

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

Научный журнал

2016

№ 3 (36)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.



Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof., Head of the Operation Research Department, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics.
Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof. of the Operation Research Department.
Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Cand. of Science, Associate Prof. of the Operation Research Department. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Science, Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department

Gennady Koshkin – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Cybernetics Department

Yury Kostyuk – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Informatics Department

Anjela Matrosova – Doctor of Science, Prof., Head of the Programming Department

Anatoly Nazarov – Doctor of Science, Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department

Sergey Sushchenko – Doctor of Science, Prof., Head of the Applied of Information Department, Dean of the Faculty of Informatics

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
PhD, Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orzinger
PhD, Prof.
University of Rome, Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Editorial address:
Faculty of applied mathematics and cybernetics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Science, Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Nina Yevtushenko
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Syn-
opsys, Mountain View, CA, USA

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031). Free price.

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. каф. исследования операций, декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ.
Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. каф. исследования операций ТГУ.
Тел. +72822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – отв. секретарь, доц., канд. техн. наук, доц. каф. исследования операций ТГУ.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и математического моделирования ТГУ

Косшкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. каф. программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. каф. прикладной информатики, декан факультета информатики ТГУ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали
д-р философии, проф.
Университет VII
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет, Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт
Турин, Италия

Адрес редакции: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики
Телефон / факс: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
д-р техн. наук, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Нина Евтушенко
д-р физ.-мат. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
гл. науч. сотр. фирмы
«Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России». Свободная цена. Статьи публикуются на русском и английском языках. Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» входит в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» Высшей аттестационной комиссии, а также входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте: <http://journals.tsu.ru/informatics/>.
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

**УПРАВЛЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**CONTROL
OF DYNAMICAL SYSTEMS**

Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об оптимальности квазисобых управлений в одной стохастической задаче управления 4

Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. On optimal quasi-singular controls in stochastic control problem 4

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Бахолдина М.А., Горцев А.М. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности непродлевающегося мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий 11

Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Comparison of maximum likelihood method and moments method by estimating unextendable dead time period in the modulated semi-synchronous generalized flow of events 11

Березин Д.В., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в модулированном МАР-потоке событий 26

Berezin D.V., Nezhel'skaya L.A. Comparison of MM and ML estimation of dead time period in Modulated MAP 26

Медведев Г.А. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности 35

Medvedev G.A. The probability density of the processes of yield interest rates 35

Поддубный В.В. О возможности математического моделирования эволюции полисемии знаков естественного языка с помощью нестационарных процессов рождения и гибели 49

Poddubny V.V. On the possibility of mathematical modelling of the evolution of the polysemy of natural language signs with using of non-stationary birth-death processes 49

Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания 60

Ryzhikov Yu.I., Ulanov A.V. A use of hyperexponential distribution in non-markovian queuing systems analyses 60

Сиротина М.Н. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий 66

Sirotnina M.N. Comparison of ML- and MM-estimations of period duration of dead time in modulated synchronous double stochastic flow of events 66

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Бабанов А.М., Квач Е.С. «IS-THE»-отношения в семантических моделях данных: предпосылки использования и правила построения «IS-THE»-кластеров 81

Babanov A.M., Kvach E.S. «IS-THE»-relations in semantic data models: prerequisites and construction rules of «IS-THE»-clusters 81

Головчинер М.Н., Дылыкова А.Ж. Использование нейронных сетей в задаче выявления доминантных личностных характеристик различных категорий респондентов 91

Golovchiner M.N., Dilykov A.R. The use of neural networks in the task of identifying the dominant personal characteristics of different categories of respondents 91

Истомин А.С., Спирин Н.А., Лавров В.В., Бякова М.А. Разработка программного обеспечения для диагностики вида отклонения доменной плавки от нормального режима 97

Istomin A.S., Spirin N.A., Lavrov V.V., Byakova M.A. Software development for diagnostics of deviation type of blast furnace from normal mode 97

Сведения об авторах 103

Brief information about the authors 103

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.21:517.977
DOI: 10.17223/19988605/36/1

К.Б. Мансимов, Р.О. Масталиев

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИСОБОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального управления нелинейными стохастическими процессами, математическая модель которых описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито. При предположении выпуклости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: стохастическая система; оптимальное управление; квазисоборые управления; линеаризованное условие оптимальности.

Принцип максимума Понтрягина для стохастических задач оптимального управления получен в работах [1–3 и др.]. В работе [4] получено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина в задаче управления стохастическими системами с запаздывающим аргументом и рассмотрен случай вырождения условия максимума (особый случай).

Предлагаемая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности квазисоборых управлений в задаче оптимального управления, описываемых стохастическими системами.

1. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) – полное вероятностное пространство; $w(t)$ – n -мерный стандартный винеровский процесс, определенный на полном вероятном пространстве (Ω, F, P) ; $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ – пространство измеримых по (t, ω) случайных процессов $x(t, \omega): [t_0, t_1]: \Omega \rightarrow R^n$, для которых $E \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^2 dt < +\infty$.

Здесь и в дальнейшем знак E – математическое ожидание.

Пусть динамика стохастического управляемого процесса на фиксированном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $f(t, x, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно; $\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times n} - (n \times n)$ -матричная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно, причем

$$u(t) \in U_d \equiv \left\{ u(\cdot) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r) \mid u(t) \in U \subset R^r \right\}, \quad (3)$$

где U – заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество. U_d назовем множеством допустимых управлений.

В дальнейшем предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r)$ соответствует единственное решение $x(t)$ системы (1)–(2) с п.н. непрерывными траекториями, определенными на T .

Целью управления является минимизация терминального критерия качества

$$I(u) = E \{h(x(t_1))\}, \quad (4)$$

где $h(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Основной задачей является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков для выпуклой области управлений.

2. Необходимое условие оптимальности первого порядка

Предположим, что $(u(t), x(t))$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ обозначим произвольный допустимый процесс. Запишем формулу для приращения функционала:

$$\Delta I(u) = I(\bar{u}) - I(u) = E \{h(\bar{x}(t_1)) - h(x(t_1))\}. \quad (5)$$

Приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ удовлетворяет системе

$$d\Delta x(t) = d[\bar{x}(t) - x(t)] = (f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)))dt + (\sigma(t, \bar{x}(t)) - \sigma(t, x(t)))dw(t), t \in T, \quad (6)$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \quad (7)$$

Пусть $\psi(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ – случайный процесс, стохастический дифференциал которого имеет вид

$$d\psi(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dw(t).$$

Здесь по определению $\alpha(t)$ – n -мерная непрерывная вектор-функция, $\beta(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^{n \times n})$.

Тогда на основании формулы Ито (см. например, [5]) получается

$$d(\psi'(t)\Delta x(t)) = d\psi'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)d\Delta x(t) + \beta(t)[\sigma(t, \bar{x}(t)) - \sigma(t, x(t))]dt = d\psi'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)\{(f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)))dt + (\sigma(t, \bar{x}(t)) - \sigma(t, x(t)))dw(t)\} + \beta(t)[\sigma(t, \bar{x}(t)) - \sigma(t, x(t))]dt. \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем ($'$) – знак транспонирования.

Положим

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'f(t, x, u), \quad H_x[t] = H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \quad H_u[t] = H_u(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ H_{xx}[t] = H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)), \quad H_{uu}[t] = H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ f_x[t] = f_x(t, x(t), u(t)), \quad f_u[t] = f_u(t, x(t), u(t)), \quad \sigma_x[t] = \sigma_x(t, x(t)), \quad \sigma_{xx}[t] = \sigma_{xx}(t, x(t)).$$

Используя формулу Тейлора, тождества (8) можно записать в следующем виде:

$$d(\psi'(t)\Delta x(t)) = d\psi'(t)\Delta x(t) + H'_x[t]\Delta x(t)dt + H'_u[t]\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)dt + \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)dt + \frac{1}{2}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt + o_1(\|\Delta z(t)\|^2)dt + \psi'(t)(\sigma(t, \bar{x}(t)) - \sigma(t, x(t)))dw(t) + \beta(t)\sigma_x[t]\Delta x(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t)dt + \beta(t)o_2(\|\Delta x(t)\|^2)dt. \quad (9)$$

Здесь величины $o_i(\cdot) = 1, 2$ определяются, соответственно, из разложения

$$\begin{aligned}
& H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = H'_x[t] \Delta x(t) + H'_u[t] \Delta u(t) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) + \Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t) + \frac{1}{2} \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t) + o_1(\|\Delta z(t)\|^2), \\
& \sigma(t, \bar{x}(t)) - \sigma(t, x(t)) = \sigma'_x[t] \Delta x(t) + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \sigma_{xx}[t] \Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t)\|^2),
\end{aligned}$$

где $\Delta z(t) = (\Delta u(t), \Delta x(t))'$.

С учетом (7) и (9) формула приращения (5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta I(u) = E \left\{ h'_x(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) h_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \psi'(t_1) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} d\psi(t) \Delta x(t) - \right. \\
- \int_{t_0}^{t_1} H'_x[t] \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t] \Delta u(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t) dt - \\
\left. - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \beta(t) \sigma_x[t] \Delta x(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \beta(t) \sigma_{xx}[t] \Delta x(t) dt \right\} + \eta(\Delta u). \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u) = E \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta z(t)\|^2) dt - \int_{t_0}^{t_1} \beta(t) o_2(\|\Delta x(t)\|^2) dt + o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2) \right\},$$

где $o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2)$ определяется из разложения

$$h(\bar{x}(t_1)) - h(x(t_1)) = h'_x(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) h_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2).$$

Если предположить, что случайные процессы $\psi(t) \in L^2_F(t_0, t_1; R^n)$, $\beta(t) \in L^2_F(t_0, t_1; R^{n \times n})$ являются решением сопряженной системы

$$\begin{cases} d\psi(t) = -(H_x[t] + \beta(t) \sigma_x[t]) dt + \beta(t) dw(t), \\ \psi(t_1) = -h_x(x(t_1)), \end{cases}$$

то формула приращения (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta I(u) = E \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t] \Delta u(t) dt + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) h_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) dt - \right. \\
\left. - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \beta(t) \sigma_{xx}[t] \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t) dt \right\} + \eta(\Delta u). \quad (11)
\end{aligned}$$

Специальное приращение оптимального управления $u(t)$ в силу выпуклости области управления U можно определить по формуле

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon [v(t) - u(t)], \quad t \in T, \quad (12)$$

где $v(t) \in L^2_F(t_0, t_1; R^r)$ – произвольный вектор, а $\varepsilon \in [0, 1]$ – произвольное число.

Обозначим через $\Delta x(t; \varepsilon)$ – специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению $\Delta u(t; \varepsilon)$ управления $u(t)$.

Из (6), используя условие Липшица, при помощи леммы Гронуолла–Белмана (см. например, [6]) получается оценка

$$E \|\Delta x(t; \varepsilon)\|^2 \leq N \varepsilon^2, \quad (13)$$

где $N = \text{const} > 0$.

Лемма. Пусть $\ell(t)$ является решением задачи

$$d\ell(t) = (f'_x[t]\ell(t) + f'_u[t](v(t) - u(t)))dt + \sigma_x[t]\ell(t)dw(t), \quad (14)$$

$$\ell(t_0) = 0.$$

Тогда справедливо разложение

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon \ell(t) + o(\varepsilon; t). \quad (15)$$

Принимая во внимание (15) и оценку (13), из (11) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta I_\varepsilon(u) &= I(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t)) - I(u(t)) = -\varepsilon E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t](v(t) - u(t)) dt \right\} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\ell'(t_1) h_{xx}(x(t_1)) \ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) H_{xx}[t] \ell(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) \beta(t) \sigma_{xx}[t] \ell(t) dt - \right. \\ &\left. - \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) \beta(t) \sigma_{xx}[t] \ell(t) dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) H_{xu}[t] (u(t) - v(t)) dt - \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - v(t))' H_{uu}[t] (v(t) - u(t)) dt \right] + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Из разложения (16) в силу произвольности ε сразу следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$E \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t](v(t) - u(t)) dt \leq 0 \quad (17)$$

выполнялось для всех $v(t) \in L^2_F(t_0, t_1; R^r)$.

Неравенство (17) является линейризованным интегральным условием максимума для задачи (1)–(4).

Можно доказать, что оно имеет место тогда и только тогда, когда почти для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $v \in L^2_F(t_0, t_1; R^r)$ выполняется неравенство

$$H'_u[\theta](v - u(\theta)) \leq 0. \quad (18)$$

Здесь и в дальнейшем $\theta \in [t_0, t_1]$ – произвольная точка Лебега управления $u(t)$.

Неравенство (18) есть поточечный линейризованный принцип максимума в рассматриваемой задаче и представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

Перейдем к изучению случая вырождения линейризованного условия максимума.

3. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений

Будем исследовать случай вырождения линейризованного условия максимума (18). По аналогии с [7] введем следующее определение.

Определение. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым, если вдоль процесса $(u(t), x(t))$ для всех $v \in U_d$ и $\theta \in [t_0, t_1]$ выполняется следующее условие:

$$H'_u[\theta](v - u(\theta)) = 0, \text{ п.н.} \quad (19)$$

Ясно, что в квазиособом случае линейризованное необходимое условие оптимальности (18) теряет свое содержательное значение, в связи с чем надо иметь новые необходимые условия оптимальности, работающие в квазиособом случае.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – квазиособое оптимальное управление. Тогда из разложения (16) в силу (19) и произвольности $\varepsilon \in [0, 1]$ следует, что

$$\begin{aligned} E \left\{ \ell'(t_1) h_{xx}(x(t_1)) \ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) [H_{xx}[t] + \beta(t) \sigma_{xx}[t]] \ell(t) dt - \right. \\ \left. - 2 \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' H_{ux}[t] \ell(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' H_{uu}[t] (v(t) - u(t)) dt \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема 2. Если $u(t)$, $t \in T$, – квазиособое управление, то для его оптимальности в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство (20) выполнялось для всех $v(t) \in U_d$, $t \in T$.

Неравенство (20) является довольно общим, но вместе с тем неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Однако с его помощью удастся получить ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений, выраженных непосредственно через параметры задачи (1)–(4).

Уравнение (14) является линейным неоднородным стохастическим дифференциальным уравнением. Поэтому, применяя результаты, например, работ [8] получаем, что решение $\ell(t)$ задачи (14) допускает представление

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t Q(t, \tau)(v(\tau) - u(\tau))d\tau. \quad (21)$$

Здесь по определению

$$Q(t, \tau) = R(t, \tau)f_u[\tau],$$

где $(n \times n)$ матрица $R(\tau, s)$ является решением задачи

$$dR(t, s) = f'_x[t]R(t, s) + \sigma_x[t]R(t, s)dw(t),$$

$$R(s, s) = E_n \text{ (} E_n \text{ – } (n \times n)\text{- мерная единичная матрица).}$$

С помощью представления (21) следуя схеме предложенной, например, в [9–11] доказывается справедливость тождеств:

$$\begin{aligned} & \ell'(t_1)h_{xx}(x(t_1))\ell(t_1) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' Q(t_1, \tau)h_{xx}(x(t_1))Q(t_1, s)(v(s) - u(s))d\tau ds, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t)[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]]\ell(t)dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' \left[\int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q(t, \tau)[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]]Q(t, s)dt \right] (v(s) - u(s))ds d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' H_{ux}[t]\ell(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' H_{ux}[\tau]Q(\tau, t)d\tau \right] (v(t) - u(t))dt. \quad (24)$$

Пусть по определению

$$K(\tau, s) = -Q(t_1, \tau)h_{xx}(x(t_1))Q(t_1, s) + \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q(t, \tau)[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]]Q(t, s)dt.$$

Заметим что, матричная функция $K(\tau, s)$ является стохастическим аналогом, матричной функции, которая впервые введена в детерминированном случае в работах К.Б. Мансимова (см., например [9–11 и др.]).

Принимая во внимание тождества (22)–(24), неравенство (20) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' K(\tau, s)(v(s) - u(s))ds d\tau + \right. \\ & \left. + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' H_{ux}[\tau]Q(\tau, t)d\tau \right] (v(t) - u(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' H_{uu}[t](v(t) - u(t))dt \right\} \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $u(t)$, $t \in T$, – квазиособое управление в задаче (1)–(4), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство (25) выполнялось для всех $v(t) \in U_d$, $t \in T$.

Неравенство (25) является общим интегральным необходимым условием оптимальности для квазиособых управлений.

Кроме того, определяя $v(t)$ конкретным образом, можно получить поточечные условия оптимальности квазиособых управлений.

Следствие. Если $u(t), t \in T$, – квазиособое управление в задаче (1)–(4), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$(v - u(\theta))' H_{uu}[\theta](v - u(\theta)) \leq 0 \quad (26)$$

выполнялось почти для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in U_d$.

Для доказательства неравенства (26) достаточно в (25) $v(t)$ определить по формуле

$$v_\delta(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \delta) = T_\delta, \\ u(t), & t \in T \setminus T_\delta, \end{cases}$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое произвольное число.

Заключение

При помощи стохастического аналога метода приращений получено линеаризованное необходимое условие оптимальности, а также исследован квазиособый случай. Установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аркин В.И., Саксонов М.Т. К теории стохастического принципа максимума в задачах с непрерывным временем // Модели и методы стохастической оптимизации. М.: ЦЭМИ, 1983. С. 3–26.
2. Kushner H.J. On the stochastic maximum principle: Fixed time of control // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 11. P. 78–92.
3. Nařayed M. Filippov approach in stochastic maximum principle without differentiability assumptions // Electronic journal of differential equations. 2010. V. 2010, No. 97. P. 1–13.
4. Агаева Ч.А. Необходимые условия оптимальности особых управлений в стохастических системах с запаздывающим аргументом. Баку, 1990. 20 с. Деп. в ВИНТИ 19.06.1990. № 3495-890.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977. 250 с.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
8. Bismut J.M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients // SIAM. J. Control and optimization. 1976. V. 14, No. 3. P. 419–444.
9. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: ЭЛМ, 1999. 176 с.
10. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку: ЭЛМ, 2010. 336 с.
11. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку: ЭЛМ, 2013. 224 с.

Мансимов Камиль Байрамали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: mansimov@front.ru
Бакинский государственный университет, Институт систем управления НАН Азербайджана (г. Баку)
Масталиев Рашид Огтай оглы, д-р философии по математике. E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com
Институт систем управления НАН Азербайджана (г. Баку)

Поступила в редакцию 10 мая 2016 г.

Mansimov Kamil B. (Baku State University, Institute of Control Systems (Cybernetics) of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan), *Mastaliyev Rashad O.* (Institute of Control Systems (Cybernetics) of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan).

On optimal quasi-singular controls in stochastic control problem.

Keywords: stochastic system; optimal control; quasi-singular control; linearized optimality conditions.

DOI: 10.17223/19988605/36/1

In the report we consider a stochastic optimal control problem whose mathematical model is given by stochastic differential equation Ito.

Let (Ω, F, P) be a complete probability space. $w(t)$ be n dimensional standard Winer process determined on the space (Ω, F, P) . $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ be a space of measurable with respect by (t, ω) random processes $x(t, \omega): [t_0, t_1]: \Omega \rightarrow R^n$ such that $E \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^2 dt < +\infty$.

Here and follows sign E is mathematical expectation.

Let on a fixed time interval $[t_0, t_1] = T$ the control process be described by the following stochastic differential system:

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t), \quad t \in T,$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Here $f(t, x, u)$ is the given n dimensional vector-function continuous in totality of variables together with partial derivatives with respect by (x, u) to second order inclusively, $\sigma(t, x)$ is a matrix function of sizes $(n \times n)$ continues in totality of variables together with partial derivatives with respect by x to second order inclusively.

$$u(t) \in U_d \equiv \left\{ u(\cdot) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r) \mid u(t) \in U \subset R^r \right\},$$

where U is the given nonempty, bounded and convex set. Call U_d set of admissible controls.

Our goal by minimize the functional

$$I(u) = E \{ h(x(t_1)) \},$$

on the set of admissible controls. Here $h(x)$ is the given twice continuously differentiable scalar function. By means of the stochastic analogue of the method suggested and developed in the papers of K.B. Mansimov, we get a linearized necessary optimality condition, and also study the quasi-singular case. Necessary optimality condition of quasi-singular controls is established. Then investigated particular cases.

REFERENCES

1. Arkin, V.I. & Saksonov, M.T. (1983) K teorii stokhasticheskogo printsipa maksimuma v zadachakh s nepreryvnym vremenem [On the theory of stochastic maximum principle in problems with continuous time]. In: Arkin, V.I. & Katyshev, P.K. (eds) *Modeli i metody stokhasticheskoy optimizatsii* [Models and methods of stochastic optimization]. Moscow: TSEMI. pp. 3-26.
2. Kushner, H.J. (1965) On the stochastic maximum principle: Fixed time of control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 11. pp. 78-92. DOI: 10.1016/0022-247X(65)90070-3
3. Hafayed, M. (2010) Filippov approach in stochastic maximum principle without differentiability assumptions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2010(97). pp.1-13.
4. Agayeva, Ch.A. (1990) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti osobykh upravleniy v stokhasticheskikh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentum* [Necessary optimality conditions for singular controls in stochastic systems with delay]. Baku: VINITI 19.06.1990. №3495-890.
5. Gikhman, I.I. & Skorokhod, A.V. (1977) *Upravlyaemye sluchaynye protsessy* [Controllable random processes]. Kiev: Naukova dumka.
6. Vasilyev, F.P. (2002) *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Factorial.
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osoby optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka.
8. Bismut, J.M. (1976) Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM. Journal on Control and Optimization*. 14(3). pp. 419-444. DOI: 10.1137/0314028
9. Mansimov, K.B. (1999) *Osoby upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular controls in systems with delay]. Baku: ELM.
10. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa – Darbu* [Quality theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.
11. Abdullayev, A.A. & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyyaemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in the processes described by the system of Volterra integral equations]. Baku: Elm.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/36/2

М.А. Бахолдина, А.М. Горцев**СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ
НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МОДУЛИРОВАННОМ
ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Проводится сравнение качества получаемых по наблюдениям за моментами наступления событий потока оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; непродлевающееся мертвое время; оценка максимального правдоподобия; оценка методом моментов; длительность мертвого времени.

Условия функционирования реальных систем массового обслуживания таковы, что если в отношении параметров обслуживаемых устройств, как правило, можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs) [1–9]. Интерес к рассмотрению дважды стохастических потоков событий проявляется неслучайно. Все это находит широкое применение в различных отраслях науки и техники, таких как теория сетей, Р2Р-сети и адаптивное вещание видео, системы оптической связи, статистическое моделирование, финансовая математика и др. [10–16]. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо, что еще более ухудшает ситуацию, изменяются со временем случайным образом. Поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий) [17–26]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [27–33].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока выступает мертвое время регистрирующих приборов. Необходимость рассмотрения случая мертвого времени вызвана тем, что на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживаемый прибор, порождает период так называемого мертвого времени [34–42], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки»; в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных

вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В настоящей работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [43–46] и обобщенного полусинхронного потока событий [47–49] и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий с кусочно-постоянной интенсивностью. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [21, 22, 50, 51], при этом в [50] показано, что данные потоки могут быть представлены в виде моделей МАР-потоков событий. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [51–54], проводится сравнение оценок длительности мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий, полученных методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки) по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток или поток событий), интенсивность которого является кусочно-постоянным стационарным случайным процессом $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_1$, и второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_2$. В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i ($\lambda(t) = \lambda_i$), имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 , при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе также возможен в произвольный момент времени, не совпадающий с моментом наступления события, при этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β : $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен и может осуществляться только в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α : $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. Отметим, что события пуассоновских потоков и дополнительные события неразличимы для наблюдателя. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. При этом матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ \alpha(1 - \delta) & -(\lambda_2 + \alpha) \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} (1 - p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha\delta & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны

наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где 1, 2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквами δ ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые t_1, t_2, \dots – белыми.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Поскольку процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то говорить о состоянии потока можно только в вероятностном смысле. Вся доступная информация о потоке – это моменты наступления событий t_1, t_2, \dots, t_k с начала наблюдения t_0 до момента t .

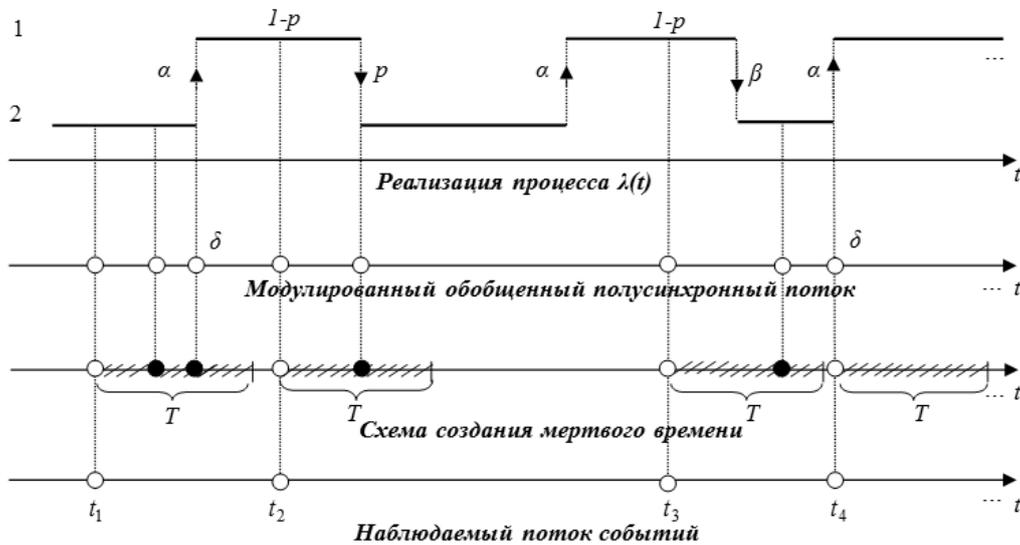


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ полагаются известными, длительность мертвого времени T неизвестна. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) на основании выборки t_1, t_2, \dots, t_k наблюдаемых моментов наступления событий потока осуществить методом максимального правдоподобия и методом моментов оценки \hat{T} длительности мертвого времени и произвести сравнение получаемых оценок.

2. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени

Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau), \tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда одномерная плотность вероятности $p_T(\tau), \tau \geq 0$, примет вид [51, 53]:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$f(T) = \lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \left\{ (p\lambda_1 + \beta) [\lambda_1(1-p+p\delta) - \lambda_2 + \delta\beta] - p\lambda_1 \alpha \right\} \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T)},$$

$$F(T) = z_1 z_2 - q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad \beta_1 = p\lambda_1 + \beta, \quad \beta_2 = \alpha, \quad q = \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)],$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1-\delta)} \right), \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, ..., $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, ..., $\tau_k \geq 0$, – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t]$ значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1, \dots, τ_k по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда функция правдоподобия с учетом (1) запишется в виде

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}; \quad L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad T > \tau_{\min}.$$

Поскольку задача заключается в построении оценки \hat{T} длительности мертвого времени в предположении, что все параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ известны, то согласно методу максимального правдоподобия [55] ее реализация есть решение оптимизационной задачи

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0, \quad (2)$$

где $p_T(\tau^{(j)})$ определена в (1) для $\tau = \tau^{(j)}$. Значение T , при котором функция правдоподобия (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка максимального правдоподобия $\hat{T}_{МП}$ длительности мертвого времени.

В [54] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): показано, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{2, k}$, являются возрастающими функциями переменной T , $0 \leq T \leq \tau^{(j)}$, $0 \leq \tau^{(j)} < \infty$, $j = \overline{2, k}$, при любых значениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ и, следовательно, функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$. Таким образом, в процессе наблюдения за потоком событий (в течение временного интервала $(0, t]$) вычисляются величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = \overline{1, n}$, и полагается $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$.

3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [51, 53] показано, что модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающего мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях поток становится рекуррентным.

Пусть теперь (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $\tau_k \geq 0$, $\tau_{k+1} \geq 0$. Их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, при этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ [51, 53]:

$$\begin{aligned}
p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\
p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + C_T \left[z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)} \right] \left[z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\
C_T &= q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta)] [(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0)]}{[(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)F(T)]^2} \times \\
&\times \left\{ z_1 z_2 - [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} + [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2)] e^{-2(\beta_1 + \beta_2)T} \right\},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2, q, F(T)$ определены в (1), $p_T(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Теоретическая ковариация значений τ_1 и τ_2 запишется в виде [56]:

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[\int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2. \tag{4}$$

Подставляя (1), (3) в (4), находим явный вид теоретической ковариации

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T, \tag{5}$$

где C_T определена в (3).

Пусть за время наблюдения за потоком (в течение временного интервала $(0, t]$) реализовалось n интервалов (t_k, t_{k+1}) длительности $\tau_k, k = \overline{1, n}$. Введем статистику:

$$\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \tag{6}$$

являющуюся оценкой теоретической ковариации (5). Тогда, согласно методу моментов [55], уравнение моментов, учитывающее коррелированность потоков событий, запишется в виде

$$\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T = \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражение для C_T из (3), вводя новую переменную $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ и проделывая при этом необходимые преобразования, находим (7) в виде

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \tag{8}$$

$$h = \frac{q}{[z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2)]^2} (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta)] [(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0)],$$

$$a_0 = h \{ z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2) [\lambda_1(1-p) + \lambda_2] \}; \quad a_1 = - \{ h [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] + q^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \},$$

$$a_2 = z_1 z_2 \{ h + 2q \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \}; \quad a_3 = -(z_1 z_2)^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2),$$

где $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2, q$ определены в (1).

Решение уравнения (8) определяет три корня x_1, x_2, x_3 , которые, в свою очередь, определяют три ММ-оценки длительности мертвого времени

$$\hat{T}_{MM}^{(i)} = - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Сформулируем алгоритм нахождения единственной оценки \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени:

1) Для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta, T$ осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока событий в течение времени моделирования T_m .

