью метода «стрельбы». Для этого уравнения (12) заменялись фундаментальной системой уравнений и граничными условиями для вещественных и мнимых частей функций ρ , u , v , θ и θ_v . Полученная система при фиксированных наборах параметров Re , M , γ_{vib} , τ и α интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге-Кутты четвертого порядка на интервалах $y \in [0; 0.5]$ и $y \in [0.5; 1]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Шаг по волновому числу $\Delta \alpha = 10^{-3}$. Точкой «прицеливания» служила середина канала – $y = 0.5$. Значения c_r и c_i подбирались таким образом, чтобы вычисленные «слева» и «справа» в точке $y = 0.5$ значения функций ρ_r , u_r , v_r , θ_r , $\theta_{v,r}$ и ρ_i , u_i , v_i , θ_i , $\theta_{v,i}$ совпадали с точностью до 10^{-8} . Соответствующее такому совпадению значение c принималось в качестве собственного значения при заданном наборе параметров Re , M , α_1 , γ_{vib} , τ , α . Сравнение результатов, полученных с помощью методов коллокаций и «стрельбы» показало, что различия в значениях $c = c_r + ic_i$, наблюдаются лишь в шестом-седьмом десятичных знаках после запятой. Таким образом, была обеспечена необходимая точность вычисления инкрементов (декрементов) возмущений.

Расчеты велись при следующих значениях параметров: $\gamma_{vib} = 0 - 0.4$; $\tau = 10^{-2} - 10$; $\alpha_1 = 0 - 2$; $M = 0.5 - 25$; $Pr = 3/4$; $\gamma = 7/5$. Значение волнового числа менялось в диапазоне $\alpha = 0 - 10$ с шагом $\Delta \alpha = 10^{-3}$. Число узлов коллокаций в интервале $y \in [0; 1]$ варьировалось в диапазоне от $N+1 = 100$ до $N+1 = 500$ и в большинстве расчетов принималось равным $N+1 = 300$.

Результаты расчетов

Для модели постоянной вязкости и модели Сазерленда параметрические расчеты спектральной задачи (15) показали, что изменение значений времени колебательной релаксации в диапазоне $10^{-2} \leq \tau \leq 10$ слабо влияет на поведение спектров вязких возмущений. Поэтому ниже расчетные данные приведены для одного значения времени $\tau = 1$.

Показано, что для модели постоянной вязкости и модели Сазерленда множество собственных значений линейной задачи устойчивости сверхзвукового вязкого течения Куэтта термически возбужденного молекулярного газа, как и в случае совершенного газа, делится на два непересекающихся множества S_a и S_v [1–3]. Собственные значения из множества S_a сходятся в пределе $Re \rightarrow \infty$ к собственным значениям для невязких акустических мод I, II, III и т.д. Собственные значения из S_v не имеют асимптотической связи с невязкой задачей и характеризуются большими декрементами затухания [16]. Разбиение множества мод S_a на четные и нечетные, классифицированное для невязких возмущений в равновесном и колебательно-возбужденном газах [4], сохраняется и для вязких возмущений. Представление об общей структуре спектра вязких возмущений дает рис. 2.

Графики зависимостей волновых скоростей $c_r(\alpha)$ для семейств четных и нечетных мод возмущений из S_a приведены на рис. 3. Здесь сплошной и штриховой линиями показаны зависимости $c_r(\alpha)$ для четных и нечетных мод невязких возмущений соответственно для невозбужденного ($\gamma_{vib} = 0$) и колебательно-возбужденного ($\gamma_{vib} = 0.4$) газов. Из рис. 3 следует, что диссипативные эффекты, связанные с «вязкой» стратификацией, варьированием числа Рейнольдса и с возбужде-

нием внутренних степеней свободы молекул, практически не меняют поведения кривых $c_r(\alpha)$, рассчитанных в невязком приближении при $Re \rightarrow \infty$ [4]. Выделенные моды I и II, как видно из рис. 3, раньше других переходят в интервал $c_r = [0, 1]$, где, как было показано в [4, 12], возможно развитие невязкой неустойчивости, и в этом смысле являются наиболее неустойчивыми.

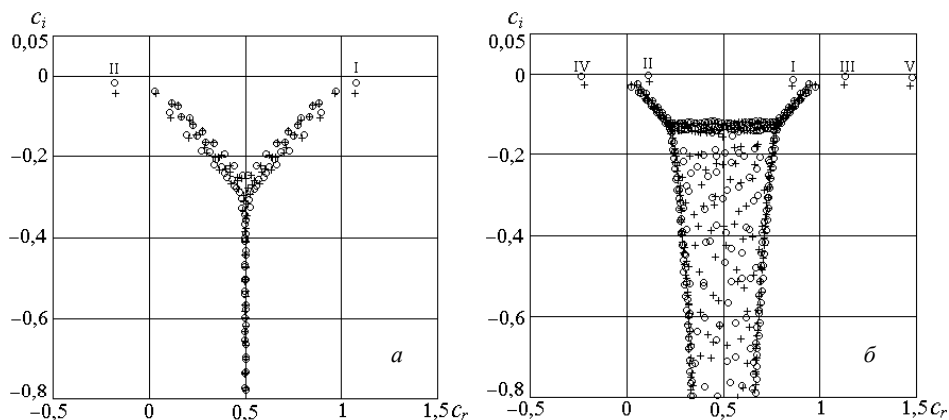


Рис. 2. Спектры собственных значений для $M = 5$, $Re = 5 \cdot 10^5$ при $\alpha = 0.1$ (а) и $\alpha = 2.5$ (б) (кружки – совершенный газ, крестики – максимальное возбуждение колебательной моды)

Fig. 2. Spectra of eigenvalues for $M = 5$ and $Re = 5 \cdot 10^5$ at $\alpha = (a) 0.1$ and $(b) 2.5$ (the circles denote the perfect gas; the crosses, the maximum excitation of the vibrational mode)

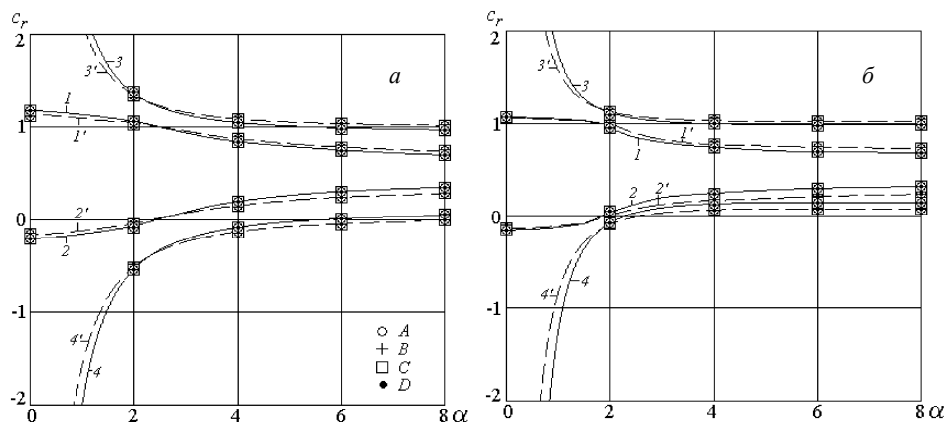


Рис. 3. Зависимости $c_r(\alpha)$ для чисел Маха $M = 3$ (а) и $M = 5$ (б) при $\alpha_1 = 0$ (1, 1' – мода I; 2, 2' – мода II; 3, 3' – мода III; 4, 4' – мода IV; сплошные линии – невязкие моды при $\gamma_{vib} = 0$; штриховые – невязкие моды при $\gamma_{vib} = 0.4$; A – модель постоянной вязкости при $Re = 10^5$; B – модель постоянной вязкости при $Re = 10^6$; C – модель Сазерленда (9) при $Re = 10^5$; D – модель Сазерленда (9) при $Re = 10^6$)

Fig. 3. Dependencies $c_r(\alpha)$ for a Mach number $M = (a) 3$ and $(b) 5$ at $\alpha_1 = 0$ (1, 1' are mode I; 2, 2' are mode II; 3, 3' are mode III; 4, 4' are mode IV; solid lines, non-viscous modes at $\gamma_{vib} = 0$; dashed line, non-viscous modes at $\gamma_{vib} = 0.4$; A, constant viscosity model at $Re = 10^5$; B, constant viscosity model at $Re = 10^6$; C, Sutherland model (9) at $Re = 10^5$; D, Sutherland model (9) at $Re = 10^6$)

При числе Маха $M = 2$ кривые мод I и II практически зеркально симметричны относительно линии $c_r = 0.5$, соответствующей положению критического слоя на оси канала. Можно обратить внимание, что с ростом числа Маха точки перехода мод I и II в интервал $c_r = [0; 1]$ сдвигаются в область меньших волновых чисел α , а симметрия относительно $c_r = 0.5$ несколько нарушается. Последнее связано с увеличением несимметрии профиля температуры среднего течения T_s при возрастании числа Маха (см. рис. 1).

Сравнение декрементов (инкрементов) $\omega_i = \alpha c_i$ мод I и II для двух моделей вязкости в совершенном газе представлено на рис. 4. На графиках рис. 4, а можно заметить, что дестабилизирующее влияние вязкости на устойчивую [4] в невязком пределе моду I при $M = 3$ имеет место для обеих моделей. При этом влияние «вязкой» стратификации по сравнению со случаем $\eta = \text{const}$ [5] сводится к смещению зоны неустойчивости в сторону больших волновых чисел и небольшому снижению максимального инкремента. Следует отметить, что такая вязкая дестабилизация моды I проявляется лишь в очень узком диапазоне чисел Маха $M \approx 3$. При всех других числах Маха мода I остается устойчивой и вязкость оказывает на нее исключительно дополнительное стабилизирующее воздействие. В частности, это подтверждается кривыми декрементов для $M = 5$.

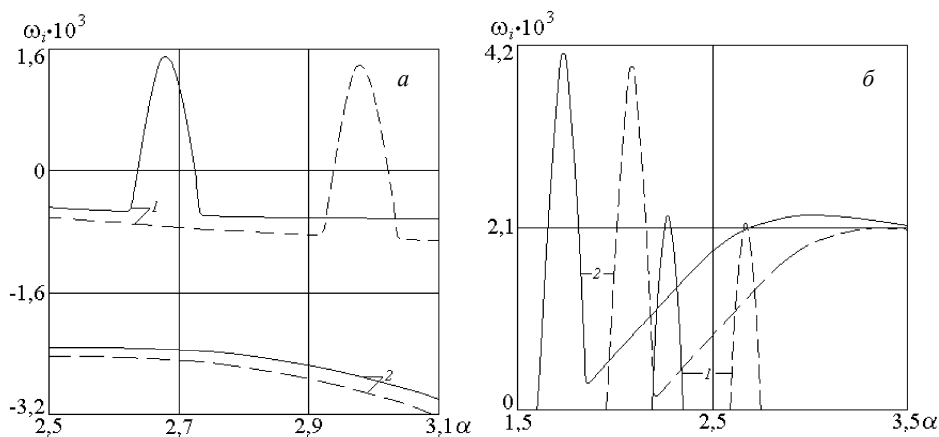


Рис. 4. Зависимости $\omega_i(\alpha)$ для совершенного газа при $Re = 5 \cdot 10^5$ (а – мода I, б – мода II; 1 – $M = 3$, 2 – $M = 5$; сплошные линии – модель постоянной вязкости, штриховые – модель Сазерленда (9))

Fig. 4. Dependencies $\omega_i(\alpha)$ for a perfect gas at $Re = 5 \cdot 10^5$ (а, mode I; б, mode II; $M = (1) 3$ and $(2) 5$; the solid line is the constant viscosity model; the dashed line, Sutherland model (9))

Как следует из рис. 4, б стратификация также сдвигает кривые инкрементов моды II в сторону коротковолновых возмущений, незначительно снижая их максимумы. Вместе с тем для обеих моделей вблизи $\alpha \approx 1.5$ при $M = 5$ фиксируется резкое локальное возрастание инкремента ω_i , вызванное дополнительным дестабилизирующим воздействием вязкости. Этот эффект сохраняется и при дальнейшем продвижении в зону дальнего сверхзвука [2].

Влияние возбуждения колебательной моды на наиболее неустойчивые акустические моды возмущений в стратифицированном течении можно оценить по графикам рис. 5. Видно, что в основной части диапазона неустойчивости возбужде-

ние приводит к уменьшению инкрементов нарастания. При этом относительная величина подавления возмущений остается такой же, как и для модели постоянной вязкости [5].

Общее представление об устойчивости течения Куэтта дают кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(\text{Re}, \alpha) = 0$ на рис. 6. Влияние возбуждения на стратифицированный поток при $M = 3$ для обеих мод I и II представлено графиками рис. 6, а. Пунктирные кривые, отвечающие предельному возбуждению колебательной моды, можно рассматривать как сдвиг соответствующих сплошных кривых для совершенного невозбужденного газа в область больших чисел Re и α без изменения формы, в частности без деформации внутренней области неустойчивости. Точки K_1, K'_1 соответствуют минимальным (критическим) числам Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$, определяющим порог, ниже которого все возмущения затухают. Видно, что наиболее неустойчивой является мода II, у которой существенно меньше критические числа Рейнольдса и заметно шире внутренняя зона неустойчивости в направлении оси волновых чисел α . Можно констатировать, что учет зависимости вязкости от температуры никак не сказывается на диссипативном эффекте колебательного возбуждения, которое повышает устойчивость обеих мод, увеличивая критические числа Рейнольдса.

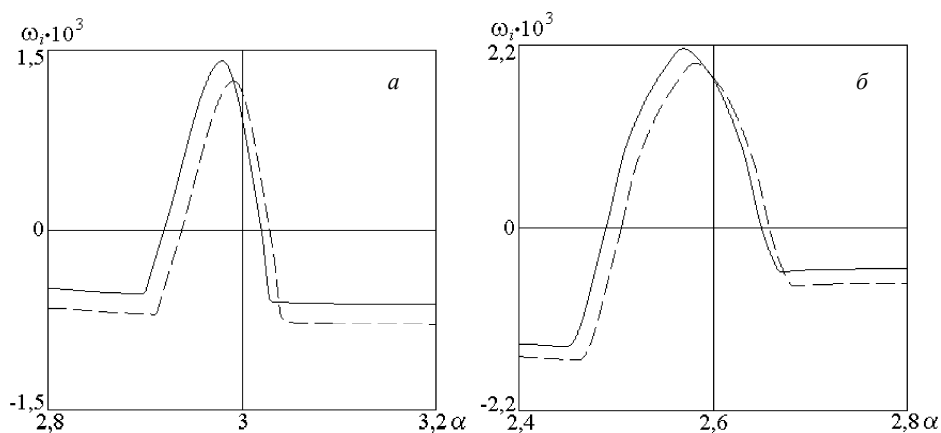


Рис. 5. Зависимости $\omega_i(\alpha)$ для модели Сазерленда (9) при $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$, $M = 3$ (а – мода I; б – мода II; сплошные линии – совершенный газ, штриховые – колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_{\text{vib}} = 0.4$))

Fig. 5. Dependencies $\omega_i(\alpha)$ for Sutherland model (9) at $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$, $M = 3$ (а, mode I; б, mode II; the solid line is the perfect gas; the dashed line, the vibrationally excited gas ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_{\text{vib}} = 0.4$))

На рис. 6, б сравниваются нейтральные кривые для совершенного газа и обеих моделей вязкости при числе Маха $M = 5$. Анализ графиков позволяет заключить, что во всем диапазоне чисел Рейнольдса влияние стратификации по вязкости сводится в основном к усилению диссипативного эффекта, проявляясь в сужении зоны неустойчивости и существенном возрастании критического числа Рейнольдса, что видно из сравнения точек K_2, K'_2 . Вместе с тем характерные особенности поведения кривых нейтральной устойчивости в дальней сверхзвуковой области при $M \geq 5$ остаются неизменными для обеих моделей. В частности, здесь область неустойчивости при возрастании числа Рейнольдса расширяется (ср. рис. 6, а).

Кроме того, в обоих случаях кривые имеют два минимума по числу Рейнольдса. При этом острый пик вблизи $\alpha \approx 1.5$ соответствует острому пику инкремента нарастания на графике рис. 4, б, связанному с дополнительной вязкой неустойчивостью. Минимум на пологой части кривых, наоборот, определяется диссипативным влиянием вязкости на максимальный инкремент инерционной неустойчивости при $M = 5$ [4].