2) Результатом работы имитационной модели является выборка $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ длительностей интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока, где n принимает одно из целых значений ($n \geq 2$). По данной выборке строится оценка теоретической ковариации (6).

3) Решается кубическое уравнение (8) [57], т.е. находятся корни x_1, x_2, x_3 ; рассматривается случай $a_0 \neq 0$.

4) Далее возможны три случая:

4.1) Вещественный корень один – x_1 , при этом x_2, x_3 – комплексно сопряженные корни, тогда:

а) если $x_1 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 > 0$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$;

б.3) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

4.2) Вещественных корней три, при этом $x_2 = x_3$, т.е. вещественных различных корней два – x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), тогда:

а) если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 \leq 0 < x_2$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; б.3) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

в) если $0 < x_1 < x_2$, то: в.1) если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; в.3) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2$; в.4) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.5) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$; в.6) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

4.3) Вещественных корней три – x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), тогда:

а) если $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; б.3) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

в) если $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$, то: в.1) если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; в.3) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2$;

в.4) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.5) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$;

в.6) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

г) если $0 < x_1 < x_2 < x_3$, то: г.1) если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; г.3) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2$; г.4) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/3$;

г.5) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.6) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; г.7) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2$; г.8) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.9) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$;

г.10) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

В результате работы алгоритма осуществляется один из описанных вариантов, тем самым определяется единственная ММ-оценка длительности мертвого времени \hat{T}_{MM} .

4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени

В настоящем разделе приводятся результаты статистических экспериментов по вычислению оценок длительности мертвого времени методом моментов и методом максимального правдоподобия для

различных значений параметров модулированного обобщенного полусинхронного потока событий. Приведенный в разделе 3 алгоритм нахождения единственной оценки \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени положен в основу реализации программы расчета. Программа расчета реализована на языке программирования С# в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2015 в виде пользовательского приложения и интерфейса командной строки.

Эксперимент заключается в следующем: 1) при заданных значениях параметров потока $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta, T$ и заданном времени моделирования T_m осуществляется имитационное моделирование потока и как результат – получение истинной траектории интенсивности процесса $\lambda(t)$ и последовательности значений длительностей временных интервалов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ($n = 2, 3, \dots$); описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит; 2) находится оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ ($\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$); 3) вычисляется статистика (6), решается уравнение (8) и осуществляется реализация алгоритма нахождения единственной оценки \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени методом моментов; 4) осуществляется повторение N раз ($j = \overline{1, N}$) шагов 1–3 для получения выборок достаточного объема.

Результатом выполнения описанного алгоритма являются две выборки: $(\hat{T}_{МП}^{(1)}, \hat{T}_{МП}^{(2)}, \dots, \hat{T}_{МП}^{(N)})$, $(\hat{T}_{MM}^{(1)}, \hat{T}_{MM}^{(2)}, \dots, \hat{T}_{MM}^{(N)})$, на основании которых вычисляются выборочные средние

$$\hat{T}_{МП} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_{МП}^{(j)}, \quad \hat{T}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_{MM}^{(j)},$$

выборочные дисперсии

$$\hat{D}_{МП} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{МП}^{(j)} - \hat{T}_{МП} \right)^2, \quad \hat{D}_{MM} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{MM}^{(j)} - \hat{T}_{MM} \right)^2$$

и выборочные вариации получаемых оценок

$$\hat{V}_{МП} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{МП}^{(j)} - T \right)^2, \quad \hat{V}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{MM}^{(j)} - T \right)^2.$$

Первый эксперимент проведен для большого числа параметров модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при различных значениях длительности мертвого времени $T = 0,5, 1, 1,5, \dots, 7, 9$ и времени моделирования $T_m = 20, 30, \dots, 900, 1000$; объем выборки составляет $N = 100$. В качестве иллюстрации в табл. 1, 2 приведены результаты численного эксперимента для потока в зависимости от времени моделирования T_m при значениях параметров $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2$ и длительности мертвого времени $T = 0,5$. Время моделирования T_m изменяется от 20 до 1000.

Т а б л и ц а 1

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,5$)

T_m	20	30	40	50	100	200	300
$\hat{T}_{МП}$	0,63132	0,58855	0,57871	0,55004	0,52809	0,51379	0,50708
$\hat{D}_{МП}$	0,025561	0,006909	0,006602	0,003162	0,000805	0,000185	0,000036
$\hat{V}_{МП}$	0,04255	0,01468	0,01273	0,00563	0,00159	0,00037	0,00009
\hat{T}_{MM}	0,63132	0,58486	0,57069	0,54497	0,52809	0,51379	0,50666
\hat{D}_{MM}	0,025561	0,008502	0,010998	0,006104	0,000805	0,000185	0,000059
\hat{V}_{MM}	0,04255	0,01562	0,01589	0,00807	0,00159	0,00037	0,00010

Результаты статистического эксперимента
 $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,5)$

T_m	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{T}_{МП}$	0,50539	0,50365	0,50415	0,50329	0,50304	0,50303	0,50263
$\hat{D}_{МП}$	0,000029	0,000018	0,000017	0,000012	0,000008	0,000008	0,000006
$\hat{V}_{МП}$	0,00006	0,00003	0,00003	0,00002	0,00002	0,00002	0,00001
$\hat{T}_{ММ}$	0,49601	0,49556	0,49990	0,50126	0,49666	0,49923	0,49473
$\hat{D}_{ММ}$	0,004414	0,002223	0,000958	0,000432	0,001628	0,000678	0,001648
$\hat{V}_{ММ}$	0,00439	0,00222	0,00095	0,00043	0,00162	0,00067	0,00166

Пример результата численного эксперимента в зависимости от длительности мертвого времени T приведен в табл. 3 при значениях параметров $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2$, в табл. 4 – при значениях параметров $\lambda_1 = 0,4, \lambda_2 = 0,1, \beta = 0,25, p = 0,2, \alpha = 0,25, \delta = 0,2$; время моделирования составляет $T_m = 1000$; объем выборки составляет $N = 100$. Длительность мертвого времени T изменяется от 0,5 до 9.

Таблица 3

Результаты статистического эксперимента
 $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T_m = 1000)$

T	0,5	1	1,5	2	3	5	7	9
$\hat{T}_{МП}$	0,50236	1,00257	1,50395	2,00493	3,00532	5,00769	7,01127	9,01534
$\hat{D}_{МП}$	0,000006	0,000006	0,000013	0,000021	0,000029	0,000047	0,000124	0,000178
$\hat{V}_{МП}$	0,00001	0,00001	0,00003	0,00005	0,00006	0,00011	0,00025	0,00041
$\hat{T}_{ММ}$	0,49671	0,99757	1,47580	1,99349	2,86230	4,91269	6,87790	8,67282
$\hat{D}_{ММ}$	0,002051	0,002533	0,039199	0,012995	0,334228	0,445407	0,885099	2,849317
$\hat{V}_{ММ}$	0,00204	0,00251	0,03939	0,01291	0,34985	0,44858	0,89116	2,92787

Таблица 4

Результаты статистического эксперимента
 $(\lambda_1 = 0,4, \lambda_2 = 0,1, \beta = 0,25, p = 0,2, \alpha = 0,25, \delta = 0,2, T_m = 1000)$

T	0,5	1	1,5	2	3	5	7	9
$\hat{T}_{МП}$	0,51837	1,01873	1,52102	2,02484	3,02529	5,03875	7,04114	9,05422
$\hat{D}_{МП}$	0,000257	0,000444	0,000463	0,000563	0,000631	0,001498	0,001451	0,002826
$\hat{V}_{МП}$	0,00059	0,00079	0,00090	0,00117	0,00126	0,00298	0,00313	0,00574
$\hat{T}_{ММ}$	0,51206	1,00293	1,49634	2,00921	2,93991	4,91482	6,80174	8,88871
$\hat{D}_{ММ}$	0,002442	0,008810	0,025294	0,022826	0,189082	0,511574	1,456847	1,366464
$\hat{V}_{ММ}$	0,00256	0,00873	0,02505	0,02268	0,19080	0,51371	1,48159	1,36518

Полученные результаты показывают, во-первых, достаточно высокое качество оценивания длительности мертвого времени; во-вторых, то, что при малом времени моделирования (T_m изменяется от 20 до 100) качество оценивания хуже по таким характеристикам, как выборочные средние, выборочные дисперсии и выборочные вариации, при этом по мере увеличения длительности времени моделирования (T_m изменяется от 100 до 1000) качество оценивания растет и при времени моделирования T_m от 500 и

выше наблюдается достаточная стабильность оценок (см. табл. 1, 2). В-третьих, при заданном значении времени моделирования T_m (T_m выбрано достаточно большим $T_m = 1000$ для обеспечения стабильности оценок) по мере увеличения длительности мертвого времени T качество оценивания становится хуже по таким характеристикам, как выборочные дисперсии и выборочные вариации (см. табл. 3, 4). И, наконец, оценка максимального правдоподобия по таким характеристикам, как выборочные дисперсии и выборочные вариации, оказывается лучше оценки, полученной методом моментов, по мере увеличения длительности мертвого времени T (T изменяется от 2 и выше) при фиксированном значении времени моделирования T_m (T_m выбрано достаточно большим ($T_m = 1000$) для обеспечения стабильности оценок) (см. табл. 3, 4).

Результаты второго статистического эксперимента приведены в табл. 5–8. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования T_m ($T_m = 10, 20, 30, \dots, 900, 1000$), во второй и третьей строках для каждой длительности имитационного моделирования T_m приведены численные значения выборочных вариаций $\hat{V}_{МП}$ и $\hat{V}_{ММ}$ соответственно. В четвертой строке таблицы приведены численные значения разности выборочных вариаций $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$. Численные результаты для всех таблиц получены для $N = 100$. Путем сравнения значений выборочных вариаций устанавливается, какая из оценок при заданных параметрах лучше, какая хуже: если $\hat{V}_{МП} < \hat{V}_{ММ}$, то МП-оценка лучше ММ-оценки, если, наоборот, $\hat{V}_{МП} > \hat{V}_{ММ}$, то ММ-оценка лучше МП-оценки. Отметим, что по определению оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных T_m будет всегда смещенная ($\tau_{\min} > T$); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $T_m \rightarrow \infty$.

Т а б л и ц а 5

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,4$)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,62307	0,05566	0,01911	0,00494	0,00542
$\hat{V}_{ММ}$	0,61807	0,05541	0,01790	0,00494	0,00542
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00500	0,00025	0,00121	0	0
T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00003	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001
$\hat{V}_{ММ}$	0,00163	0,00050	0,00183	0,00182	0,00168
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00160	-0,00049	-0,00181	-0,00181	-0,00167

Т а б л и ц а 6

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 0,7, \lambda_2 = 0,2, \beta = 0,5, p = 0,8, \alpha = 1, \delta = 0,5, T = 0,2$)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,40721	0,08531	0,04087	0,00871	0,00649
$\hat{V}_{ММ}$	0,40235	0,08448	0,04007	0,00911	0,00671
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00486	0,00083	0,00080	-0,00040	-0,00023
T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00003	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
$\hat{V}_{ММ}$	0,00083	0,00121	0,00121	0,00161	0,00161
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00080	-0,00120	-0,00120	-0,00160	-0,00160

Результаты статистического эксперимента

 $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,025, p = 0,5, \alpha = 0,025, \delta = 0,5, T = 2)$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	–	0,58607	0,28668	0,12089	0,06472
$\hat{V}_{ММ}$	–	0,58607	0,28668	0,12089	0,06472
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	–	0	0	0	0

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00025	0,00016	0,00012	0,00010	0,00009
$\hat{V}_{ММ}$	0,02417	0,07572	0,03765	0,00010	0,03319
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,02392	-0,07556	-0,03752	0	-0,03309

Результаты статистического эксперимента

 $(\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,4)$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,00163	0,00027	0,00014	0,00004	0,00004
$\hat{V}_{ММ}$	0,00387	0,00150	0,00255	0,00629	0,00338
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00224	-0,00123	-0,00241	-0,00625	-0,00334

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000019	0,00000015	0,00000013	0,00000012	0,00000010
$\hat{V}_{ММ}$	0,01108566	0,00667453	0,01380863	0,01520267	0,01732796
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,01109	-0,00667	-0,01381	-0,01520	-0,01733

Анализ приведенных численных результатов показывает: 1) при малых временах наблюдения T_m за потоком (при малых $T_m = 10, 20, \dots, 50$) и малых значениях $\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 < \lambda_1 \leq 1$ (в случае редкого потока) ММ-оценки лучше МП-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} > 0$) либо, по крайней мере, не хуже МП-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} = 0$), что является вполне естественным, так как при малых временах наблюдения оценка $\hat{T}_{МП}$ может быть достаточно сильно смещенной относительно T (см. табл. 5–7); 2) при больших временах наблюдения за потоком (при больших $T_m = 600, 700, \dots, 1000$) МП-оценки лучше ММ-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} < 0$) либо, по крайней мере, не хуже ММ-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} = 0$), что также является вполне естественным, так как при больших временах наблюдения смещение оценки $\hat{T}_{МП}$ относительно T уменьшается; 3) в остальных случаях оценка максимального правдоподобия $\hat{T}_{МП}$ оказывается лучше оценки $\hat{T}_{ММ}$, полученной методом моментов (см. табл. 5–8).

Заключение

По результатам проведенного исследования по сравнению оценок длительности мертвого времени методом моментов и методом максимального правдоподобия для различных значений параметров

модулированного обобщенного полусинхронного потока событий можно сделать вывод о том, что при малых временах наблюдения T_m за потоком и малых значениях $\lambda_1 \leq 1$, $\lambda_2 < \lambda_1 \leq 1$ (в случае редкого потока) предпочтительнее применять оценку \hat{T}_{MM} , полученную методом моментов; при больших временах наблюдения и / или больших значениях $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$ (в случае нередкого потока) – оценку \hat{T}_{MP} , полученную методом максимального правдоподобия. Кроме того, оценка максимального правдоподобия \hat{T}_{MP} по таким характеристикам, как выборочные дисперсии и выборочные вариации, оказывается лучше оценки \hat{T}_{MM} , полученной методом моментов, по мере увеличения длительности мертвого времени T при фиксированном значении времени моделирования T_m . Отдельно стоит отметить, что полученные результаты демонстрируют достаточно высокое качество оценивания длительности мертвого времени для обоих методов оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No 4. P. 923–930.
3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17(6). P. 66–73.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Cox D. R., Isham V. Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
7. Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. New York : Springer-Verlag, 1981.
8. Last G., Brandt A. Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. New York : Springer-Verlag, 1995.
9. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
10. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телеграфика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
11. Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A. Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science: Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011 (August 23–25, 2011, St. Petersburg, Russia). 2011. P. 428–439.
12. Bouzas P.R., Valderrama M.J., Aguilera A.M., Ruiz-Fuentes N. Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 50(10). P. 2655–2667.
13. Centanni S., Minozzo M. A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes // Journal of the American Statistical Association. 2006. V. 101. P. 1582–1597.
14. Dubois J.-P. Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper) // Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004. 2004. P. 116–119.
15. Hossain M.M., Lawson A.B. Approximate methods in Bayesian point process spatial models // Computational Statistics and Data Analysis. 2009. V. 53(8). P. 2831–2842.
16. Snyder D.L., Miller M.I. Random Point Processes in Time and Space. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
18. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // Automation and Remote Control. 1999. V. 60, No. 1. P. 41–51.
19. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
20. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий // Вестник ТюмГУ. 2008. № 6. С. 107–119.
21. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44–65.
22. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33–47.
23. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Solovev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.

24. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 10–21.
25. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 13–24.
26. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
27. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
28. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.
29. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
30. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
31. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 25–40.
32. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 54–63.
33. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
34. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 1.
35. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М. : Наука, 1969.
36. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988.
37. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes (Advanced textbooks in control and signal processing). London : Springer-Verlag, 2007.
38. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
39. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
40. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Известия вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
41. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
42. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. Russian Physics Journal. 2005. V. 48(10). P. 1039–1054.
43. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
44. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
45. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
46. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
47. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлеваемого мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
48. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
49. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 27–37.
50. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и MAP-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
51. Бахолдина М.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2(31). С. 4–17.

52. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. V. 487. P. 18–25.
53. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 13–27.
54. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. № 2(35). P. 13–29.
55. Шуленин В.П. Математическая статистика. Ч. 1: Параметрическая статистика : учеб. Томск : Изд-во НТЛ, 2012.
56. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие. М. : Высшая школа, 2000.
57. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1984.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 24 марта 2016 г.

Bakholdina Maria A., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Russian Federation).

Comparison of maximum likelihood method and moments method by estimating unextendable dead time period in the modulated semi-synchronous generalized flow of events.

Keywords: modulated semi-synchronous generalized flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); unextendable dead time; maximum likelihood method; moments method; dead time period duration.

DOI: 10.17223/19988605/36/2

In this paper we consider the modulated semi-synchronous generalized flow of events, which is one of the mathematical models for incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states 1, 2 (first, second correspondingly). In the first state $\lambda(t) = \lambda_1$ and in the second state $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). During the time interval of a random duration when the process $\lambda(t)$ is in the state λ_i ($\lambda(t) = \lambda_i$), a Poisson flow of events with intensity λ_i , $i = 1, 2$, arrives. The transition of the process $\lambda(t)$ from the first state to the second state is possible at any moment of a Poisson event occurrence in state, herewith the process $\lambda(t)$ can change its state to the second one with probability p ($0 \leq p \leq 1$) or can stay in state 1 with complementary probability $1 - p$. The transition of the process $\lambda(t)$ from state 1 to state 2 is also possible at any moment that does not coincide with the moment of a Poisson event occurrence, herewith the duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first state is distributed according to the exponential law with parameter β : $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Then the duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first state is distributed according to the exponential law with the distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-(\rho\lambda_1 + \beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. The transition of the process $\lambda(t)$ from the second state to the first state at the moment of a Poisson event occurrence in state 2 is impossible and can be done only at a random moment. In this case the duration of the process $\lambda(t)$ staying in state 2 is distributed according to the exponential law with parameter α : $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. At the moment when the state changes from the second to the first one, an additional event is assumed to be initiated with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$).

The registration of the flow events is considered in conditions of a constant (unextendable) dead time. The dead time period of a constant duration T begins after every registered event at the moment t_k , $k \geq 1$. During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next interval of a dead time of duration T and so on.

We assume that the flow parameters $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, are known and the duration of the dead time period T is not known. The main problems are to find the maximum likelihood and moments estimates of the dead time period duration on monitoring the time moments of the events occurrence in observable flow of events and further to compare the obtained estimates.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *Journal of Royal Statistical Society B*. 17. pp. 129-164. DOI: 10.2307/2983950
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-30.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 1. pp. 55-61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143

6. Cox, D. R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
7. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
8. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283–290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
10. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62-69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
11. Adamu, A., Gaidamaka, Y. & Samuylov, A. (2011) Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network. *Lecture Notes in Computer Science*. Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011. August 23–25, 2011. St. Petersburg, Russia. pp. 428-439.
12. Bouzas, P.R., Valderrama, M.J., Aguilera, A.M. & Ruiz-Fuentes, N. (2006) Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*. 50(10). pp. 2655–2667. DOI: 10.1016/j.csda.2005.04.015
13. Centanni, S. & Minozzo, M. (2006) A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association*. 101. pp. 1582–1597. DOI: 10.1198/016214506000000276
14. Dubois, J.-P. (2004) Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper). *Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004*. pp. 116-119.
15. Hossain, M.M. & Lawson, A.B. (2009) Approximate methods in Bayesian point process spatial models. *Computational Statistics and Data Analysis*. 53(8). pp. 2831-2842. DOI: 10.1186/1471-2288-11-133
16. Snyder, D.L. & Miller, M.I. (1991) *Random Point Processes in Time and Space*. Heidelberg: Springer-Verlag.
17. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) States estimation of the MC flow of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian)
18. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999a) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41-51.
19. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999b) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66. (In Russian)
20. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2008) Optimal'naya otsenka sostoyaniy asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy [Optimal estimation of the states of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta – The Bulletin of Tyumen State University*. 6. pp. 107-119.
21. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
24. Bakholdina, M.A. (2013) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
25. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13-24. (In Russian).
26. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9(29). pp. 1433-1451. DOI: 10.12988/ams.2015.5135
27. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
28. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control* 63(3). pp. 511-515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
29. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotechnics*. 10. pp. 8-16.
30. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy s initsirovaniem lishnego sobytiya [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145.
31. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2011) Optimal estimation of parameters of an asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 25-40. (In Russian).
32. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).

33. Gortsev, A.M. & Solovev, A.A. (2015) Otsenka maksimal'nogo pravdopodobiya dlitel'nosti neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni v potoke fizicheskikh sobytiy [Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141-149.
34. Feller, W. (1950) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [An introduction to probability theory and its applications]. Translated from English. Vol. I. New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc.
35. Bharucha-Reid, A.T. (1960) *Elementy teorii markovskikh protsessov i ikh prilozheniya* [Elements of the theory of Markov processes and their applications]. Translated from English by V. Kalashnikov, Yu. Krutovskiy, M. Epelman. Moscow: Nauka.
36. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
37. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time processes. (Advanced textbooks in control and signal processing)*. London: Springer-Verlag.
38. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nenablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 12. pp. 3-7.
39. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Otsenivanie perioda nenablyudaemosti i intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy [The estimation of intensity process and period of unobservability of the Poisson flow of events]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 2. pp. 8-11.
40. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13. DOI: 10.1007/BF02509672
41. Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy pri neprodlevayushchemya mertvom vremeni [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 10. pp. 35-49.
42. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 48(10). pp. 1039-1054. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y
43. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
44. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
45. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
46. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
47. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2010) Optimal states estimation of generalized semi-synchronous flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 50-60. (In Russian).
48. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
49. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
50. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
51. Bakholdina, M.A. (2015) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time and flow recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 4-17. (In Russian).
52. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
53. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13-27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
54. Bakholdina, M.A. Gortsev, A.M. (2015) Maximum likelihood estimation of unextendable dead time period duration in the modulated semi-synchronous generalized flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 13-29. (In Russian).
55. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika. Ch. I. Parametricheskaya statistika* [Mathematical statistics. P. 1. Parametric statistics]. Tomsk: NTL.
56. Ventsel, E.S. & Ovcharov, L.A. (2000) *Teoriya veroyatnostey i ee inzhenernye prilozheniya* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow: Vysshaya shkola.
57. Faddeev, D.K. (1984) *Leksii po algebra* [Lectures on Algebra]. Moscow: Nauka.

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/36/3

Д.В. Березин, Л.А. Нежелская

СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МОДУЛИРОВАННОМ МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Построены оценки длительности мертвого времени методом моментов и методом максимального правдоподобия. Проведены численные эксперименты по сравнению оценок, а также по выявлению зависимости качества оценок от параметров потока и времени наблюдения за потоком. Проведен анализ результатов.

Ключевые слова: модулированный МАР-поток событий; метод моментов; метод максимального правдоподобия; оценивание параметров; непродлевающееся мертвое время.

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий послужило стимулом к созданию важной сферы приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей и т.п. Интенсивность входящих потоков событий в системах и сетях массового обслуживания меняется со временем, как правило, случайно, поэтому возникает необходимость исследования математических моделей дважды стохастических потоков событий. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1]; ко второму классу относятся потоки с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [2–5]. Отметим, что МАР-потоки событий относятся ко второму классу дважды стохастических потоков и наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей [6].

При исследовании потоков событий выделяют два класса задач: оценивание состояний потока событий [7–10] и оценивание параметров потока [11–13] по наблюдениям за моментами наступления событий.

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий является мертвое время регистрирующих приборов, которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, наблюдению недоступны. Для того чтобы оценить потери заявок, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность. Отметим, что задачи оценки длительности мертвого времени рассматривались в статьях [14–20] для обобщенного асинхронного, обобщенного полусинхронного и модулированного МАР-потока событий.

В настоящей статье для решения задачи оценивания длительности мертвого времени используются метод моментов и метод максимального правдоподобия. При построении оценок применяются явный вид плотности вероятности значений длительности интервалов между соседними событиями, а также совместная плотность вероятности значений длительностей двух соседних интервалов между моментами наступления событий, которые получены в [19]. В работе описаны этапы построения ММ- и МП-оценок длительности мертвого времени. Приводятся численные результаты сравнения ММ- и МП-оценок и делается вывод о границах применимости рассмотренных методов для оценивания длительности мертвого времени при различных параметрах потока и времени наблюдения за потоком.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ и $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии, $i = 1, 2$, определяется дву-

мя случайными величинами: 1) первая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(1)} = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью единица из i -го состояния в j -е, $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$); 2) вторая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(2)} = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ в j -е состояние ($i \neq j$) с наступлением события, либо с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ переходит в j -е состояние ($i \neq j$) без наступления события, либо с вероятностью $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ остается в i -м состоянии с наступлением события ($P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$).

Первая и вторая случайные величины являются независимыми друг от друга. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{array} \right\| = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|.$$

Элементами матрицы \mathbf{D}_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы \mathbf{D}_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы \mathbf{D}_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного модулированного МАР-потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. Пример возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1 и 2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, жирной линией обозначены длительности мертвого времени; черными кружками обозначены события модулированного МАР-потока, недоступные наблюдению.

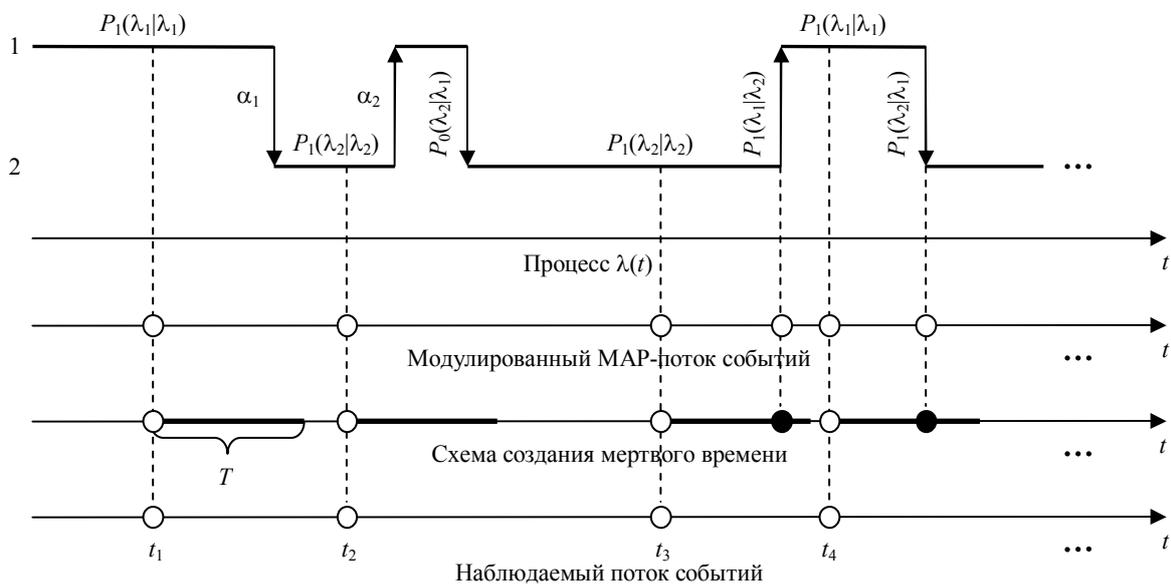


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

В силу предпосылок в моменты t_1, t_2, \dots, t_k последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k – момента наступления события потока, $k = 1, 2, \dots$. Так как процесс $\lambda(t)$ принципиально ненаблюдаем, то необходимо по моментам наступления событий t_1, t_2, \dots, t_k построить оценку длительности мертвого времени T методом моментов и методом максимального правдоподобия и провести сравнительный анализ полученных оценок.

2. МП-оценка длительности мертвого времени

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает зависимость плотности вероятности от длительности мертвого времени). Вследствие этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю, что то же самое, момент наступления событий наблюдаемого события потока есть $\tau = 0$. Тогда [20] плотность вероятности примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T; \\ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$f(T) = A + \{ \lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) \} \frac{\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2}{F(T)} e^{-(\beta_1 + \beta_2)T},$$

$$F(T) = \lambda_1 \lambda_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) + \lambda_1 \alpha_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) + \lambda_2 \alpha_1 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) - \lambda_1 \lambda_2 P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T},$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \lambda_1 (1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)), \quad \beta_2 = \alpha_2 + \lambda_2 (1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)), \quad A = P_1 + P_2,$$

$$P_1 = \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)),$$

$$P_2 = \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)),$$

$$P = P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_1(\lambda_2 | \lambda_1),$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4(\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))} \right],$$

$$0 < z_1 < z_2. \quad (1)$$

Отметим, что в (1) функция $F(T) > 0$ для любых T , $0 \leq T \leq \tau$.

Пусть τ_1, \dots, τ_k – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1, \dots, τ_k по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \dots < \tau^{(k)}$. В сделанных предположениях наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента t_k , $k = 1, 2, \dots$. С учетом (1) функция правдоподобия [20] запишется в виде

$$L(\lambda_i, \alpha_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_j | \lambda_j), P_0(\lambda_j | \lambda_i), T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad 0 \leq \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_j | \lambda_j), P_0(\lambda_j | \lambda_i), T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{l=1}^k p_T(\tau^{(l)}), \quad \tau_{\min} \geq T.$$

Поставленная задача заключается в построении оценки длительности мертвого времени в предположении, что все остальные параметры потока λ_i , α_i , $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$, $P_1(\lambda_j | \lambda_j)$, $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, известны. В этой связи согласно методу максимального правдоподобия ее реализация заключается в решении оптимизационной задачи

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{l=1}^k p_T(\tau^{(l)}) =$$

$$= \prod_{l=1}^k \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau^{(l)}-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau^{(l)}-T)} \Rightarrow \max_T, \quad \tau_{\min} \geq T \geq 0, \quad (2)$$

где $f(T)$, β_1 , β_2 , z_1 , z_2 определены в (1).

Значение T , при котором (2) достигает своего глобального максимума, является оценкой максимального правдоподобия $\hat{T}_{МП}$ длительности мертвого времени.

В [20] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): при любых значениях параметров модулированного МАР-потока событий $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, α_1 , α_2 , $P_1(\lambda_i | \lambda_i) + P_1(\lambda_j | \lambda_j) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, МП-оценка $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$. Итак, в процессе наблюдения за потоком событий вычисляются величины τ_k , $k = 1, \dots, n$, после чего находится $\tau_{\min} = \min \tau_k$ и полагается $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$.

3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [19] показано, что модулированный МАР-поток событий в общем случае является коррелированным и только в частных случаях становится рекуррентным.

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, – значения длительностей смежных k -го и $k+1$ -го интервалов между соседними событиями потока. В силу стационарности потока можно положить $k = 1$ и рассматривать длительности интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$. Тогда $\tau_1 = 0$ – моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятности значений длин соседних интервалов между моментами наступления событий $p_T(\tau_1, \tau_2)$ имеет вид [19]:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T;$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + f(T)(1 - f(T))e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \times \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2)P_1(\lambda_2 | \lambda_1)] \times \\ \times [z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}] [z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}], \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \quad (3)$$

где $f(T)$, $p_T(\tau_1)$, $p_T(\tau_2)$ определены в (1) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$.

Ковариация значений длительностей соседних интервалов между моментами наступления событий имеет вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left(\int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right)^2.$$

Подставляя $p_T(\tau_1, \tau_2)$ из (3) и $p_T(\tau)$ из (1), найдем явный вид теоретической ковариации

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} f(T)(1 - f(T)) \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^2, \quad (4)$$

где P , $f(T)$, β_1 , β_2 определены в (1).

Пусть за время наблюдения за потоком реализовалось n интервалов (t_k, t_{k+1}) длительности τ_k . Введем статистику:

$$\hat{c}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (5)$$

которая является оценкой теоретической ковариации (4) значений длин соседних интервалов между моментами наступления событий потока. Тогда, основываясь на методе моментов, запишем уравнение моментов для определения оценки длительности мертвого времени, учитывающее коррелированность модулированного МАР-потока событий, в виде

$$\hat{c}_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} f(T)(1 - f(T)) \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^2. \quad (6)$$

Подставляя в (6) явный вид $f(T)$ из (1), вводя обозначение $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ и проделывая необходимые преобразования, получим кубическое уравнение относительно x

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (7)$$

$$a = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \lambda_2 \lambda_1 P \times \\ \times [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2))],$$

$$b = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \lambda_2 \lambda_1 P \times \\ \times [(\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) - 2z_1 z_2] - \hat{c}_0 z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2)^2 (\lambda_2 \lambda_1 P)^2,$$

$$c = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \lambda_2 \lambda_1 P z_1 z_2 + 2\hat{c}_0 \lambda_2 \lambda_1 P (\beta_1 + \beta_2)^2 (z_1 z_2)^2,$$

$$d = -\hat{c}_0 (\beta_1 + \beta_2)^2 (z_1 z_2)^3,$$

P , P_1 , P_2 , β_1 , β_2 , z_1 , z_2 определены в (1).

Решив уравнение (7), найдем 3 корня x_1 , x_2 , x_3 . Учитывая обозначение $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$, выразим T :

$$\hat{T}_{MM}^{(l)} = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln(x_l), l = \overline{1,3}. \quad (8)$$

Так как $T > 0$, то x_l – действительное число, $0 < x_l < 1$. Если среди $\hat{T}_{MM}^{(l)}$, $l = \overline{1,3}$, полученных из (8), есть несколько значений $\hat{T}_{MM}^{(l)} > 0$, то единственная оценка \hat{T}_{MM} выбирается следующим образом: если имеется один корень $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$; если имеется j корней $\hat{T}_{MM}^{(l)}$, $2 \leq j \leq 3$, $l = \overline{1,j}$, удовлетворяющих условию $0 < \hat{T}_{MM}^{(l)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \frac{1}{j} \sum_{l=1}^j \hat{T}_{MM}^{(l)}$; во всех остальных случаях $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

4. Результаты численных расчетов

Для получения численных расчетов и сравнения качества МП- и ММ-оценок были проведены статистические эксперименты, предполагающие следующие этапы: 1) для определенного набора параметров λ_i , α_i , $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$, $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$, $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, T единиц времени и заданном времени модулирования $t_{\text{мод}}$ единиц осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока событий (i -й опыт); результатом работы модели является последовательность значений τ_1, \dots, τ_k , $k = 1, 2, \dots$; 2) в i -м опыте находится $T_{MP}^{(i)} = \tau_{\min}$ ($\tau_{\min} = \min(\tau_j)$, $j = \overline{1,k}$), рассчитывается оценка (5), решается уравнение (7), реализуется алгоритм нахождения единственной оценки $\hat{T}_{MP}^{(i)}$; 3) значения $\hat{T}_{MP}^{(i)}$ и $\hat{T}_{MM}^{(i)}$ запоминаются, i увеличивается на единицу, алгоритм переходит на шаг 1. Шаги 1–3 повторяются N раз.

Результатом описанного выше алгоритма являются две выборки $\hat{T}_{MP}^{(1)}, \dots, \hat{T}_{MP}^{(N)}$ и $\hat{T}_{MM}^{(1)}, \dots, \hat{T}_{MM}^{(N)}$ оценок мертвого времени T в N опытах. По этим выборкам строятся выборочные средние $\hat{M}(\hat{T}_{MP}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_{MP}^{(i)}$ и $\hat{M}(\hat{T}_{MM}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_{MM}^{(i)}$, а также выборочные вариации $\hat{V}_{MP} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_{MP}^{(i)} - T)^2$ и $\hat{V}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_{MM}^{(i)} - T)^2$, где T – истинное значение длительности мертвого времени. Далее вычисляется значение $\Delta \hat{V} = \hat{V}_{MP} - \hat{V}_{MM}$; если $\Delta \hat{V} > 0$, то ММ-оценка в данном эксперименте будет признана лучшей, если же $\Delta \hat{V} < 0$, то лучше оценка максимального правдоподобия \hat{T}_{MP} .

В группе экспериментов, рассмотренной ниже, исследуется зависимость качества оценок от времени моделирования $t_{\text{мод}}$ и значений параметра λ_2 . Эксперименты проводились таким образом, что значения всех параметров, за исключением $t_{\text{мод}}$ и λ_2 , фиксировались и оставались неизменными. Количество опытов $N = 10\,000$. Исходные данные для экспериментов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для экспериментов

$\lambda_1 = 1$	$\alpha_1 = 0,1$	$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0$	$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,9$	$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,1$
$T = 0,2$	$\alpha_2 = 0,1$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,8$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,1$

Результаты эксперимента при фиксированном значении $\lambda_2 = 0,2$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты первого эксперимента при $\lambda_2 = 0,2$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{MP})$	0,829	0,836	0,776	0,716	0,602	0,528	0,491	0,440
$\hat{M}(\hat{T}_{MM})$	0,861	0,884	0,802	0,730	0,604	0,527	0,486	0,428
\hat{V}_{MM}	0,969	1,098	1,065	1,039	0,696	0,400	0,358	0,218
\hat{V}_{MP}	0,958	1,278	1,186	1,120	0,740	0,434	0,364	0,189
$\Delta \hat{V}$	-0,011	0,180	0,120	0,081	0,044	0,033	0,006	-0,029

Для значения $\lambda_2 = 0,3$ результаты эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты первого эксперимента при $\lambda_2 = 0,3$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,729	0,685	0,598	0,509	0,448	0,396	0,371	0,350
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,751	0,701	0,596	0,503	0,435	0,386	0,359	0,335
$\hat{V}_{ММ}$	0,715	0,718	0,553	0,366	0,223	0,130	0,102	0,087
$\hat{V}_{МП}$	0,719	0,779	0,564	0,353	0,195	0,114	0,080	0,060
$\Delta\hat{V}$	0,004	0,061	0,011	-0,013	-0,028	-0,016	-0,022	-0,027

Для значения $\lambda_2 = 0,4$ результаты эксперимента представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты первого эксперимента при $\lambda_2 = 0,4$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,660	0,574	0,484	0,418	0,369	0,340	0,325	0,312
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,677	0,575	0,478	0,408	0,358	0,332	0,311	0,296
$\hat{V}_{ММ}$	0,537	0,436	0,289	0,190	0,094	0,062	0,058	0,049
$\hat{V}_{МП}$	0,578	0,447	0,270	0,169	0,076	0,047	0,030	0,022
$\Delta\hat{V}$	0,041	0,011	-0,019	-0,021	-0,019	-0,015	-0,028	-0,027

Результаты эксперимента при фиксированном значении $\lambda_2 = 0,5$ приведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты первого эксперимента при $\lambda_2 = 0,5$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,601	0,500	0,412	0,363	0,328	0,308	0,298	0,282
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,609	0,501	0,408	0,356	0,320	0,298	0,286	0,273
$\hat{V}_{ММ}$	0,436	0,308	0,151	0,092	0,055	0,041	0,037	0,025
$\hat{V}_{МП}$	0,450	0,308	0,154	0,083	0,039	0,023	0,018	0,012
$\Delta\hat{V}$	0,014	0,000	0,003	-0,010	-0,017	-0,018	-0,019	-0,013

Как видно из результатов, при малых значениях времени моделирования и параметра λ_2 метод моментов дает лучшие результаты. Но при увеличении времени моделирования и параметра λ_2 МП-оценка оказывается лучше. Это объясняется следующим: чем больше время наблюдения за потоком, тем больше событий наступает в наблюдаемом потоке и $\hat{M}(\hat{T}_{МП})$ стремится к значению T ; при увеличении параметра λ_2 событий также наступит больше и разница $\hat{M}(\hat{T}_{МП}) - T$ становится меньше.

В следующем эксперименте исследуется качество оценок при больших временах наблюдения за потоком: $t_{\text{мод}} = 100, \dots, 600$. Исходные данные для эксперимента представлены в табл. 6, $\lambda_2 = 0,3$.

Таблица 6

Результаты второго эксперимента

$t_{\text{мод}}$	100	200	300	400	500	600
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,278	0,259	0,255	0,258	0,260	0,265
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,255	0,226	0,217	0,213	0,210	0,209
$\hat{V}_{ММ}$	0,0421	0,0433	0,0475	0,0573	0,0656	0,0781
$\hat{V}_{МП}$	0,0067	0,0014	0,0006	0,0003	0,0002	0,0002
$\Delta\hat{V}$	-0,0353	-0,0419	-0,0469	-0,0570	-0,0654	-0,0780

Результаты показывают, что при больших временах наблюдения за потоком МП-оценка оказывается лучше ММ-оценки и значение МП-оценки с ростом времени приближается к истинному значению длительности мертвого времени T .

Заключение

В данной статье представлен вывод МП- и ММ-оценки длительности мертвого времени для модулированного МАР-потока событий, где в качестве статистики используется ковариация длин соседних интервалов между моментами наступления событий. Приведено правило отбора единственной ММ-оценки. Поставлены численные эксперименты по сравнению полученных оценок, а также по выявлению зависимости качества оценок от параметров потока, проведен анализ численных результатов. Результаты показывают, что при малом времени наблюдения за потоком (10–25 единиц) и при малом параметре λ_2 потока ($\lambda_2 < 0,5$) оценка, полученная методом моментов, дает лучшие результаты по сравнению с МП-оценкой. Но при увеличении параметра λ_2 или времени наблюдения МП-оценка оказывается более точной, чем ММ-оценка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. № 16. С. 764–779.
5. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. No. 7. P. 1–46.
6. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
8. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
9. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2. С. 88–101.
10. Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computers and Information Sciences. 2014. V. 487. P. 342–350.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
13. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
14. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
15. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
16. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
17. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
18. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.

19. Нежелская Л.А. Условия рекуррентности потока физических событий при непродлеваемом мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 12. С. 168–175.
20. Нежелская Л.А. Оценивание длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий методом максимального правдоподобия // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 5. С. 43–53.

Березин Дмитрий Владимирович. E-mail: berezin14@mail.ru

Томский государственный университет

Нежелская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ludne@mail.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 24 апреля 2016 г.

Berezin Dmitriy V., Nezhel'skaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Comparison of MM- and ML-estimators of dead time period in modulated MAP.

Keywords: modulated MAP; method of moments; method of maximum likelihood; parameters estimation; non-extendable dead time.

DOI: 10.17223/19988605/36/3

This paper considers the modulated MAP, which rate is a piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: $\lambda(t) = \lambda_1$ and $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). The time when the process $\lambda(t)$ remains at the i -th state, $i = 1, 2$, depends on two random values: 1) the first random value has the exponential distribution function $F_i^{(1)} = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$, when the i -th state ends process $\lambda(t)$ transits with the probability equal one from the i -th state to the j -th one, $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$); 2) the second random value has the exponential distribution function $F_i^{(2)} = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; when the i -th state ends, process $\lambda(t)$ transits with the probability $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ from the i -th state to the j -th one ($i \neq j$) by a flow event occurs or $\lambda(t)$ transits with the probability $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ from the i -th state to the j -th ($i \neq j$) by an event does not occur, or the process $\lambda(t)$ transits with the probability $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ from the i -th state to the i -th one by a flow event occurs. Here $P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. The block transition rate matrix for the process $\lambda(t)$ is as follows:

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{array} \right\| = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|.$$

Occurring an event generates the period of time called dead time, during which the flow cannot be observed. After this period ends, a new event also generates dead time. Having only a sample (t_1, \dots, t_n) of events moments, we need to estimate the dead time period applying the two methods: method of maximum likelihood and method of moments.

The ML-estimator can be found by maximizing the following function:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{l=1}^k p_T(\tau^{(l)}) \Rightarrow \max_T, \tau_{\min} \geq T \geq 0.$$

The moments equation is as follows:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} f(T) (1 - f(T)) \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^2,$$

where the sample covariance is on the left part of the equation and the theoretical covariance is on the right one. The estimator of the dead time period can be obtained by solving the equation above.

To compare the results of dead time period estimation for the two methods and to find dependencies between estimates quality and process parameters, the numerical experiments was performed. The results show that MM-estimate is better than ML-estimate when the observability time is small enough (10-25 points) and the parameter λ_2 is also small ($\lambda_2 < 0,5$). But as observability time or parameter λ_2 increases, ML-estimate becomes better than MM-estimator.

REFERENCES

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 55-61.
4. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
5. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1-46.
6. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
7. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian).
8. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka soobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.

9. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88-101. (In Russian).
10. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computers and Information Sciences*. 487. pp. 342-350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
11. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
13. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
14. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
15. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32-42. (In Russian).
16. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
17. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
18. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of dead in a generic semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23-32. DOI: 10.17223/19988605/32/3
19. Nezhelskaya, L.A. (2015) Conditions of recurrency of physic flow of events with unprolonging dead time. *Russian Physics Journal*. 58(12). pp. 168-175.
20. Nezhelskaya, L.A. (2016) Estimation of dead time value in physic flow of events by method of moments. *Russian Physics Journal*. 59(5). pp. 43-53.

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/36/4

Г.А. Медведев

ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК ДОХОДНОСТИ

Рассматриваются маргинальные плотности вероятностей процессов диффузионного типа, порождаемых шестнадцатью моделями краткосрочных процентных ставок, допускающих получение плотностей в аналитической форме. Это семейство охватывает практически все используемые в настоящее время модели непрерывного времени. Некоторые плотности (Васичека, Кокса–Ингерсолла–Росса, геометрического броуновского движения, Ана–Гао) хорошо изучены в литературе и приведены здесь для удобства сравнения. Другие плотности описываются впервые. Основное внимание уделяется аналитическим свойствам плотностей и четырем их первым моментам (математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс), чаще всего интересующим практиков. В основном рассматривались стационарные плотности и моменты, хотя несколько моделей порождают нестационарные процессы.

Ключевые слова: процентные ставки; плотности вероятностей; числовые характеристики.

Процессы краткосрочных процентных ставок порождают изменения многих рыночных индексов, а также лежат в основе определения стоимости рыночных активов и торговых контрактов. Особую роль они играют при расчетах временной структуры доходности. Поэтому разработка математических моделей таких процессов крайне интересна для финансовых аналитиков и исследователей рыночных проблем. Существует много версий изменения краткосрочных безрисковых процентных ставок в рамках теории диффузионных процессов. Однако до сих пор нет такой модели, которая была бы основой для построения временной структуры доходности, близкой к существующей на реальном финансовом рынке. Представляет интерес проанализировать эти модели с целью выяснения их особенностей в вероятностном смысле более подробно, чем это делалось их создателями и пользователями. Здесь будет сделан такой анализ для семейства моделей, использованных авторами трех широко известных статей [1–3], при их подгонке к реальным временным рядам доходности. Все рассматриваемые модели относятся к классу диффузионных, порождающих процессы $X(t)$, описываемые уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где конкретное задание дрейфа $\mu(x)$ и волатильности $\sigma(x)$ определяет ту или иную конкретную модель.

Некоторые модели, такие как модели Васичека, Кокса–Ингерсолла–Росса, геометрического броуновского движения, Ана – Гао, достаточно полно описаны в имеющейся литературе, но тем не менее их свойства приведены здесь для удобства сравнения с другими, менее известными или не исследованными моделями. Предлагаемый читателю анализ будет полезен для выяснения наиболее подходящих моделей краткосрочной ставки при определении временной структуры бескупонной доходности, приближающей реально наблюдаемую, по возможности, наилучшим образом.

Схема анализа сводится к тому, что с помощью прямого уравнения Колмогорова выводится стационарная плотность вероятностей, при необходимости обсуждаются ее особенности и вычисляются первые четыре момента, обычно интересных на практике. Для рассмотренных моделей коэффициенты асимметрии и эксцесса, определяемые моментами третьего и четвертого порядка, зависят от единственного параметра, называемого параметром формы плотности, который, в свою очередь, определяется только отношением дисперсии к квадрату математического ожидания (это соответствует квадрату так называемого коэффициента вариации).

1. Модель Васичека

Для $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$ получается процесс Орнштейна–Уленбека, в финансовой литературе обычно называемый моделью Васичека [4]. Плотность распределения вероятностей для этого процесса является нормальной с математическим ожиданием $E[X] = \theta$ и дисперсией $\text{Var}[X] = \sigma^2/2k$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-k \frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}}. \quad (2)$$

2. Модель CIR

Для функций дрейфа и волатильности $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$ получаем неотрицательный процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$, в финансовой литературе известный под названием модель Кокса–Ингерсолла–Росса (модель CIR) [5].

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kDr(t)/\theta} dW(t),$$

где θ и D – стационарные математическое ожидание и дисперсия соответственно.

Процесс CIR имеет гамма-распределение G с параметром масштаба $c = 2k/\sigma^2$ и параметром формы $q = 2k\theta/\sigma^2$: $X(t) \sim G(2k/\sigma^2, 2k\theta/\sigma^2)$, так что

$$f(x) = \frac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx}, \quad q > 0, x > 0. \quad (3)$$

Моменты этого распределения вычисляются по формуле

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+q)}{c^m \Gamma(q)},$$

а важные числовые характеристики, такие как математическое ожидание $E[X]$, дисперсия $\text{Var}[X]$, коэффициенты асимметрии S и эксцесса K , имеют вид

$$\begin{aligned} E[X] &= q/c = \theta, \\ \text{Var}[X] &\equiv D = q/c^2 = \sigma^2 \theta / 2k, \\ S &\equiv \frac{E[(X - E[X])^3]}{\text{Var}[X]^{3/2}} = 2\sqrt{q}, \\ K &\equiv \frac{E[(X - E[X])^4]}{\text{Var}[X]^2} = 3 + 6/q. \end{aligned}$$

Если обозначить отношение дисперсии к квадрату математического ожидания символом ω , $\omega = \frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}$, то $q = \frac{1}{\omega}$. В дальнейшем при сравнении свойств плотностей удобнее использовать зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ вместо $S(q)$ и $K(q)$, так как довольно абстрактные параметры формы q для разных моделей по-разному зависят от вполне физически понятного отношения ω .

3. Модель Даффи–Кана

В модели Даффи–Кана [6] ставка $r(t)$ порождается уравнением с $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma(x) = \sqrt{\gamma x + \delta} \equiv \sqrt{2kD \frac{x-r_0}{\theta-r_0}}$:

$$dr(t) = (\alpha r(t) + \beta)dt + \sqrt{\gamma r(t) + \delta} dW(t), \quad \gamma r(0) + \delta > 0,$$

где $k = -\alpha > 0$, $\theta = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, $D = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{2\alpha^2} > 0$, $r_0 = -\frac{\delta}{\gamma} < \theta$.

Процесс $r(t)$ имеет стационарную плотность вероятностей $f(x)$, которая является сдвинутой плотностью гамма с параметром сдвига r_0 , параметром формы q и параметром масштаба c , т.е.

$$f(x) = \frac{c^q (x - r_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-c(x-r_0)}, \quad r_0 < x < \infty, \quad (4)$$

где $q = (\theta - r_0)^2 / D$, $c = (\theta - r_0) / D > 0$, r_0 – предельное нижнее значение процентной ставки $r(t)$.

Важные числовые характеристики стационарной плотности:

$$E[X] = q/c = \theta, \quad \text{Var}[X] \equiv D = q/c^2, \\ S = 2\sqrt{q}, \quad K = 3 + 6/q.$$

Здесь также $q = 1/\omega$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для моделей CIR (1985) и Даффи–Кана одинаковы и представлены на рис.1, где сплошной линией показан коэффициент асимметрии $S(\omega)$, а прерывистой – коэффициент эксцесса $K(\omega)$. В таком же стиле будут показаны зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ на последующих рисунках.

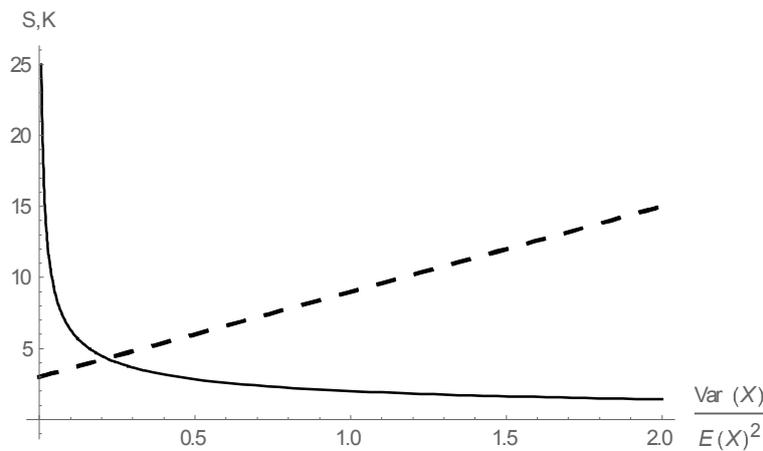


Рис. 1. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для моделей CIR (1985) и Даффи–Кана

Заметим, что только у моделей CIR (1985) и Даффи–Кана из рассмотренных в статье моделей коэффициент асимметрии уменьшается с ростом отношения дисперсии к квадрату математического ожидания ω .

4. Модель Лонгстаффа

Модель Лонгстаффа [7] иногда называется моделью «с двойным корнем» и определяется диффузионным процессом с функциями дрейфа и диффузии $\mu(x) = k(\theta - \sqrt{x})$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$:

$$dr(t) = k(\theta - \sqrt{r(t)}) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t).$$

Такая модификация модели CIR приводит к тому, что плотность вероятностей процесса приобретает вид

$$f(x) = \frac{(2c)^{2q} x^{q-1}}{2\Gamma(2q)} e^{-2c\sqrt{x}}, \quad q > 0, \quad x > 0.$$

В этой модели параметр масштаба $c = 2k/\sigma^2$, а параметр формы $q = 2k\theta/\sigma^2$. Числовые характеристики процесса вычисляются по формулам

$$E[X] = \frac{q(1+2q)}{2c^2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{q(1+2q)(3+4q)}{4c^4}, \\ S = \frac{30 + 68q + 40q^2}{\sqrt{q(1+2q)}(3+4q)^{3/2}} > 0,$$

$$K = 3 \frac{210 + 629q + 674q^2 + 288q^3 + 32q^4}{q(1+2q)(3+4q)^2} > 3.$$

Для этой модели $q = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{\omega} + \frac{16}{\omega^2}} - 1 \right)$. Соответствующие зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ представлены на рис. 2.

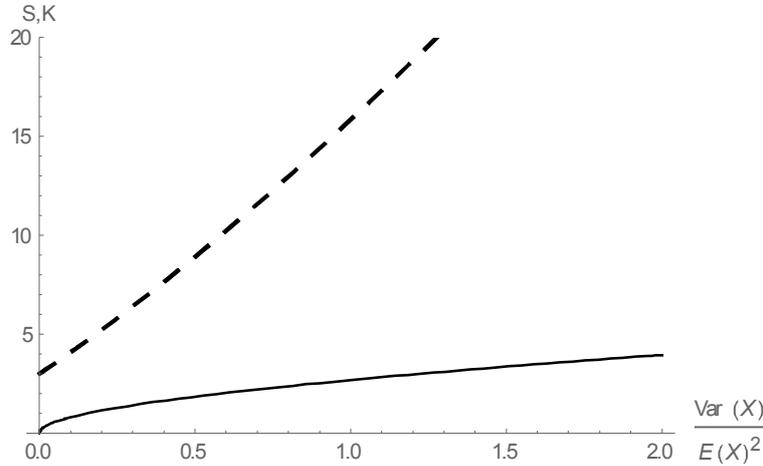


Рис. 2. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели Лонгстаффа

5. Модель Ана–Гао

В модели Ана–Гао [2] принимается, что дрейф и волатильность являются нелинейными $\mu(x) = k(\theta - x)x$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$. Процесс имеет стационарную плотность, имеющую вид

$$f(x) = \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{1+q}} e^{-c/x}, \quad x > 0, \quad (5)$$

где параметр масштаба $c = 2k\theta/\sigma^2$, параметр формы $q = 2 + 2k/\sigma^2$. Такой процесс получается из процесса CIR преобразованием $X_{AG} = 1/X_{CIR}$. Моменты $E[X^m]$ существуют только при условии, что $m < q$:

$$E[X^m] = c^m \frac{\Gamma(q-m)}{\Gamma(q)}.$$

Поэтому числовые характеристики стационарной плотности процесса определяются формулами

$$\begin{aligned} E[X] &= c/(q-1) = 2k\theta/(2k + \sigma^2), \\ \text{Var}[X] &= c^2/(q-1)^2(q-2) = 2k\sigma^2\theta^2/(2k + \sigma^2)^2, \\ S &= 4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}, \quad q > 3; \quad K = 3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-3)(q-4)} > 3, \quad q > 4. \end{aligned}$$

6. Модель Бреннана–Шварца

В модели Бреннана–Шварца [8] предполагается, что $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^2$. Такое задание дрейфа и диффузии приводит к плотности вероятностей диффузионного процесса

$$f(x) = \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{1+q}} e^{-c/x}, \quad x > 0,$$

где параметр формы $q = 1 + 2k/\sigma^2$ и параметр масштаба $c = 2k\theta/\sigma^2$. У этого процесса существуют моменты $E[X^m]$, если $m < q$:

$$E[X^m] = c^m \frac{\Gamma(q-m)}{\Gamma(q)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E[X] &= c/(q-1) = \theta, \\ \text{Var}[X] &= c^2/(q-2)(q-1)^2 = \theta^2 \sigma^2 / (2k - \sigma^2), \\ S &= 4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}, \quad q > 3; \quad K = 3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-4)(q-3)} > 3, \quad q > 4. \end{aligned}$$

Как выясняется, плотности вероятностей процессов в моделях Ана–Гао и Бреннана–Шварца совпадают с точностью до параметров формы, зависимость которых от параметров модели несколько другая ($q_{\text{БШ}} = 1 + 2k/\sigma^2$, $q_{\text{АГ}} = 2 + 2k/\sigma^2$). Тем не менее для обеих моделей $q = 2 + 1/\omega$, а зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ представлены на рис. 3.