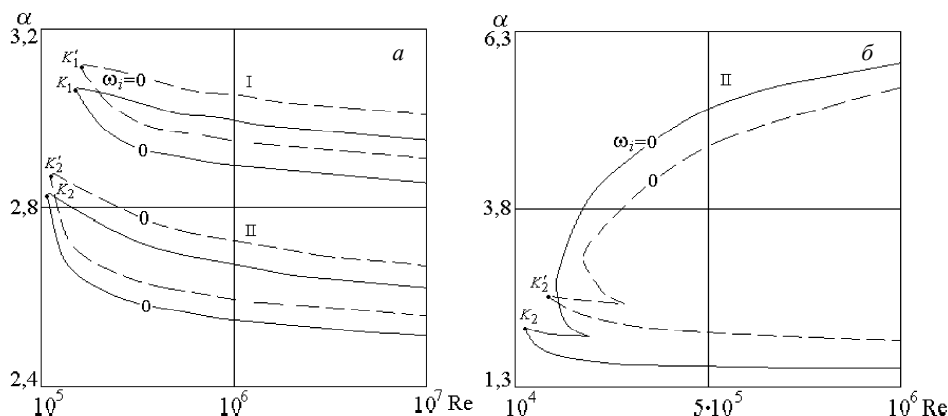


Рис. 6. Кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(Re, \alpha) = 0$ (I – мода I, II – мода II; K_1, K'_1 – критические точки моды I, K_2, K'_2 – критические точки моды II; а – модель Сазерленда (9) при $M = 3$ (сплошные линии – совершенный газ, штриховые – колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$)); б – совершенный газ при $M = 5$ (штриховая – модель Сазерленда (9), сплошная линия – модели постоянной вязкости))

Fig. 6. Curves of neutral stability $\omega_i(Re, \alpha) = 0$ (I, mode I; II, mode II; K_1, K'_1 , critical points of mode I; K_2, K'_2 , critical points of mode II; а, model of Sutherland (9) at $M = 3$ (solid line, the perfect gas; dashed line, the vibrationally excited gas ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$)); б, perfect gas at $M = 5$ (dashed line, Sutherland model (9); solid line, the constant viscosity model))

Поведение кривых нейтральной устойчивости $\omega_i(M, \alpha) = 0$ и изолиний фазовых скоростей $\omega_r(M, \alpha) = \text{const}$ моды II во всем расчетном диапазоне чисел Маха для обеих моделей вязкости в совершенном газе показано на рис. 7. Из графиков $\omega_r(M, \alpha) = \text{const}$ следует, что независимость фазовых скоростей от диссипативных эффектов, отмеченная на рис. 3 для $M = 3, 5$, имеет место для всех чисел M . Кривые $\omega_i(M, \alpha) = 0$ показывают, что расхождение между моделями вязкости резко усиливается с возрастанием числа Рейнольдса. Это прослеживается по максимальному размеру основной области неустойчивости вдоль оси M . Если для модели Сазерленда этот размер остается неизменным, то в случае постоянной вязкости при $Re = 10^6$ обе ветви кривой выходят далеко за предел $M = 25$.

Графики рис. 8 дают возможность качественно оценить влияние модели вязкости, сжимаемости и колебательного возбуждения на критические параметры моды II. Можно видеть, что во всем диапазоне чисел Маха для совершенного газа «вязкая» стратификация в несколько раз увеличивает значение Re_{cr} по сравнению со случаем постоянной вязкости, хотя длины волн наиболее неустойчивых возмущений (критические волновые числа) при переходе от модели к модели меняются незначительно. Для обеих моделей возбуждение колебательной моды увеличивает критические числа Рейнольдса и критические волновые числа при всех числах

Маха, хотя и существенно меньше, чем стратификация. Видно, что немонотонность всех кривых в зависимости от числа Маха имеет одинаковый характер: в области умеренных сверхзвуковых значений $M \leq 6$ с ростом сжимаемости понижается устойчивость течения, а ее дальнейшее увеличение, наоборот, стабилизирует поток.

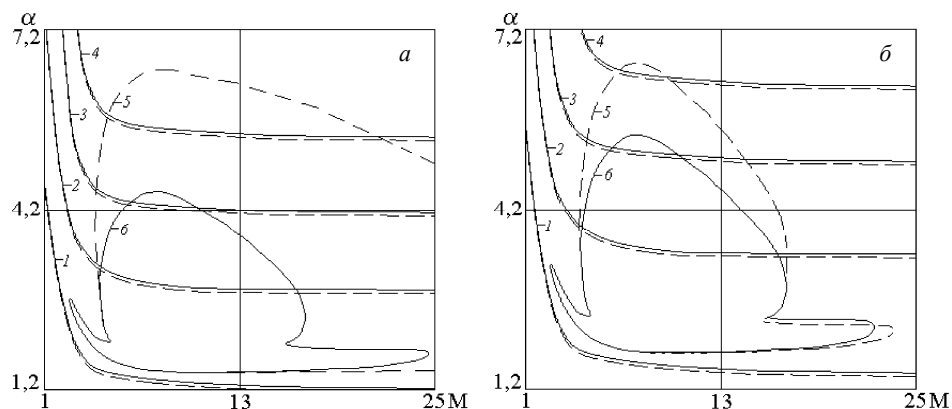


Рис. 7. Изолинии $\omega_r(M, \alpha)$ и $\omega_r(M, \alpha)$ моды II для совершенного газа (*a* – модель постоянной вязкости; *б* – модель Сазерленда (9); кр. 1 – $\omega_r = 0$, кр. 2 – $\omega_r = 1$, кр. 3 – $\omega_r = 2$, кр. 4 – $\omega_r = 3$; кр. 5, 6 – $\omega_r = 0$; сплошные линии – $Re = 2 \cdot 10^5$, штриховые – $Re = 2 \cdot 10^6$)

Fig. 7. Isolines of $\omega_r(M, \alpha)$ and $\omega_r(M, \alpha)$ of mode II for the perfect gas (*a*, the constant viscosity model; *b*, Sutherland model (9); $\omega_r = (1) 0, (2) 1, (3) 2, (4) 3$, and $(5, 6) 0$; solid line, $Re = 2 \cdot 10^5$, dashed line, $Re = 2 \cdot 10^6$)

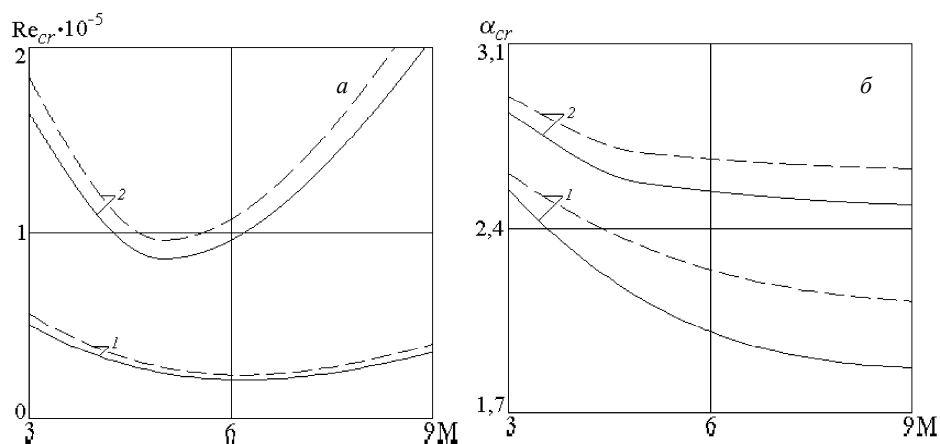


Рис. 8. Зависимости $Re_{cr}(M)$ (*a*) и $\alpha_{cr}(M)$ (*б*) (1 – модель постоянной вязкости, 2 – модель Сазерленда (9); сплошные линии – совершенный газ, штриховые – колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$))

Fig. 8. Dependencies (*a*) $Re_{cr}(M)$ and (*b*) $\alpha_{cr}(M)$ (1, the constant viscosity model; 2, Sutherland model (9); solid line, the perfect gas; dashed line, the vibrationally excited gas ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$))

**Критические числа Рейнольдса Re_{cr}
и соответствующие им значения волновых чисел α_{cr}**

M	Совершенный газ ($\alpha_1 = 0, \gamma_{vib} = 0$)				Колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$)			
	Модель постоянной вязкости		Модель Сазерленда (9)		Модель постоянной вязкости		Модель Сазерленда (9)	
	Re_{cr}	α_{cr}	Re_{cr}	α_{cr}	Re_{cr}	α_{cr}	Re_{cr}	α_{cr}
3	50060	2.5460	164870	2.8398	56060	2.6039	184190	2.9025
5	23830	2.1310	85720	2.5688	26930	2.3377	95750	2.6831
7	21640	1.9301	121830	2.5156	24230	2.1801	136080	2.6435
9	35080	1.8706	205110	2.4884	39630	2.1226	229110	2.6241
11	55750	1.8790	308170	2.4851	62720	2.1144	344230	2.6218
13	75240	1.8840	461550	2.4872	84940	2.1119	515550	2.6255
15	85150	1.8110	655850	2.4950	96150	2.0660	732580	2.6394

Точные количественные оценки влияния каждого рассматриваемого фактора на критические числа Рейнольдса и критические волновые числа моды II можно извлечь из приведенной таблицы. В частности, учет температурной зависимости вязкости по модели Сазерленда (9) при $3 \leq M \leq 15$ увеличивает Re_{cr} от трех до шести раз. При этом α_{cr} возрастает в пределах 30 %. Относительное возрастание чисел Re_{cr} при возбуждении колебательной моды практически совпадает для обеих моделей вязкости и составляет примерно 10–12 %.

Заключение

Численное исследование устойчивости двумерных возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта для двух моделей вязкости в совершенном и колебательно возбужденном газах позволяет сделать следующие выводы.

«Вязкая» стратификация совершенного газа в форме модели Сазерленда значительно усиливает стабилизацию течения. В частности, в диапазоне чисел Маха $3 \leq M \leq 15$ критическое число Рейнольдса моды II, остающейся наиболее неустойчивой при всех числах Маха $M \geq 3$, возрастает примерно в 3–6 раз по сравнению с моделью постоянной вязкости, хотя соответствующие волновые числа α увеличиваются в пределах 30 %.

Относительное уменьшение инкрементов нарастания вязких возмущений мод I и II при колебательном возбуждении практически одинаково для обеих моделей вязкости. При этом увеличение критического числа Рейнольдса в обоих случаях лежит в пределах 10–12 %.

Более простая модель постоянной вязкости на качественном уровне полностью воспроизводит все характерные особенности развития вязких возмущений акустических мод I и II в совершенном газе:

Дестабилизация устойчивой в невязком пределе моды I в узком диапазоне волновых чисел α в окрестности $M \approx 3$. Существенное увеличение инкремента нарастания моды II по сравнению с невязким пределом при $\alpha \approx 1.5$ для сверхзвукового диапазона $5 \leq M \leq 15$.

Характерное поведение кривых нейтральной устойчивости в координатах (Re, α) при $5 \leq M \leq 15$, в частности расширение области неустойчивости с ростом Re и наличие двух минимумов на верхней ветви. Немонотонную зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от числа Маха с незначительным сдвигом минимума в точку $M \approx 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 258. P. 131–165.
2. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // *Phys. Fluids*. 1998. V. 10. No. 3. P. 709–729.
3. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 77. No. 3. P. 036322(15).
4. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // *ПМТФ*. 2014. Т. 55. № 2. С. 80–93.
5. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 2. Вязкая задача // *ПМТФ*. 2016. Т. 57. № 2. С. 64–75.
6. Нагнибеда Е. А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2003.
7. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.
8. Ферziger Дж., Канер Г.К. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
9. Кэй Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. М.: Физматгиз, 1962.
10. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 1988.
11. Trefethen L.N. *Spectral Methods in Matlab*. Philadelphia: Soc. for Indus. and Appl. Math., 2000.
12. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // *ПММ*. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 581–593.
13. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // *ПМТФ*. 2012. Т. 53. № 4. С. 57–73.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
15. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. V. 10. No. 2. P. 241–256.
16. Morawetz C.S. The eigenvalues of some stability problems involving viscosity // *J. Rat. Mech. Anal.* 1952. V. 1. P. 579–603.

Статья поступила 16.06.2016 г.

Ershov I.V. (2016) STABILITY OF THE COUETTE FLOW OF A DIATOMIC GAS IN CONDITIONS OF VISCOUS STRATIFICATION AND VIBRATIONAL MODE EXCITATION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 84–99

DOI 10.17223/19988621/42/8

Stability of the viscous two-dimensional perturbations in a supersonic plane Couette flow of perfect and vibrationally excited gases is investigated within the framework of the linear theory. In both cases, the transport coefficients were taken to be both constant and dependent on the static temperature of the flow. The Sutherland viscosity law was used in order to take into account the temperature dependence of shear viscosity. The thermal conductivity coefficients caused by the translational, rotational, and vibrational motions of gas molecules are determined by Eucken's relations. A detailed comparison of the stability characteristics of the acoustic modes I and II for both viscosity models is carried out for a perfect gas. It is shown that the «viscous» stratification significantly increases the flow stability as compared to the case of the constant viscosity model. At the same time, the characteristic features in the development of viscous disturbances, typical for the Sutherland model, remain valid in the case of a simpler constant viscosity model. The dissipative effect of the vibrational mode excitation is preserved in the case when the temperature dependence of the transport coefficients is taken into account. The relative reduction caused in the

growth rates of viscous disturbances for modes I and II by the vibrational excitation is practically the same for both viscosity models. The increase in the critical Reynolds number is approximately 12 % in both cases.

Keywords: linear stability, Sutherland formula, vibrational relaxation, acoustic modes.

ERSHOV Igor Valer'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: i_ershov@ngs.ru

REFERENCES

1. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. (1994) On the linear stability of compressible plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* 258. pp. 131–165. DOI 10.1017/S0022112094003277.
2. Hu S., Zhong X. (1998) Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow. *Phys. Fluids.* 10(3). pp. 709–729. DOI 10.1063/1.869596.
3. Malik M., Dey J., Alam M. (2008) Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow. *Phys. Rev. E.* 77(3). pp. 036322(15). DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036322.
4. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2014) Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 1. Inviscid problem. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 55(2). pp. 258–269. DOI 10.1134/S0021894414020084.
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2016) Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 2. Viscous problem. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 57(2). pp. 247–257. DOI 10.1134/S0021894416020073.
6. Nagnibeda E.A., Kustova E.V. (2009) *Non-equilibrium reacting gas flows. Kinetic theory of transport and relaxation processes*. Berlin: Springer.
7. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2012) *Ustoychivost' techeniy relaksiruyushchikh molekulyarnykh gazov* [Stability of the flows of the relaxing molecular gases]. Novosibirsk: Izd. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk.
8. Ferziger J.H., Kaper H.G. (1972) *Mathematical theory of transport processes in gases*. Amsterdam, London: North Holland Publ. Comp.
9. Kaye G.W., Laby T.H. (1958) *Tables of physical and chemical constants*. London, New York, Toronto: Longmans, Green & Co.
10. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. (1988) *Spectral methods in fluid dynamics*. Berlin: Springer.
11. Trefethen L.N. (2000) *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia: Soc. for Indus. and Appl. Math. DOI 10.1137/1.9780898719598.
12. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2011) The linear stability of inviscid shear flow of a vibrationally excited diatomic gas. *J. Appl. Math. Mech.* 75(4). pp. 410–418. DOI 10.1016/j.jappmathmech.2011.09.006.
13. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2012) Critical Reynolds number of the Couette flow in a vibrationally excited diatomic gas. Energy approach. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 53(4). pp. 517–531. DOI 10.1134/S0021894412040062.
14. Korn G.A., Korn T.M. (1961) *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill.
15. Moler C.B., Stewart G.W. (1973) An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 10(2). pp. 241–256. DOI 10.1137/0710024.
16. Morawetz C.S. (1952) The eigenvalues of some stability problems involving viscosity. *J. Rat. Mech. Anal.* 1. pp. 579–603.

УДК 531/534

DOI 10.17223/19988621/42/9

Е.Л. Лобода, О.В. Матвиенко, М.В. Агафонцев, В.В. Рейно**ОЦЕНКА МАСШТАБОВ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАМЕНИ
ПРИ ДИФФУЗИОННОМ ГОРЕНИИ ДИЗЕЛЬНОГО ТОПЛИВА¹**

Представлены результаты математического моделирования течения в пламени, образующемся при горении дизельного топлива и экспериментальные оценки масштабов турбулентных вихрей в пламени, полученные с применением методов термографии. Путем сравнения результатов численного моделирования и экспериментальных данных показано хорошее согласование основных термодинамических параметров пламени и масштабов турбулентных вихрей в нем.

Ключевые слова: ИК-термография, пламя, горение, спектр, температура, турбулентность, математическое моделирование.

Диффузионное горение, образующееся при горении как в технологических устройствах, так и при природных пожарах, как правило, реализуется при турбулентном течении продуктов горения в пламени [1]. Турбулентность проявляется в виде переноса газообразных продуктов горения с различными скоростями, которые складываются из осредненной и пульсационной составляющих. Турбулентное горение является нестационарным процессом перемешивания газообразных продуктов горения со свежей смесью, которая воспламеняется вследствие роста температуры. Этот нестационарный процесс приводит к искривлению формы пламени, что приводит к увеличению площади ее поверхности и скорости сгорания.

При достаточно интенсивной турбулентности возникает дробление фронта пламени [2], что приводит к тому, что горение происходит в отдельных микрообъемах. Согласно гипотезе Сполдинга [3], в турбулентном пламени горение происходит в отдельных вихрях. В [3] также рассматривается дробление этих вихрей вследствие процессов диссипации на меньшие объемы, поверхности раздела которых с горячими газами достаточны для поддержания реакции.