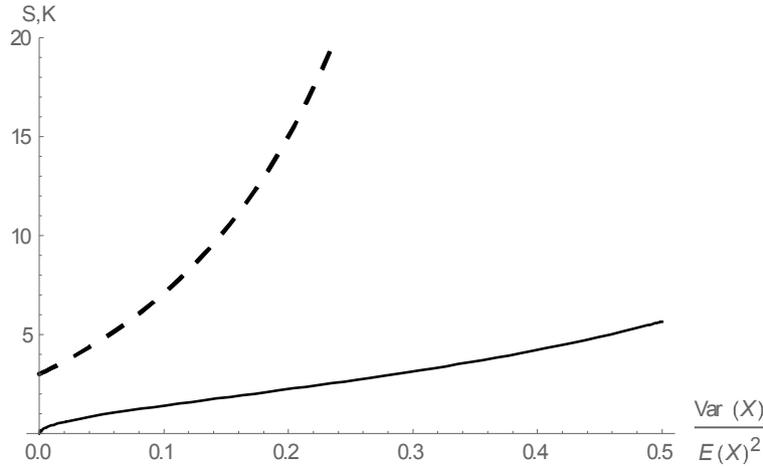


Рис. 3. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для моделей Ана–Гао и Бреннана–Шварца

7. Модель BDT

Модель Блэка–Дермана–Тоя [9]

$$dr(t) = [\alpha_1 r(t) - \alpha_2 r(t) \ln r(t)] dt + \beta r(t) dW(t), \quad \alpha_2 > 0,$$

при помощи преобразования $Y(t) = \ln r(t)$ приводится к линейному виду

$$dY(t) = (\alpha_1 - \beta^2/2 - \alpha_2 Y(t)) dt + \beta dW(t).$$

Это уравнение допускает стационарное решение, для которого процесс $Y(t)$ находится в явной форме

$$Y(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{2} \right) + \xi(t), \quad \xi(t) = \beta \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_2 s} dW(s),$$

где $\xi(t)$ – случайный гауссовский процесс с нулевым средним, дисперсией $\text{Var}[\xi(t)] = \beta^2/2\alpha_2$ и ковариацией $\text{Cov}[t_1, t_2] = \beta^2 e^{-\alpha_2|t_2-t_1|}/2\alpha_2$. Таким образом, модель BDT генерирует логарифмически нормальный процесс, также допуская стационарный режим (рис. 4). Первые стационарные моменты процентной ставки вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} E[r] &= \exp \left[\frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \right], \\ \text{Var}[r] &= (q-1) \exp \left[\frac{2}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \right], \quad q = \exp \left(\frac{\beta^2}{2\alpha_2} \right) = 1 + \omega, \\ S &= (q+2)\sqrt{q-1}, \quad K = q^4 + 2q^3 + 3q^2 - 3 > 3. \end{aligned}$$

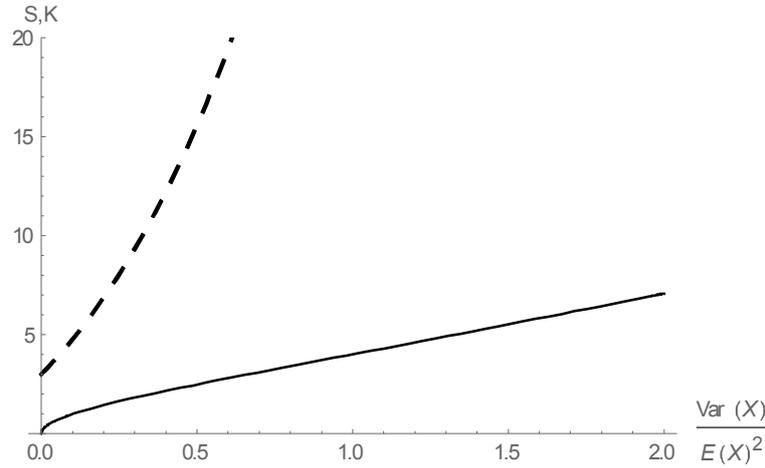


Рис. 4. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели BDT

8. Модель Эйт-Сахэйлиа

Эйт-Сахэйлиа [10] протестировал основные модели краткосрочных процентных ставок, включая описанные здесь, приспособивая их к реальным временным рядам ставок. При этом оказалось, что на допустимом уровне согласия все эти ставки отвергались из-за свойств дрейфа и волатильности. В связи с этим он предложил следующие функции дрейфа и диффузии:

$$\mu(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_{-1} \frac{1}{r}, \quad \sigma^2(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2.$$

В такой модели функции дрейфа и диффузии нелинейные и допускают широкое разнообразие формы. Для того чтобы $\sigma^2(x) \geq 0$ для любых x , необходимо, чтобы параметры функции диффузии обеспечивали выполнение неравенств

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \gamma^2 \equiv 4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2 \geq 0.$$

Соответствующая таким функциям плотность вероятностей дается выражением

$$f(x) = N x^B (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)^{C-1} \exp[Ax + D \arctg(E + Fx)], \quad x > 0,$$

где N – постоянная нормировки,

$$A = 2\alpha_2/\beta_2 < 0, \quad B = 2\alpha_{-1}/\beta_0 > 0, \quad C = \alpha_1/\beta_2 - \alpha_2\beta_1/\beta_2^2 - \alpha_{-1}/\beta_0,$$

$$D = 2[2\alpha_0 + \alpha_2\beta_1^2/\beta_2^2 - \alpha_1\beta_1/\beta_2 - 2\alpha_2\beta_0/\beta_2 - \alpha_{-1}\beta_1/\beta_0]/\gamma,$$

$$E = \beta_1/\gamma, \quad F = \beta_2/\gamma.$$

Поскольку плотность $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ имеет порядок $O(x^B)$, $B > 0$, а при $x \rightarrow \infty$ ее порядок $O(x^{B+C} \exp[Ax])$, $A < 0$, то для всякого конечного m моменты $E[X^m]$ существуют, однако их аналитические выражения получить не удается и они могут быть вычислены только численно.

9. Модель CKLS

В модели CKLS [1] принято, что $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$. Оказывается, что случайный процесс, соответствующий этой модели, имеет стационарную плотность

$$f(x) = \frac{n}{x^3} \exp\left[-c \left(\left(\frac{\theta}{x} \right)^2 - 2 \frac{\theta}{x} \right)\right], \quad x > 0, \quad (6)$$

где $c = k/\theta\sigma^2$, n – постоянная нормировки. Заметим, что у такого случайного процесса существует только первый момент $E[X] = \theta$.

10. Модель без ограничений I

В модель без ограничений I (unrestricted model) [2]

$$dr = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2)dt + \sqrt{\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3} dw \quad (7)$$

вложены все предыдущие модели, т.е. при определенном задании параметров $\{\alpha\}$ можно получить любую из предыдущих моделей.

В табл. 1 показано соответствие для этого случая.

Таблица 1

Модели процессов

Ограничения параметров	Модель	Уравнение процесса
$\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$	Модель Васичека	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dw$
$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$	Модель CIR	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$
$\alpha_3 = \alpha_6 = 0$	Модель Даффи–Кана	$dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{\alpha + \beta r}dw$
$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$	Модель Ана–Гао	$dr = k(\theta - r)rdt + \sigma r^{1.5} dw$
$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$	Модель CKLS	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^{1.5} dw$

Стационарная плотность вероятностей процесса «без ограничений I» имеет вид

$$f(x) = \frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\right) = \frac{c(\omega)}{\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^3} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_4 + \alpha_5 u + \alpha_6 u^3} du\right),$$

где $c(\omega)$ – постоянная нормировки, ω – некоторое фиксированное число из множества возможных значений случайного процесса, конкретное значение которого не играет роли.

Получение явного вида выражения для $f(x)$ возможно, однако оно в общем случае будет иметь довольно громоздкий вид, и мы ограничимся только тем случаем, когда значения параметров $\{\alpha\}$ обеспечивают выполнение свойств плотности вероятностей для $f(x)$. Во-первых, заметим, что волатильность реального процесса должна быть вещественной функцией, поэтому $\sigma^2(r) = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 \geq 0$ для любых значений r . При этом аналитические свойства плотности вероятностей зависят от типа корней уравнения $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = 0$, $\alpha_6 > 0$. Знак дискриминанта $\Delta = (\alpha_5/3\alpha_6)^3 + (\alpha_4/2\alpha_6)^2$ определяет число действительных и комплексных корней уравнения. Когда $\Delta > 0$, имеется один действительный и два комплексных сопряженных корня. Когда $\Delta < 0$, имеется три различных действительных корня. Когда $\Delta = 0$, корни действительные кратные.

Пусть $\Delta > 0$ и действительным корнем является $r = r_0$, тогда можно записать $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 (r - r_0)(r^2 + pr + q)$, где r_0, p и q имеют довольно сложные аналитические выражения и из-за этого здесь не приводятся. Однако если $\alpha_4 = 0$, то $r_0 = 0, p = 0, q = \alpha_5/\alpha_6$. В этом случае плотность вероятностей имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c(\omega)}{\alpha_6 x (x^2 + \alpha_5/\alpha_6)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_6 u (u^2 + \alpha_5/\alpha_6)} du\right) = \\ &= n x^{\frac{2\alpha_1}{\alpha_5} - 1} (\alpha_6 x^2 + \alpha_5)^{\frac{\alpha_3}{\alpha_6} - \frac{\alpha_1}{\alpha_5} - 1} \exp\left(\frac{2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_5 \alpha_6}} \arctg\left[x \sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_5}}\right]\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где n – нормировочная константа. Для существования плотности вероятностей ее параметры должны удовлетворять неравенствам $\alpha_1/\alpha_5 > 1$, $\alpha_3/\alpha_6 < 1$. Для того чтобы при этом существовали стационарные моменты, для математического ожидания нужно $\alpha_3/\alpha_6 < 0,5$, для дисперсии – $\alpha_3/\alpha_6 < 0$, для третьего момента – $\alpha_3/\alpha_6 < -0,5$ и для четвертого момента – $\alpha_3/\alpha_6 < -1$.

В случае $\Delta < 0$ обозначим корни уравнения $r_0 > r_1 > r_2$ так, что

$$\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 (r - r_0)(r - r_1)(r - r_2).$$

Тогда плотность вероятностей выражается в виде

$$f(x) = n (x - r_0)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2)} - 1} (x - r_1)^{-\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_3 r_1^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_1)(r_1 - r_2)} - 1} (x - r_2)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_2^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_2)(r_1 - r_2)} - 1}. \quad (9)$$

При этом должны выполняться неравенства

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2) > \alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2), \alpha_3/\alpha_6 < 1.$$

Для существования m -го момента, кроме этого, необходимо соблюдение условия $m/2 + \alpha_3/\alpha_6 < 1$. К сожалению, аналитические выражения нормировочной константы n и моментов $E[r^m]$ очень громоздки, включают гипергеометрические функции. При сделанных предположениях процесс, характеризующийся такой плотностью, имеет нижнюю границу, равную наибольшему корню, т.е. $r(t) \geq r_0$.

11. Модель без ограничений II

В этой модели [1] процесс краткосрочной ставки следует уравнению

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \gamma > 0. \quad (10)$$

Поэтому $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$ и стационарная плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{n}{x^{2\gamma}} \exp\left[\frac{q}{x^{2\gamma}} \left(\frac{\theta x}{1 - 2\gamma} - \frac{x^2}{2 - 2\gamma}\right)\right], x > 0, \quad (11)$$

где $q = 2k/\sigma^2$, n – постоянная нормировки. Значения параметра γ , допускающие сходимость интеграла от $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$, определяются неравенством $\gamma > 0,5$. При этом имеются две особые точки: $\gamma = 0,5$ (в этом случае такая модель краткосрочной ставки превращается в модель CIR) и $\gamma = 1$, когда плотность вероятностей сводится к виду, соответствующему процессу модели Бреннана–Шварца:

$$f(x) = \frac{c^{q+1}}{\Gamma(q+1)x^{2+q}} e^{-c/x}, c = \theta q, x > 0. \quad (12)$$

Когда $\gamma = 1,5$, модель «без ограничений II» известна под наименованием «модель CKLS». Модель Васичека тоже является вложенной моделью в модель «без ограничений II» при $\gamma = 0$. Для того чтобы существовали моменты порядка m , необходимо выполнение неравенства $2\gamma > m + 1$. К сожалению, выражение для плотности вероятностей в общем случае не позволяет вычислять моменты в аналитическом виде, хотя для упомянутых частных случаев они вычисляются просто. В табл. 2 приведены характеристики плотностей этого семейства.

Таблица 2

Характеристики моделей

Модель	γ	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	Асимметрия	Экссесс
Васичека	0	θ	$\frac{\sigma^2}{2k}$	0	3
CIR	0,5	$\frac{q}{c} = \theta$	$\frac{q}{c^2} = \frac{\sigma^2 \theta}{2k}$	$2\sqrt{q}$	$3 + 6 \frac{1}{q}$
Бреннана–Шварца	1,0	$\frac{c}{q} = \theta$	$\frac{\theta^2}{q-2} = \frac{\theta^2 \sigma^2}{2k - \sigma^2}$	$4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}$	$3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-4)(q-3)}$
CKLS	1,5	$\frac{q}{c} = \theta$	Не существует	Не существует	Не существует

12. Модель CEV

Еще до появления модели «без ограничений II» использовались модели, которые потом оказались частными случаями этой модели. Одной из них является модель CEV – модель процесса с постоянной

эластичностью дисперсии (*Constant Elasticity of Variance*), предложенная Дж. Коксом и С. Россом [11], когда в уравнении (10) принято $\theta = 0$:

$$dr = -k r dt + \sigma r^\gamma dw$$

так, что дрейф $\mu(x) = -kx$, коэффициент диффузии $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$, а стационарная плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{c(2-2\gamma)^{1/(2-2\gamma)}}{\Gamma[(0,5-\gamma)/(1-\gamma)](cx)^{2\gamma}} \exp\left(-\frac{(cx)^{2-2\gamma}}{2-2\gamma}\right), x > 0,$$

где $c = (2k/\sigma^2)^{1/(2-2\gamma)}$. Значения параметра γ , допускающие сходимость интеграла от $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$, определяются неравенством $\gamma < 0,5$. Заметим, что это условие допускает не только положительные, но и отрицательные значения параметра γ . При $\gamma \neq 0$ процесс $r(t)$ с вероятностью единица принимает только неотрицательные значения. Причем для $\gamma > 0$ плотность вероятностей монотонно убывает с возрастанием аргумента (т.е. меньшие значения процесса более вероятны, чем большие). Если $\gamma < 0$, плотность вероятностей $f(x)$ имеет максимум в точке $x = (-\sigma^2 \gamma / k)^{0,5/(1-\gamma)}$. Значение $\gamma = 0$ является особой точкой, в этом случае процесс $r(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2/2k$. Это семейство плотностей проиллюстрировано на рис. 5.

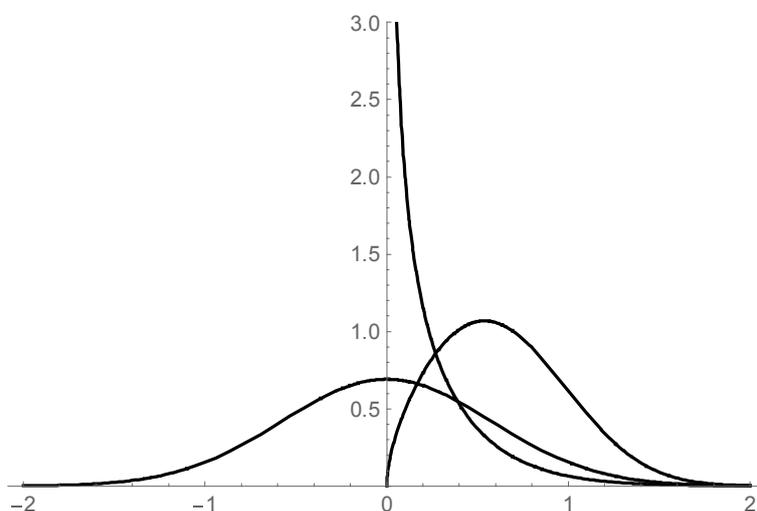


Рис. 5. Плотности вероятностей для различных значений γ ($\gamma = 0, \gamma < 0, \gamma > 0$)

Когда $\gamma \neq 0$, моменты $E[X^m]$ вычисляются по формуле

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+1-2\gamma)}{c^m \Gamma(2-2\gamma)} (2-2\gamma)^{0,5m/(1-\gamma)},$$

поэтому важные числовые характеристики в модели CEV такие:

$$E[X] = (2-2\gamma)^{1/(2-2\gamma)} / c \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right),$$

$$\text{Var}[X] = (2-2\gamma)^{1/(1-\gamma)} \left[\Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3-2\gamma}{2-2\gamma}\right) - 1 \right] / c^2 \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right)^2,$$

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right) - 3\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) + 2}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1 \right)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^3 \Gamma\left(\frac{2,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 4 \Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right) + 6 \Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 3}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1\right)^2}.$$

В модели CEV роль параметра формы выполняет параметр волатильности модели γ . К сожалению, в аналитическом виде можно привести только зависимость $\omega(\gamma)$, поскольку зависимость $\gamma(\omega)$ здесь сложная: $\omega(\gamma) = \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3-2\gamma}{2-2\gamma}\right) - 1$. Довольно грубое, но простое приближение обратной зависимости имеет вид $\gamma(\omega) \approx 0,14 + 0,25 \ln \omega$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для модели CEV представлены на рис. 6.

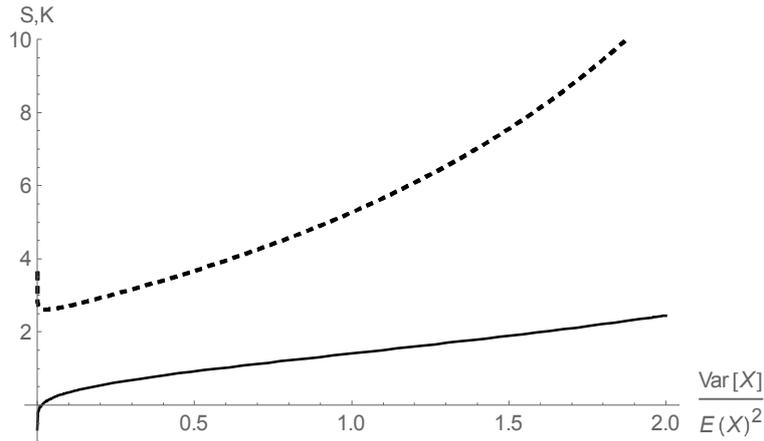


Рис. 6. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели CEV

Модель CEV является единственной моделью из рассматриваемых здесь, у которой коэффициент эксцесса может принимать значение меньше 3 (коэффициент эксцесса нормального распределения). Это происходит на интервале значений $-2,091 < \gamma < -0,225$, где в точке $\gamma = -0,766$ ($\omega = 0,145$) коэффициент эксцесса принимает свое минимальное значение $K = 2,610$. Модель CEV является также единственной, у которой коэффициент асимметрии S может принимать отрицательные значения (левый хвост плотности тяжелее правого), это происходит для $\gamma < -0,927$ ($\omega < 0,120$).

13. Модель CIR

Другой частной версией уравнения (10) является модель CIR [12], которая получается, если положить, что $k = 0$:

$$dr = \sigma r^\gamma dw.$$

Когда стационарный режим в этой модели существует, плотность вероятностей процесса $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2 x^3 f(x)]}{\partial x^2} = 0.$$

Поскольку это уравнение второго порядка, нужно иметь два краевых условия для определения однозначного решения. В качестве таких условий естественно выбрать условие нормировки и величину нижней границы возможных значений процентной ставки, обозначим ее r_0 . Тогда решение уравнения $f(x)$ выразится в виде

$$f(x) = (\gamma - 1)(2\gamma - 1) \frac{2}{r_0} \left(\frac{x}{r_0} - 1 \right) \left(\frac{x}{r_0} \right)^{-2\gamma}, \quad x > r_0 > 0.$$

Как видим, эта плотность является, по существу, смесью двух распределений Парето, известных как распределения с тяжелыми хвостами. Для существования моментов $E[X^m]$ необходимы достаточно большие значения параметра γ , если это выполнено, то моменты будут вычисляться по формуле

$$E[X^m] = \frac{2(\gamma-1)(2\gamma-1)r_0^m}{(2\gamma-m-1)(2\gamma-m-2)}, \gamma > 1 + \frac{m}{2},$$

и важные числовые характеристики процесса $r(t)$ будут иметь вид

$$E[X] = \frac{2(\gamma-1)(2\gamma-1)r_0}{(2\gamma-2)(2\gamma-3)}, \gamma > 1,5; \text{Var}[X] = \frac{(2\gamma-1)r_0^2}{(\gamma-2)(2\gamma-3)^2}, \gamma > 2;$$

$$S = \frac{2(2\gamma+1)}{(2\gamma-5)} \sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma-1}} > \sqrt{2}, \gamma > 2,5; K = \frac{6(\gamma-2)(4\gamma^2-4\gamma+3)}{(\gamma-3)(2\gamma-1)(2\gamma-5)} > 6, \gamma > 3.$$

В этой модели снова параметр волатильности γ играет роль параметра формы плотности вероятностей, при этом $\gamma = 0,25(5 + \sqrt{9+8/\omega})$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для модели CIR представлены на рис. 7.

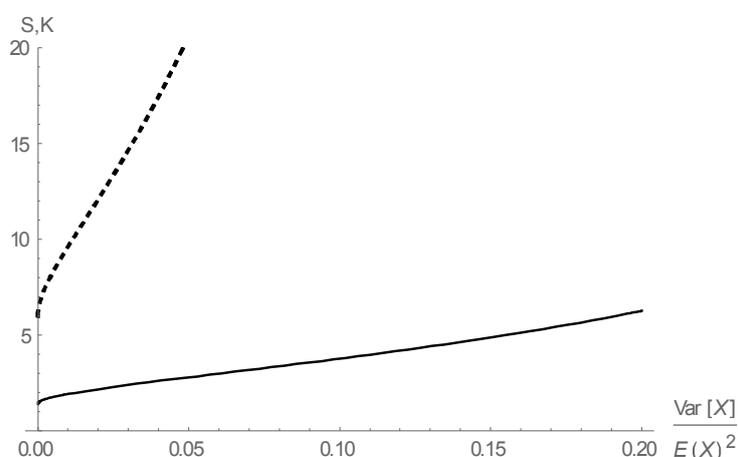


Рис. 7. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели CIR

Заметим, что в оригинальной модели CIR предлагалось $\gamma = 1,5$, однако это не гарантирует существования даже математического ожидания. На рис. 8 представлены примеры плотностей вероятностей для модели CIR для различных значений параметра γ . Для плотностей характерно, что чем меньше γ , тем более тяжелый хвост; чем больше γ , тем выше максимум, который встречается в точке $x_{\max} = 2\gamma r_0 / (2\gamma - 1)$.

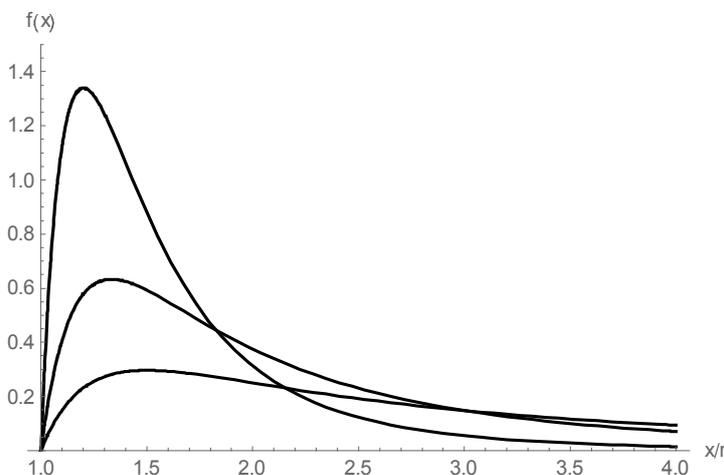


Рис. 8. Примеры плотностей вероятностей для значений параметра $\gamma = 1,5; 2; 3$

Во всех рассмотренных выше моделях существует стационарный режим. Однако встречаются такие модели, в которых такого режима не существует. К ним относятся модели, приведённые ниже.

14. Модель Мертона

Предложенная Р. Мертоном [13] модель

$$dr(t) = \alpha dt + \sigma dW(t)$$

порождает нестационарный гауссовский процесс

$$r(t) = r(0) + \alpha t + \sigma W(t)$$

с линейно изменяющимся математическим ожиданием и линейно возрастающей дисперсией

$$E[r | r(0)] = r(0) + \alpha t, \text{Var}[r] = \sigma^2 t.$$

15. Модель Дотана

Уравнение модели Дотана [14]

$$dr = \sigma r dW$$

можно решить в явном виде

$$r(t) = r(0) \exp[-0,5 \sigma^2 t + \sigma W(t)],$$

откуда следует, что порождаемый моделью случайный процесс имеет логарифмически нормальное распределение и является нестационарным. Математическое ожидание постоянно, но дисперсия экспоненциально возрастает со временем:

$$E[r | r(0)] = r(0), \text{Var}[r | r(0)] = r(0)^2 (\exp[\sigma^2 t] - 1).$$

16. Модель GBM

Модель GBM – модель процесса геометрического броуновского движения (*Geometric Brownian Motion*):

$$dr = \beta r dt + \sigma r dW,$$

введена в современный финансовый анализ П. Самюэльсоном [15]. Она порождает нестационарный процесс геометрического броуновского движения

$$r(t) = r(0) \exp[(\beta - 0,5 \sigma^2) t + \sigma W(t)].$$

В этом случае плотность вероятностей процентной ставки логарифмически нормальная. В отличие от модели BDT, которая порождает тоже логарифмически нормальный процесс, моменты $r(t)$ в модели GBM не постоянные, а экспоненциально возрастают со временем, в частности

$$E[r | r(0)] = r(0) \exp[\beta t], \text{Var}[r | r(0)] = r(0)^2 (q - 1) \exp[2\beta t], q = \exp[\sigma^2 t],$$

$$S = (q + 2) \sqrt{\lambda - 1}, K = q^4 + 2q^3 + 3q^2 - 3.$$

Выражения для асимметрии и эксцесса совпадают с выражениями для этих характеристик модели BDT, но параметр q здесь не является константой, а экспоненциально возрастает со временем.

Заключение

Процесс краткосрочных ставок является основой для построения временной структуры доходности бескупонных облигаций. Это объясняет интерес к анализу процессов краткосрочных ставок. В литературе имеется много статей, в которых сделаны эмпирические попытки найти модель краткосрочной ставки, для которой получается временная структура, наиболее близкая к реально наблюдаемой структуре [1–3]. С другой стороны, в литературе содержатся также эмпирические факты о том, что известные модели краткосрочной ставки не обеспечивают этого на допустимом уровне согласия [10]. Поэтому имеется необходимость в аналитических исследованиях, позволяющих определить степень риска при применении той или иной модели краткосрочной ставки доходности. В качестве необходимой основы для этого нужны сведения о вероятностных свойствах процессов краткосрочной ставки, выраженные аналитически, что и предлагается в настоящей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.A., Sanders A.S. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate // *J. of Finance*. 1992. V. 47. P. 1209–1227.
2. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // *The Review of Financial Studies*. 1999. V. 12, No. 4. P. 721–762.
3. Bali T. An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate // *Journal of Futures Markets*. 1999. V. 19, No. 7. P. 777–797.
4. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // *J. of Financial Economics*. 1977. V. 5. P. 177–188.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rate // *Econometrica*. 1985. V. 53. P. 385–467.
6. Duffie D., Kan R. A yield-factor model of interest rates // *Math. Finance*. 1996. V. 6. P. 379–406.
7. Longstaff F.A. A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rate // *Journal of Financial Economics*. 1989. V. 23. P. 195–224.
8. Brennan M.J., Schwartz E.S. A continuous time approach to the pricing of bond // *Journal of Banking and Finance*. 1979. V. 3. P. 135–155.
9. Black F., Derman E., Toy W. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options // *Financial Analysts Journal*. 1990. January – February. P. 33–39.
10. Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate // *Review of Financial Studies*. 1996. V. 9, No. 2. 385–426.
11. Cox J.C., Ross S.A. The valuation of options for alternative stochastic processes // *J. of Financial Economics*. 1976. V. 3. P. 145–166.
12. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // *J. of Finance*. 1980. V. 35. P. 389–403.
13. Merton R.C. Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1973. V. 4 (1). P. 141–183.
14. Dothan M. On the term structure of interest rates // *J. of Financial Economics*. 1978. V. 6. P. 59–69.
15. Samuelson P.A. Rational Theory of Warrant Pricing // *Industrial Management Review*. 1965. V. 6. P. 13–31.

Медведев Геннадий Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 4 июня 2016 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Belarus).

The probability density of the processes of yield interest rates.

Keywords: interest rates; the probability density; numerical characteristics.

DOI: 10.17223/19988605/36/4

The processes of short-term interest rates rise to many changes in market indices, as well as form the basis of determining the value of market assets and commercial contracts. A special role they play in calculating the term structure of the yield. Therefore, the development of mathematical models of these processes is extremely interesting for financial analysts and market research issues. There are many versions of change of short-term risk-free interest rates in the framework of the theory of diffusion processes. However, there is still no such a model, which would be the basis for building a term structure of yields close to existing on a real financial market. It is interesting to analyze the existing models in order to clarify their features in a probabilistic sense, in more detail than has been done by their creators and users. To this end, the paper examines the marginal probability density of the diffusion processes generated by sixteen models of short-term interest rates, that allow obtain densities in an analytical form. Here will be made such analysis for the family of models used by the authors of papers that are widely known in their fit to the actual time series of yield. All considered models belong to the class of diffusion that generate processes $X(t)$, described by the equation

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0,$$

where a specific setting of drift $\mu(x)$ and volatility $\sigma(x)$ defines one or another particular model.

Some models, such as the Vasicek model, Cox - Ingersoll - Ross, geometric Brownian motion, Ahn - Gao, are well documented in the literature, but nevertheless their properties are listed here for convenience of comparison with other, less well-known or unstudied models. Other densities are described for the first time. The proposed analysis will be useful to the reader to determine the most appropriate models of short-term rates in the determination of the term structure of zero-coupon yield approximating actually observed, as far as possible, by the best way.

Analysis scheme reduces to solution of the direct Kolmogorov equation for the stationary probability density and, if necessary, discuss its features and the first four moments are calculated, usually of interest in practice. It is shown that for the models the coefficients of skewness and kurtosis, defined moments third and fourth order, depend on a single parameter, that called as the form parameter density, which, in turn, is determined only by the ratio of the variance to the square of the expectation (this corresponds to the square of the so-called coefficient of variation).

REFERENCES

1. Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A. & Sanders, A.S. (1992) An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*. 47. pp. 1209-1227. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1992.tb04011.x

2. Ahn, D.-H. & Gao, B. (1999) A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 12(4). pp. 721-762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721
3. Bali, T. (1999) An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate. *Journal of Futures Markets*. 19(7). pp. 777-797. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9934(199910)19:7<777::AID-FUT3>3.0
4. Vasiček, O.A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177-188. DOI: 10.1002/9781119186229.ch6
5. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rate. *Econometrica*. 53. pp. 385-467. DOI: 10.2307/1911242
6. Duffie, D. & Kan, R. (1996) A yield-factor model of interest rates. *Math. Finance*. 6. pp. 379-406. DOI: 10.1111/j.1467-9965.1996.tb00123.x
7. Longstaff, F.A. (1989) A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rate. *Journal of Financial Economics*. 23. pp. 195-224. DOI: 10.1016/0304-405X(89)90056-1
8. Brennan, M.J. & Schwartz, E.S. (1979) A continuous time approach to the pricing of bond. *Journal of Banking and Finance*. 3. pp. 135-155. DOI: 10.1016/0378-4266(79)90011-6
9. Black, F., Derman, E. & Toy, W. (1990) A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*. January – February. pp. 33-39. DOI: 10.2469/faj.v46.n1.33
10. Ait-Sahalia, Y. (1996) Testing continuous-time models of the spot interest rate. *Review of Financial Studies*. 9(2). pp.385-426. DOI: 10.3386/w5346
11. Cox, J.C. & Ross, S.A. (1976) The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*. 3. pp. 145-166. DOI: 10.1016/0304-405X(76)90023-4
12. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross S.A. (1980) An analysis of variable rate loan contracts. *Journal of Finance*. 35. pp. 389-403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02169.x
13. Merton, R.C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4(1). pp. 141-183.
14. Dothan, M. (1978) On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*. 6. pp. 59-69.
15. Samuelson, P.A. (1965) Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*. 6. pp. 13-31. DOI: 10.1007/978-3-319-22237-0_11

УДК 519.21:81'32

DOI: 10.17223/19988605/36/5

В.В. Поддубный**О ВОЗМОЖНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОЛИСЕМИИ ЗНАКОВ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА С ПОМОЩЬЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ**

Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К и Российского гуманитарного научного фонда (проект № 14-14-70010).

Рассматривается возможность математического моделирования эволюции полисемии ансамбля знаков естественного языка с помощью нестационарных процессов рождения и гибели. Показано, что адекватной математической моделью развития полисемии ансамбля знаков может служить скрытая нестационарная модель процессов рождения и гибели значений языковых знаков. Получено условное распределение состояний такого процесса при экспоненциальных спадах интенсивностей процессов рождения и гибели. Предложен критерий идентификации скрытой модели, дана его реализация на примере словаря языка А.С. Пушкина.

Ключевые слова: неоднородный процесс рождения и гибели; скрытая марковская модель; идентификация модели; языковой знак; полисемия.

В работах [1–3] рассматривалась диссипативная стохастическая динамическая модель развития полисемии языковых знаков как детерминированная модель эволюции полисемии отдельного знака со случайными флуктуациями параметров от знака к знаку в статистическом ансамбле знаков. Модель показала хорошее согласие с экспериментально наблюдаемыми распределениями полисемии языковых знаков, полученными из представительных толковых словарей русского и английского языков. Однако детерминированный характер эволюции полисемии каждого отдельного знака представляется маловероятным. Более естественно предположить, что индивидуальная эволюция полисемии отдельного языкового знака является нестационарным стохастическим процессом.

В соответствии с современными лингвистическими представлениями о развитии полисемии языкового знака естественного языка [4] знак возникает в языке в некоторый случайный момент времени в некотором определённом (обычно единственном) смысловом значении. Затем к этому смысловому значению последовательно добавляются новые значения, как правило, всё более абстрактные. Процесс роста количества новых значений знака протекает с постоянным замедлением, пока не иссякнет способность знака к порождению новых значений. Одновременно с этим процессом (но, возможно, с некоторым запаздыванием) начинается процесс выхода из употребления первоначальных (наиболее конкретных) значений знака. Этот процесс протекает также с замедлением, но значительно медленнее процесса роста новых значений. Скорость выхода из употребления старых значений знака сначала меньше скорости роста числа новых значений, и количество не вышедших из употребления значений знака (его полисемия) сначала растёт. Но со временем скорость роста числа новых значений знака становится ниже скорости выпадения из употребления старых значений, и происходит обратный процесс – полисемия знака начинает убывать, пока не выйдет из употребления последнее значение знака, а с ним и сам знак. На этом жизненный цикл знака заканчивается. Кривая этого жизненного цикла, выражающая зависимость полисемии знака от времени, представляется унимодальной кривой с максимумом, смещённым к началу процесса развития полисемии знака.

Если предположить, что процессы появления и выпадения из употребления значений знака являются случайными марковскими, хотя, очевидно, нестационарными (неоднородными), представляется возможным использовать в качестве стохастической модели развития полисемии знака модель неоднородного марковского процесса рождения и гибели. В статистическом ансамбле знаков естественного языка параметры модели флуктуируют от знака к знаку с определёнными, но неизвестными распреде-

лениями вероятностей, в силу чего модель оказывается скрытой. Поставим задачу нахождения условного (с фиксированными значениями параметров) распределения вероятностей состояний неоднородного процесса рождения-гибели, а затем исследуем возможность оценки скрытых распределений вероятностей параметров ансамбля таких процессов, обеспечивающих максимальную близость теоретического распределения полисемии с наблюдаемым эмпирическим распределением, полученным из толкового словаря языка А.С. Пушкина.

1. Математическая модель неоднородного процесса рождения и гибели

1.1. Система уравнений Колмогорова

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих вероятностную динамику неоднородного марковского процесса рождения и гибели. Пусть очередной языковой знак появляется в языке в момент времени t_0 хотя бы в одном определённом смысловом значении. С этого момента начинается процесс рождения и гибели новых значений языкового знака вплоть до момента гибели последнего значения и выхода знака из употребления. Пусть $P_n(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \geq t_0$ знак имеет n значений. Если в начальный момент $n = n_0 \geq 1$, то $P_{n_0}(t_0) = 1$. Пусть $\lambda(t)$ – интенсивность процесса рождения новых значений в момент времени t , а $\mu(t)$ – интенсивность процесса гибели (выхода из употребления) уже имеющихся значений. Запишем незамкнутую систему дифференциальных уравнений Колмогорова, определяющую эволюцию вероятности числа живущих в момент времени t значений знака как неоднородного марковского процесса рождения и гибели значений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda(t)P_0(t) + \mu(t)P_1(t), \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda(t)P_{n-1}(t) - (\lambda(t) + \mu(t))P_n(t) + \mu(t)P_{n+1}(t), \quad P_n(t_0) = \delta_{n,n_0}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\delta_{n,n_0} = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$ – символ Кронекера. При этом должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1.$$

1.2. Производящая функция

Для решения незамкнутой неавтономной (с переменными коэффициентами) системы дифференциальных уравнений Колмогорова (1) воспользуемся методом производящей функции, аналогично тому, как это делается в случае незамкнутой автономной системы (например, в [5. С. 287–291]):

$$f(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) s^n. \quad (2)$$

Зная производящую функцию $f(t, s)$, распределение $P_n(t)$ можно найти по формуле обращения

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f(t, s)}{\partial s^n} \right|_{s=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Действительно, разложив функцию $f(t, s)$ в ряд Маклорена, получим

$$f(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f(t, s)}{\partial s^n} \right|_{s=0} s^n.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (2), получим (3).

Перейдём от незамкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) для распределения $P_n(t)$ к дифференциальному уравнению в частных производных для производящей функции $f(t, s)$. Найдём частную производную

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(t)}{dt} s^n,$$

подставив в неё вместо производных $dP_n(t)/dt$ правые части уравнений (1). Принимая во внимание определение (2) производящей функции и вытекающее из этого определения равенство

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n s^{n-1},$$

получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для производящей функции $f(t,s)$

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} = -\lambda(t)(1-s)f(t,s) + \mu(t)(1-s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}, \quad f(t_0,s) = s^{n_0}, \quad n_0 > 0, \quad t \geq t_0. \quad (4)$$

Введя переменные $p = \partial f(t,s)/\partial t$ и $q = \partial f(t,s)/\partial s$, запишем уравнение (4) в виде

$$F(t,s,f,p,q) = -\lambda(t)(1-s)f + p - \mu(t)(1-s)q = 0. \quad (5)$$

Ему эквивалентна система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик

$$\frac{dt}{F_p} = \frac{ds}{F_q} = \frac{df}{pF_p + qF_q}, \quad (6)$$

где $F_p = \partial F/\partial p = 1$, $F_q = \partial F/\partial q = -\mu(t)(1-s)$, $pF_p + qF_q = p - \mu(t)(1-s)q = \lambda(t)(1-s)f$, причём последнее равенство записано с учётом равенства (5). Тогда система (6) примет вид

$$\mu(t)dt = -\frac{ds}{1-s}, \quad \lambda(t)ds = \mu(t)\frac{df}{f}.$$

Интегрируя каждое из уравнений, получаем

$$\int \mu(t)dt - \ln(1-s) = c_1, \quad \lambda(t)s - \mu(t)\ln f = c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные интегрирования. Очевидно, c_2 можно рассматривать как произвольную функцию W от c_1 : $c_2 = W(c_1)$, так что

$$\lambda(t)s - \mu(t)\ln f = W(\int \mu(t)dt - \ln(1-s)), \quad (7)$$

откуда

$$f(t,s) = \exp\left(\frac{1}{\mu(t)}\left(\lambda(t)s - W\left(\int_{t_0}^t \mu(t)dt - \ln(1-s)\right)\right)\right).$$

Очевидно, для существования производящей функции при любом t , в том числе при $t \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы интенсивность процесса гибели нигде не обращалась в 0: $\mu(t) > 0 \quad \forall t \geq t_0$. При этом интенсивность процесса рождения может обращаться в 0 (например, при $t \rightarrow \infty$).

Для нахождения вида функции W воспользуемся (аналогично [5]) начальным условием $f(t_0,s) = s^{n_0}$. При $t = t_0$ равенство (7) примет вид

$$\lambda_0 s - \mu_0 n_0 \ln s = W(-\ln(1-s)), \quad (8)$$

где $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, $\mu_0 = \mu(t_0)$. Обозначив $y = -\ln(1-s)$, получим $s = 1 - \exp(-y)$. Подставляя эти выражения в равенство (8), получим вид функции W : $W(y) = \lambda_0(1 - \exp(-y)) - n_0 \mu_0 \ln(1 - \exp(-y))$. Следовательно, выражение для производящей функции принимает окончательный вид

$$f(t,s) = \left(1 - (1-s)\exp\left(-\int_{t_0}^t \mu(t)dt\right)\right)^{n_0 \mu_0 / \mu(t)} \cdot \exp\left(\frac{1}{\mu(t)}\left(\lambda(t)s - \lambda_0\left(1 - (1-s)\exp\left(-\int_{t_0}^t \mu(t)dt\right)\right)\right)\right). \quad (9)$$

1.3. Распределение вероятностей нестационарного процесса рождения и гибели

Для нахождения закона распределения вероятностей нестационарного процесса рождения и гибели воспользуемся формулой обращения (3). Для упрощения вида формулы (9) введём обозначения

$$a(t) = \frac{\mu_0}{\mu(t)}, \quad b(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \mu(t)dt\right), \quad c(t) = \frac{\lambda(t) - \lambda_0 b(t)}{\mu(t)}. \quad (10)$$

Тогда формула (9) примет вид

$$f(t, s) = ((1 - b(t)) + b(t)s)^{n_0 a(t)} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_0}{\mu(t)}(1 - b(t)) + c(t)s\right). \quad (11)$$

Обозначив

$$u(t, s) = ((1 - b(t)) + b(t)s)^{n_0 a(t)}, \quad v(t, s) = \exp(c(t)s), \quad (12)$$

ещё более упростим формулу (11), выделив множители, явно зависящие от переменной s :

$$f(t, s) = \exp\left(-\frac{\lambda_0}{\mu(t)}(1 - b(t))\right) \cdot u(t, s) \cdot v(t, s). \quad (13)$$

Для вычисления вероятностей $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, необходимо найти n -ю частную производную по s от этой функции в точке $s = 0$. Поскольку, как видно из (13), эта функция пропорциональна произведению двух функций, зависящих от s , для вычисления производной воспользуемся известной формулой дифференцирования Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}. \quad (14)$$

Дифференцируя выражения (12), получаем

$$u(t, s)^{(k)} = (n_0 a(t))(n_0 a(t) - 1) \cdots (n_0 a(t) - k + 1) b(t)^k ((1 - b(t)) + b(t)s)^{n_0 a(t) - k},$$

$$v(t, s)^{(n-k)} = c(t)^{n-k} \exp(c(t)s).$$

Учитывая, что

$$(n_0 a(t))(n_0 a(t) - 1) \cdots (n_0 a(t) - k + 1) = \frac{\Gamma(n_0 a(t) + 1)}{\Gamma(n_0 a(t) - k + 1)},$$

получаем решение незамкнутой системы (1) дифференциальных уравнений Колмогорова

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(t, s)}{\partial s^n} \Big|_{s=0} =$$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda_0}{\mu(t)}(1 - b(t))\right) (1 - b(t))^{n_0 a(t)} \sum_{k=0}^n \frac{c(t)^{n-k} \Gamma(n_0 a(t) + 1)}{k!(n-k)! \Gamma(n_0 a(t) - k + 1)} \left(\frac{b(t)}{1 - b(t)}\right)^k, \quad (15)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Полученное распределение необходимо подчинить условию нормировки.

1.4. Частный случай: распределение вероятностей нестационарного процесса гибели

Частный случай процесса только гибели получается в отсутствие процесса рождения, когда $\lambda(t) \equiv 0$, а следовательно, когда $c(t) \equiv 0$. Распределение вероятностей такого процесса легко получить формально из общей формулы (15) при $\lambda_0 = 0$ и $c(t) \equiv 0$, когда в сумме по k остаётся только одно слагаемое – при $k = n$:

$$P_n(t) = \frac{\Gamma(n_0 a(t) + 1)}{n! \Gamma(n_0 a(t) - n + 1)} (1 - b(t))^{n_0 a(t)} \left(\frac{b(t)}{1 - b(t)}\right)^n \cdot 1(n \leq n_0), \quad n = \overline{0, n_0},$$

где $1(n \leq n_0)$ – индикатор условия, записанного в скобках (равен 1, если условие выполнено, и 0 в противном случае). Полученное распределение необходимо подчинить условию нормировки.

1.5. Частный случай: распределение вероятностей нестационарного процесса рождения

Частный случай процесса чистого рождения, когда $\mu(t) \equiv 0$, $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 1$, а $c(t)$ неограниченно возрастает, затруднительно получить из общего распределения (15), но легко получить, используя частный вид уравнения (4) для производящей функции при $\mu(t) \equiv 0$:

$$\frac{\partial f(t, s)}{\partial t} = -\lambda(t)(1 - s)f(t, s), \quad f(t_0, s) = s^{n_0}, \quad n_0 > 0, \quad t \geq t_0. \quad (16)$$

Это уравнение при любом фиксированном s является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Интегрируя его с заданным в (16) начальным условием, получаем

$$f(t, s) = s^{n_0} \exp\left(- (1-s) \int_{t_0}^t \lambda(t) dt\right).$$

Вычисление распределения $P_n(t)$ также производим по формуле обращения (3) с использованием обозначения

$$g(t) = - \int_{t_0}^t \lambda(t) dt,$$

представления

$$f(t, s) = \exp\left(- \int_{t_0}^t \lambda(t) dt\right) \cdot u(t, s) \cdot v(t, s)$$

и формулы Лейбница (14) для вычисления производных, где функции $u(t, s)$ и $v(t, s)$ имеют вид

$$u(t, s) = s^{n_0}, \quad v(t, s) = \exp(g(t)s).$$

Дифференцируя их по s , получаем

$$u^{(k)} = \begin{cases} n_0(n_0-1)\cdots(n_0-k+1)s^{n_0-k}, & k \leq n_0, \\ 0, & k > n_0 \end{cases}, \quad v^{(n-k)} = g(t)^{n-k} \exp(g(t)s).$$

Тогда при $s = 0$ в сумме (14) остаётся только одно слагаемое при $k = n_0$ и $n \geq n_0$, и распределение принимает вид

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f(t, s)}{\partial s^n} \right|_{s=0} = \frac{1}{(n-n_0)!} \left(\int_{t_0}^t \lambda(t) dt \right)^{n-n_0} \cdot \exp\left(- \int_{t_0}^t \lambda(t) dt\right) \cdot 1(n \geq n_0), \quad n = \overline{n_0, \infty}, \quad (17)$$

где $1(n \geq n_0)$ – индикатор условия, записанного в скобках. Формула (17) выражает распределение Пуассона для $n \geq n_0$, что хорошо известно для марковского процесса чистого рождения. Полученное распределение автоматически удовлетворяет условию нормировки.

1.6. Условие остановки неоднородного процесса рождения и гибели

Возвратимся к формуле (15), представляющей распределение вероятностей $P_n(t)$ состояний процесса рождения и гибели. Нетрудно видеть, что только входящая в него множителем функция $c(t)$, определяемая формулами (10), при некотором $t = t^*$ может обратиться в 0, вследствие чего $P_n(t^*)$ при всех $n > 0$ обращается в 0, а $P_0(t^*) = 1$. Следовательно, все ненулевые состояния в этот момент времени поглощаются и процесс рождения-гибели останавливается.

Рассмотрим подробнее условие остановки процесса. Выпишем функцию $c(t)$ из (10):

$$c(t) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} - \frac{\lambda_0}{\mu(t)} \exp\left(- \int_{t_0}^t \mu(t) dt\right). \quad (18)$$

Предположим, что интенсивности процессов рождения и гибели монотонно уменьшаются с ростом t и не обращаются в 0 ни при каком конечном $t > t_0$. Пусть для определённости они спадают по экспоненциальному закону:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \exp(-(t-t_0)/\tau_1), \quad \mu(t) = \mu_0 \exp(-(t-t_0)/\tau_2), \quad (19)$$

где λ_0, μ_0 – начальные (в момент t_0) интенсивности, τ_1, τ_2 – постоянные времена спадов интенсивностей. Поскольку интенсивности (19) положительны при конечном $t \geq t_0$, функция $\varphi(t) = c(t)\mu(t)/\lambda_0$ имеет тот же знак, что и $c(t)$. Выпишем её с учётом (19):

$$\varphi(t) = \exp(-(t-t_0)/\tau_1) - \exp(-\mu_0\tau_2(1 - \exp(-(t-t_0)/\tau_2))). \quad (20)$$

При $t = t_0$ эта функция обращается в 0, а её производная принимает значение $d\varphi(t_0)/dt = \mu_0 - 1/\tau_1$. С ростом t функция $\varphi(t)$ (и, следовательно, $c(t)$) либо становится всюду отрицательной (при $\mu_0\tau_1 \leq 1$), что не-

допустимо для существования (неотрицательности) распределения вероятностей ненулевых значений n , либо (при $\mu_0\tau_1 > 1$) возрастает, достигает положительного максимума в некоторой точке $t_{\max} > t_0$, а затем спадает до значения 0 в некоторой точке $t^* > t_{\max}$ и далее уходит в отрицательную область, принимая отрицательное значение $-\exp(-\mu_0\tau_2)$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае уравнение $\varphi(t) = 0$ имеет корень t^* , являющийся точкой остановки процесса рождения-гибели с вероятностью 1. Таким образом, ненулевое состояние процесса рождения-гибели с экспоненциально спадающими интенсивностями возможно только при $\mu_0\tau_1 > 1$ и только в интервале времени от $t = t_0$ до $t = t^*$, так что длительность жизни T процесса рождения-гибели не превышает разности $t^* - t_0$. Такой процесс (с ограниченным временем жизни) будем называть финитным.

На рис. 1 в качестве примера представлено семейство кривых $\varphi(t)$ при $\tau_1 = 0,4286$, $\tau_2 = 0,1429$ и $\mu_0\tau_1$, изменяющемся с шагом 0,5 в интервале от 0 до 2,5.

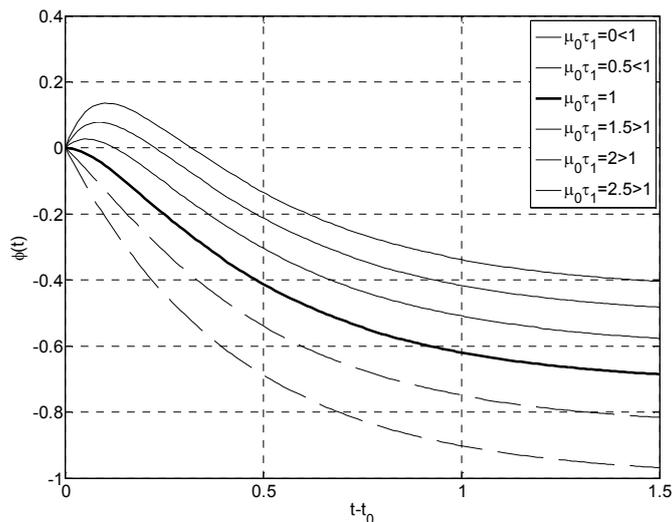


Рис. 1. Функция $\varphi(t)$

Заметим, что эффект остановки процесса рождения-гибели с вероятностью 1 не имеет места для однородного процесса, когда интенсивности постоянны (равны λ_0 , μ_0), потому что для однородного процесса

$$\varphi(t) = 1 - \exp(-\mu_0(t - t_0)) > 0$$

при любых конечных $t > t_0$, так что уравнение $\varphi(t) = 0$ корней не имеет. Процесс останавливается только при случайном достижении состояния 0, но при этом $P_0(t^*) \neq 1$. Таким образом, однородный процесс рождения-гибели не является финитным.

2. Математическая модель статистического ансамбля неоднородных процессов рождения и гибели с монотонно убывающими интенсивностями

Рассмотрим теперь статистический ансамбль неоднородных процессов рождения и гибели. Ансамбль характеризуется случайными моментами t_0 возникновения каждого процесса рождения-гибели, а каждый из процессов рождения-гибели – случайными значениями параметров интенсивностей потоков рождения и гибели. Будем в дальнейшем предполагать, что интенсивности процессов рождения и гибели монотонно уменьшаются со временем t по экспоненциальному закону (19) от начальных значений λ_0 и μ_0 в момент времени $t = t_0$ до нуля при $t \rightarrow \infty$ с постоянными времени τ_1 и τ_2 соответственно. Тогда каждый процесс рождения-гибели в ансамбле будет характеризоваться условным распределением вероятностей (15) с пятью случайными параметрами t_0 , λ_0 , μ_0 , τ_1 , τ_2 . Распределение вероятностей состояний ансамбля таких процессов рождения и гибели в каждый момент времени t получается усреднением выражения (15) по распределениям указанных пяти параметров:

$$P_n(t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \int_0^{\infty} d\lambda_0 \int_0^{\infty} d\mu_0 \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 P_n(t | t_0, \lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2) p(t_0, \lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2),$$

где $P_n(t | t_0, \lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2)$ представляется формулой (19), а $p(t_0, \lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2)$ – плотность совместного распределения вероятностей параметров $t_0, \lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2$.

Предположим, что моменты t_0 возникновения событий, порождающих процессы рождения-гибели, образуют однородный пуассоновский поток независимых редких событий. Тогда параметр t_0 в бесконечном ансамбле таких процессов будет распределён на полуоси $(-\infty, t)$ равномерно. Естественно считать его статистически независимым от остальных параметров. Остальные четыре параметра $\lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2$ также можно принять статистически независимыми. Однако при некоторых соотношениях между этими параметрами ненулевые состояния процесса рождения-гибели могут оказаться невозможными.

Во-первых, для ненулевой вероятности ненулевого состояния процесса рождения-гибели необходимо, чтобы в момент времени t была положительной функция $c(t)$, определяемая выражением (18) и входящая множителем в выражение (15) для функции распределения состояния процесса рождения-гибели. Следовательно, должна быть положительной функция $\varphi(t)$, определяемая выражением (20) при экспоненциальных спадах (19) интенсивностей процессов рождения и гибели. Как видно из анализа поведения во времени функции $\varphi(t)$ (рис. 1), для этого требуется выполнение неравенства

$$\mu_0 \tau_1 > 1. \quad (21)$$

Во-вторых, для финитного процесса рождения-гибели с экспоненциально убывающими интенсивностями полное (за всё время жизни процесса) среднее число $G_1(\infty)$ событий рождения и полное среднее число $G_2(\infty)$ событий гибели являются конечными. Поскольку в финитном процессе рождения-гибели ненулевые состояния с вероятностью 1 поглощаются за конечное время его жизни, естественно потребовать равенство этих средних:

$$G = G_1(\infty) = G_2(\infty), \quad G_1(\infty) = \int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = \lambda_0 \tau_1, \quad G_2(\infty) = \int_{t_0}^{\infty} \mu(t) dt = \mu_0 \tau_2, \quad \lambda_0 \tau_1 = \mu_0 \tau_2 = G. \quad (22)$$

Получили два уравнения связей, позволяющих исключить переменные τ_1, τ_2 через переменные λ_0, μ_0 и новую переменную G :

$$\tau_1 = G/\lambda_0, \quad \tau_2 = G/\mu_0. \quad (23)$$

Тогда неравенство (21) примет вид ограничения на переменную G :

$$G > \lambda_0/\mu_0. \quad (24)$$

Это значит, что при нарушении этого неравенства ненулевые состояния процесса рождения-гибели становятся невозможными.

В-третьих, чтобы разность процессов рождения и гибели с учётом (22) и (23) была в среднем неотрицательной, необходимо, чтобы

$$\lambda_0 > \mu_0. \quad (25)$$

Это условие можно проиллюстрировать графически. На рис. 2 представлены изменения во времени среднего накопленного к моменту t числа $G_1(t), G_2(t)$ событий процессов рождения и гибели,

$$G_1(t) = \int_{t_0}^t \lambda(t) dt = \lambda_0 \tau_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right) \right), \quad G_2(t) = \int_{t_0}^t \mu(t) dt = \mu_0 \tau_2 \left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_2}\right) \right),$$

а также их разности $G_1(t) - G_2(t)$ при выполнении условий (22) и соотношений (23).

Видно, что разность $G_1(t) - G_2(t)$, выражающая среднее состояние процесса рождения-гибели (среднее число «живущих» событий), при $\lambda_0 > \mu_0$ сначала быстро возрастает, достигает максимума, а затем медленно уменьшается, оставаясь неотрицательной величиной. Если бы неравенство было противоположным, разность стала бы отрицательной, а это невозможно, так как означало бы, что среднее число погибших элементов потока рождения-гибели превышает среднее число рождённых элементов. Следовательно, при нарушении неравенства (25) ненулевые состояния процесса рождения-гибели становятся невозможными.

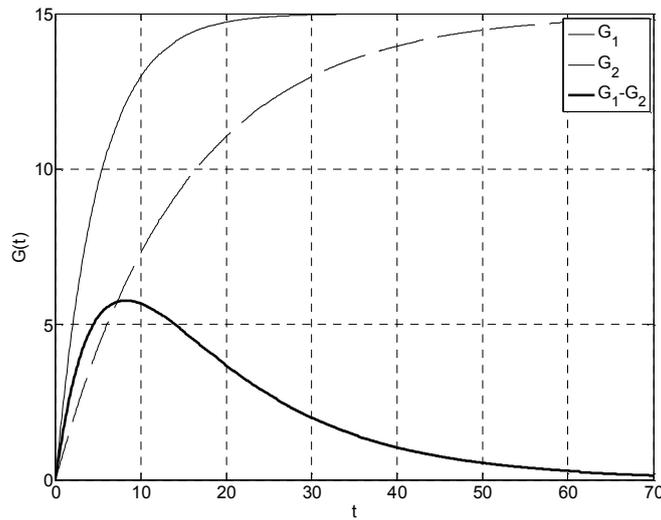


Рис. 2. Динамика среднего состояния процесса рождения-гибели при $G = 15, \lambda_0 = 3, \mu_0 = 1 (\lambda_0 > \mu_0)$

Таким образом, вместо четырёх параметров $\lambda_0, \mu_0, \tau_1, \tau_2$ при нахождении безусловного распределения состояний процесса рождения-гибели можно обойтись тремя: λ_0, μ_0, G . С учётом естественной неотрицательности параметров λ_0, μ_0, G ограничения (24)–(25) определяют область возможных значений этих параметров при усреднении условного распределения:

$$P_n(t) = \int_{-\infty}^t p(t_0) dt_0 \int_0^{\lambda_0} d\lambda_0 \int_0^{\lambda_0/\mu_0} d\mu_0 \int_{\lambda_0/\mu_0}^{\infty} dG \cdot P_n(t | t_0, \lambda_0, \mu_0, G) p(\lambda_0, \mu_0, G). \quad (26)$$

Условное распределение $P_n(t | t_0, \lambda_0, \mu_0, G)$ представляется выражением (15) с входящими в него функциями $a(t), b(t), c(t)$, определяемыми выражениями (10) с учётом (19) и (23).

3. Математическая модель скрытого марковского процесса рождения и гибели и её идентификация

Статистический ансамбль неоднородных марковских процессов рождения-гибели со случайными параметрами при неизвестных распределениях параметров представляется скрытым марковским процессом рождения-гибели. Этот процесс наблюдаем, тогда как его параметры являются ненаблюдаемыми случайными величинами. Возникает вопрос, при каких распределениях параметров наблюдаемый процесс рождения-гибели имеет теоретическое распределение вероятностей состояний, максимально близкое к эмпирическому распределению?

Задача отыскания наилучшей статистической оценки распределения $p(\lambda_0, \mu_0, G)$ по наблюдаемому эмпирическому распределению $\{P_{n^3}(t), n = 1, 2, \dots, N\}$, где N – максимальное наблюдаемое в эмпирическом распределении значение n , является задачей статистической идентификации наблюдаемого скрытого процесса рождения-гибели и сводится к минимизации по $p(\lambda_0, \mu_0, G)$ расхождения между теоретическим распределением (26) с ядром (15) и эмпирическим распределением. Для корректного решения этой задачи можно использовать известные методы тихоновской регуляризации.

В качестве критерия идентификации (критерий близости распределений) целесообразно выбрать логарифмический среднеквадратический критерий вида

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\log P_n(t) - \log P_{n^3}(t)}{\log P_{n^3}(t)} \right)^2 \Rightarrow \min_{p(\lambda_0, \mu_0, G)}. \quad (27)$$

Логарифмическая форма критерия удобна в случае больших (на несколько порядков) различий значений фигурирующих в критерии распределений при разных n .