Визуализацию этих объемов и турбулентных вихрей в пламени можно увидеть в работах с применением PIV-методов [4–6]. В работах [7–10] представлены результаты исследования турбулентной структуры пламени с применением PLIF (Planar laser-induced fluorescence) методов. Следует отметить, что этот метод позволяет визуализировать разрез в какой-то плоскости трехмерного физического явления. В [7–10] не анализируются размеры вихрей, а внутренние масштабы турбулентности оказывают существенное влияние на коэффициенты переноса [11] и на сам процесс горения, что можно видеть в работах, посвященных математическому моделированию [12–15].

В работе [16] представлены результаты экспериментальных измерений масштабов турбулентности по термограммам факела пламени, полученным в узком спектральном диапазоне, выбранном по излучению маркерных газов (пары воды и

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых № МД-5754.2015.1 и гранта РФФИ № 15-01-00513_a.

CO₂). В [1] на основе предположения о подобии пульсаций гидродинамических и термодинамических параметров приводится математическая связь масштабов турбулентности в пламени с характерными частотами пульсации температуры.

На основании вышеизложенного представляет интерес численное моделирование горения жидкого топлива, анализ масштабов пульсации температуры, скорости, распределение в пространстве масштабов турбулентности в пламени и сравнение с экспериментальными данными.

1. Описание математической модели

Для математической постановки задачи допустим, что течение в рассматриваемой области является осесимметричным; движение горючей смеси характеризуется наличием областей ламинарного, переходного и полностью турбулентного режима течения; скорость горения в турбулентных диффузионных пламенах определяется как химической кинетикой, так и процессами турбулентного смешения.

Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения Рейнольдса, записанные относительно осредненных по времени составляющих скорости: u , v и давления p [17, 18]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - (\rho - \rho_e) g; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] - \frac{\mu_{\text{eff}} v}{r^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ – плотность, u – осевая скорость, v – радиальная скорость, x – осевая координата, p – давление, r – радиальная координата, μ_{eff} – эффективная динамическая вязкость, g – ускорение свободного падения, ρ_e – среднее значение плотности.

Характеристики турбулентности рассчитывались на основе двухпараметрической модели с использованием уравнений для кинетической энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ε [19] с учетом действия сил плавучести [20] и малости чисел Рейнольдса [21, 22]:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v k r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + G_k + G_p - I - \rho \varepsilon; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v \varepsilon r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + (f_1 G_k - f_2 \rho \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} + J, \quad (5)$$

$$G_k = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad G_p = -\frac{\mu_t}{\rho \sigma_k} \frac{\partial p}{\partial x} g,$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{\mu_t}{k} \left[\left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial r} \right)^2 \right], \quad f_2 = C_{2\varepsilon} (1 - C_{4\varepsilon} \exp(-\text{Re}_t^2)), \quad f_1 = C_{1\varepsilon} (1 + C_{3\varepsilon} \text{Ri}_{\text{st}}),$$

$$J = 2 \frac{\mu_t}{\rho} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) \right]^2 \right\},$$

где k – турбулентная кинетическая энергия, t – координата времени, σ_k , σ_ε , f_1 , f_2 , $C_{1\varepsilon}$ – $C_{4\varepsilon}$ – константы модели турбулентности, G_k , G_ρ – коэффициенты модели, характеризующие прирост турбулентной кинетической энергии за счет градиента осредненного потока и сил плавучести соответственно, ε – скорость диссипации турбулентной энергии, I , J – функции источника в модели турбулентности, Re_t – турбулентное число Рейнольдса, Ri_{st} – стратификационное число Ричардсона, μ , μ_t – динамическая и турбулентная динамическая вязкость.

Турбулентная вязкость может быть рассчитана с использованием k – ε -модели турбулентности [17]:

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho k^2 \varepsilon^{-1}, \quad f_\mu = \exp \left[-\frac{3.4}{(1 + 0.02 \text{Re}_t)^2} \right].$$

Эффективная вязкость (μ_{eff}) определяется как сумма молекулярной (μ) и турбулентной вязкости (μ_t):

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t.$$

Стратификационное число Ричардсона, а также турбулентное число Рейнольдса определяются следующим образом:

$$\text{Ri}_{\text{st}} = \frac{G_\rho}{G_k}, \quad \text{Re}_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}.$$

Для входящих в уравнения констант используются следующие значения:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, \quad C_{2\varepsilon} = 1.92, \quad C_{3\varepsilon} = 0.8, \quad C_{4\varepsilon} = 0.3, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad \sigma_k = 1.$$

В настоящей работе рассматривается горение паров дизельного топлива в воздухе. Основную часть углеводородов дизельного топлива составляют жидкие алканы ($C_n H_{2n+2}$) с числом атомов углерода $5 \leq n \leq 18$, поэтому в качестве горючего рассматривались пары н-октана ($C_8 H_{18}$), н-декана ($C_{10} H_{22}$) и н-додекана ($C_{12} H_{26}$). Для моделирования процесса горения применяется схема:

$$1 \text{ кг горючего} + s \text{ кг окислителя} = (1 + s) \text{ кг продукта реакции} + Q.$$

Для описания конвекции, процессов тепломассообмена и горения помимо уравнения энергии использовались уравнения баланса массы компонентов с учетом протекания в потоке экзотермической реакции [23, 24]:

$$C_p \left(\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda_{\text{eff}} r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + Q \Phi, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho u M_{\text{fl}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r M_{\text{fl}}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D_{\text{eff}} \frac{\partial M_{\text{fl}}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D_{\text{eff}} r \frac{\partial M_{\text{fl}}}{\partial r} \right] - 0.5 \frac{W_{\text{fl}}}{W_{\text{ox}}} \Phi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho u M_{\text{ox}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r M_{\text{ox}}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D_{\text{eff}} \frac{\partial M_{\text{ox}}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D_{\text{eff}} r \frac{\partial M_{\text{ox}}}{\partial r} \right] - \Phi; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho u M_{\text{pr}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r M_{\text{pr}}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D_{\text{eff}} \frac{\partial M_{\text{pr}}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D_{\text{eff}} r \frac{\partial M_{\text{pr}}}{\partial r} \right] + 0.5 \frac{W_{\text{pr}}}{W_{\text{ox}}} \Phi; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho u M_{\text{in}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r M_{\text{in}}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D_{\text{eff}} \frac{\partial M_{\text{in}}}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D_{\text{eff}} r \frac{\partial M_{\text{in}}}{\partial r} \right], \quad (10)$$

где C_p – коэффициент теплоемкости газовой фазы при постоянном давлении, T – температура, λ_{eff} – эффективный коэффициент теплопроводности, Q – тепловой эффект химической реакции, Φ – скорость химической реакции; M_{fl} , M_{ox} , M_{pr} , M_{in} – массовые концентрации горючего вещества, окислителя, продукта реакции, инертного продукта реакции соответственно, D_{eff} – эффективный коэффициент диффузии, W_{fl} , W_{ox} , W_{pr} – молярная масса горючего вещества, окислителя, продукта реакции соответственно.

В рамках кинетической модели скорость химической реакции описывается законом Аррениуса [1], что справедливо для ламинарного режима течения смеси топлива и окислителя:

$$\Phi_{\text{Ar}} = z_0 \rho M_{\text{fl}}^{\alpha} M_{\text{ox}}^{\beta} \exp \left(-\frac{E_A}{R_G T} \right),$$

где E_A – энергия активации, R_G – универсальная газовая постоянная, z_0 – параметр.

Параметры химической реакции приведены в таблице [25].

Таблица 1

Параметры химической реакции в законе Аррениуса

Топливо	$z_0 \cdot 10^{-6}$	α	β	$E_A/R_G \cdot 10^{-3}$
C_8H_{18}	14	0.25	1.5	15
$\text{C}_{10}\text{H}_{22}$	12	0.25	1.5	15
$\text{C}_{12}\text{H}_{26}$	11	0.25	1.5	15

Одним из путей получения более адекватных результатов при численном моделировании турбулентного горения является включение в математическую модель выражений, отвечающих за влияние пульсаций на процессы горения, а также рассмотрение эволюции в потоке среднеквадратичных значений пульсаций концентрации $\sqrt{\eta} = \sqrt{\langle M'_{\text{fl}} M'_{\text{fl}} \rangle}$, температуры $\sqrt{\theta} = \sqrt{\langle T' T' \rangle}$ и корреляции $\xi = \langle M'_{\text{fl}} T' \rangle$.

Для определения осредненных значений скорости химической реакции Φ используется подход, рассмотренный в [26] и развитый на случай двух переменных T и M_{fl} в предположении малости пульсаций $T'/T \ll 1$, $M'_{\text{fl}}/M_{\text{fl}} \ll 1$. В рамках этого подхода мгновенная скорость химической реакции раскладывается в ряд по осредненным значениям T и M_{fl} , и после отбрасывания членов третьего порядка

и выше, усредняются. В результате для осреднений скорости химической реакции справедливо выражение

$$\Phi_t = \Phi_{Ar} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi_{Ar}}{\partial T^2} \theta + \frac{\partial^2 \Phi_{Ar}}{\partial M_{fl}^2} \eta + 2 \frac{\partial^2 \Phi_{Ar}}{\partial M_{fl} \partial T} \xi \right].$$

Таким образом, скорость химической реакции становится не только функцией осредненной температуры и концентрации, но также зависит от среднеквадратичных значений пульсаций температуры, концентрации и их корреляции.

Для пульсационных характеристик θ , η , ξ уравнение переноса с использованием традиционных схем замыкания и в предположении равенства единице эффективного числа Льюиса $Le_{eff} = Pr_{eff}/Sc_{eff}$ запишутся как

$$C_p \left[\frac{\partial \rho u \theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r \theta}{\partial r} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{eff} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{eff} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + 2Q \left[\frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial T} \theta + \frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial M_{fl}} \xi \right] + C_{1\epsilon} \lambda_t \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \right] - C_{2\epsilon} Pr_t \rho \frac{\epsilon}{k} \theta, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho u \eta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r \eta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{eff} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D_{eff} r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) + 2 \left[\frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial T} \xi + \frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial M_{fl}} \eta \right] + C_{1\epsilon} D_t \left[\left(\frac{\partial M_{fl}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_{fl}}{\partial r} \right)^2 \right] - C_{2\epsilon} Sc_t \rho \frac{\epsilon}{k} \eta, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \xi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r \xi}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{eff} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D_{eff} r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \\ &+ 2 \left[Q \frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial T} \xi + Q \frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial M_{fl}} \eta - \frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial T} \theta - \frac{\partial \Phi_{Ar}}{\partial M_{fl}} \xi \right] + \\ &+ C_{1\epsilon} D_t \left[\left(\frac{\partial M_{fl}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial M_{fl}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] - C_{2\epsilon} \sqrt{Pr_t Sc_t} \rho \frac{\epsilon}{k} \xi, \end{aligned} \quad (13)$$

где Sc , Sc_t – число Шмидта и турбулентное число Шмидта, D_t – турбулентный коэффициент диффузии, Pr_t – турбулентное число Прандтля.

Модель распада вихрей (Eddy Dissipation Model, EDM) разработана для описания турбулентных диффузионных пламен и основана на предположении, что химические реакции очень быстро приводят реагирующую смесь к равновесному состоянию [27]. Согласно этой модели, для инициации процесса горения достаточно, чтобы горючее и окислитель (обычно воздух) находились в одном контрольном объеме. В рамках этой модели скорость горения определяется следующим выражением:

$$\Phi_{EDM} = B \rho^2 \min[M_{ox}, 2M_{fl}] \frac{\epsilon}{k}.$$

В качестве критерия, характеризующего режим горения, можно использовать турбулентное число Дамкелера:

$$Da = z_0 \exp \left(-\frac{E_A}{R_G T} \right) \frac{k}{\epsilon}.$$

Если $Da \leq 0.5$, химическое реагирование определяется аррениусовской кинетикой, при $1 < Da$ – процессами турбулентного смешения, в диапазоне изменения числа Дамкелера $0.5 < Da < 1$ необходимо учитывать влияние турбулентных пульсаций на скорость горения [28]. Таким образом, скорость химической реакции Φ можно представить в виде

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_{Ar}, & Da \leq 0.5, \\ \Phi_t, & 0.5 < Da \leq 1, \\ \Phi_{EDM}, & 1 < Da. \end{cases}$$

Уравнение состояния Клапейрона – Менделеева устанавливает связь между температурой, давлением и плотностью горячей смеси и может быть представлено в виде

$$\rho = \frac{p}{RT} \left(\frac{M_{fl}}{W_{fl}} + \frac{M_{ox}}{W_{ox}} + \frac{M_{pr}}{W_{pr}} + \frac{M_{in}}{W_{in}} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Температурная зависимость молекулярной динамической вязкости рассчитывалась с помощью формулы Сезерленда [29]. Для определения вязкости смеси газов использовалась формула Вилке [30].

Эффективные коэффициенты температуропроводности и диффузии газовой фазы определялись как

$$\lambda_{eff} = \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}, \quad D_{eff} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right).$$

Для эффективных чисел Прандтля и Шмидта $Pr_{eff} = C_p \mu_{eff} / \lambda_{eff}$, $Sc_{eff} = \mu_{eff} / (\rho D_{eff})$ используется оценка $Pr_{eff} = 0.7$, $Sc_{eff} = 0.7$.

2. Методика решения

Представленные в предыдущем разделе уравнения характеризуют собой полную замкнутую систему уравнений, которая при соответствующих граничных условиях и известных свойствах потока определяет основные характеристики течения.

Уравнения (1) – (13) были решены численно с использованием метода конечного объема [29]. В соответствии с этим методом конечноразностные уравнения получают интегрированием дифференциальных уравнений по контрольным объемам, содержащим узлы конечноразностной сетки.

Численное решение проводилось с использованием шахматной сетки, причем узлы для осевой и радиальной составляющих скорости располагались в середине граней контрольных объемов для скалярных величин. Вычисления проведены на сетке с 2000 узлами в осевом направлении и 1700 узлами в радиальном. Вблизи стенок, а также в областях с большими градиентами скорости и концентрации проводилось сгущение сетки.

Уравнение неразрывности удовлетворялось с помощью алгоритма SIMPLEX [31]. Считалось, что сходимость итераций достигнута, если среднеквадратичная невязка для всех переменных не превышала 1%.

Для оценки точности вычислений была выполнена серия расчетов на последовательностях сгущающихся сеток. Результаты тестирования показали, что уменьшение шага базовой сетки в 2 раза по осевой и радиальной координатам приводит к изменению значений основных переменных не более чем на 1 %.

3. Экспериментальное определение масштабов турбулентности в пламени

Оценка масштабов турбулентности в пламени с применением термографии для разных видов топлив подробно изложена в [16]. Дизельное топливо, масса которого варьировалась от 20 до 50 г, диффузионно сжигалось в емкости диаметром 0.15 м. В качестве регистрирующего оборудования применялся тепловизор JADE J530SB с узкополосным фильтром с полосой пропускания 2.5–2.7 мкм. Выбор фильтра произведен на основе анализа спектра излучения пламени [32]. Все измерения производились в диапазоне температур 583 – 1773 К с частотой съемки 177 Гц. Разрешение матрицы тепловизора составляло 320×240 пикселей, фокусное расстояние 50 мм. Расстояние между тепловизором и исследуемым объектом составляло 2 м.

Коэффициент излучения пламени корректировался по сравнению с излучением АЧТ и с измерениями, температуры в пламени с помощью термопары типа ВР с диаметром спая 50 мкм и постоянной времени 0.1 с.

Используя подход, описанный в [33], с помощью Fast Fourier Transform (FFT) был получен спектр изменения температуры в пламени при диффузионном горении дизельного топлива. На рис. 1 представлены спектр изменения температуры.

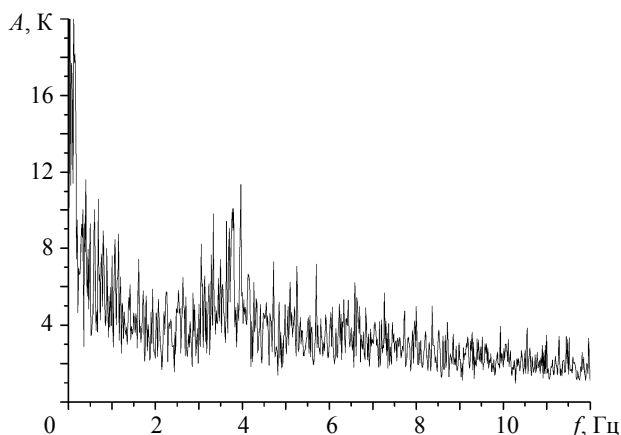


Рис. 1. Спектр изменения температуры в пламени при диффузионном горении дизельного топлива

Fig. 1. Temperature change spectrum in a diffusion flame of diesel fuel combustion

В дальнейшем с применением методики расчета масштабов турбулентности по спектру изменения температуры, описанному в [16], были определены по ярко выраженной частоте следующий масштаб турбулентности $b \pm \Delta b = 0.025 \pm 0.0055$ м и безразмерные характеристики течения: $Ri_t = 0.1846$, $Fr_t = 5.4183$.