Минимизация (27) с вычислением многомерного интеграла (26) представляет определённые вычислительные трудности, связанные, прежде всего, с преодолением некорректности и большим объёмом вычислений. Уменьшить число вычислений можно, заменяя интегралы суммами со сравнительно

небольшими (приемлемыми с вычислительной точки зрения) числами слагаемых. При этом, естественно, снижается точность вычислений. Опуская детали вычислительной схемы, приведём результаты вычислений оптимальных значений теоретической функции распределения $P_{n \text{ opt}}(t)$, максимально приближенной к эмпирическому распределению $P_{n \text{ э}}(t)$ по критерию (27).

4. Идентификация математической модели скрытого неоднородного марковского процесса рождения и гибели по эмпирическому распределению полисемии языка А.С. Пушкина

В качестве эмпирического распределения $P_{n \text{ э}}$ возьмём распределение $P_{n \text{ Pushkin}}$ полисемии слов языка А.С. Пушкина [6]. В двойном логарифмическом масштабе это распределение представлено на рис. 3 тонкой кривой. Полуужирной кривой показано оптимальное распределение $P_{n \text{ opt}}(t)$, вычисленное с использованием критерия (27) для некоторого фиксированного момента времени t без усреднения по t_0 в (26) (t_0 взято равным 0). Диапазоны значений параметров, на которых вычислялись их распределения: G – от 10 до 20 с шагом 0,5; λ_0 – от 0,1 до 6,1 с шагом 0,5; μ_0 – от 0,1 до 5,1 с шагом 0,5. Из рис. 3 видно хорошее согласие теоретического распределения с эмпирическим (достигнутый уровень значимости $p = 0,9971$ по критерию Колмогорова–Смирнова), что свидетельствует о возможности моделирования процесса развития полисемии языковых знаков скрытым марковским процессом рождения-гибели.

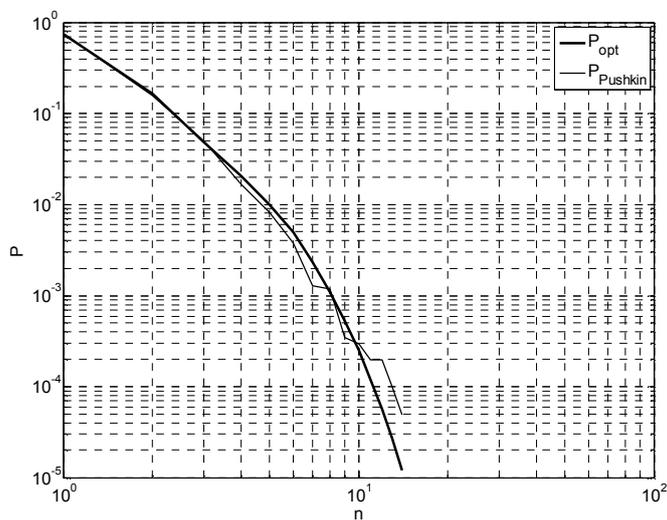


Рис. 3. Теоретическое распределение вероятностей состояний $P_{n \text{ opt}}$ неоднородного процесса рождения и гибели и эмпирическое распределение вероятностей $P_{n \text{ Pushkin}}$ значений полисемии языка А.С. Пушкина

Заключение

В работе выдвинута и подтверждена экспериментальными данными гипотеза о возможности математического моделирования процессов развития полисемии знаков естественного языка скрытыми нестационарными финитными марковскими моделями рождения и гибели. Получена аналитическая форма условного распределения вероятностей такого процесса при экспоненциально спадающих интенсивностях процессов рождения и гибели. Предложен критерий идентификации скрытой модели. Проведено приближённое численное решение задачи идентификации модели и вычислено безусловное одномоментное теоретическое распределение полисемии, соответствующее эмпирическому распределению полисемии языковых знаков словаря А.С. Пушкина. Получено хорошее согласие теоретического и экспериментального распределений полисемии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поддубный В.В., Поликарпов А.А. Диссипативная стохастическая динамическая модель развития языковых знаков // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 2. С. 103–124.

2. Poddubny V.V., Polikarpov A.A. Stochastic Dynamic Model of Evolution of Language Sign Ensembles // Methods and Applications of Quantitative Linguistics. Selected papers of the 8th International Conference on Quantitative Linguistics (QUALICO) / ed. by Ivan Obradović, Emmerich Kelih and Reinhard Kohler. Belgrade, 2013. P. 69–83.
3. Poddubny V., Polikarpov A. Evolutionary Derivation of Laws for Polysemic and Age-Polysemic Distributions of Language Sign Ensembles // Recent Contributions to Quantitative Linguistics / ed. by A. Tuzzi, M. Benešová, J. Macutek. Walter de Gruyter GmbH, 2015. P. 115–124.
4. Поликарпов А.А. Модель жизненного цикла знака: К теоретическим основаниям исторической лексикологии и дериватологии // Славянская лексикография / ред. М.И. Чернышева. М. : Азбуковник, 2013. С. 679–702.
5. Fisz M. Probability Theory and Mathematical Statistics. New York ; London ; Sydney : John Wiley & Sons, 1967. 680 p.
6. Словарь языка Пушкина : в 4 т. 2-е изд., доп. / отв. ред. В.В. Виноградов ; Российская академия наук. Ин-т рус. яз. им. В.В. Виноградова. М. : Азбуковник, 2000.

Поддубный Василий Васильевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: vvpoddubny@gmail.com
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 апреля 2016 г.

Poddubny Vasilij V. (Tomsk State University, Russian Federation).

On the possibility of mathematical modelling of the evolution of the polysemy of natural language signs with using of non-stationary birth-death processes.

Keywords: heterogeneous process of birth and death; hidden Markov model; model identification; language sign; polysemy.

DOI: 10.17223/19988605/36/5

We consider the possibility of mathematical modeling of the evolution of polysemy of ensemble of signs of natural language by means of non-stationary processes of birth and death. We showed that an adequate mathematical model of polysemy of ensemble of signs might be built on the base of hidden non-stationary model of the birth and death processes of the meanings of linguistic signs. We assume exponential decay of the intensities of the processes of birth and death:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \exp(-(t-t_0)/\tau_1), \quad \mu(t) = \mu_0 \exp(-(t-t_0)/\tau_2),$$

where t is the current time; t_0 is the time moment when the sign appears in the ensemble; λ_0, μ_0 are the initial values of intensities of the processes of birth and death; $\tau_1 = G / \lambda_0, \tau_2 = G / \mu_0$ are time decay constants of intensities, and G is the average number of meanings, which the sign may birth and lose during his life:

$$G = \int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = \lambda_0 \tau_1, \quad G = \int_{t_0}^{\infty} \mu(t) dt = \mu_0 \tau_2.$$

We received the conditional (with fixed parameters t_0, λ_0, μ_0, G) probability distribution of states n of this process:

$$P_n(t | \Theta) = \exp\left(-\frac{\lambda_0}{\mu(t)}(1-b(t))\right) (1-b(t))^{n_0 a(t)} \sum_{k=0}^n \frac{c(t)^{n-k} \Gamma(n_0 a(t)+1)}{k!(n-k)!\Gamma(n_0 a(t)-k+1)} \left(\frac{b(t)}{1-b(t)}\right)^k,$$

where

$$a(t) = \frac{\mu_0}{\mu(t)}, \quad b(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \mu(t) dt\right), \quad c(t) = \frac{\lambda(t) - \lambda_0 b(t)}{\mu(t)}.$$

In the hidden model of the statistical ensemble of processes of birth and death the parameters t_0, λ_0, μ_0, G of each individual process (of each linguistic sign) randomly vary in relation of each to other, subject to certain distribution laws. Under the assumption of a Poisson distribution of the flow of signs, the distribution density of the parameter t_0 can be considered as uniform on a large enough time interval, while the distributions of parameters λ_0, μ_0, G are unknown. Unconditional probability distribution $P_n(t)$ of the state n of an ensemble of the processes of birth-death (of the polysemy of an ensemble of signs) at moment t is the mathematical expectation of the conditional distribution $P_n(t|\theta)$ over the distribution of parameters t_0, λ_0, μ_0, G .

We have solved the task of estimation of the parameter distributions (for identifying of hidden model) according to the empirical polysemy distribution P_{ne} obtained from a representative dictionary, with the subsequent calculation of the optimal theoretical distribution $P_n(t)$. As an identification criterion (criterion of proximity of distribution), we select a logarithmic RMS criterion of type:

$$J = \frac{1}{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{\log P_n(t) - \log P_{n_3}(t)}{\log P_{n_3}(t)} \right)^2 \Rightarrow \min_{p(\lambda_0, \mu_0, G)},$$

convenient for large (several orders of magnitude) changes in distributions for different n . The criterion was implemented on example of using of the dictionary of Pushkin's language. We obtain a good agreement of distributions $P_n(t)$ and P_{ne} that confirms the possibility of using of hidden mathematical model of non-stationary process of birth-death for the simulation of polysemy evolution of the ensemble of signs of natural language.

REFERENCES

1. Poddubnyy, V.V. & Polikarpov, A.A. (2011) Dissipative Stochastic Dynamic Model of Language Signs Evolution. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 3(2). pp.103-124. (In Russian).
2. Poddubnyy, V.V. & Polikarpov, A.A. (2013) Stochastic Dynamic Model of Evolution of Language Sign Ensembles. *Methods and Applications of Quantitative Linguistics. Selected papers of the 8th International Conference on Quantitative Linguistics (QUALICO)*. Belgrade. pp. 6983.
3. Poddubnyy, V. & Polikarpov, A. (2015) Evolutionary Derivation of Laws for Polysemic and Age-Polysemic Distributions of Language Sign Ensembles. In: Tuzzi, A., Benešová, M. & Macutek, J. (eds) *Recent Contributions to Quantitative Linguistics*. GmbH: Walter de Gruyter. pp. 115-124.
4. Polikarpov, A.A. (2013) Model' zhiznennogo tsikla znaka: K teoreticheskim osnovaniyam istoricheskoy leksikologii i derivatologii [Model of the Sign Life Cycle: To the Theoretical Foundations of Historical Lexicology and Word Formation]. In: Chernysheva, M.I. (ed.) *Slavyanskaya leksikografiya* [Slavic Lexicography]. Moscow: Azbukovnik. pp. 679-702.
5. Fisz, M. (1967) *Probability Theory and Mathematical Statistics*. 3rd ed. New York-London-Sydney: John Wiley & Sons.
6. Vinogradov, V.V. (ed.). (2000) *Slovar' yazyka Pushkina: v 4 t.* [Dictionary of Pushkin's Language: in 4 vols]. 2nd ed. Moscow: Academy of Sciences of the USSR, Azbukovnyk.

Ю.И. Рыжиков, А.В. Уланов

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА НЕМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Представлены возможности применения гиперэкспоненциального распределения второго порядка (H_2) с параметрами произвольного (в том числе комплексного) типа в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания. Результаты верифицированы с помощью альтернативных методов.

Ключевые слова: случайные процессы; аппроксимация; гиперэкспоненциальное распределение; комплексные параметры распределения; немарковские системы массового обслуживания.

При исследовании немарковских процессов поступления и обслуживания заявок в многоканальных системах массового обслуживания (СМО) широко применяются распределения фазового типа (обозначаются Ph). К этим распределениям относятся взаимосвязанные параллельно-последовательные комбинации фаз прохождения заявок с показательными распределенными длительностями задержек в них. При фиксации номера фаз поступления или обслуживания заявок состояния СМО приобретают марковское свойство, что позволяет представить переходы между ними в виде дискретного марковского процесса с непрерывным временем. Идея метода фиктивных фаз была выдвинута еще А.К. Эрлангом. Порядком аппроксимации естественно считать количество сохраненных начальных моментов исходного распределения.

Наиболее общей формой представления фазовых распределений является схема Ньютса [1], в которой длительность каждой реализации процесса соответствует случайному времени блуждания по сети с показательной задержкой в каждом узле и одним поглощающим состоянием. При этом расчет СМО проводится в терминах кронекеровых матричных операций и, как правило, для одноканальных систем [Там же]. Машинная реализация упомянутых операций крайне неэффективна из-за необходимости выполнения большого количества вычислений с заведомо нулевым результатом. По этой причине для аппроксимации распределений с коэффициентом вариации $v > 1$, как правило, используют гиперэкспоненциальную (H_k) аппроксимацию, а в остальных случаях – эрлангову (E_k). В обоих случаях параметры распределений предполагаются исключительно вещественными.

В последнее время возрастает интерес к гиперэкспоненциальному распределению, применение которого показало высокую эффективность при решении задач суммирования рекуррентных потоков [2], расчета СМО с «нетерпеливыми» заявками [3], джексоновских сетей массового обслуживания [4], при анализе систем управления запасами [5].

В статье представлены результаты применения гиперэкспоненциального распределения второго порядка (H_2) с возможностью комплексного типа параметров, что позволяет аппроксимировать время обслуживания и интервалы между заявками входящего потока с произвольным (в том числе меньшим единицы) коэффициентом вариации и упростить расчетную схему.

1. Особенности применения H_2 -распределения

Гиперэкспоненциальное распределение второго порядка относится к распределениям фазового типа и предполагает выбор случайным процессом одной из двух альтернативных фаз. С вероятностью y_1 процесс попадает в первую фазу и задерживается в ней случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_1 , с вероятностью $y_2 = 1 - y_1$ процесс попадает во вторую фазу, где экспоненциальная задержка имеет параметр μ_2 .

Дополнительная функция H_2 -распределения имеет вид

$$\bar{F}(t) = y_1 e^{-\mu_1 t} + y_2 e^{-\mu_2 t}.$$

Подбор параметров H_2 -распределения возможен по методу моментов [1]. Поскольку данное распределение трехпараметрическое (четвертый параметр $y_2 = 1 - y_1$), оно позволяет выровнять три начальных момента аппроксимируемого, что принято считать вполне достаточным [6].

В зависимости от значений выравниваемых моментов параметры H_2 -распределения могут принимать комплексные и «парадоксальные» значения. Исследование H_2 -аппроксимации исходного гамма-распределения с коэффициентом вариации ν выявило, что:

- случай $\nu > 1$ дает вещественные параметры;
- при $1 > \nu > 1/\sqrt{2}$ параметры гиперэкспоненты вещественны, но парадоксальны: один из параметров $\{y_j\}, j = 1, 2$ будет отрицательным, а другой превысит единицу;
- строгое равенство $\nu = 1/\sqrt{2}$ недопустимо (соответствует E_2 распределению Эрланга с последовательной сменой фаз и не может быть заменено на параллельную);
- при $\nu < 1/\sqrt{2}$ имеем комплексные параметры H_2 -аппроксимации.

Поскольку параметры гиперэкспоненты $\{y_j\}, j = 1, 2$, интерпретируются как вероятности выбора случайным процессом одной из двух фаз, большинство специалистов по теории массового обслуживания рассматривают лишь тот случай, когда данные параметры определены на вещественном интервале $[0, 1]$, что соответствует аппроксимации распределений с коэффициентом вариации $\nu > 1$. Именно поэтому для аппроксимации распределений с коэффициентом вариации $\nu < 1$ гиперэкспонента не используется, а применяется распределение Эрланга E_k . Однако обширная серия вычислительных экспериментов показала, что при расчете СМО с применением H_2 -аппроксимации в области комплексных значений ее параметров потенциальная патология проявляется только в промежуточных результатах – вероятностях «фиктивных» микросостояний диаграммы переходов, на которые расщепляются «физические» состояния СМО. На этапе суммирования вероятностей микросостояний ярусов их комплексные части аннигилируются и компоненты результата расчета – вероятности числа заявок в системе – становятся вещественными.

Комплексный тип параметров H_2 -распределения подчеркивает *фиктивный* характер расщепления процесса на фазы. Допустимость таких параметров при исследовании случайных процессов была впервые отмечена Д. Коксом в 1955 г. [7]. В статье [8] авторы попытались дать вероятностную интерпретацию комплексных интенсивностей переходов между состояниями цепи Маркова.

Примеры различных диаграмм переходов для СМО с гиперэкспоненциальным распределением обслуживания или интервалов между заявками входящего потока приведены в [1, 3]. Дополнительным преимуществом H_2 -аппроксимации по сравнению с эрланговской является более компактный вид диаграмм переходов марковизированных СМО. Например, для моделей с эрланговским обслуживанием ширина диаграммы (количество микросостояний на n -м ярусе) быстро растет по числу каналов n и порядку распределения k (табл. 1) [9].

Таблица 1

Количество микросостояний на ярусах системы $M/E_k/n$

Число каналов n	Число фаз обслуживания k				
	2	3	4	5	6
2	3	6	10	15	21
3	4	10	20	35	56
5	6	21	56	126	252
10	11	66	286	1001	3003
20	21	231	1771	10626	53130
30	31	496	5456	46376	324632

Заметим, что при этом эрланговы распределения позволяют строго выравнивать первый и лишь приближенно – второй момент распределения времени обслуживания. Наименьший коэффициент вари-

ации из включенных в табл. 1 распределений (E_6) составил $1/\sqrt{6} \approx 0,408$. Для расчета СМО с еще меньшим коэффициентом вариации могут потребоваться гораздо большие значения k .

С другой стороны, применение H_2 -аппроксимации позволяет выровнять три начальных момента произвольного (исключая E_2) распределения, что обеспечивает более высокую точность расчета СМО. Поскольку диаграмма переходов для $M/H_2/n$ имеет ширину всего лишь $n + 1$, здесь можно рассчитывать системы с гораздо большим числом каналов. В «общий строй» можно поставить и распределение E_2 – если допустить небольшое отклонение дисперсии.

Таким образом, достоинствами H_2 -аппроксимации являются:

- возможность выравнивания трех моментов исходного распределения, что, как будет показано ниже, обеспечивает приемлемую точность при расчете СМО;
- гораздо более компактный (по сравнению эрланговской аппроксимацией) вид диаграмм переходов марковизированных СМО и, как следствие, необходимость расчета вероятностей меньшего числа микросостояний для систем с малыми коэффициентами вариации времени обслуживания или интервалов между заявками входящего потока;
- удобство вычисления дополнительной функции распределения.

2. Расчет немарковских СМО

Перечислим основные этапы расчета немарковских СМО методом фиктивных фаз с помощью H_2 -аппроксимации:

- расчет начальных моментов распределений обслуживания и (или) интервалов между заявками входящего потока;
- подбор параметров H_2 -распределения по рассчитанным на предыдущем шаге моментам;
- построение диаграммы переходов;
- составление уравнений баланса переходов между микросостояниями диаграммы и расчет вероятностей микросостояний;
- суммирование вероятностей микросостояний по ярусам и получение распределения числа заявок в системе.

Рассмотрим возможности H_2 -аппроксимации с произвольным типом параметров на примере одноканальных СМО. Выполним расчет распределения $\{p_j\}$ числа заявок в одноканальной системе $M/G/1$ методом вложенных цепей Маркова [1] и методом фиктивных фаз через H_2 -аппроксимацию различных распределений обслуживания $B(t)$:

- гамма с параметром формы 0,5 ($\Gamma_{0,5}$) (коэффициент вариации $v \approx 1,41$);
- $\Gamma_{1,5}$ ($v \approx 0,816$);
- равномерного U на интервале $[0; 2]$ ($v \approx 0,577$);
- вырожденного D ($v = 0$).

Среднее время обслуживания во всех случаях $b_1 = 1$, коэффициент загрузки системы $\rho = 0,7$. Результаты расчета распределения числа заявок в системе $\{p_j\}$, $j = \overline{0, 20}$, приведены на рис. 1. Сплошной линией показаны результаты, полученные методом вложенных цепей Маркова, штриховой – методом фиктивных фаз через H_2 -аппроксимацию.

В табл. 2 приведены параметры H_2 -распределения, рассчитанные по трем начальным моментам исходного распределения $B(t)$.

Т а б л и ц а 2

Параметры H_2 -распределения

$B(t)$	y_1	μ_1	μ_2	$B(t)$	y_1	μ_1	μ_2
$\Gamma_{0,5}$	0,500	0,586	0,341	U	$0,500+i0,866$	$0,150+i0,866$	$0,150-i0,866$
$\Gamma_{1,5}$	-0,765	0,263	0,137	D	$0,500+i0,141$	$0,200+i0,141$	$0,200-i0,141$

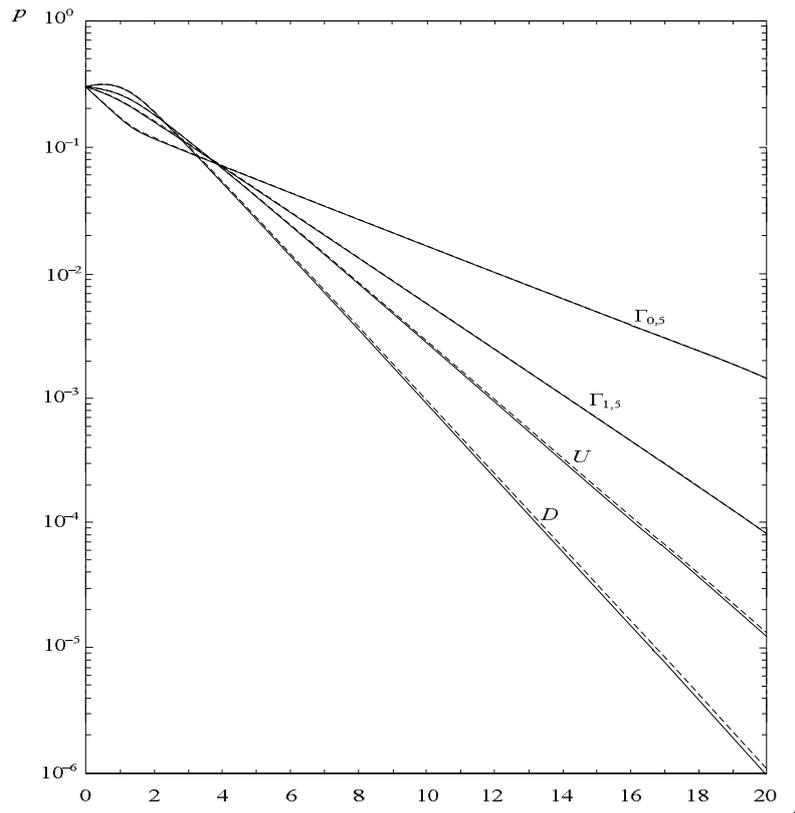


Рис. 1. Распределение числа заявок в системе $M/G/1$

Из графиков видно очень хорошее согласие результатов расчета распределения числа заявок в системе даже в области комплексных и парадоксальных параметров аппроксимирующей гиперэкспоненты. Расстояние Колмогорова при $\Gamma_{0,5}$, $\Gamma_{1,5}$, U и D обслуживании составило $\{0,002; 0,0002; 0,0015; 0,0018\}$ соответственно. Относительная погрешность на «хвостах» распределений, в области малых значений вероятностей, не превысила 15%.

При этом следует особо подчеркнуть, что в области комплексных параметров (см. табл. 2), особенно при аппроксимации случайных величин с коэффициентом вариации, близким к нулю, H_2 -плотность принимает отрицательные значения и вообще не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к плотности распределения. Тем не менее расчет марковизированных СМО показывает, что «комплексность» проявляется лишь в вероятностях микросостояний ярусов диаграмм и на этапе их суммирования полностью аннигилируется. Указанный эффект сохраняется при анализе *многоканальных немарковских СМО* [1. С. 224].

Таким образом, при работе с H_2 -распределением необходимо учитывать, что параметры гиперэкспоненты могут принимать комплексные значения, а качество аппроксимации следует оценивать не по критериям согласия исходного и подобранного распределений, а по точности расчета *итоговых характеристик СМО*.

Заключение

Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации позволяет с высокой точностью проводить анализ немарковских систем обслуживания с произвольным коэффициентом вариации времени обслуживания и (или) интервалов между заявками входящего потока. При этом комплексные значения параметров гиперэкспоненты, возникающие при коэффициенте вариации $\nu < 1$, не влияют на конечный результат, поскольку при суммировании вероятностей микросостояний ярусов диаграммы марковизированной СМО их комплексные части аннигилируются.

Непосредственно о качестве аппроксимации субслучайных (с малым коэффициентом вариации) величин не может идти и речи, поскольку плотность гиперэкспоненты в этом случае принимает отрицательные значения и вообще не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к плотности распределения. Качество аппроксимации здесь возможно оценить опосредованно – через сопоставление распределения числа заявок в СМО, полученного через H_2 -аппроксимацию, с результатами, полученными альтернативными методами.

Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации с комплексными параметрами также показало высокую эффективность при расчете *многоканальных* СМО с рекуррентным входящим потоком и (или) немарковским обслуживанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжиков Ю.И. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания. СПб. : ВКА, 2013. 496 с.
2. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах суммирования потоков // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. № 4. С. 34–39.
3. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Расчет гиперэкспоненциальной системы $M/H_2/n-H_2$ с заявками, нетерпеливыми в очереди // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 47–53.
4. Цициашвили Г.Ш. Синергетический эффект в сети с гиперэкспоненциальными распределениями времен обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 65–68.
5. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 43–49.
6. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений : пер. с англ. М. : Наука, 1966. 587 с.
7. Cox D.R. A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Process // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1955. P. 313–323.
8. Bidabad B., Bidabad B. Complex Probability and Markov Stochastic Process // Proc. of the First Iranian Statistics Conference, Isfahan University of Technology. 1992. P. 1–8.
9. Рыжиков Ю.И. Развитие и сопоставление методов расчета многоканальных систем обслуживания // Труды всероссийской конференции «XII Всероссийское совещание по проблемам управления» ВСПУ'2014 / Ин-т пробл. управл. М., 2014. С. 5208–5219.

Рыжиков Юрий Иванович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: ryzhbox@yandex.ru
 Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,
 Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Уланов Александр Викторович, канд. техн. наук. E-mail: ulanov246@rambler.ru
 Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского

Поступила в редакцию 3 мая 2016 г.

Ryzhikov Yuriy I. (Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg Institute of Informatics and Automatization of Russian Academy of Science, Russian Federation), *Ulanov Alexander V.* (Mozhaisky Military Space Academy, Russian Federation).

A use of hyperexponential distribution in non-markovian queuing systems analyses.

Keywords: hyperexponential distribution; approximation; complex parameters of distributions; numerical methods; non-markovian queuing systems.

DOI: 10.17223/19988605/36/6

In this paper we consider the application of second order hyperexponential distribution (H_2) with complex-type parameters for analysis of non-markovian queuing systems. This distribution relates to the phase-type one and allows showing non-markovian queuing systems states and the transitions between them as discrete Markov process with continuous time. The complementary cumulative H_2 distribution function is

$$\bar{F}(t) = y_1 e^{-\mu_1 t} + y_2 e^{-\mu_2 t}.$$

Using of H_2 distribution for queuing system calculations is reasoned by following reasons:

- the possibility of saving the three initial moments of the original distribution that provides high accuracy in queuing system calculation;
- much more compact (compared to the Erlang approximation) view transition diagrams and as a consequence necessity to calculate the probabilities of a smaller number of microstates for systems with low coefficients of variation of the service time or the intervals between customers;
- simple calculating of complementary cumulative distribution function.

Since the parameters of H_2 -distributions $\{y_j\}, j = 1, 2$, are interpreted as the probabilities of random select of one of two phases, most specialists in queuing theory considered only the case when these parameters are defined on a real interval $[0; 1]$, which corresponds to the approximation of the distribution with a coefficient of variation $\nu > 1$.

In this article, it is showed the possibilities of the H_2 -approximation in the case when the original distribution coefficient of variation $\nu < 1$. In this case parameters of H_2 distribution are complex. More detailed analysis of H_2 -approximation of the original gamma distribution with a coefficient of variation ν shows that:

- if $\nu > 1$, then the parameters are real;
- if $1 > \nu > 1/\sqrt{2}$, then the parameters are real, but the paradox: one of the parameters $\{y_j\}, j = 1, 2$, is negative, and the other will exceed one;
- equality $\nu = 1/\sqrt{2}$ is unacceptable (because corresponds to the Erlang distribution with consistent phase-change and, accordingly, can not be replaced by parallel);
- when $\nu < 1/\sqrt{2}$, we have the complex parameters of H_2 distribution.

However, when calculating the queuing system with H_2 -approximation in the field of complex values of the parameters of its potential pathology manifests itself only in the intermediate results – in the probabilities of "fictitious" microstate-transition diagram, which split the "physical" state of queuing systems. At the summation of probabilities of microstates tiers of complex parts are annihilated and the result of the calculation – the probability of the number of customers in the system – becomes real.

The paper compares the results of single-channel systems $M/G/1$ calculation invested by embedded Markov chain, which allows you to obtain an exact solution, with the results obtained by the fictitious phase using H_2 -approximation of non-exponential service time. Various initial distribution services – deterministic, gamma with shape parameters of 1.5 or 0.5, and even in the interval $[0, 2]$ are considered. It is shown that the accuracy of the above-mentioned result is high enough. The maximum Kolmogorov distance was 0.002, and the relative error of the probability of rare events (about 10^{-5}) did not exceed 15%.

At the same time the quality of approximation in the field of complex parameters H_2 distribution is out of question because density of H_2 -distribution in this case is negative and in general does not satisfy the requirements of the probability density function. Quality of approximations here should be assessed indirectly – through comparison of the distribution of the number of customers in the queuing system, obtained through H_2 -approximation, with the results obtained by alternative methods.

REFERENCES

1. Ryzhikov, Yu.I. (2013) *Algoritmicheskiy podkhod k zadacham massovogo obsluzhivaniya* [A use of algorithm approach in the queuing theory]. Saint-Petersburg: VKA.
2. Ryzhikov, Yu.I. & Ulanov, A.V. (2015) Using hyperexponential approximation in the summation of flows problems. *Intellektual'nye tekhnologii na transporte – Intelligent technologies on transport*. 4. pp. 34-39. (In Russian).
3. Ryzhikov, Yu.I. & Ulanov, A.V. (2014) The method of calculating $M/H_2/n-H_2$ queuing system with impatient customers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 47-53. (In Russian).
4. Tsitsiashvili, G.Sh. (2016) Synergetic effect in network with hyperexponential distributions of service times. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 65-68. (In Russian).
5. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 43-49. (In Russian).
6. Kendall, M. & Stuart, A. (1966) *Teoriya raspredeleniy* [The advanced theory of statistics. Distribution theory]. Translated from English. Moscow: Nauka.
7. Cox, D.R. (1955) A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Process. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* pp. 313-323. DOI: 10.1017/S0305004100030231
8. Bidabad, B. & Bidabad, B. (1992) Complex Probability and Markov Stochastic Process. *Proc. of the First Iranian Statistics Conference. Isfahan: Isfahan University of Technology Publ.* pp. 1-8.
9. Ryzhikov, Yu.I. (2014) [Progress and comparison of multichannel queuing systems calculations methods]. *Proc. of the XII Russian Conference on Control Science. Moscow: Institute of Control Sciences.* pp. 5208-5219. (In Russian).

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/36/7

М.Н. Сиротина**СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ
В МОДУЛИРОВАННОМ СИНХРОННОМ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ
ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 годы.

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, т.е. после каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности, в течение которого другие события исходного модулированного синхронного потока недоступны наблюдению. Полагается, что длительность мертвого времени – неизвестная величина. Проводится сравнение качества получаемых (по наблюдениям за моментами наступления наблюдаемых событий потока) оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

Ключевые слова: модулированный синхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; МП-оценки; ММ-оценки; длительность мертвого времени.

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований модулированного синхронного потока событий, начатых в статьях [1–4].

Математические модели систем массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином «цифровые сети интегрального обслуживания» (ЦСИО) [5, 6].

На практике параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении явилась статья [7], где дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [8, 9]. В [8] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками, в [9] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Отечественные и зарубежные авторы в своих работах начала 90-х гг. [10–15] называют данные потоки событий либо дважды стохастическими потоками событий, либо MAP-потоками, либо МС-потоками. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [16–21]; 2) асинхронные и обобщенные асинхронные потоки событий [22–27]; 3) полусинхронные и обобщенные полусинхронные потоки событий [28–33]. В [34] введены в рассмотрение MAP-потоки событий первого порядка (собственно MAP-потоки, введенные в [9]) и MAP-потоки событий второго порядка (суперпозиция двух синхронизированных MAP-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [34] показывается, что синхронный МС-поток является частным случаем MAP-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями MAP-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [24, 27, 29, 33, 35–38]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [16–22, 26, 28, 30–32].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [39–46], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по ней рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети. Для того чтобы оценить потери заявок в узле сети, необходимо оценить длительность мертвого времени, которым выступает в данном случае длительность сигнала «заглушки».

В работах [1–4] введен в рассмотрение модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу MAP-потоков второго порядка. Синхронный поток событий систематически исследовался в работах [16–21, 47–52]. В статье [4] приведено решение задачи оценивания длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия [53–59]. В настоящей статье предложено решение задачи оценивания длительности мертвого времени методом моментов, а также производится сравнение оценок, полученных методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее – поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i, i = 1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии закончится и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2; i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_i, i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; переход осуществляется с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$); с вероятностью $1-q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс.

Матрицы инфинитезимальных коэффициентов рассматриваемого потока примут вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из

состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [16–21].

После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности T (далее – мертвое время), в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, т.е. события, наступившие в течение интервала мертвого времени не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь порождает период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления наблюдаемых событий потока, штриховка – периоды мертвого времени длительности T , ось под номером 1 отображает исходный модулированный поток событий, под номером 2 – схему создания мертвого времени, под номером 3 – наблюдаемые события модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени.

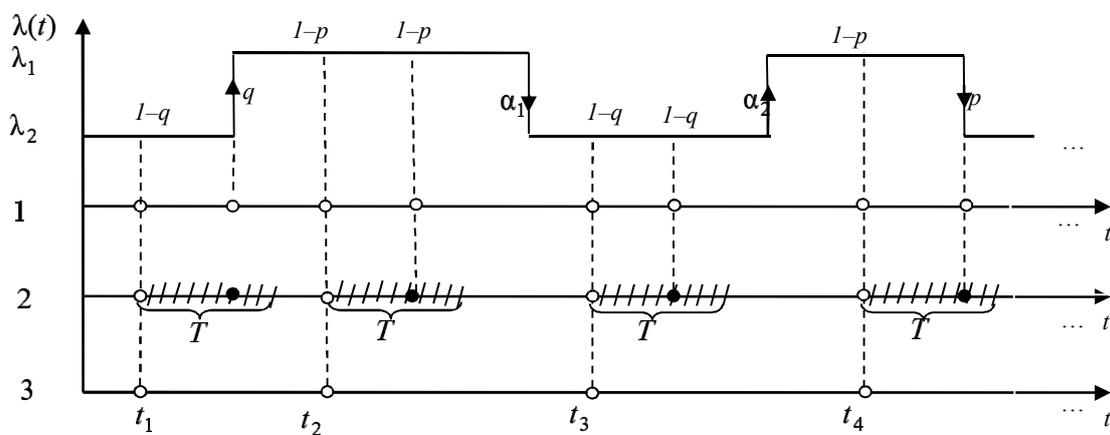


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми (в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только моменты наступления наблюдаемых событий на временной оси t_1, t_2, \dots . Последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления событий наблюдаемого потока порождает вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события потока), $k = 1, 2, \dots$. Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – момент начала наблюдений, t – момент окончания наблюдений, можно пренебречь, при этом полагается $t_0 = 0$.

Главная задача работы – в момент окончания наблюдений (в момент времени t) построить оценки \hat{T} длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия и методом моментов (в предположении, что остальные параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q$ известны) и произвести сравнение получаемых оценок.

2. МП-оценка длительности мертвого времени

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2).

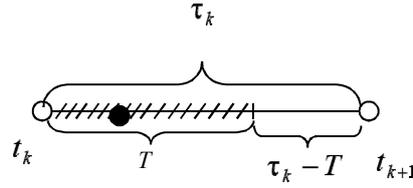


Рис. 2. Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Поскольку поток функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). Таким образом, без потери общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. $\tau = 0$.

Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, запишется в виде [4]:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1(T) - \lambda_2 \pi_2(T)),$$

$$z_1 = ((\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) - \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}) / 2,$$

$$z_2 = ((\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) + \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}) / 2, \quad z_1 < z_2,$$

$$\pi_1(T) = \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$\pi_1(0|T) = \frac{q\lambda_2 \alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{(1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}.$$

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2, \dots, \tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком на интервале наблюдения (t_0, t) значений длительностей интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока. Упорядочим величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. Тогда функция правдоподобия, с учетом (1), примет вид

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad 0 < \tau_{\min} < T,$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}.$$

Так как часть задачи исследования заключается в построении оценки длительности мертвого времени \hat{T} , то согласно методу максимального правдоподобия ее решение есть нахождение глобального максимума функции правдоподобия по неизвестному параметру T :

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \left\{ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau^{(j)}-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau^{(j)}-T)} \right\} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad (2)$$

где $z_1, z_2, \gamma(T)$ определены в (1).

Значение T , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть МП-оценка \hat{T} длительности мертвого времени.

В [5] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): при любых значениях параметров рассматриваемого потока событий $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0 (\lambda_1 > \lambda_2), \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ МП-оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$. Таким образом, в процессе наблюдения потока событий (в течение временного интервала (t_0, t)) вычисляются величины $\tau_k, k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$ и полагается $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$.

3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [3] показано, что модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях поток становится рекуррентным.

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$, – значения длительностей смежных k -го и $k+1$ -го интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока ($k = 1, 2, \dots$). В силу стационарности потока можно положить $k = 1$ и рассматривать длительности интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$. Тогда $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятностей имеет вид $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \tau_2), \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ [2]:

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \\ &+ C_T(z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \\ C_T &= e^{-(\beta_1+\beta_2)T} \frac{P(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 \pi_1(0) - \beta_2 \pi_2(0))(P_1 + P_2)}{\left[(z_2 - z_1)(z_1 z_2 - P e^{-(\beta_1+\beta_2)T})(\beta_1 + \beta_2) \right]^2} \times \\ &\times \left\{ z_1 z_2 - e^{-(\beta_1+\beta_2)T} (2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)) + e^{-2(\beta_1+\beta_2)T} (z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))) \right\}, \quad (3) \\ \beta_1 &= \alpha_1 + p\lambda_1, \beta_2 = \alpha_2 + q\lambda_2, P = \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q), \\ P_1 &= (1-p)\lambda_1 \alpha_2 + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1), P_2 = (1-q)\lambda_2 \alpha_1 + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2), \\ \pi_1(0) &= P_1 / (P_1 + P_2), \pi_2(0) = P_2 / (P_1 + P_2), \end{aligned}$$

где $z_1, z_2, p_T(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Теоретическая ковариация значений τ_1, τ_2 запишется в виде

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[\int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2. \quad (4)$$

Подставляя плотность (1) и совместную плотность (3) в интегральную формулу для ковариации (4), находим ее явный вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T, \quad (5)$$

где z_1, z_2 определены в (1), C_T определена в (3).

Пусть за время наблюдения (в течение временного интервала (t_0, t)) реализовалось n интервалов $(t_k, t_{k+1}), k = \overline{1, n}$, длительности $\tau_k, k = \overline{1, n}$. Введем статистику:

$$\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (6)$$

которая представляет собой оценку теоретической ковариации (5). Тогда согласно методу моментов уравнение моментов, учитывающее коррелированность потока событий, может быть записано в виде

$$\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T = \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение C_T , определенное в (3), вводя новую переменную $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ и проделывая необходимые выкладки, выражение (7) преобразуется в кубическое уравнение относительно переменной x вида

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ a &= h[z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))], \\ b &= -\left\{ h[2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] + P^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right\}, \\ c &= z_1 z_2 \left[h + 2P \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right], \quad d = -(z_1 z_2)^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2), \\ h &= P(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) / (z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При решении уравнения (8) определяются три корня $x_i, i=1,2,3$, которые, в свою очередь, задают три ММ-оценки длительности мертвого времени:

$$\hat{T}_{MM}^{(i)} = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln x_i, \quad i=1,2,3.$$

Используя полученные выше ММ-оценки $\hat{T}_{MM}^{(i)}, i=1,2,3$, можно определить единственную ММ-оценку \hat{T}_{MM} по алгоритму, описанному ниже:

1. Для заданного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ осуществляется в течение длительности $T_m = t$ ед. времени интервала наблюдения (интервала моделирования) имитационное моделирование наблюдаемого потока событий.
2. В ходе имитационного моделирования находится оценка ковариации $\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2)$, определенная в (6), где $n \geq 2$ (n – количество наблюдаемых событий потока).
3. Используя метод Виета, решается кубическое уравнение (8), т.е. находятся три корня $x_i, i=1,2,3$, которые могут быть как вещественными, так и комплексными.
4. Если все корни $x_i, i=1,2,3$, – комплексные, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.
5. Если среди трех корней $x_i, i=1,2,3$, выделяется хотя бы один вещественный, то возможны три варианта:

5.1. Вещественный корень один – x_1 , тогда:

5.1.1. Если $x_1 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

5.1.2. Если $x_1 > 0$, то:

5.1.2.1. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(1)} > \tau_{\min}$.

5.1.2.2. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$.

5.1.2.3. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$.

5.2. Вещественных корней два – x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), тогда:

5.2.1. Если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

5.2.2. Если $x_1 \leq 0 < x_2$, то:

5.2.2.1. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(2)} > \tau_{\min}$.

5.2.2.2. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \tau_{\min}$.

5.2.2.3. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$.

5.2.3. Если $0 < x_1 < x_2$, то:

5.2.3.1. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.2.3.2. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.2.3.3. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.2.3.4. $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)}) / 2$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$.

5.2.3.5. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$, если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$.

5.2.3.6. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$.

5.3. Вещественных корня три – x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), тогда:

5.3.1. Если $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

5.3.2. Если $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$, то:

5.3.2.1. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} > \tau_{\min}$.

5.3.2.2. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \tau_{\min}$.

5.3.2.3. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0$.

5.3.3. Если $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$, то:

5.3.3.1. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$.

5.3.3.2. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$.

5.3.3.3. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$.

5.3.3.4. $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)}) / 2$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$.

5.3.3.5. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$.

5.3.3.6. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$.

5.3.4. Если $0 < x_1 < x_2 < x_3$, то:

5.3.4.1. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.3.4.2. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.3.4.3. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.3.4.4. $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)}) / 2$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.3.4.5. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.3.4.6. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$.

5.3.4.7. $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)}) / 3$, если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$.

5.3.4.8. $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)}) / 2$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$.

5.3.4.9. $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$.

5.3.4.10. $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0 \leq \tau_{\min}$.

В результате работы алгоритма выбирается один из вышеописанных вариантов, который определяет единственную ММ-оценку \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени.

4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок

Для получения статистических результатов разработан алгоритм вычисления МП- и ММ-оценок, который реализован на языке программирования С# в среде программирования Microsoft Visual Studio C#.

Программа расчета состоит из трех этапов. На первом этапе осуществляется имитационное моделирование рассматриваемого модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени (при заданных параметрах моделирования $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$). Сам алгоритм имитационного моделирования в данной работе не приводится; хотя он достаточно трудоемок, но никаких принципиальных сложностей не представляет. Результатом работы имитационной модели является последовательность значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, n = 2, 3, \dots$ ($\tau_n = t_{n+1} - t_n$, где t_{n+1} – последнее наблюдаемое событие на интервале моделирования T_m).

Второй этап расчета заключается в нахождении численных значений МП- и ММ-оценок рассматриваемого потока. Опишем сокращенный алгоритм программной реализации второго этапа расчета:

1. На основании последовательности $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, n = 2, 3, \dots$, находится МП-оценка

$$\hat{T}_{МП} = \tau_{\min} \quad (\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}).$$

2. Вычисляется оценка ковариации (6).
3. Методом Виета находятся корни $x_i, i = 1, 2, 3$, кубического уравнения (8), на основании которых вычисляются три ММ-оценки $\hat{T}_{ММ}^{(i)}, i = 1, 2, 3$.
4. Реализуется алгоритм нахождения единственной ММ-оценки $\hat{T}_{ММ}$.

Третий этап расчета заключается в сравнении качества МП- и ММ-оценок путем проведения статистического эксперимента:

1. Для заданного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ осуществляется моделирование наблюдаемого потока событий на интервале моделирования T_m для каждого j -го эксперимента, $j = \overline{1, N}$.
2. В каждом j -м эксперименте вычисляются значения МП- и ММ-оценок $\hat{T}_{МП}^{(j)}, \hat{T}_{ММ}^{(j)}, j = \overline{1, N}$.
3. В каждом j -м эксперименте вычисляются значения величин $\Delta \hat{T}_{МП}^{(j)} = (\hat{T}_{МП}^{(j)} - T)^2$, $\Delta \hat{T}_{ММ}^{(j)} = (\hat{T}_{ММ}^{(j)} - T)^2, j = \overline{1, N}$, где T – истинное значение мертвого времени, известное из имитационной модели.
4. Осуществляется повтор шагов 1–3 N раз.

Результатом третьего этапа расчета являются две выборки: $(\Delta \hat{T}_{МП}^{(1)}, \Delta \hat{T}_{МП}^{(2)}, \dots, \Delta \hat{T}_{МП}^{(N)})$, $(\Delta \hat{T}_{ММ}^{(1)}, \Delta \hat{T}_{ММ}^{(2)}, \dots, \Delta \hat{T}_{ММ}^{(N)})$, используя которые вычисляются выборочные вариации полученных оценок:

$$\hat{V}_{МП} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta \hat{T}_{МП}^{(j)}, \quad \hat{V}_{ММ} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta \hat{T}_{ММ}^{(j)}.$$

Сравнивая значения выборочных вариаций, решается, какая из оценок при заданных параметрах $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ лучше, а какая хуже: если $\hat{V}_{МП} \leq \hat{V}_{ММ}$, то МП-оценка лучше ММ-оценки, в противном случае ММ-оценка лучше МП-оценки. Стоит отметить, что по определению при заданном времени моделирования T_m МП-оценка будет всегда смещенная ($\tau_{\min} > T$). Вариант, когда МП-оценка не смещенная, реализуется только в асимптотическом случае, когда $T_m \rightarrow \infty$.

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–6. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования T_m , причем T_m изменяется от 10 до 50 с шагом 10 ед. времени в табл. 1–3, в табл. 4–6 T_m изменяется от 600 до 1000 с шагом 100 ед. времени. Во второй и третьей строках таблиц для каждой длительности имитационного моделирования T_m приведены численные значения для выборочных вариаций МП- и ММ-оценок $\hat{V}_{МП}$ и $\hat{V}_{ММ}$ соответственно. В четвертой строке каждой из таблиц приведены численные значения разности $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$. Численные результаты во всех таблицах получены для $N = 100$ (N – количество экспериментов).

Таблица 1

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, p = 0,5, q = 0,4, \alpha_1 = 0,03, \alpha_2 = 0,03, T = 0,5$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,08936555	0,02139580	0,00190583	0,00114900	0,00128956
$\hat{V}_{ММ}$	0,08919526	0,02131419	0,00190530	0,00114900	0,00445481
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00170293	0,00008161	0,00000052	0	-0,00316525

Таблица 2

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p = 0,4, q = 0,2, \alpha_1 = 0,05, \alpha_2 = 0,05, T = 0,7$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,90196699	0,12758867	0,040312912	0,02378204	0,00815925
$\hat{V}_{ММ}$	0,90034098	0,12616512	0,038268349	0,02355205	0,00812320
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00162600	0,00142355	0,002044563	0,00229987	0,00003605

Таблица 3

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 0,9, p = 0,4, q = 0,3, \alpha_1 = 0,02, \alpha_2 = 0,02, T = 0,2$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,04937792	0,00691690	0,00299561	0,00132811	0,00104303
$\hat{V}_{ММ}$	0,04930285	0,00690571	0,00296747	0,00126077	0,00103060
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00007507	0,00001118	0,00002814	0,00006734	0,00001243

Таблица 4

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, p = 0,5, q = 0,4, \alpha_1 = 0,03, \alpha_2 = 0,03, T = 0,5$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000410	0,00000405	0,00000304	0,00000225	0,00000151
$\hat{V}_{ММ}$	0,00314312	0,00460004	0,00594022	0,00305194	0,00614238
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00313901	-0,00459599	-0,00593717	-0,00304969	-0,00614086

Таблица 5

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p = 0,4, q = 0,2, \alpha_1 = 0,05, \alpha_2 = 0,05, T = 0,7$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00009986	0,00006699	0,00003027	0,00003759	0,00002732
$\hat{V}_{ММ}$	0,00875014	0,00404040	0,00710656	0,00359553	0,00014134
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00865027	-0,00397328	-0,00707628	-0,00355793	-0,00011401

Таблица 6

Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 0,9, p = 0,4, q = 0,3, \alpha_1 = 0,02, \alpha_2 = 0,02, T = 0,2$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000638	0,00000349	0,00000335	0,00000166	0,00000137
$\hat{V}_{ММ}$	0,00000638	0,00000349	0,00103220	0,00002244	0,00002016
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0	0	-0,00102884	-0,00002078	-0,00001879

Анализ результатов, полученных в ходе статистического эксперимента, показывает, что при достаточно малом времени моделирования T_m ($T_m = 10, 20, 30, 40, 50$ ед. времени) ММ-оценки длительности мертвого времени лучше МП-оценок длительности мертвого времени (см. табл. 2, 3) либо, по крайней мере, не хуже их (см. табл. 1). Это вполне объяснимо, так как при малом времени наблюдения МП-оценка $\hat{T}_{МП}$ может быть достаточно сильно смещенной относительно T . При достаточно большом времени моделирования T_m ($T_m = 600, 700, 800, 900, 1000$ ед. времени) МП-оценки лучше ММ-оценок (табл. 4–6), что вполне естественно, так как при увеличении времени наблюдения за потоком смещение МП-оценки $\hat{T}_{МП}$ относительно T уменьшается.

Заключение

Анализ проведенного исследования оценок длительности мертвого времени T на базе метода максимального правдоподобия и метода моментов позволяет сделать вывод о том, что при малом времени наблюдения за потоком предпочтительнее применять метод моментов и использовать ММ-оценку $\hat{T}_{ММ}$, при большом времени наблюдения за потоком – МП-оценку $\hat{T}_{МП}$. Границу применения той или иной оценки при заданных параметрах потока $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ следует определять для каждого случая отдельно путем имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиротина М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 63–74.
2. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени // Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева. Белоруссия. Минск. 23–26 февраля 2015. Минск : Изд-во РИВШ, 2015. С. 299–304.
3. Сиротина М.Н. Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке при непродлевающемся мертвом времени и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2(31). С. 53–67.
4. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 50–64.
5. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
7. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
8. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
9. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
11. Lucantoni D.M., Neuts, M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communication in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
12. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
13. Yang Y.W. Woo Shin. BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters // Operation Research Letters. 2004. V. 32, Issue 4. P. 364–373.
14. Artalejo Jesus R., Chakravarthy Srinivas R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrieval queue // Applied Mathematics and Computation. 2006. V. 183, Issue 2. P. 1399–1409.

15. Best J. Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity // Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. WSEAS Press, 2009. P. 155–158.
16. Bushalnov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
18. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 9. С. 129–138.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 24–29.
21. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов // Радиотехника. 1995. № 7–8. С. 6–10.
22. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
23. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
24. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 88–101.
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 267–273.
27. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия высших учебных заведений. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
28. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой российской конференции с международным участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.
29. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
30. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
31. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
32. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
33. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
34. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
35. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
36. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
37. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1. С. 33–47.
38. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2. С. 44–65.
39. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
40. Горцев А.М., Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.
41. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.

42. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
43. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Известия высших учебных заведений. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
44. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2005. № 10. С. 35–40.
45. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишних событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
46. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
47. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
48. Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний синхронного МС-потока событий // Избранные доклады международной конференции «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск : Изд-во ТГУ, 1997. Т. 1. С. 97–102.
49. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of the states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // Automation and Remote Control. 1999. V. 60, No. 1. P. 41–51.
50. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 1999. № 4. С. 19.
51. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Синхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы международной конференции. Минск : Изд-во БГУ, 2005. С. 60–69.
52. Бушланов И.В., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 40–51.
53. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1. С. 27–37.
54. Горцев А.М., Соловьев А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57, № 7. С. 103–111.
55. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
56. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3(32). С. 23–32.
57. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
58. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
59. Горцев А.М., Соловьев А.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности непродлеваемого мертвого времени в MAP-потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 4. С. 13–22.

Сиротина Мария Николаевна. E-mail: mashuliagol@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 14 мая 2016 г.

Sirotnina Maria N. (Tomsk State University, Russian Federation).

Comparison of ML- and MM-estimators of period duration of dead time in modulated synchronous double stochastic flow of events.

Keywords: modulated synchronous flow; nonextendable dead time; ML-estimation; MM-estimation; dead time duration.

DOI: 10.17223/19988605/36/7

One considers the modulated synchronous twice stochastic flow of events, which rate is piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). The time when process $\lambda(t)$ is staying in i -state has exponential probability distribution function with the parameter $\alpha_i, i = 1, 2$. During the time random interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, there is the Poisson flow with the rate $\lambda_i, i = 1, 2$.

A state transition of process $\lambda(t)$ occurs in the moment of the Poisson flow event arrival, moreover, the passing from the first to the second state is realized with probability p , the passing from the second to the first state is realized with probability q .

The flow functions in conditions of dead time, which is one of the falsifying factors of state and parameter estimation of the flow. After each registered event, there is the time of fixed duration T (dead time), during which another flow events is inaccessible for observation. Now consider the nonextendable dead time, that is all events, which happen during dead time interval without its prolongation. At the end of the period duration of the dead time, the first happened event creates dead time period of duration T again and etc. Note that for the flow, which functions in dead time conditions, events are observable if they did not get into dead time interval (events which cause its approach). For the flow which functions in dead time absence all events are observable.

One of confounding factor during the flow state and parameter estimation is dead time of recording device, which is generated by observable flow event occurrence. All other events occurred during the dead time interval are not accessible for observation.

The main purpose of the research work is to obtain dead time period estimator \hat{T} using the maximum likelihood method and method of moments (ML-estimators and MM-estimators respectively) and to compare these estimators.

During the investigation it was obtained that ML-estimator of dead time period duration takes a value $\hat{T} = \tau_m = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$. It means that the solution of optimization problem is the dead time estimate $\hat{T} = \tau_m$. Also, it was designed an algorithm of the single MM-estimator obtaining. On the base of these methods it was realized a computing program and it was made a statistical experiment during which for different values of input flow parameters $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ there was computed the values of ML-estimates $\hat{T}_{MI}^{(j)}$ and MM-estimates $\hat{T}_{MM}^{(j)}, j = \overline{1, N}$ (N is a number of experiment steps). For the values obtained there are calculated the values of sample variances $\hat{V}_{MI} = (1/N) \sum_{j=1}^N (\hat{T}_{MI}^{(j)} - T)^2, \hat{V}_{MM} = (1/N) \sum_{j=1}^N (\hat{T}_{MM}^{(j)} - T)^2, j = \overline{1, N}$. Then it was chosen which of estimates is better: if $\hat{V}_{MI} \leq \hat{V}_{MM}$ then ML-estimate is better than MM-estimate, otherwise MM-estimate is better than ML-estimate.

REFERENCES

1. Sirotina, M.N. (2014) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 63-74. (In Russian).
2. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time]. *Proceedings International Scientific Conference devoted to the 80th anniversary of Prof. G.A. Medvedev*. Belorussia, 23–26 February, 2015. Minsk: RIVSH. pp. 299-304.
3. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) Joint probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time and recurrence flow conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 53-67. (In Russian)
4. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2016) Maximum likelihood function estimation of dead time duration in modulated synchronous doubly stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 50-64. (In Russian)
5. Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
6. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
7. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 6. pp. 92-99.
8. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1. pp. 55-61.
9. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
10. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174
11. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
12. Livshits, K.N. & Bublik, Ya.S. (2010) The probability of insurance company collapse with twice stochastic flow of insurance payouts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
13. Yang, Y.W. & Woo Shin. (2004) BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters. *Operation Research Letters*. 32(4). pp. 364-373. DOI: 10.1016/j.orl.2003.09.005
14. Artalejo, J.R. & Chakravarthy, S.R. (2006) Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrieval queue. *Applied Mathematics and Computation*. 183(2). pp. 1399-1409.

15. Best, J. (2009) Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity. In: Pardalos, P. et al. (eds) *Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals*. WSEAS Press. pp. 155-158.
16. Bushalnov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radioengineering*. 10. pp. 8-16.
18. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s proyavleniem libo neproyavleniem sobyitiy [Dead time and parameters estimation of synchronous alternating flow with or without event manifestation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 9. pp. 129-138.
19. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobyitiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232-239.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameter estimation of synchronous twice-stochastic flow of events using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 24-29.
21. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotechnics*. 40(7–8). pp. 6-10.
22. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density function of interval duration of generic asynchronous event flow in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14-25. (In Russian).
24. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Error probability of state estimation of generic synchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88-101. (In Russian).
25. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
26. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2006) Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobyitiy metodom momentov [Parameter estimation of asynchronous flow with additional event initiation using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. 18. pp. 267-273.
27. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 36(12). pp. 1153-1167.
28. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) [Dead time period estimation of generic semi-synchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur [New information technologies in complex structure investigation]. Proceedings of 10th Russian conference with international participation (9-13 of June, 2014)*. Tomsk: Tomsk State University. pp. 96-97. (In Russian).
29. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2010) Optimal state estimation of generic semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66-81. (In Russian).
30. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
31. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
32. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
33. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
34. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
35. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovyev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
36. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal state estimation of doubly stochastic flow of events under conditions of time moments measurement errors. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66.
37. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).

38. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow with random number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44-65. (In Russian).
39. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
40. Gortsev, A.M. & Vasilieva, L.A. (2002) Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Avtomatika i Telemekhanika*. 3. pp. 179-184.
41. Gortsev, A.M. & Zavgorodnaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytii pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
42. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3-7.
43. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Otsenivanie parametrov al'terniruyushchego potoka sobytii v usloviyakh "mertvogo vremeni" [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of dead time]. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13.
44. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow in conditions of a fixed dead time. *Higher Educational Establishment Journal. Physics*. 10. pp. 35-40.
45. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow with additional event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145. (In Russian).
46. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika*. 2. pp. 8-11.
47. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56-63.
48. Nezhelskaya, L.A. (1997) [Optimal state estimation of synchronous MC-flow of events]. *Vsesibirskie chteniya po matematike i mekhanike* [Siberian readings on mathematics and mechanics]. Proc. of the International Conference. Vol. 1. Tomsk: Tomsk State University. pp. 97-102. (In Russian).
49. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events under conditions of time moments measurement errors. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41-51.
50. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal parameter estimation of a double stochastic Poisson flow of events in presence of measurement errors of time instants. *Higher Educational Establishment Journal. Physics*. 4. p. 19. (In Russian).
51. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2005) [Synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability theory, stochastic processes, mathematical statistics and applications]. Proc. of the International Conference. Minsk: BSU. pp. 60-69. (In Russian).
52. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.M. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65(9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
53. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time of generic semichronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
54. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2014) Joint Probability Density of Interarrival Interval of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973-983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
55. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic asynchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32-42. (In Russian).
56. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23-32. (In Russian).
57. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
58. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2015) Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events. *Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141-149.
59. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of fixed dead time in MAP-flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(33). pp. 13-22. (In Russian).

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.652.8

DOI: 10.17223/19988605/36/8

А.М. Бабанов, Е.С. Квач**«IS-THE»-ОТНОШЕНИЯ В СЕМАНТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДАННЫХ:
ПРЕДПОСЫЛКИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ
«IS-THE»-КЛАСТЕРОВ**

Статья продолжает серию публикаций, посвященных представлению «IS-THE»-отношений в модели данных «Сущность – Связь – Отображение». Она повествует о наиболее часто встречающейся при моделировании данных разновидности этих отношений – родовидовых отношениях – и об образуемых из них «IS-THE»-кластерах. Освещаются условия, при которых их необходимо использовать, и предлагаются две методики проектирования кластеров в семантических моделях данных – сверху вниз (методом специализации) и снизу вверх (методом генерализации).