Аналогично описанному в [16] также были измерены размеры температурных неоднородностей на мгновенных термограммах факела пламени.

Размер температурных неоднородностей определялся путем покадровой обработки результатов эксперимента. На рис. 2 показан набор мгновенных термограмм с выделением областей температурных неоднородностей с инструментами измерений их размеров. Оператор выбирал ярко выраженные температурные не-

однородности на термограмме (рис. 2) и при помощи программного обеспечения определял их размеры. Следует отметить, что температурные неоднородности имеют неправильную геометрическую форму, которая постоянно изменяется во времени. Кроме того, термограмма является проекцией на плоскость трехмерного полупрозрачного излучающего объекта. Поэтому выбиралось несколько направлений, в которых производилось определение размера рассматриваемой температурной неоднородности. В дальнейшем в качестве характерного размера бралась средняя величина. В результате измерений размеров температурных неоднородностей было установлено: $b_{\text{exp}} \pm \Delta b_{\text{exp}} = 0.019 \pm 0.006$ м.

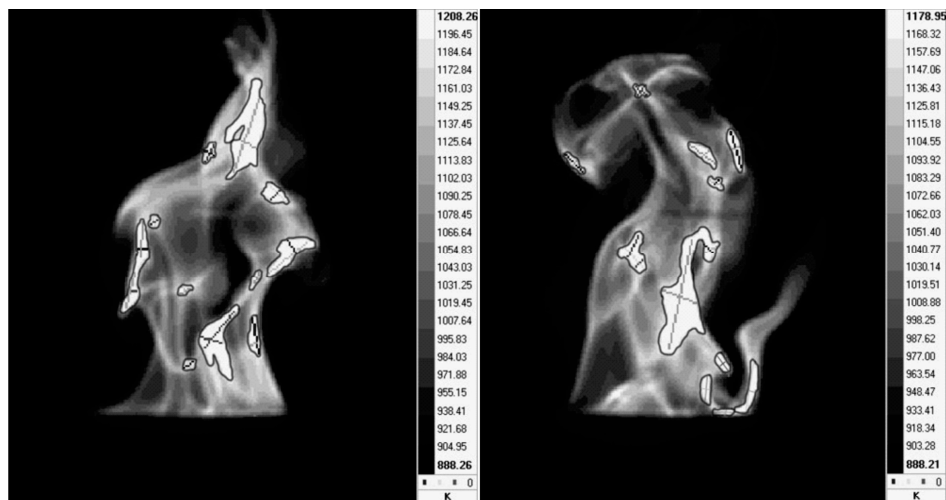


Рис. 2. Мгновенные термограммы пламени горения дизельного топлива

Fig. 2. Instant heat pattern of the flame of diesel fuel combustion

4. Сравнение результатов математического моделирования и экспериментальных данных

Основным характерным движением газа в потоке является подъем горючей смеси и продуктов сгорания и вызванные этим подъемом радиальные движения воздушных масс, приводящие к формированию восходящей свободно-вынужденной конвективной струи.

Всю область течения можно условно разделить на три участка: начальный, основной и инерционный. Начальный участок характеризуется наличием ядра постоянных скоростей. При этом интенсивность радиального течения определяется мощностью теплового источника. В результате вязкого взаимодействия потоков и диффузионного перемешивания на начальном участке образуется пограничный слой, в котором скорость течения вдоль оси струи меньше скорости в ядре. По мере подъема струя газа все больше разбавляется воздухом, ее поперечное сечение увеличивается, ядро постоянных скоростей сужается. На некоторой высоте граница слоя смешения достигает оси потока, ядро постоянных скоростей исчезает. Дальше струя газа перемешивается с воздухом по всему сечению.

Течение на основном участке характеризуется преобладающим воздействием выталкивающей силы, принимающей наибольшие значения в зоне горения. В результате этого происходит увеличение скорости в струе (рис. 3).

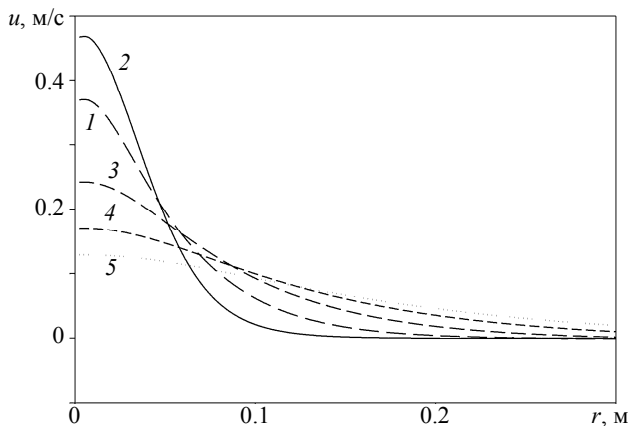


Рис. 3. Радиальное распределение осевой скорости.

$1 - x = 0.05$ м, $2 - 0.1$, $3 - 0.5$, $4 - 0.75$, $5 - 1$

Fig. 3. Radial distribution of the axial velocity.

$x = (1) 0.05$, $(2) 0.1$, $(3) 0.5$, $(4) 0.75$, and $(5) 1$ m

На инерционном участке течения по мере догорания горючих газов и смешения с окружающим воздухом температура в струе уменьшается. Роль выталкивающей силы становится пренебрежимо малой. Течение происходит по инерции, постепенно замедляясь в результате действия силы вязкости. Воздушные массы, составляющие факел, перемешиваются с окружающей средой, что приводит к дополнительному снижению скорости в струе и ее расширению. Стационарный факел постепенно рассеивается и прекращает свое существование.

На рис. 4, *a* показаны изолинии масштаба турбулентности в факеле и мгновенная термограмма факела пламени с выделенными зонами температурной неоднородности (области белого цвета с контуром) и инструментами программного обеспечения для определения их размеров (рис. 4, *б*). Выделенные зоны с повышенной температурой на рис. 4, *б* имеют среднестатистические размеры, которые соответствуют экспериментальным данным, приведенным в [16], где для случая горения дизельного топлива $b_{\text{exp}} = 0.019 \pm 0.006$ м. Как видно из рисунка, ламинарный режим сохраняется только на начальном участке течения. Пульсации и возмущения, если они существуют, малы по сравнению с параметрами осредненного течения. По мере подъема газовых масс в потоке нарастает неустойчивость, обусловленная совместным воздействием выталкивающей силы, приводящей к ускорению течения, а также силы вязкости, создающей на внешней границе конвективной струи зоны с высокими значениями градиента скорости. Анализ полученных результатов показывает, что основной вклад в турбулизацию течения вносят процессы взаимодействия восходящей струи с окружающими воздушными массами. Именно в зоне пограничного слоя возникают наибольшие сдвиговые напряжения, приводящие к генерации турбулентных пульсаций. На основном участке область турбулизированного течения, возникшая на границе струи, распространяется к ее оси, а также захватывает примыкающие к струе воздушные массы, которые вовлечены в движение в результате действия вязких сил. Интенсивность турбулентности на основном участке течения увеличивается с высотой. На инерционном участке течения скорость потока уменьшается, при этом вследствие процессов обмена импульсом и массы радиальное распределение осевой скорости

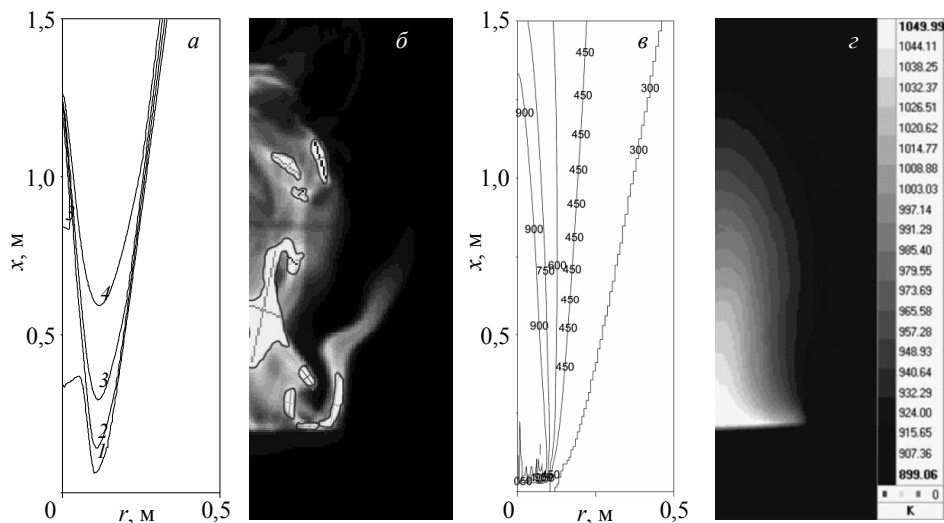


Рис. 4. Масштаб турбулентности (в результате численного моделирования (а): 1 – $b=0.01$ м, 2 – 0.015, 3 – 0.02, 4 – 0.02; термограмма мгновенного распределения температурных неоднородностей в факеле пламени (б)) и распределение средних температур в пламени и в его окрестности (в – результаты математического моделирования, г – осредненная по времени термограмма) в факеле $C_{10}H_{22}$

Fig. 4. Turbulence scale (as a result of the numerical simulation (а): $b = (1) 0.01$, (2) 0.015, (3) 0.02, and (4) 0.02 m; (б) heat pattern of the instant distribution of temperature inhomogeneities in the flame jet) and the distribution of the average temperatures in the flame and in its vicinity ((в) results of mathematical modeling and (г) time-averaged thermogram) in the flame jet of $C_{10}H_{22}$

становится более равномерным. Это приводит к уменьшению турбулентных возмущений и реламинаризации течения. Сравнивая изолинии масштабов турбулентности рис. 4, а со значениями b и b_{exp} из [16], можно сделать вывод о том, что для оценок масштабов турбулентности в реальных пламенах можно с хорошей достоверностью применять методику [16].

Распространение неизотермической турбулентной струи характеризуется не только нарастанием толщины слоя смешения, но и формированием неравномерного профиля осевой скорости. Таким образом, существует область, в которой скорость газа не превосходит нормальную скорость распространения пламени. Обычно эта область называется поджигающим кольцом и играет важную роль в стабилизации пламени [30]. От поджигающего кольца горение распространяется вниз по потоку. При этом от воспламенившихся периферийных слоев за счет турбулентной теплопроводности теплота передается внутренним слоям, вызывая их воспламенение, и одновременно сносится по потоку, формируя в отсутствие закрутки факел конусообразной формы (рис. 4). Сравнение рис. 4, в и г говорит об удовлетворительном согласовании результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Горение в турбулентных диффузионных пламенах определяется не только химической кинетикой, но и процессами турбулентного перемешивания. В зависимости от масштаба турбулентности l и величины турбулентных пульсаций u' возможен различный механизм горения в турбулентных потоках [30]. Достаточно интенсивная турбулентность может вызвать не только искривление, но и дробление фронта ламинарного пламени на отдельные участки [2].

5. Заключение

В результате сравнительного анализа данных, полученных при помощи численного моделирования, с экспериментальными, можно сделать следующие выводы:

1. Течение на основном участке пламени характеризуется преобладающим воздействием выталкивающей силы, принимающей наибольшие значения в зоне горения. В результате этого происходит увеличение скорости газов в пламени.

2. Основной вклад в турбулизацию течения вносят процессы взаимодействия восходящей струи с окружающими воздушными массами. В зоне пограничного слоя возникают наибольшие сдвиговые напряжения, приводящие к образованию турбулентных возмущений.

3. На начальном участке течения вблизи «поджигающего кольца» амплитуда турбулентных пульсаций температуры достигает максимальных значений. Однако развитая турбулентность на этом участке течения еще не сформировалась, и сжигание газов идет в режиме ламинарного горения с искривленным фронтом пламени.

4. На основном участке течения на внешней границе струи происходит выгорание турбулентных молей горючего в режиме микрообъемного горения.

5. В зоне догорания основным фактором, определяющим режим горения, является процесс распада турбулентных вихрей.

6. Сравнение масштабов турбулентности, полученных экспериментально, с результатами численного моделирования дает хорошее количественное согласование, что дает возможность, используя методику [16], производить оценку масштабов турбулентности в реальных пламенах.

7. Пульсации температуры связаны с турбулентностью течения в пламени, и характерные частоты в спектре изменения температуры обусловлены масштабами турбулентных вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis B., Elbe G. Combustion, Flames and Explosions of Gases. 3 ed. New York: Academic Press, 1987.
2. Libby P., Williams F.A. Turbulent Reacting Flows. London: Academic Press Inc, 1994. P. 1–43.
3. Spalding D. B. Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames // Thirteenth Symposium (International) on Combustion. 1971. P. 649–657.
4. Shestakov M.V. et al. PIV study of large-scale flow organisation in slot jets // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2015. V. 51. P. 335–352.
5. Alekseenko S. V., Dulin V. M., Markovich D. M., Pervunin K. S. Experimental Investigation of Turbulence Modification in Bubbly Axisymmetric Jets // Journal of Engineering Thermophysics. 2015. V. 24. No. 2. P. 101–112.
6. Ануфриев И.С., Аникин Ю.А., Фильков А.И. и др. Исследование структуры закрученного потока в модели вихревой камеры сгорания методом лазерной доплеровской анемометрии // Письма в журнал технической физики. 2012. Т. 38. № 24. С. 39–45.
7. Li Z. S., Li B., Sun Z. W., Bai X. S., Alden M. Turbulence and combustion interaction: High resolution local flame front structure visualization using simultaneous single-shot PLIF imaging of CH, OH, and CH₂O in piloted premixed jet flame // Combust. Flame. 2010. V. 157. P. 1087–1096.
8. Kathryn N.G., Shen H., Randy A.P., Fuest F., Sutton J.A. A comparison of turbulent dimethyl ether and methane non-premixed flame structure // Proceedings of Combustion Institute. 2013. V. 34. P. 1447–1454.

9. Kazuhiro Y., Shinji I., Masahiro O. Local flame structure and turbulent burning velocity by joint PLIF imaging // *Proceeding of the Combustion Institute*. 2011. V. 33. P. 1285–1292.
10. Duwig C., Li B., Li Z.S., Alden M. High resolution imaging of flameless and distributed turbulent combustion // *Combust. Flame*. 2012. V. 159. P. 306–316.
11. Goh K.H.H., Geipel P., Lindstedt R.P. Turbulent transport in premixed flames approaching extinction // *Proceedings of the Combustion Institute*. 2015. V. 35. P. 1469–1476.
12. Damien P., Jorge A., Mouna E.H., Benedicte C. Analysis of the interaction between turbulent combustion and thermal radiation using unsteady coupled LES/DOM simulations // *Combustion and Flame*. 2012. V. 159. P. 1605–1618.
13. Vivien R.L., Paul G.A., Somesh P.R., et al. Direct numerical simulations of non-premixed ethylene-air flames: Local flame extinction criterion // *Combust. Flame*. 2014. V. 161. P. 2933–2950.
14. Peters N. Multiscale combustion and turbulence // *Proceedings of the Combustion Institute*. 2009. V. 32. P. 1–25.
15. Матвиенко О.В. Математическое моделирование теплообмена и условий воспламенения турбулентного потока реагирующего газа // *Инженерно-физический журнал*. 2016. Т. 89. № 1. С. 203–211.
16. Loboda E.L., Matvienko O.V., Vavilov V.P., Reyno V.V. Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // *Infrared Physics & Technology*. 2015. V. 72. P. 1–7.
17. Piquet J. *Turbulent Flows: Models and Physics*. Berlin: Springer, 1999.
18. Егоров А.Г., Тизлов А.С., Ниязов В.Я., Архипов В.А., Матвиенко О.В. Исследование влияния закрутки спутного высокоскоростного потока воздуха на геометрические параметры алюминиево-воздушного факела // *Химическая физика*. 2014. Т. 33. № 10. С. 58–61.
19. Hanjalic K., Launder B. E., Schiestel R. Multiple time-scale concept in turbulent transport modeling // In *Turbulent Shear Flows II*, Springer Verlag. P. 36. 1980.
20. Abe K., Kondoh T., Nagano Y. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows – I. Flow field calculations // *Int. J. of Heat Mass Transfer*. 1994. V. 37. No. 1. P. 139–151.
21. Jones W. P., Launder B.E. The calculation of low Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence // *Int. J. of Heat Mass Transfer*. 1973. V. 16. P. 1119–1130.
22. Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса // *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 4. С. 908–918.
23. Oran E.S., Boris J.P. *Numerical Simulation of Reactive Flow* // Elsevier Science Publishing Co. Inc., New York. 1987. P. 14.
24. Ушаков В.М., Матвиенко О.В. Численное исследование теплообмена и зажигания реакционноспособных стенок канала высокотемпературным потоком закрученного газа // *Инженерно-физический журнал*. 2005. Т. 78. № 3. С. 123–128.
25. Westbrook C.K., Dryer F.L. Chemical Kinetic Modeling of Hydrocarbon Combustion // *Prog. Energy Combust. Sci.* 1984. V. 10. 1–57.
26. Bray K. N. C., Champion M., Libby P. A. Swaminathan N. Finite rate chemistry and presumed PDF models for premixed turbulent combustion // *Combust. Flame*. 2006. V. 146. No. 4. P. 665–673.
27. Spalding D.B. *Mathematical Models of Turbulent Flames; A Review* // *Combust. Sci. Technol.* 1976. V. 13. No. 1–6. P. 3–25.
28. Гришин А.М., Матвиенко О.В., Руди Ю.А. Математическое моделирование горения газа в закрученной струе и формирования огненного смерча // *Инженерно-физический журнал*. 2009. Т. 82. № 5. С. 902–908.
29. Ferziger J.H., Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 1996.
30. Warnatz J., Maas U., Dibble R.W. *Combustion*. Berlin: Springer, 1999.
31. Van Doormal J.P., Raithby G.D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows // *Numer. Heat Transfer*. 1984. V. 7. P. 147–163.

32. Лобода Е.Л., Рейно В.В., Агафонцев М.В. Выбор спектрального интервала для измерения полей температуры в пламени и регистрации экранированных пламенем высокотемпературных объектов с применением методов ИК-диагностики // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58. № 2. С. 124–128.
33. Loboda E.L., Reyno V.V., Vavilov V.P. The Use of Infrared Thermography to Study the Optical Characteristics of Flames from Burning Vegetation // Infrared Physics and Technology. 2014. V. 67. P. 566–573.

Статья поступила: 16.03.2016 г.

Loboda E.L., Matvienko O.V., Agafontsev M.V., Reyno V.V. (2016) EVALUATION OF THE TURBULENCE SCALE IN A FLAME AT THE DIFFUSION COMBUSTION OF DIESEL FUEL. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 100–114

DOI 10.17223/19988621/42/9

Diffusion combustion generated during combustion both in technological devices and in natural fires is usually implemented during the turbulent flow of combustion products in the flame. Nonstationarity of the process leads to the distortion of the flame shape, which provides surface area extension and combustion rate increase. Turbulence scale and the magnitude of pulsation of the parameters significantly affect the combustion mechanism in turbulent flows. It should be noted that in turbulent conditions the scale of turbulent pulsations and the mixing intensity significantly affect the flame shape, the combustion speed, the thermodynamic parameters of the process, the combustion completeness, and efficiency.

The development of the thermography methods gives encouraging results for obtaining reliable temperatures of the flame. Thereby it is possible to visualize the temperature inhomogeneities. Based on the analysis of the flame radiation spectra with the application of high speed infrared cameras, it was found that the temperature in the flame changes repeatedly in time, and there are characteristic frequencies in the range of the temperature changes. These frequencies are caused by the movement of the flame temperature inhomogeneities associated with the structure of the flow.

This paper presents results of mathematical modeling of the current in the flame generated during diesel fuel combustion, and experimental estimates of the scale of turbulent eddies in the flame. The results were obtained using the SIMPLEC algorithm and thermography methods. The paper includes the description of the experimental design and data processing. A detailed description of the system of equations used for the mathematical modeling is presented. Comparing the results of numerical simulation and experimental data shows a good correlation of the basic thermodynamic parameters of the flame and the scale of turbulent eddies in it.

Keywords: IR thermography, flame, combustion, temperature, turbulence, mathematical modeling

LOBODA Egor Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: loboda@mail.tsu.ru

MATVIENKO Oleg Victorovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: matvolegv@mail.ru

AGAFONTSEV Mikhail Vladimirovich (Tomsk State University,
Tomsk, Russian Federation)
E-mail: kim75mva@gmail.com

REYNO Vladimir Vladimirovich (Institute of Atmospheric Optics, SB RAS,
Tomsk, Russian Federation)
E-mail: reyno@iao.ru

REFERENCES

1. Lewis B., Elbe G. (1987) *Combustion, flames and explosions of gases*. 3rd ed. New York: Academic Press.
2. Libby P., Williams F.A. (1994) *Turbulent reacting flows*. London: Academic Press Inc. pp. 1–43.
3. Spalding D.B. (1971) Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames. *Thirteenth Symposium (International) on Combustion*. pp. 649–657.
4. Shestakov M.V. et al. (2015) PIV study of large-scale flow organisation in slot jets. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 51. pp. 335–352. DOI 10.1016/j.ijheatfluidflow.2014.10.027.
5. Alekseenko S.V., Dulin V.M., Markovich D.M., Pervunin K.S. (2015) Experimental investigation of turbulence modification in bubbly axisymmetric jets. *Journal of Engineering Thermophysics*. 24(2). pp. 101–112. DOI 10.1134/S1810232815020010.
6. Anufriev I.S., Anikin Yu.A., Fil'kov A.I., et al. (2013) Investigation into the structure of a swirling flow in a model of a vortex combustion chamber by laser doppler anemometry. *Technical Physics Letters*. 39(1). pp. 30–32. DOI 10.1134/S1063785013010045.
7. Li Z.S., Li B., Sun Z.W., Bai X.S., Alden M. (2010) Turbulence and combustion interaction: High resolution local flame front structure visualization using simultaneous single-shot PLIF imaging of CH, OH, and CH₂O in piloted premixed jet flame. *Combustion and Flame*. 157. pp. 1087–1096. DOI 10.1016/j.combustflame.2010.02.017.
8. Kathryn N.G., Shen H., Randy A.P., Fuest F., Sutton J.A. (2013) A comparison of turbulent dimethyl ether and methane non-premixed flame structure. *Proceedings of Combustion Institute*. 34. pp. 1447–1454. DOI 10.1016/j.proci.2012.06.183.
9. Kazuhiro Y., Shinji I., Masahiro O. (2011) Local flame structure and turbulent burning velocity by joint PLIF imaging. *Proceeding of the Combustion Institute*. 33. pp. 1285–1292. DOI 10.1016/j.proci.2010.06.087.
10. Duwig C., Li B., Li Z.S., Aldén M. (2012) High resolution imaging of flameless and distributed turbulent combustion. *Combustion and Flame*. 159. pp. 306–316. DOI 10.1016/j.combustflame.2011.06.018.
11. Goh K.H.H., Geipel P., Lindstedt R.P. (2015) Turbulent transport in premixed flames approaching extinction. *Proceedings of the Combustion Institute*. 35. pp. 1469–1476. DOI 10.1016/j.proci.2014.06.030.
12. Damien P., Jorge A., Mouna E.H., Benedicte C. (2012) Analysis of the interaction between turbulent combustion and thermal radiation using unsteady coupled LES/DOM simulations. *Combustion and Flame*. 159. pp. 1605–1618. DOI 10.1016/j.combustflame.2011.12.016.
13. Vivien R.L., Paul G.A., Somesh P.R. et al. (2014) Direct numerical simulations of non-premixed ethylene-air flames: Local flame extinction criterion. *Combustion and Flame*. 161. pp. 2933–2950. DOI 10.1016/j.combustflame.2014.05.016.
14. Peters N. (2009) Multiscale combustion and turbulence. *Proceedings of the Combustion Institute*. 32. pp. 1–25. DOI 10.1016/j.proci.2008.07.044.
15. Matvienko O.V. (2016) *Matematicheskoe modelirovanie teploobmena i usloviy vosplamneniya turbulentnogo potoka reagiruyushchego gaza* [Mathematical modeling of heat exchange and conditions of inflammation of a turbulent flow of a reactive gas]. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(1). pp. 203–211.
16. Loboda E.L., Matvienko O.V., Vavilov V.P., Reyno V.V. (2015) Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale. *Infrared Physics & Technology*. 72. pp. 1–7. DOI 10.1016/j.infrared.2015.07.001.
17. Piquet J. (1999) *Turbulent flows: models and physics*. Berlin: Springer.
18. Egorov A.G., Tizilov A.S., Niyazov V.Ya., Arkhipov V.A., Matvienko O.V. (2014) Effect of the swirl of cocurrent high-velocity air flow on the geometry of an aluminum-air flame. *Russian Journal of Physical Chemistry*. 8(5). pp. 712–715. DOI 10.1134/S1990793114050157.

19. Hanjalic K., Launder B. E., Schiestel R. (1980) Multiple time-scale concept in turbulent transport modeling. In *Turbulent Shear Flows II*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. p. 36.
20. Abe K., Kondoh T., Nagano Y. (1994) A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows – I. Flow field calculations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 37(1). pp.139–151. DOI 10.1016/0017-9310(94)90168-6.
21. Jones W. P., Launder B. E. (1973) The calculation of low Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence. *Int. J. of Heat Mass Transfer*. 16. pp. 1119–1130.
22. Matvienko O.V. (2014) Heat transfer and formation of turbulence in an internal swirling fluid flow at low Reynolds numbers. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(4). pp. 940–950. DOI 10.1007/s10891-014-1092-3.
23. Oran E.S., Boris J.P. (1987) *Numerical simulation of reactive flow*. New York: Elsevier Science Publishing Co.
24. Ushakov V.M., Matvienko O.V. (2005) Numerical investigation of the heat exchange and firing of reactive channel walls by a high-temperature swirling-gas flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 78(3). pp 541–547. DOI 10.1007/s10891-005-0092-8.
25. Westbrook C.K., Dryer F.L. (1984) Chemical Kinetic Modeling of Hydrocarbon Combustion. *Prog. Energy Combust. Sci.* 10. pp. 1–57.
26. Bray K.N.C., Champion M., Libby P. A., Swaminathan N. (2006) Finite rate chemistry and presumed PDF models for premixed turbulent combustion. *Combustion and Flame*. 146(4). pp. 665–673. DOI 10.1016/j.combustflame.2006.07.001.
27. Spalding D.B. (1976) Mathematical Models of Turbulent Flames; A Review. *Combustion Science and Technology*. 13(1-6). pp. 3–25. DOI 10.1080/00102207608946727.
28. Grishin A.M., Matvienko O.V., Rudi Yu.A. (2009) Mathematical modeling of gas combustion in a twisted jet and of the formation of a fiery whirlwind. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 82(5). pp. 906-913. DOI 10.1007/s10891-009-0278-6.
29. Ferziger J. H., Perić M. (1996) *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer.
30. Warnatz J., Maas U., Dibble R.W. (1999) *Combustion*. Berlin: Springer.
31. Van Doormal J.P., Raithby G.D. (1984) Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*. 7. pp. 147–163.
32. Loboda E.L., Reyno V.V., Agafontsev M.V. (2015) Choice of a spectral range for measuring temperature fields in a flame and recording high-temperature objects screened by the flame using IR diagnostic methods. *Russian Physics Journal*. 58(2). pp. 278–282. DOI 10.1007%2Fs11182-015-0493-x.
33. Loboda E.L., Reyno V.V., Vavilov V.P. (2014) The use of infrared thermography to study the optical characteristics of flames from burning vegetation. *Infrared Physics and Technology*. 67. pp. 566–573. DOI 10.1016/j.infrared.2014.09.041.

УДК 532.135; 532.517; 678.053.3
DOI 10.17223/19988621/42/10

А.А. Марценко, А.В. Шваб

ДИНАМИКА ПЛОТНОГО СЛОЯ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ В ПНЕВМАТИЧЕСКОМ ЦИРКУЛЯЦИОННОМ АППАРАТЕ

На основе предложенного авторами подхода проведено численное моделирование пространственного движения плотного слоя гранулированной среды в пневматическом циркуляционном аппарате. Работоспособность и достоверность предложенной математической модели подтверждается сравнением результатов расчета тестовой задачи с экспериментальными данными.

Ключевые слова: сыпучая среда, пневматический циркуляционный аппарат, условия скольжения.

Пневматические методы переработки порошковых и гранулированных сред нашли широкое применение при измельчении, дозировании, смешении, сушке, хранении и транспортировании зернистых материалов в современной химической технологии, порошковой металлургии, ядерном топливном цикле, фармацевтической и пищевой промышленности.

Разработанная авторами математическая модель применяется для расчета гидродинамики и процесса смешения высококонцентрированной гранулированной среды в пневматическом циркуляционном смесителе (рис. 1, а). Работа аппарата происходит следующим образом. В начальный момент времени ключевой и основной компоненты смеси находятся в несмешанном состоянии. Под действием струи газа из сопла 1 частицы из области I поднимаются вверх по вертикальной трубе 2, затем ударяются об отбойник 3 и равновероятно рассеиваются по поверхности плотного слоя (область II). В результате непрерывной циркуляции компонентов гранулированного материала в корпусе бункера 4 происходит их смешивание по

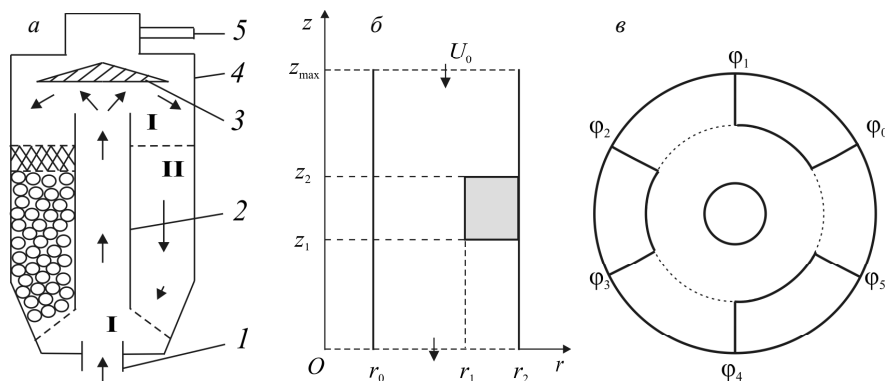


Рис. 1. Пневматический циркуляционный аппарат: принципиальная схема (а); геометрия цилиндрической области аппарата: б, в – вид сбоку и сверху

Fig. 1. Circulating pneumatic apparatus: (а) scheme of work; (б) cylindrical area of the apparatus; (в) top and side view

всему объему аппарата. Скорость движения материала регулируется расходом газа из сопла 1. Запыленный поток газа фильтруется через фильтр 5 и возвращается в аппарат. Такой циклический метод смешения удобен тем, что процесс смешивания можно проводить до требуемой однородности смеси. Для повышения интенсивности процесса смешения компонент смеси на цилиндрической стенке аппарата могут дополнительно устанавливаться полки в виде сегментов (рис. 1, б), которые, наряду с осевой компонентой скорости, вызывают появление радиальной и окружной составляющих вектора скорости. В работе приводится исследование по влиянию этих сегментов на процесс смешения зернистой среды.

При теоретическом описании плотного слоя зернистой среды в зависимости от скорости сдвига наблюдают два различных режима течения. Известно, что при небольших скоростях сдвига инерцией частиц можно пренебречь, и возникает так называемый квазистатический режим течения, который определяется кулоновским трением и описывается в рамках теории предельного равновесия. В другом предельном случае при больших скоростях сдвига имеет место так называемый инерционный режим течения. В этом режиме, с одной стороны, гранулы находятся в постоянном контакте, а с другой стороны, между ними имеются зазоры и взаимодействие между ними обусловлено неупругими соударениями. Описание этого инерционного режима основывается на законах сохранения массы, импульса и энергии хаотического движения частиц [1]. Этот инерционный режим движения высококонцентрированной гранулированной среды относят к научному направлению, получившему название «теория быстрых движений гранулированных сред» [2]. Как показывают экспериментальные исследования [3], движение плотного слоя гранулированной среды в пневматическом циркуляционном смесителе осуществляется в инерционном режиме течения.

Анализ результатов экспериментальных и теоретических исследований «быстрых движений гранулированных сред» позволяет при постановке задачи сделать ряд упрощающих допущений. Будем считать, что хорошо сыпучая гранулированная среда состоит из твердых одинаковых шарообразных частиц, находящихся во взаимном контакте, причем объем отдельной гранулы мал по сравнению с объемом сыпучего тела и порозность плотного слоя по объему практически постоянная. Поэтому такую среду можно считать однородной и несжимаемой. Известно, также, что плотный слой гранулированной среды имеет кривую течения, отличную от ньютоновской, и относится к реостабильной дилатантной жидкости [2]. В исследовании [4] показано, что при движении плотного слоя несвязанной, хорошо сыпучей зернистой среды тензор напряжений незначительно отличается от тензора напряжений ньютоновской среды, прежде всего вследствие ее скольжения на стенках в вертикальных трубах. Таким образом, вязкость среды представим в виде суперпозиции постоянного ее значения μ_0 и нелинейного слагаемого μ_1 . В общем случае значение консистенции материала μ_1 зависит от второго инварианта тензора скоростей деформаций A , который в цилиндрической системе можно представить в виде

$$A = 2 \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} + \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} \right)^2 + \\ + 2 \left(\frac{\partial U_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2.$$

В прикладных задачах по реологии, например [5], используется величина интенсивности тензора скоростей деформаций равная $J = \sqrt{A}$. На основании сказанного выше, и используя степенную модель для нелинейного слагаемого, для тензора внутренних напряжений можно записать

$$\tau_{ij} = 2(\mu_0 + \mu_1^n J^{n-1}) \dot{e}_{ij}, \quad (1)$$

где n – индекс течения, $\dot{e}_{ij}$ – тензор скоростей деформаций.