Ключевые слова: «IS-THE»-отношение; «IS-THE»-кластер; специализация; генерализация; семантическая модель данных; ERM-модель.

Важным элементом семантики данных являются так называемые «IS-A»-отношения (отношения «ЕСТЬ-НЕКОТОРЫЙ»). Они традиционно применялись в системах управления знаниями [1]. С появлением в конце прошлого века семантической модели Enhanced/Extended Entity-Relationship Model (EERM) [2] эти отношения стало возможным представлять и при моделировании данных. Во время синтеза EERM была предпринята попытка переосмыслить этот феномен [3]. Основным принципом являлось следование безупречным логическим канонам при сохранении той функциональности, которая востребована в моделировании данных.

В ходе исследований было введено понятие «IS-THE»-отношения (отношения «ЕСТЬ-ЭТОТ»), более подходящее к моделированию данных. Рассмотрение частных случаев этого отношения привело к образованию производных понятий «IS-THE»-кластера и «IS-THE»-категоризации, являющихся аналогами известных структур данных – специализации и категоризации [4].

Настоящая статья посвящена подробному описанию «IS-THE»-кластеров. После краткого напоминания об этом понятии будет проведен анализ предпосылок их использования при моделировании данных. Во второй части статьи предлагаются две методики проектирования «IS-THE»-кластеров: сверху вниз (метод специализации) и снизу вверх (метод генерализации). Реализация этих методик предполагает определение как самих структур данных, так и ограничений целостности, накладываемых на них.

1. Понятие «IS-THE»-кластера

Два элемента объемов разных понятий связаны «IS-THE»-отношением (отношением «ЕСТЬ-ЭТОТ») тогда и только тогда, когда они представляют один и тот же объект предметной области (ПрО). «IS-THE»-отношение – это бинарное 1:1-отношение, определяющее пару взаимнообратных функциональных «IS-THE»-отображений. В этом отношении (и отображениях) участвуют либо непосредственно объекты ПрО, либо их абстракции – данные [4]. Если известные трактовки «IS-A»-отношения связывают класс с объектом или класс с классом [5], то в «IS-THE»-отношения вступают объекты.

В максимально обобщенном понимании «IS-THE»-отношение позволяет указывать в каком-то смысле «близость» понятий: понятия близки, если найдется хотя бы один объект, подпадающий под оба эти понятия. «IS-THE»-отношение в таком варианте определяет два частичных функциональных отоб-

ражения. Если рассматривать два понятия, одно из которых является обобщением другого, то «IS-THE»-отношение становится родовидовым отношением. «IS-THE»-отображение из объема родового понятия (суперкласса) в объем видового (подкласса) по-прежнему частичное функциональное. А вот «IS-THE»-отображение из подкласса в суперкласс стало полным функциональным.

«IS-THE»-кластер (или просто кластер) – это система классов, построенная для ограничений (возможно, единственного ограничения) понятия одного и того же суперкласса, такая, что все понятия подклассов используют в своих основаниях выделения одно и то же отображение. Основание выделения подкласса – это видовое отличие объектов этого подкласса, которое представляет собой дополнительное условие содержания понятия подкласса. Единство отображения в основаниях выделения подклассов означает для дихотомического деления разбиение на подклассы в зависимости от наличия и отсутствия образов у элементов суперкласса при одном и том же отображении, для деления по видоизменению основания – объединение в подклассы элементов суперкласса, имеющих совпадающие образы при одном и том же отображении.

Такие отображения можно назвать дискриминирующими, ведь именно эти признаки объектов суперкласса определяют их попадание в подклассы. В этом качестве могут использоваться любые признаки – свойства, характеристики объектов, отношения с другими объектами. Прообразами таких отображений являются объекты суперкласса или их абстракции, а роль образов играют истинностные значения, произвольные значения и другие объекты (абстракции) соответственно.

Понятие «IS-THE»-кластера совпадает по смыслу с понятием двухуровневой специализации, подклассы которой образованы в соответствии с одним и тем же основанием. Например, рассмотрим специализацию людей на мужчин и женщин (рис. 1). Видовое отличие мужчин – «Пол = 'мужской'», женщин – «Пол = 'женский'». И в том и в другом случае используется одно и то же отображение (Пол). Отличаются объекты подклассов только своими образами при этом отображении.

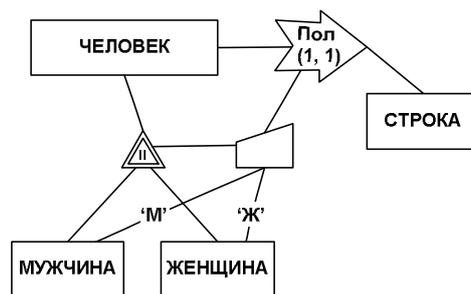


Рис. 1. «IS-THE»-кластер в расширенной графической нотации ERMM

Несколько слов о расширенной графической нотации ERMM. «IS-THE»-кластер обозначается с помощью треугольника, с вершиной которого соединяется суперкласс кластера, а с основанием – подклассы.

Основание деления обозначается в виде прямоугольной трапеции, от которой отходят как минимум три ребра: одно – к отображению (вершина в виде стрелки), на основании которого делится суперкласс, второе – к треугольнику «IS-THE»-кластера, третье ребро – к подклассу. В зависимости от количества подклассов кластера, выделяемых по данному основанию, будет меняться и количество ребер, инцидентных трапеции. Также каждое ребро к подклассу имеет пометку: в случае дихотомического деления – exists (образ существует) или not exists (образ отсутствует), в случае деления по видоизменению основания – значение образа отображения-основания для соответствующего подкласса.

Последовательно применяя операцию деления к полученным на предыдущем шаге видовым понятиям, можно построить иерархию кластеров (когда нет классов, входящих в качестве подклассов в разные кластеры) или граф кластеров (в противном случае). Далее в этой статье речь пойдет в основном лишь о двухуровневом варианте графа, состоящем из одного «IS-THE»-кластера. В случае необходимости предлагаемые для этого случая процедуры следует многократно повторить, что приведет к построению произвольного графа кластеров.

Каждый «IS-THE»-кластер определяет полное функциональное «IS-THE»-отображение между объединением объемов видовых понятий и объемом родового понятия. Также действует полное функциональное «IS-THE»-отображение между каждым из классов видовых понятий и классом родового понятия. Подавляющее большинство «IS-THE»-отношений, представляющих интерес при построении БД, определяется «IS-THE»-кластерами и подразумевает полное наследование родительских признаков (атрибутов и связей) объектами дочерних понятий. То есть эти признаки на видовом уровне не декларируются, а предполагаются.

Характер отображения между объемом родового понятия и объединением объемов видовых понятий определяет ставшую традиционной типизацию «IS-THE»-кластеров. Если это отображение – полное функциональное, кластер является полным непересекающимся. Если оно – частичное функциональное, кластер является частичным непересекающимся. Если отображение между объемом родового понятия и объединением объемов видовых понятий – полное нефункциональное, кластер является полным пересекающимся. Если это отображение – неограниченное, кластер является частичным пересекающимся.

Ограничения целостности, связанные с кластерами, графически задаются следующим образом. Пересекающиеся кластеры помечаются двумя перекрещивающимися отрезками внутри треугольника, непересекающиеся – двумя параллельными отрезками. В случае полного кластера граница треугольника двойная, иначе – одинарная.

В нашем примере (см. рис. 1) кластер, который делит множество всех людей на мужчин и женщин, будет полным непересекающимся.

2. Предпосылки использования «IS-THE»-кластеров

Повествуя о специализациях (более широко распространенных аналогах «IS-THE»-кластеров), известные авторы выделяют многочисленные доводы в пользу их создания.

Дж. Смит и Д. Смит считают, что «польза от такой дисциплины структурирования заключается в следующем:

- могут быть эффективно интегрированы абстракции, имеющие отношение к различным пользователям базы данных, и они могут поддерживаться совместно;
- при различных видах эволюционных изменений может обеспечиваться стабильность моделей (иногда называемая независимостью данных);
- без значительной утраты интеллектуальной управляемости могут поддерживаться сильно структурированные модели;
- может быть разработан более семантический подход к проектированию баз данных;
- становятся возможными более эффективные реализации, поскольку может быть сделано больше предположений относительно структуры верхнего уровня» [6. С. 107].

Введение специализаций обеспечивает повышенную стабильность схемы в процессе развития базы данных. Изменения атрибутов или множеств связей множества сущностей суперкласса не приведут к изменению множеств сущностей подклассов. Так же как и изменения во множестве сущностей одного или нескольких подклассов не повлияют на множество сущностей суперкласса.

Схема может иметь слишком много атрибутов и множеств связей в рамках некоторого множества сущностей. В подобных случаях можно обеспечить понимание схемы путем введения специализации. Специализация позволяет вынести часть атрибутов и множеств связей в подклассы без их дублирования.

По мнению Т. Халпина и Т. Моргана, «основная причина использования специализации – это определение связанного с ней набора ограничений целостности. Кроме этого, благодаря введению специализации, можно показать, что атрибуты или множества связей уникальны или обязательны для конкретного подкласса» [7. С. 238].

Ну и, наконец, «специализация приводит к исключению большого количества неопределённых значений в атрибутах при занесении данных в БД» [8. С. 148].

При построении схемы данных люди используют два разных подхода – сверху вниз и снизу вверх. При первом подходе проектировщик выделяет в ПрО сначала сложные высокоуровневые типы объектов, а затем методами декомпозиции и специализации порождает более простые типы, представляющие интерес с точки зрения бизнес-процессов ПрО. Сторонники второго подхода идут от конкретных явлений ПрО, классифицируют их в типы данных, строят агрегаты знаков и типов и таким образом тоже порождают структуру данных ПрО.

Неудивительно, что и для кластеров предусмотрен как метод специализации, так и метод генерализации. Первый метод отталкивается от наличия структуры для суперкласса и порождает необходимый набор структур подклассов, второй, имея изначально структуры подклассов, строит структуру для суперкласса. Естественно, что для обоих случаев существуют свои предпосылки создания «IS-ТНЕ»-кластера.

Когда спроектирована структура только для суперкласса, определить потребность в его специализации и выделении отдельных структур для подклассов можно по следующим признакам:

- суперкласс «раздут» от множества опциональных атрибутов и связей;
- часть опциональных атрибутов и связей задается только при соответствии экземпляра класса одному условию из фиксированного набора условий;
- при несоответствии экземпляра суперкласса ни одному из условий задаются только обязательные атрибуты и связи.

Необходимым условием проектирования «IS-ТНЕ»-кластера снизу вверх является наличие в схеме данных классов, чьи понятия близки (в соответствии с данным ранее определением). И далее возникает вопрос, стоит ли объединить эти классы в один или несколько кластеров или оставить их несвязанными.

Создание «IS-ТНЕ»-кластеров в этом случае оправдано, если:

- в бизнес-процессах ПрО есть потребность в объединении экземпляров различных, но близких понятий;
- один и тот же объект ПрО представлен данными в нескольких классах, и необходимо восстанавливать единство этого объекта.

Следует отметить, что при построении семантической схемы не принимается никаких решений по повышению эффективности реализации БД. Это задача последующих этапов проектирования. А вот обеспечение соответствующих методик и механизмов полной информацией для принятия адекватного решения – задача этапа первоначальной фиксации семантики ПрО. Поэтому если в ней имеются «IS-ТНЕ»-отношения, которые могут понадобиться в моделируемых бизнес-процессах, смело проектируйте соответствующие структуры. Способы их реализации в БД могут быть самыми разными, включая и максимально эффективный.

3. Правила проведения специализаций

Возьмем в качестве примера проведения специализации ситуацию в академической ПрО. К моменту принятия решения о проектировании «IS-ТНЕ»-кластера текущих контрольных точек (КТ) был создан фрагмент ERM-схемы, приведенный на рис. 2.

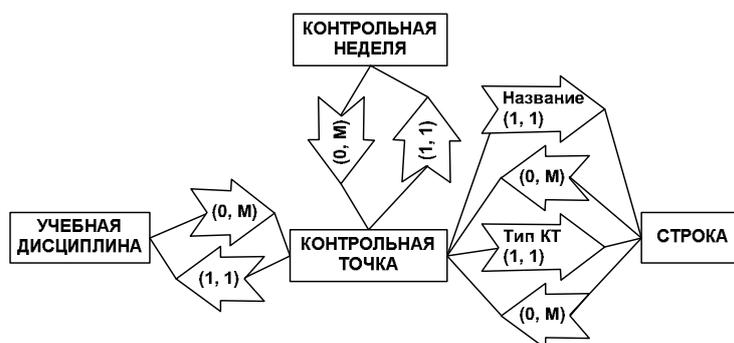


Рис. 2. ERM-схема до специализации

Эта схема отражает структуры данных, необходимые для планирования текущих КТ по учебным дисциплинам. Эти КТ проводятся в специально отведенные для этого контрольные недели. При проектировании структур под необходимую для проведения КТ информацию было обнаружено, что КТ одного типа нуждаются в одних структурных компонентах, КТ второго типа – в других, а КТ третьего типа – в третьих. Так, для лабораторной работы требуется определить задание на работу, для контрольной работы – формулировку запроса на поиск данных, а для тестов – указать до 10 тестовых заданий с текстом вопроса и альтернативами ответов к каждому заданию.

Если все эти потребности реализовать как отображения класса КОНТРОЛЬНАЯ ТОЧКА, будет много редко используемых структур, по большей части заполняемых в БД неопределенными значениями. Налицо первые два признака, указывающие на необходимость специализации класса КОНТРОЛЬНАЯ ТОЧКА.

Если при проектировании ERM-схемы Про принято решение, что специализацию использовать необходимо, то при ее проведении проектировщик может придерживаться следующей методики.

1. Выбрать класс, который будет являться суперклассом «IS-THE»-кластера, определить все его отображения в другие классы.

В нашем примере суперклассом является класс КОНТРОЛЬНАЯ ТОЧКА. Кроме показанных на рис. 2 полностью определенных отображений Учебная дисциплина, Контрольная неделя, Название и Тип КТ у этого класса есть опциональные отображения Задание на лабораторную работу, Формулировка запроса и Тестовое задание (для упрощения рисунка они не показаны).

2. Сгруппировать отображения по совпадению их областей определения: в одну группу попадут отображения, определенные на всем суперклассе, остальные группы отображений будут определены на некоторых подмножествах суперкласса.

Некоторые авторы считают, что критерием разбиения атрибутов на группы является обязательность значения для элементов подмножества. Но ведь до какого-то момента у объекта может не быть образа, позже он может появиться. Таким образом, атрибут остается опциональным, но приписывается к группе, в подмножество которой входит указанный объект. Решающими становятся потенциальная возможность наличия образа для объектов подмножества и отсутствие такой возможности у объектов, не принадлежащих этому подмножеству. А это фактически и есть нахождение области определения отображения (ООО).

Полностью определенные отображения Учебная дисциплина, Контрольная неделя, Название и Тип КТ естественно сформируют группу отображений с ООО в виде всего суперкласса КОНТРОЛЬНАЯ ТОЧКА. ООО Задание на лабораторную работу – множество КТ типа сдача лабораторной работы; ООО Формулировка запроса – множество КТ типа написание контрольной работы; ООО Тестовое задание – множество КТ типа сдача теста.

3. Указать для каждого подмножества вид выделения (дихотомическое или по видоизменению основания). Определить, экземпляры какого отображения суперкласса порождают каждое подмножество. Это отображение является дискриминирующим для создаваемого «IS-THE»-кластера. В случае деления по видоизменению основания каждому подмножеству сопоставить характерный для него образ дискриминирующего отображения.

Подмножества могут образовываться по принципу дихотомии (у объектов одного подмножества образ есть, у объектов другого – нет) или по совпадению образов. В первом случае выделяется один (когда подмножество не имеющих образа объектов не создается) или два подмножества, во втором – несколько. При наличии в кластере одного подкласса он фактически представляет операцию ограничения понятия.

Если все подмножества, сформированные на втором шаге, порождаются одним и тем же отображением, продолжаем выполнять шаги методики, в результате будет построен один «IS-THE»-кластер. В противном случае для представления всех имеющихся «IS-THE»-отношений необходимо построить несколько «IS-THE»-кластеров, расположенных друг относительно друга либо горизонтально (у них один и тот же суперкласс), либо вертикально (подкласс одного кластера является суперклассом другого), либо горизонтально и вертикально одновременно. Обсуждение этого случая отложим до конца методики.

В нашем примере все подмножества выделяются в соответствии с одним дискриминирующим отображением Тип КТ. Значит, в ходе проектирования будет образован один «IS-THE»-кластер. Трём сформированным подмножествам соответствуют образы дискриминирующего отображения Тип КТ в виде строк «ЛР», «КР», «ТЕСТ».

4. У суперкласса остаются только отображения его группы. Каждое выделенное на втором шаге подмножество становится подклассом построенного «IS-THE»-кластера. Этот подкласс является ООО всех отображений соответствующей группы.

Отображения Учебная дисциплина, Контрольная неделя, Название и Тип КТ остаются на уровне суперкласса КОНТРОЛЬНАЯ ТОЧКА. Подкласс СДАЧА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ будет определять отображение Задание на лабораторную работу, подкласс НАПИСАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ – отображение Формулировка запроса, а подкласс СДАЧА ТЕСТА – отображение Тестовое задание.

5. Определить ограничения целостности для построенного «IS-THE»-кластера и отображений подклассов.

Если дискриминирующее отображение – полностью определенное и в кластере сформированы подклассы для всех возможных его образов, кластер будет полным; если это отображение к тому же функционально, кластер будет полным непересекающимся, если не функционально, кластер будет полным пересекающимся. Если дискриминирующее отображение – не полностью определенное или у него есть образы без подклассов, кластер будет частичным; если это отображение к тому же функционально, кластер будет частичным непересекающимся. При нефункциональном дискриминирующем отображении в ряде случаев также возможно непересечение подклассов, но чаще кластер будет пересекающимся.

В примере отображение Тип КТ – полное функциональное, и все его образы порождают подклассы, следовательно, получившийся кластер полный и непересекающийся, что и отражено в ERM-схеме на рис. 3. Как и ранее, в схеме не нашли отражения отображения подклассов. Но следует отметить, что опциональные на уровне суперкласса КОНТРОЛЬНАЯ ТОЧКА отображения Задание на лабораторную работу, Формулировка запроса и Тестовое задание стали обязательными на уровне его подклассов.

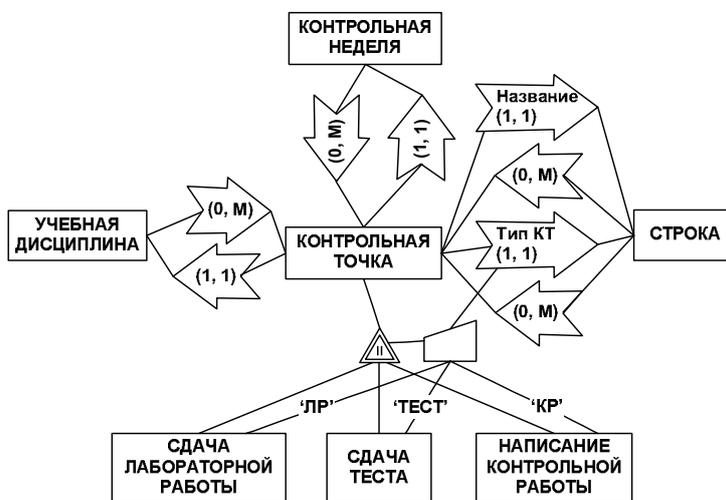


Рис. 3. ERM-схема после специализации

Ситуацию с несколькими различными основаниями выделения подмножеств суперкласса поясним на примере различных ролей, которые играют люди в академической ПроО. В этой ПроО все люди делятся на тех, кто ведет занятия, тех, кто посещает эти занятия, и тех, кто делает и то и другое. Первых назовем преподавателями, вторых – студентами, а третьих – преподающими студентами.

При проведении специализации всех людей вуза (суперкласс ЧЕЛОВЕК) в первую группу отображений (уровень суперкласса) попадут такие общие для всех людей отображения, как Фамилия, Имя, Дата рождения, Пол и т.д. Подмножество преподавателей будет ООО таких отображений, как Дата принятия на работу, Должность, Степень, Звание, Педагогический стаж. Подмножество студентов будет ООО таких отображений, как Дата поступления, Академическая специальность, Группа, Средний кре-

дитный балл. Подмножество преподающих студентов специфических отображений не имеет (хотя, в принципе, они могли бы быть) и представляет собой пересечение подмножеств преподавателей и студентов.

Подмножество преподавателей выделено методом дихотомии на основании наличия у людей образа отображения Дата принятия на работу. Подмножество студентов выделено методом дихотомии на основании наличия у людей образа отображения Дата поступления. Объекты третьего подмножества имеют образы обоих отображений. Различия оснований выделения говорят о том, что нельзя обойтись одним «IS-THE»-кластером.

В этом случае необходимо построить четыре кластера, каждый из которых фактически будет представлять ограничение: понятия ЧЕЛОВЕКА – до понятия ПРЕПОДАВАТЕЛЯ, понятия ЧЕЛОВЕКА – до понятия СТУДЕНТА, понятия ПРЕПОДАВАТЕЛЯ – до понятия ПРЕПОДАЮЩЕГО СТУДЕНТА и понятия СТУДЕНТА – до понятия ПРЕПОДАЮЩЕГО СТУДЕНТА. Полученная «ромбовидная» структура отражает граф кластеров, так как подкласс ПРЕПОДАЮЩИЙ СТУДЕНТ является подклассом двух кластеров.

4. Правила проведения генерализаций

Пример для проведения генерализации возьмем из ПрО функционирования поликлиники. В схеме данных этой ПрО, помимо прочего, есть класс ПАЦИЕНТ с отображениями Фамилия, Пол, Регистрация в поликлинике, Консультация у врача и класс ВРАЧ с отображениями Фамилия, Пол, Врачебная специальность, Консультация пациента (рис. 4). Для большинства бизнес-процессов поликлиники потребности в наличии «IS-THE»-отношения между сущностями типов ПАЦИЕНТ и ВРАЧ не возникает. Предположим, что иногда встает задача определения тех врачей, к которым в случае болезни обращаются сами врачи. Для решения этой задачи необходимо связать сущности типов ПАЦИЕНТ и ВРАЧ «IS-THE»-отношением. Можно предусмотреть для этого частное решение в виде соответствующего бинарного множества связей. Но если аналогичные задачи приходится решать еще и с классами ОБСЛУЖИВАЮЩИЙ ПЕРСОНАЛ и АДМИНИСТРАТОР, имеет смысл обобщить все объекты этих типов до класса ЧЕЛОВЕК и представить исходные классы как его подклассы. Это и позволяет проделать генерализация. При этом мы восстанавливаем единство объектов ПрО, разбитых на свои многочисленные абстракции-сущности разных типов. Другим мотивом генерализации в нашем примере может быть потребность в предоставлении общего списка сотрудников поликлиники независимо от должности.

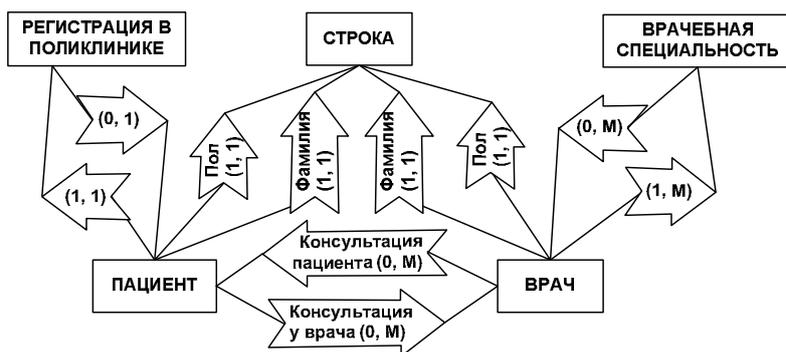


Рис. 4. ERM-схема до генерализации

Если при проектировании ERM-схемы ПрО принято решение о необходимости обобщения некоторых классов близких понятий до их общего класса-предка, то для проведения генерализации проектировщик может придерживаться следующей методики.

1. Найти ближайшее общее понятие-предок. В нашем случае таким обобщающим пациентов и врачей понятием будет понятие ЧЕЛОВЕК.
2. Определить видовое отличие каждого исходного понятия-потомка и участвующее в нем отображение.

Если во всех видовых отличиях фигурирует одно и то же отображение и в случае дихотомии для одного понятия-потомка его образ присутствует, а для другого – отсутствует, а в случае видоизменения основания понятия-потомки отличаются образами, это отображение является дискриминирующим и создается один «IS-THE»-кластер. Для этого варианта продолжаем выполнение методики. Если у понятий-потомков в видовых отличиях участвуют разные отображения, для представления всех имеющихся «IS-THE»-отношений необходимо построить несколько «IS-THE»-кластеров, расположенных друг относительно друга либо горизонтально, либо вертикально, либо горизонтально и вертикально одновременно. При этом рассуждать надо примерно так же, как и в аналогичном случае методики специализации.

Характерным для пациентов признаком является наличие регистрации в поликлинике, отличительная особенность врачей – одна или несколько врачебных специальностей. Первое понятие-потомок образуется методом дихотомии с помощью отображения Регистрация в поликлинике, второе – аналогичным методом с использованием отображения Врачебная специальность. Соответственно, в нашем случае необходимо построить два «IS-THE»-кластера суперкласса ЧЕЛОВЕК, в каждом из которых по одному подклассу – ПАЦИЕНТ и ВРАЧ.

3. Если у дискриминирующего отображения не все варианты образов соответствуют исходным понятиям-потомкам, необходимо подумать, не добавить ли в схему соответствующие подклассы.

Для нашего примера отсутствующие подклассы людей, не являющихся пациентами, и людей, не являющихся врачами, с одной стороны, не представляют интереса для задач ПрО, с другой стороны, легко получаются с помощью операции разности.

4. Создать суперкласс и перенести на уровень суперкласса все общие отображения подклассов, включая дискриминирующее отображение.

Суперкласс ЧЕЛОВЕК будет являться ООО отображений Фамилия, Пол, Регистрация в поликлинике и Врачебная специальность. Подкласс ПАЦИЕНТ будет определять отображение Консультация врача, а подкласс ВРАЧ – отображение Консультация пациента (см. рис. 5).

5. Определить ограничения целостности для построенного «IS-THE»-кластера и для отображений суперкласса в соответствии с шагом 5 методики специализации.

Кластер, построенный методом дихотомии с отсутствующим одним из подклассов, всегда частичный и непересекающийся. В нашем примере такими будут оба построенных «IS-THE»-кластера (рис. 5). Дискриминирующие отображения Регистрация в поликлинике и Врачебная специальность, бывшие обязательными для подклассов, становятся опциональными при переносе их на уровень суперкласса.

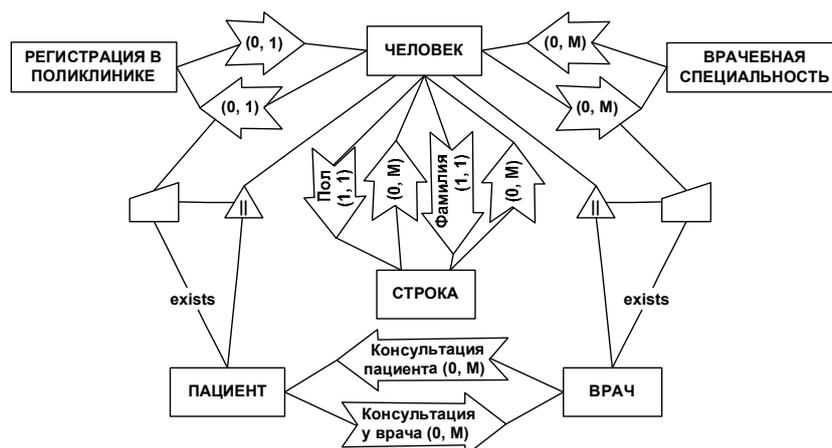


Рис. 5. ERM-схема после генерализации

Мы рассмотрели две методики создания «IS-THE»-кластеров – метод специализации, когда имеется суперкласс и создаются подклассы, и метод генерализации, при котором, наоборот, исходными являются подклассы и производится суперкласс. Редко, но встречается ситуация, когда все классы уже спроектированы и необходимо создать лишь кластер. Ее можно рассматривать как частный случай специализации или генерализации и применить одну из приведенных методик.

Заключение

Семантическая методика проектирования схем БД предусматривает на первом этапе максимально полную формализацию информации о ПрО в рамках той или иной семантической модели. Без фиксации в должной степени «IS-THE»-отношений такое представление вряд ли может обойтись. Вот почему любая семантическая модель данных должна предусматривать соответствующие средства для определения структур и ограничений целостности. ERM-модель в этом плане не является исключением. В ней помимо обычных 1:1-множеств связей для представления «IS-THE»-отношений имеются такие структуры, как «IS-THE»-кластеры и «IS-THE»-категоризации.

В статье подробно обсуждаются вопросы проектирования «IS-THE»-кластеров: базовые определения, предпосылки и методики создания. Процедуры проектирования снабжены подробными примерами. Материал статьи позволит проектировщикам схем БД разобраться с такими явлениями ПрО, как иерархии обобщения, и научит использовать соответствующие правила и инструменты структуризации, что приведет в конечном счете к более эффективным и адекватным схемам БД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brachman R.J. What IS-A Is and Isn't: An Analysis of Taxonomic Links in Semantic Networks // IEEE Computer. 1983. V. 16, No. 10. P. 30–36.
2. Teorey T., Yang D., Fry J. A Logical Design Methodology for Relational Databases Using the Extended Entity-Relationship Model // Computing Surveys. 1