При моделировании гидродинамики и процессов смешения в пневматическом циркуляционном аппарате будем учитывать только кольцевую цилиндрическую область с плотным слоем, так как она значительно больше по объему конической части аппарата. Безразмерную форму уравнений движения и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат с учетом реологического уравнения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r u_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1+b}{r^2 \text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{u_r^2}{r} + \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re} r} \left(\frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial b}{\partial \varphi} u_\varphi + b \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2b}{r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{b u_r}{r} \right); \\ & \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial u_r u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi u_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1+b}{r^2 \text{Re}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2 \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\text{Re} r} \left(\frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial b}{\partial r} u_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2 \partial b}{r \partial \varphi} u_r + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2b}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + b \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{b}{r} u_\varphi \right); \\ & \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_r u_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z^2}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1+b}{r^2 \text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1+b}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{u_r u_z}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ & \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$b = \frac{\mu_1^n}{\mu_0} \left(\frac{H}{U_0} \right)^{n-1} J_1^{n-1}; \quad J_1 = J \frac{H}{U_0}; \quad \text{Re} = \rho \frac{H U_0}{\mu_0}.$$

В качестве масштаба скорости и длины выбираются соответственно: среднее значение аксиальной скорости на входе в исследуемую область – U_0 ; расстояние между внутренней транспортной трубой и корпусом аппарата $H = r_2 - r_0$.

Существенной особенностью предложенной модели движения гранулированной среды является постановка граничных условий на твердых поверхностях. На стенке обычно используют условие прилипания среды, которое, по-видимому, является причиной неудовлетворительного соответствия теоретических и экспериментальных данных. Опытные исследования движения гранулированной среды в вертикальных каналах показывают, что скорость перемещения дисперсного мате-

риала на стенке не равна нулю, т.е. имеет место некоторое скольжение среды по стенке. Это явление, по-видимому, можно объяснить преобладанием внутренних напряжений в среде по сравнению с силами трения частиц о твердую поверхность. В данной модели для учета эффекта скольжения среды на стенке принимается, что касательные напряжения на стенке пропорциональны скорости движения среды на ней с точностью до некоторой постоянной β , которую назовем коэффициентом скольжения. Граничные условия на твердой поверхности будут иметь вид

$$\left. \frac{\partial u_t}{\partial n} \right|_w = -\beta u_t|_w; \quad u_n = 0. \quad (3)$$

Здесь u_t , u_n – касательная и нормальная составляющие вектора скорости на стенке соответственно, n – нормаль к поверхности стенки. Очевидно, что при $\beta = 0$ имеем условие полного скольжения, а в случае $\beta \rightarrow \infty$ – условие прилипания. Следует отметить, что коэффициент скольжения среды β , вероятно, зависит от многих факторов и определяется из сопоставления результатов расчета модели с опытными данными.

При решении задачи использовались следующие граничные условия. На входе задавалось постоянное безразмерное значение аксиальной скорости $u_z = -1$, на стенках аппарата использовались условия скольжения (3), причем на верхних поверхностях горизонтальных полок ставились условия прилипания для моделирования эффекта застойных зон. В выходном сечении ставились условия Неймана для всех составляющих вектора скорости.

Решение системы уравнений переноса импульса проводилось методом расщепления в переменных «скорость – давление». Для построения пространственного разностного шаблона использовалась разнесенная шахматная сетка с применением контрольного объема. Разностный аналог уравнений переноса импульса и концентрации решался при помощи метода факторизации. Конвективные и диффузионные слагаемые в этих уравнениях записывались с помощью известной экспоненциальной схемы.

Работоспособность и адекватность предложенного подхода проверялась путем сравнения результатов расчета с экспериментальными данными [6] для установившегося течения полистироловых частиц в вертикальной цилиндрической трубе. Результат сравнения численных и опытных данных для вертикальной составляющей вектора скорости представлен на рис. 2.

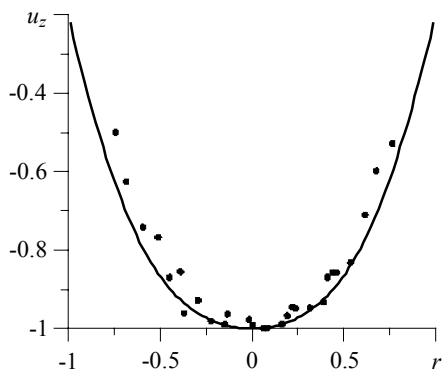


Рис. 2. Распределение вертикальной скорости в круглой трубе при установившемся режиме течения в сравнении с опытными данными [6]. Расчет проведен при параметрах $Re = 10$; $\beta = 10$; $n = 1.2$

Fig. 2. Comparison of the axial velocity distribution of the steady flow in a cylindrical pipe and experimental data [6]. Flow parameters are $Re = 10$; $\beta = 10$; and $n = 1.2$

Из графика сравнения видно хорошее совпадение расчетного профиля скорости и обобщенных экспериментальных значений. На рис. 3 показаны схематично сечения контроля составляющих скорости при симметричной установке трех препятствий (а) и одного препятствия (б) на правой стенке в аппарате.

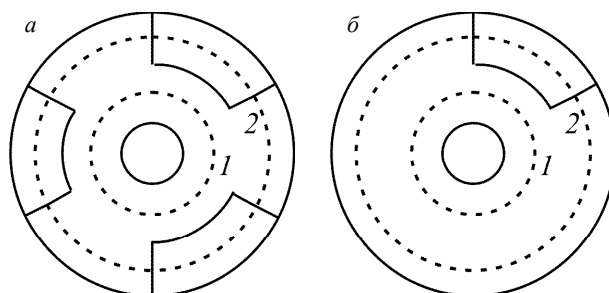


Рис. 3. Схема сечений по угловой координате φ при $z = z_2$: сечение 1 – $r = r_1/2$; сечение 2 – $r = (r_1 + r_2)/2$: а – три симметричных тарелки; б – одна тарелка

Fig. 3. Sketch of the sections through the angular coordinate φ at $z = z_2$: section 1, $r = r_1/2$; section 2, $r = (r_1 + r_2)/2$: (a) three symmetrical plates and (b) one plate

На рис. 4 – 6 показано распределение проекций вектора скорости на уровне передней по потоку стенки в зависимости от угловой координаты для аппарата с тремя полками (а) и одной полкой (б). Профили скорости в сечениях 1, 2, приведенных на рис. 3, показывают, что происходит существенное увеличение переноса импульса в радиальном направлении к внутренней стенке аппарата. Полученные симметричные распределения профилей скорости для геометрии с тремя полками позволяют также сделать вывод о достоверности численного расчета.

На рис. 7 показаны изолинии проекций скорости в плоскости $r - \varphi$ при $z = z_1 + z_2$ (средняя поперечная движению плоскость тарелок), полученные при расчете гидродинамики сыпучего материала с аналогичными параметрами потока.

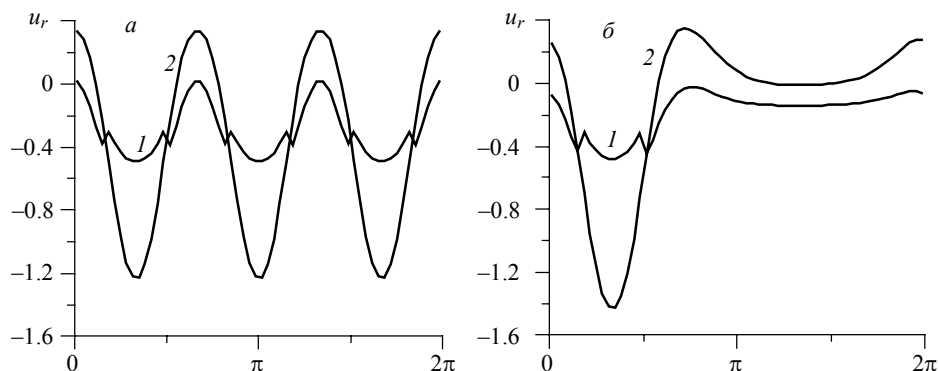


Рис. 4. Профиль радиальной скорости при $Re = 20$; $\beta = 10$; $n = 1.2$ в сечениях 1 – 2, показанных на рис. 3: а – три симметричных тарелки; б – одна тарелка

Fig. 4. Radial velocity profile at $Re = 20$, $\beta = 10$, and $n = 1.2$ in sections 1–2 shown in Fig. 3: (a) three symmetrical plates and (b) one plate

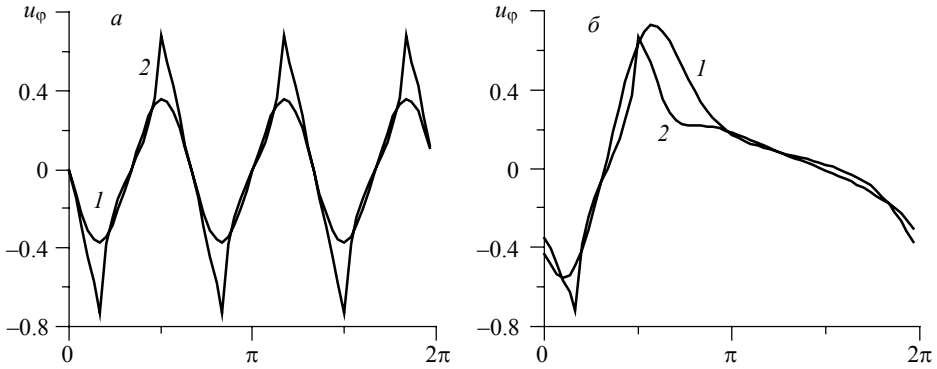


Рис. 5. Профиль окружной скорости при $Re = 20$; $\beta = 10$; $n = 1.2$ в сечениях $1 - 2$, показанных на рис. 3: a – три симметричных тарелки; b – одна тарелка

Fig. 5. Peripheral velocity profile at $Re = 20$, $\beta = 10$, and $n = 1.2$ in sections $1 - 2$ shown in Fig. 3: (a) three symmetrical plates and (b) one plate

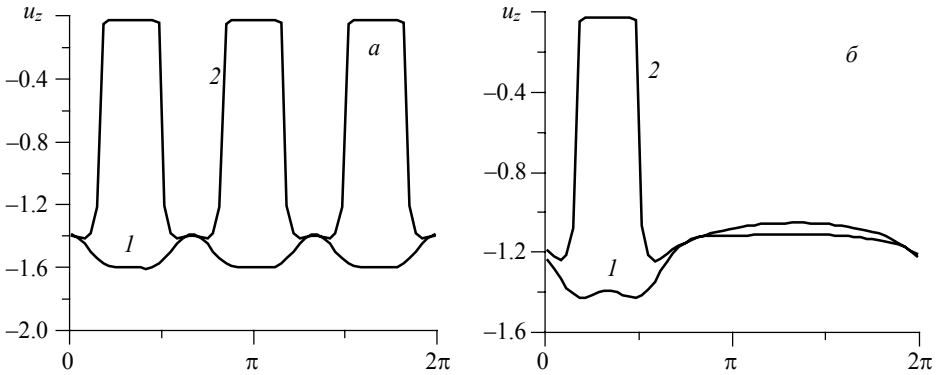


Рис. 6. Профиль аксиальной скорости при $Re = 20$; $\beta = 10$; $n = 1.2$ в сечениях $1 - 2$, показанных на рис. 3: a – три симметричных тарелки; b – одна тарелка

Fig. 6. Axial velocity profile at $Re = 20$, $\beta = 10$, and $n = 1.2$ in sections $1 - 2$ shown in Fig. 3: (a) three symmetrical plates and (b) one plate

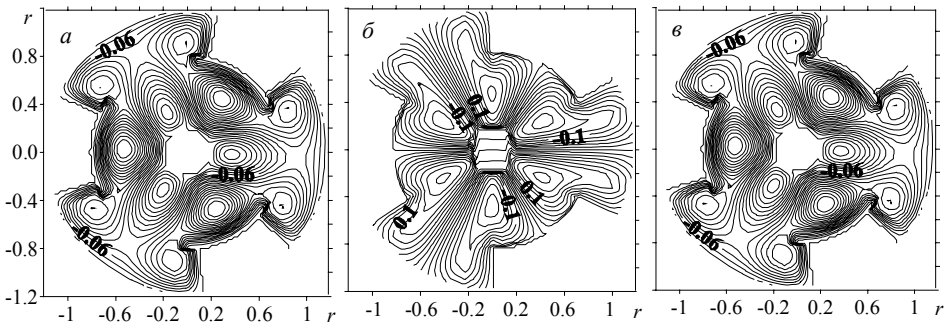


Рис. 7. Изолинии проекций вектора скорости в аппарате с тремя симметричными полками при $Re = 20$; $\beta = 10$; $n = 1.2$: $a, b, в$ – проекции скорости u_r, u_ϕ, u_z соответственно

Fig. 7. Contours of the velocity vector projections in the apparatus with three symmetrical plates at $Re = 20$, $\beta = 10$, and $n = 1.2$: (a–в) velocity projections u_r, u_ϕ, u_z , respectively

Из представленных графиков и изолиний проекций вектора скорости можно видеть, что при выбранной геометрии аппарата наибольшие градиенты скорости возникают вблизи боковых стенок препятствий. При установке одной тарелки возмущения скорости близки к возмущениям в потоке при установке трех препятствий.

Представленные результаты показывают адекватность предложенного метода расчета гидродинамики зернистых материалов при инерционном режиме течения. Разработанная трехмерная модель движения может использоваться для получения полей скорости в пневматических аппаратах с плотным слоем при моделировании процесса смешения и усреднения сыпучих материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марценко А.А., Марценко М.С., Шваб А.В. Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смесительном бункере // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4 (24). С. 126–132.
2. Ширко И.В. Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений / пер. с англ. М.: Мир, 1985.
3. Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н. Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990.
4. Шваб А.В., Марценко М.С., Рыжих Ю.Н. Моделирование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 4. С. 676–681.
5. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975.
6. Savage S. Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. Part 1. P. 53–96.

Статья поступила 16.06.2016 г.

Martsenko A.A., Shvab A.V. THE DYNAMICS OF A DENSE LAYER OF GRANULAR MEDIUM IN THE CIRCULATING PNEUMATIC APPARATUS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 115–122

DOI 10.17223/19988621/42/10

The dynamics of the dense layer of a granular medium in a circulation pneumatic apparatus is considered. The model of a rapid flow of the dense granular medium is based on the assumption of incompressibility and constant concentration of the material. The rheology of the dilatant granular medium is described by a power-law model. The essential feature of the proposed model of the granular medium motion is setting the boundary conditions at the solid surface. The calculated granular medium velocity profile is in a good agreement with the experimental data. The calculations of the three-dimensional flow in the circulating pneumatic apparatus with symmetrical obstacles in the working part are presented. It is shown that the installation of the plates significantly increases the momentum transfer rate in the circumferential and radial directions. The model of the rapid motion allows calculating the distribution function of the residence time of the particles in the apparatus. The resulting three-dimensional distribution of the velocity field can be used for the simulation of the mixture component homogenization process.

Keywords: granular medium, circulating pneumatic apparatus, slip conditions, kinetic energy equation.

SHVAB Alexander Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail avshvab@inbox.ru

MARTSENKO Anastasia Alexandrovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: martsenko@t-sk.ru

REFERENCES

1. Martsenko A.A., Martsenko M.S., Shvab A.V. (2013) Modelirovanie gidrodinamiki vysokokontsentrirovannoy granulirovannoy sredy v smesitel'nom bunkere [Modeling the hydrodynamics of highly concentrated granulated media in the blending silo]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(24). pp. 126–132.
2. Shirko I.V. (1985) *Mekhanika granulirovannykh sred. Teoriya bystrykh dvizheniy* [Mechanics of granular media. Theory of fast motions]. Moscow: Mir.
3. Roslyak A.T., Biryukov Yu.A., Pachin V.N. (1990) *Pnevmaticheskie metody i apparaty poroshkovoy tekhnologii* [Pneumatic methods and apparatuses of powder technology]. Tomsk: Izd. Tomsk Univ.
4. Shvab A.V., Martsenko M.S., Ryzhikh Yu.N. (2011) Modeling the hydrodynamics and the process of averaging a highly concentrated granulated medium in powder technology apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(4). pp. 730–735. DOI 10.1007/s10891-011-0528-2.
5. Shul'man Z.P. (1975) *Konvektivnyy teplomassoperenos reologicheskikh slozhnykh zhidkostey* [Convective heat and mass transfer in liquids with complicated rheological properties]. Moscow: Energiya.
6. Savage S. (1979) Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.* 92(1). pp. 53–96.

УДК 669.725.-415/416:621.771
DOI 10.17223/19988621/42/11

Ю.В. Тузов, И.И. Папилов

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОКАТКИ НА СТРУКТУРУ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕРИЛЛИЕВЫХ ЛИСТОВ

Изучено влияние параметров прокатки на дислокационную структуру листов бериллия. Установлено, что оптимальное сочетание прочностных и пластических свойств достигается в материале со сформированной субзеренной структурой с пониженной плотностью дислокаций. Такая субструктура формируется в прокатанном при высоких температурах (выше температуры рекристаллизации) бериллии высокой чистоты.

Ключевые слова: бериллий, прокатка бериллия, бериллиевый лист, структура, механические свойства.

Благодаря своим ядерно-физическим и механическим свойствам бериллий является перспективным материалом для многих областей современной техники. В частности, поскольку он «прозрачен» для рентгеновского излучения, из него изготавливают окна рентгеновских трубок и различных физических приборов. Для этого требуется бериллиевая фольга толщиной 10–200 мкм. При толщине фольги менее 100 мкм на металле порошкового происхождения не удаётся добиться вакуумплотности из-за включений оксида и интерметаллидов, неизбежно присутствующих в таком металле [1, 2]. Поэтому тонкие фольги получают прокаткой высокочистого бериллия литейного происхождения. Исходным материалом для прокатки фольг являются бериллиевые листы толщиной ~1 мм, структура и механические свойства которых во многом определяют качество получаемых фольг. К сожалению, систематические данные по влиянию параметров прокатки на структуру и свойства бериллиевых листов в литературе практически отсутствуют.

Например, в [3] изучены характеристики дислокационной структуры прокатанного электролитического бериллия. В деформированном металле наблюдаются большие дислокационные скопления, особенно в плоскости $(1\bar{1}20)$. Часто наблюдаются вытянутые дислокационные призматические петли. Дислокации большей частью закреплены выделениями. Авторы отмечают высокую стабильность закрепленных выделениями дислокационных петель. При исследовании микродеформационных характеристик бериллия Бонфильд и Ли [4] наблюдали 2 стадии упрочнения листов, имевших различия в дислокационной структуре. На первой стадии упрочнения дислокационная структура состоит из вытянутых линий с вектором Бюргерса $1/3\langle 1\bar{1}20 \rangle$. Вблизи включений и у границ зерен плотность дислокаций повышена и в отдельных областях кристаллитов достигает величины $1.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$. На второй стадии упрочнения плотность дислокаций не возрастает, но на дислокациях образуются ступеньки. Вблизи ступенек видны большие вытянутые дислокационные петли, из которых в процессе множественного скольжения образуются мелкие петли.

Субструктурный фактор играет важную роль в проблеме низкотемпературной хрупкости бериллия. Хотя строгая количественная взаимосвязь между состоянием

субструктуры и физико-механическими свойствами еще однозначно не установлена, важно, что изменение субструктурного состояния бериллия, достигаемое средствами пластической деформации и термообработки, позволяет существенно влиять на прочностные и пластические характеристики металла. В связи с этим представляет интерес рассмотрение влияния параметров прокатки на дислокационную структуру листов бериллия. В настоящей работе рассмотрена зависимость дислокационной структуры листов бериллия от температуры прокатки, чистоты бериллия, таких параметров деформационной обработки, как степень суммарного и единичного обжатия, а также условий последеформационного отжига.

Материал и методика исследования

В данной работе использовали литой материал трех сортов: сорт А (99.95 % бериллия); сорт В (99.87 % бериллия); сорт С (99.20 % бериллия).

Содержание металлических примесей в каждом из сортов приведено в табл. 1.

Отлитые в вакууме заготовки сначала экструдировали при 850 °С, а затем осаживали. После отжига исходные заготовки имели равноосную структуру с размером зерна $d = 100$ мкм. Вырезанные из такой заготовки диски помещали в стальные чехлы и прокатывали при трех температурах – 500, 700 и 900 °С. Суммарную степень обжатия ($\Sigma \varepsilon_d$) меняли от 20 до 90 %, а степень обжатия за проход (ε_i) составляла от 7 до 30 %. Из прокатанных бериллиевых полос электроэрозионным способом вырезали образцы для механических испытаний.

Таблица 1

Содержание металлических примесей в каждом из сортов бериллия

Сорт материала	Примеси, % по массе 10^2								
	Fe	Al	Cu	Si	Mn	Mg	Cr	Ni	Mo
А	0.3	0.2	0.3	0.2	0.03	0.01	0.01	0.01	0.2
В	0.8	0.4	0.3	0.3	0.03	0.01	0.03	0.01	0.3
С	10	8.4	4.2	2.2	0.97	0.16	-	0.4	-

Для структурных исследований были использованы оптическая металлография и просвечивающая электронная микроскопия. Механические испытания образцов проводились на трёхточечный изгиб и на растяжение. Образцы на растяжение имели плоскую форму с площадью сечения рабочей части ~ 4 мм². Образцы на изгиб имели размеры 30×4×1 мм. Скорость движения ножа при изгибе и подвижного захвата при растяжении составляла 0.1 мм/мин. За условную температуру хрупко-пластичного перехода T_x принимали температуру изгиба образца на 90° без разрушения.

Экспериментальные результаты

Влияние температуры прокатки

Субструктура листов, прокатанных при 500, 700 и 900 °С после отжига до зерен размером 50 мкм имеет существенное различие. Если листы, прокатанные при 500 и 700 °С, отличаются только структурой дислокаций леса, то в листах, прокатанных при 900 °С сохраняется субзеренная структура (рис. 1, а, б). С понижением чистоты материала средний размер субзерен уменьшается (табл. 2).

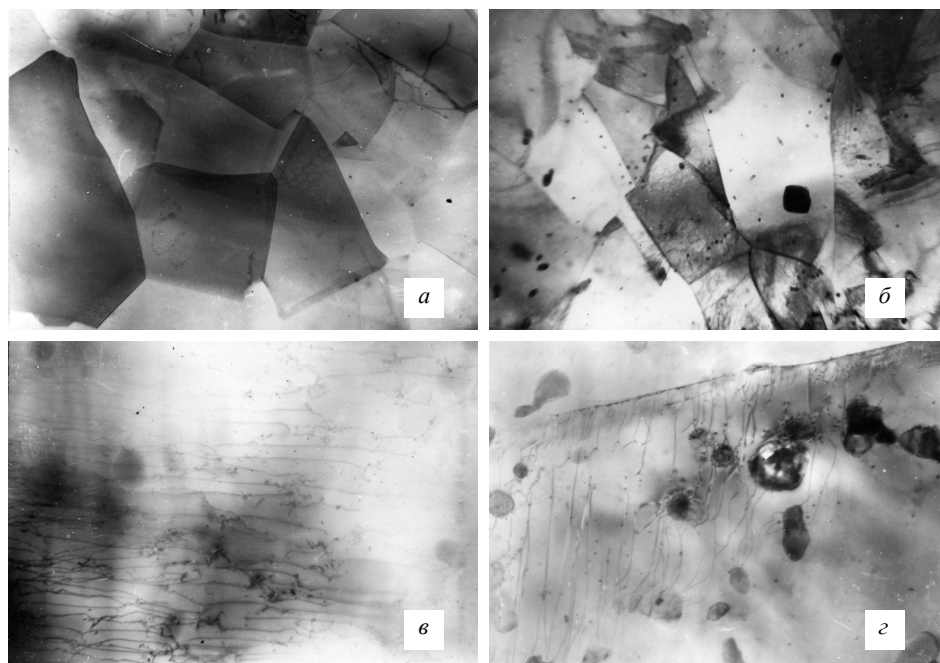


Рис. 1. Субструктура листов бериллия после отжига ($d = 50 \mu\text{м}$), прокатанных с суммарной степенью обжатия 90 % при единичном обжатии – 7 % и температуре – 900 °C: *а* – сорт А, $\times 8500$; *б* – сорт В, $\times 8500$; *в* – сорт А, $\times 17000$; *з* – сорт С, $\times 17000$.

Fig. 1. Substructure of the beryllium sheets after annealing ($d = 50 \mu\text{m}$), rolled with total compression degree of 90%; at singular compression, 7 % at temperature of 900 °C: (*a*) grade A, $\times 8500$; (*б*) grade B, $\times 8500$; (*в*) grade A, $\times 17000$; and (*з*) grade C, $\times 17000$

Таблица 2

Структурные характеристики листов

Сорт листов	А		В		С	
Температура прокатки, °C	500	900	500	900	500	900
Плотность дислокаций, см^{-2}	$1.3 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^8$	$2.3 \cdot 10^9$	$8.3 \cdot 10^9$	$4.8 \cdot 10^9$	$2.7 \cdot 10^9$
Размер субзерен, мкм	-	10	-	7.5	-	6.0
T_x , °C	80	65	115	65	110	65

В листах, прокатанных при 900 °C, дислокации в основном представляют собой длинные прямые параллельные линии (рис. 1, *в*, *з*). Плотность дислокаций зависит от чистоты материала и изменяется в пределах $1 \cdot 10^8 - 2.7 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$. В листах, прокатанных при 500 °C, плотность дислокаций несколько выше ($1.3 \cdot 10^9 - 4.8 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$) и наблюдаемая картина качественно отличается. Распределение дислокаций неоднородное. Дислокационные линии короткие, с большим количеством перегибов, диполей (рис. 2, *а*, *б*). Наблюдаются дислокационные скопления высокой плотности ($1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$), особенно у границ зерен.

На рис. 3 представлена температурная зависимость угла изгиба листов бериллия трёх сортов, прокатанных при 900, 700 и 500 °C. Сравнение полученных результатов показывает, что снижение температуры прокатки от 900 до 500 °C приводит к повышению T_x . Различие в величине T_x определяется, главным образом,

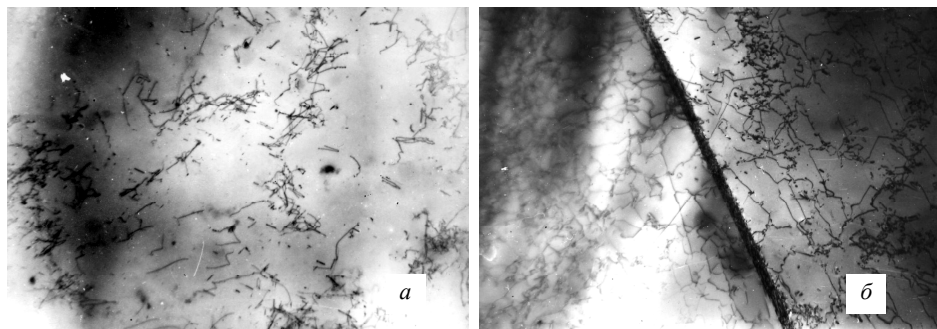


Рис. 2. Субструктура листов бериллия после отжига ($d = 50$ мкм), прокатанных с суммарной степенью обжатия 90 % при единичном обжатии – 7 % и температуре – 500 °С, $\times 17000$: а – сорт А; б – сорт С

Fig. 2. Substructure of the beryllium sheets after annealing ($d = 50$ μm), rolled with total compression degree of 90 %; at singular compression of 7 % at temperature of 500 °С, $\times 17\,000$: (a) grade A and (b) grade C

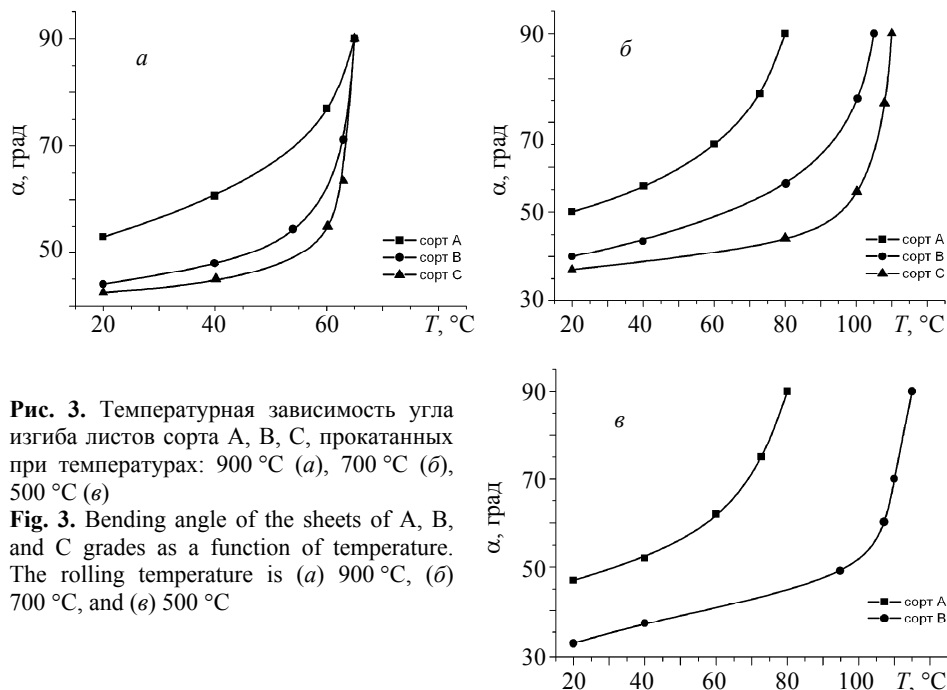


Рис. 3. Температурная зависимость угла изгиба листов сорта А, В, С, прокатанных при температурах: 900 °С (а), 700 °С (б), 500 °С (в)

Fig. 3. Bending angle of the sheets of A, B, and C grades as a function of temperature. The rolling temperature is (a) 900 °С, (б) 700 °С, and (в) 500 °С

чистой материала. Снижение температуры прокатки для самого чистого материала (сорт А) приводит к незначительному увеличению T_x (на 15 °С). С уменьшением чистоты влияние температуры прокатки на величину T_x усиливается.

В табл. 3 приведены механические свойства прокатанных листов ($\Sigma \varepsilon_d = 90$ %, $\varepsilon_i = 7$ %) при испытании на изгиб. Предел прочности σ_b с понижением температуры прокатки возрастает для всех сортов прокатанного бериллия.

Таблица 3

Механические свойства прокатанных листов

Сорт материала	Температура прокатки, °C					
	500		700		900	
	σ_B , кг/мм ²	T_x , °C	σ_B , кг/мм ²	T_x , °C	σ_B , кг/мм ²	T_x , °C
А	62	80	58	80	51	65
В	68	115	65	105	55	65
С	-	-	64	110	58	65

Влияние чистоты бериллия

С увеличением степени суммарного обжатия от 20 до 90 % при температуре 900 °C размер субзерен прокатанных листов бериллия сорта В практически не изменяется и составляет около 10 мкм. В листах, прокатанных на 20 %, субзерна имеют удлиненную форму полигонов и небольшие углы взаимной разориентации 2–3° (рис. 4). Листы, прокатанные со степенью обжатия 30 %, имеют равноосную форму, а углы взаимной разориентации достигают 10–15°.

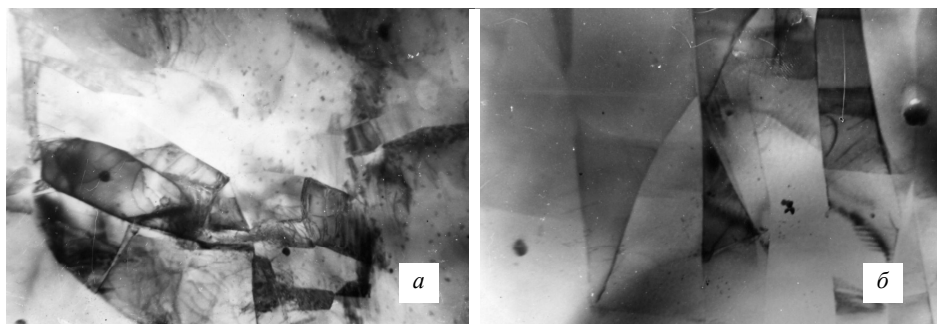


Рис. 4. Субструктура листов бериллия сорта В, $\times 17000$: а – исходное состояние; б – прокатанных при температуре 900 °C с суммарной степенью обжатия 20 %, отжиг – 700 °C, 30 мин

Fig. 4. Substructure of the beryllium sheets of grade B, $\times 17\,000$: (a) initial condition and (b) after rolling at 900 °C with total compression degree of 20 %, annealing at 700 °C for 30 min

На рис. 5 представлена температурная зависимость угла изгиба листов сорта В, прокатанных с суммарной степенью обжатия 20, 50 и 90 % при температуре 900 °C. Повышение степени суммарного обжатия от 20 до 90 % приводит к снижению величины T_x (хрупко-пластичного перехода) от 85 до 55 °C.

Влияние степени единичного обжатия

Влияние степени единичного обжатия исследовано на листах бериллия сортов А и С, прокатанных при температуре 900 °C. Суммарная степень обжатия составляла 90 %. На рис. 6 представлена температурная зависимость угла изгиба листов сорта А. Увеличение степени единичного обжатия от 7 до 30 % приводит к снижению температуры T_x от 65 до 35 °C. Температурная зависимость угла изгиба листов сорта С для всех исследованных степеней единичного обжатия имеет одинаковый вид, а температура T_x оказывается одинаковой и равной 65 °C.

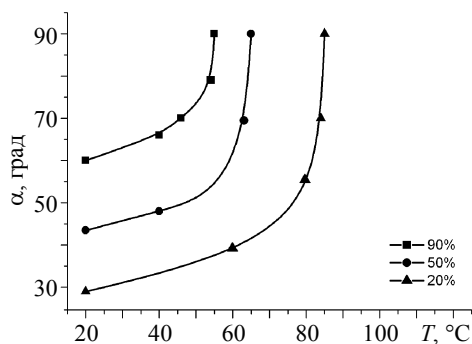


Рис. 5. Температурная зависимость угла изгиба листов сорта В, прокатанных с суммарными обжатиями: 20, 50 и 90 %

Fig. 5. Bending angle of the sheets of grade B as a function of temperature. The sheets are rolled with total compression degree of 20, 50, and 90 %

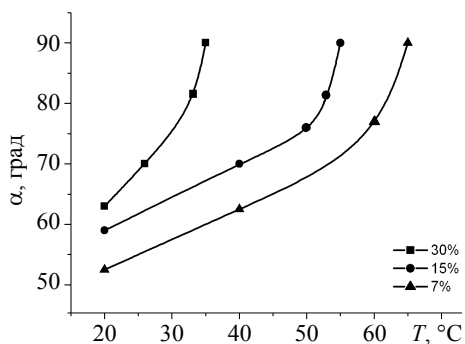


Рис. 6. Температурная зависимость угла изгиба листов сорта А, прокатанных на 90 % с единичными обжатиями: 7, 15 и 30 %

Fig. 6. Bending angle of the 90 %-rolled sheets of grade A as a function of temperature with singular compressions of 7, 15, and 30 %

Субструктура листов сорта А, прокатанных с единичными обжатиями 7% и отожженных до зерна 50 мкм, состоит из субзерен размером 10 мкм. Повышение степени единичного обжатия до 30% приводит к уменьшению размер субзерен до 4–5 мкм. При этом сами субзерна хорошо развиты, имеют узкие границы, значительные углы разориентации (до 15°) и низкую плотность дислокаций внутри субзерен ($\sim 6 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$). В листах бериллия сорта С, прокатанных с единичными обжатиями 30 %, размер субзерен ниже, чем в листах бериллия сорта А, и составляет 3–5 мкм. Но плотность дислокаций внутри субзерен в таких листах значительно выше (до $2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$), также наблюдается большое количество дислокационных клубков и выделений избыточных фаз. Размер выделений составляет 0.7–0.8 мкм и распределены они преимущественно в областях, близких к границам субзерен. Плотность выделений составляет $\sim 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$.

Измельчение субструктуры (величины субзерен) с повышением степени единичного обжатия должно приводить к повышению пластичности листов, что и наблюдается при испытании на изгиб листов бериллия сорта А. В листах сорта А достигается более сильное измельчение субзерна, но из-за повышенного упрочнения материала, связанного с высокой плотностью дислокаций леса внутри субзерен, резервы пластичности, обусловленные дополнительным измельчением субзерен и более слабой базисной текстурой, не реализуются.

Влияние отжига после деформации

Прокатанные при различных условиях листы в исходном состоянии имеют полосчатую зеренную структуру. Согласно электронно-микроскопическим наблюдениям, внутри деформированных зерен имеется развитая ячеистая или субзеренная структура. Степень совершенства ячеек (субзерен) и их размер определяются условиями прокатки (табл. 4). Плотность дислокаций внутри ячеек высокая $> 10^9 \text{ см}^{-2}$, но снижается с повышением температуры прокатки и чистоты материала. В исходном состоянии после прокатки все листы имеют низкую пластичность. Величина относительного удлинения при комнатной температуре не превышает 1 %, а угол изгиба

составляет менее 10° . Температура T_x бериллиевых листов в исходном состоянии, независимо от условий прокатки, находится в области $130\text{--}160^\circ\text{C}$.

Таблица 4

Размеры субзерен в листах бериллия при различных температурах прокатки

Сорт листов	Размер ячеек, мкм		
	Температура прокатки, $^\circ\text{C}$		
	500	700	900
А	2.4	2.6	4.0
В	2.1	2.6	3.3
С	-	2.4	2.8

После отжига при 700°C , 30 мин структура листов сорта А становится полностью рекристаллизованной и средний размер зерна составляет 29 мкм. Прочностные и пластические свойства листов одновременно снижаются. Причем особенно сильно снижается пластичность листов. Если предел прочности σ_B после рекристаллизации уменьшается на 15 %, то величины относительного удлинения и поперечного сужения уменьшаются в 2 раза (табл. 5).

Таблица 5

Механические свойства листов бериллия после отжига

Сорт листов	Структурное состояние	Температура прокатки, $^\circ\text{C}$	α , град.	T_x , $^\circ\text{C}$	σ_B , кг/мм ²	σ_0 , кг/мм ²	δ , %	Ψ , %
А	частичная рекристаллизация	500	32	50	44.6	26.2	8.7	7.3
		900	52	35	48.4	24.2	12.2	11.0
	полная рекристаллизация, $d = 29\text{ мкм}$	900	44	60	41.1	20.8	6.1	5.5
В	частичная рекристаллизация	900	28	80	42.2	22.6	3.6	3.0
	полная рекристаллизация, $d = 25\text{ мкм}$	900	39	55	36.4	19.8	5.4	4.3
С	частичная рекристаллизация	900	7	130	32.0	24.8	1.7	1.2
	полная рекристаллизация, $d = 25\text{ мкм}$	900	28	65	38.8	21.6	4.2	3.9

Температура прокатки оказывает влияние не только на размер и форму ячеек (субзерен), но и на их поведение при отжиге. Субзерна, сформированные при высоких температурах прокатки, более стабильны при отжиге. В листах, прокатанных при 500°C , в процессе отжига рост субзерен происходит очень интенсивно и неравномерно.

Основное различие в субзеренной структуре бериллиевых листов, связанное с температурой прокатки, состоит в том, что в процессе высокотемпературной деформации происходит непрерывная трансформация субзерен в обычную зеренную структуру. После низкотемпературной прокатки (500°C) и отжига процессы перестройки субзерен ограничены границами «старых» зерен, которые часто на-

блюдаются после дорекристаллизационного отжига. Возможно именно по этой причине субзерна в листах, прокатанных при 500 °С, имеют вытянутую форму вдоль направления прокатки. Сохранившиеся границы старых зерен имеют большую линейную протяженность. Они могут служить источниками зарождения трещин и их легкого распространения в процессе испытания листов. Вероятно, изменение механизма разрушения в листах, прокатанных при низкой температуре, является причиной снижения их механических свойств (табл. 5).

В листах сорта В существенное уменьшение плотности дислокаций леса и максимальная пластичность наблюдаются только в полностью рекристаллизованном состоянии, а в листах сорта С аналогичное структурное состояние достигается в процессе собирательной рекристаллизации (роста зерен). При этом наибольшее значение величины относительного удлинения и температуры имеют листы после отжига до размера зерна $d = 45\text{--}50$ мкм, тогда как после окончания первичной рекристаллизации размер зерна в бериллиевых листах сорта С составляет 21 мкм, но их пластичность остается низкой.

Заметим, что в данной работе приведены лишь наиболее типичные структуры прокатанных листов. Более подробную информацию по этому вопросу можно найти в [5].

Обсуждение результатов

Повышение прочностных и пластических свойств листов сорта А происходит одновременно в плоскости листа и в направлении его толщины. Это связано с формированием в материале мелкой низкодислокационной субзеренной структуры. В листах с большим содержанием примеси (сорта В и С) высокая плотность дислокаций леса в субзерне ведет к прогрессирующему охрупчиванию материала. Примеси препятствуют перестройке дислокаций, их аннигиляции и встраиванию в образующиеся субграницы. На электронно-микроскопических снимках бериллиевых листов сорта С внутри субзерен наблюдается развитая полигональная сетка (рис. 7). Избыточные дислокации одного знака, закрепленные примесями, имеют низкую подвижность и снижают энергию за счет перестройки в полигоны. В бериллиевых листах сортов В и С снижение температуры прокатки способствует повышению пластических свойств в плоскости листа, тогда как в поперечном направлении пластичность снижается (табл. 5).

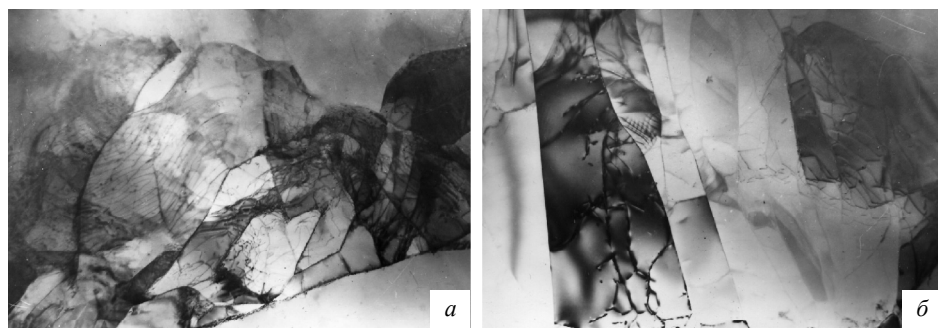


Рис. 7. Субструктура листов бериллия сорта С, прокатанных с суммарной степенью обжатия 90% при температуре: *а* – 900 °С, $\times 17000$; *б* – 700 °С, $\times 17000$.

Fig. 7. Substructure of the grade C beryllium sheets rolled with total compression degree of 90% at temperatures: (*a*) 900 °С, $\times 17\,000$, and (*b*) 700 °С, $\times 17\,000$

Пластическая деформация при высоких температурах реализуется в условиях более однородного пластического течения за счет активации вторичных систем скольжения. Процессам перераспределения дислокаций, их аннигиляции способствует высокая концентрация точечных дефектов – вакансий. Оптимальными режимами прокатки следует считать температуру 850–900 °С при степени единичного обжатия до 30 %. При высокой температуре прокатки взаимодействие между структурными дефектами и атомами примеси становится слабым, поэтому влияние примесей на подвижность этих дефектов уменьшается. Низкой плотности дислокаций, их однородному распределению с отсутствием дислокационных сплетений и клубков, которые являются локальными концентраторами напряжений, соответствует и более высокая пластичность листов, прокатанных при температуре 900 °С. Особенно следует отметить важность учета исходного субструктурного состояния материала, которое определяется условиями деформации, особенно температурой прокатки, и может играть решающую роль в дальнейшем формировании механических свойств бериллия при отжиге.

Таким образом, механические свойства листового бериллия весьма чувствительны к структурному состоянию материала. Термически стабильные дислокационные скопления высокой плотности, которые часто наблюдаются даже в полностью рекристаллизованном материале, являются концентраторами напряжений и могут провоцировать зарождение микротрещин.

Учитывая склонность бериллия к формированию дислокационных скоплений, следует предположить, что его пластичность помимо других факторов определяется легкостью ухода дислокаций из скоплений, их способностью к поперечному скольжению. Все процессы, препятствующие поперечному скольжению, ведут к снижению пластичности материала.

Выводы

1. Проведено комплексное изучение влияния температуры прокатки, чистоты материала, степени суммарного и единичного обжатия, режимов термообработки на структуру, текстуру и механические свойства листов бериллия. Хотя взаимосвязь между размером зерна и механическими свойствами бериллия изучена достаточно подробно, как показали результаты данного исследования, размер зерна не является решающим фактором, контролирующим механические свойства. При одинаковом конечном размере металлографически выявляемого зерна механические свойства могут существенно изменяться в зависимости от условий получения материала (режимов обработки давлением и термообработки).

2. Показано, что существенную роль в формировании механических свойств играет субструктурный фактор – характер распределения и тип дислокаций, их плотность и степень подвижности. Поэтому для формирования в материале высоких механических свойств необходим контроль субструктурного состояния. Оптимальное сочетание прочностных и пластических свойств достигается в материале со сформированной низкодислокационной субзеренной структурой. Реализации такой субструктуры способствуют высокие температуры деформации (выше температуры рекристаллизации) и высокая чистота материала. Влияние примесей на формирование механических свойств значительно снижается, если пластическая деформация проводится при температурах, обеспечивающих переход примесей в твердый раствор.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сборник трудов V рабочей группы Международного Энергетического Агентства по бериллию*. М.: Интерконтакт Наука, 2002.
2. *Бериллий: наука и технология*: пер. с англ. под ред. Г.Ф. Тихинского и И.И. Папирова. М.: Metallurgia, 1984.
3. *Wilsdorf H.G.F., Wilhelm F.J. Metallurgy of Beryllium*. London: Chapman and Hall, 1963.
4. *Bonfield W., Sartell J.A., and Li C.H. The Effect of Surface Condition on the Microstrain of Beryllium* // *Trans. of the Metallurgical Society of AIME*. 1963. V. 227. P. 669–673.
5. *Корниенко Л.А., Николаенко А.А., Папиров И.И., Стоев П.И., Тузов Ю.В., Хомутов А.М. Атлас структур бериллия*. М.: Изд-во ОИЯИ, 2009.

Статья поступила 05.05.2016 г.

Tuzov Yu.V., Papirov I.I. (2016) EFFECT OF THE ROLLING PARAMETERS ON THE STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF THE BERYLLIUM SHEETS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 123–132

DOI 10.17223/19988621/42/11

In this work, a molding material of three grades was used: grade A (99.95 % of beryllium), grade B (99.87 % of beryllium), and grade C (99.2% of beryllium). The workpieces, casted in vacuum, initially were extruded at 850 °C and then swaged. The rolling temperature was 500, 700, and 900 °C.

For all grades, the tensile strength σ_B in flex test increases with a decrease of the rolling temperature. With an increase in the total compression degree from 20 to 90% at the temperature of 900 °C, the size of subgrains in the beryllium sheets of grade B does not essentially change and remains about 10 μm .

After 30 minutes of the annealing at the temperature 700 °C the structure of the beryllium sheets of grade A becomes recrystallized with an average grain size of 29 μm . After recrystallization, the tensile strength σ_B decreases by 15% and the values of the elongation and transverse contraction decrease by two times. The temperature of 850–900 °C and a single compression up to 30% are the optimum rolling conditions.

Thus, the appropriate combination of structural behavior and paste-forming properties can be obtained in material with subgrained structure in conditions of a high deformation temperature and high material purity.

Keywords: beryllium, rolling of beryllium, beryllium sheet, structure, mechanical properties.

TUZOV Yuriy Valentinovich (Candidate of Technical Sciences,
National Research Nuclear University MPhI, Russian Federation)
E-mail: 79032370891@yandex.ru

PAPIROV Igor Isakovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
National Science Center Kharkov Institute of Physics and Technology, Kharkov, Ukraine)
E-mail: anton.komir@gmail.com

REFERENCES

1. *Sbornik trudov V rabochey gruppy Mezhdunarodnogo Energeticheskogo Agentstva po berillyu* (2002) [The collected papers of the fifth International Energetic Agency workshop on beryllium]. Moscow: Interkontakt Nauka.
2. *Berilliy: nauka i tekhnologiya* (1984) [Beryllium: science and technology]. Transl. Eng. Editors: Tikhinsky G.F., Papirov I.I. Moscow: Metallurgiya.
3. *Wilsdorf H.G.F., Wilhelm F.J. (1963) Metallurgy of beryllium*. London: Chapman and Hall.
4. *Bonfield W., Sartell J.A., and Li C.H. (1963) The effect of surface condition on the microstrain of beryllium. Trans. of the Metallurgical Society of AIME*. 227. pp. 669–673.
5. *Kornienko L.A., Tuzov Yu.V., Papirov I.I. (2009) Atlas struktur berilliya* [Atlas of the beryllium structures]. Moscow: Izd.OIYaI.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АГАФОНЦЕВ Михаил Владимирович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: kim75mva@gmail.com

БОРЗЕНКО Евгений Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Томского государственного университета. E-mail: bubenchikov@mail.tomsknet.ru

ДОРОГОВ Юрий Иванович – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики филиала Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт» в г. Волжском. E-mail: ydorogov@yandex.ru

ДЬЯКОВА Ольга Алексеевна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: olga.dyakova.1992@mail.ru

ЕРШОВ Игорь Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: i_ershov@ngs.ru

КАЗАКЯВИЧЮС Сергей Матвеевич – инженер ЗАО «Технология маркет», Томск. E-mail: tm@ec-gearing.ru

КОСТАРЕВ Артем Андреевич – студент механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: artem_kost@bk.ru

КЫРОВ Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и методики преподавания физики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: kyrovVA@yandex.ru

ЛОБОДА Егор Леонидович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физической и вычислительной механики Томского государственного университета. E-mail: loboda@mail.tsu.ru

МАРЦЕНКО Анастасия Александровна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: martsenko@t-sk.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета. E-mail: matvolegv@mail.ru

МИСЯКОВ Виктор Михайлович – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: mvm@mail.tsu.ru

ПАПИРОВ Игорь Исакович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории бериллия Харьковского физико-технического института. E-mail: anton.komir@gmail.com

РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского. E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

РЕЙНО Владимир Владимирович – старший научный сотрудник лаборатории распространения волн Института оптики атмосферы ТНЦ СО РАН. E-mail: reyno@iao.ru

СЛАВОЛЮБОВА Ярославна Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г.В. Плеханова. E-mail: jar1984@mail.ru

ТУЗОВ Юрий Валентинович – кандидат технических наук, доцент Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». E-mail: 79032370891@yandex.ru.

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: avshvab@inbox.ru.

ЩЕРБАКОВ Николай Романович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии Томского государственного университета. E-mail: nrs@math.tsu.ru

ЩЕРБАКОВА Ирина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики Томского государственного университета. E-mail: nrs@math.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.08.2016.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.8. Уч.-изд. л. 12.1. Тираж 300 экз. Заказ № 26.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 2026.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru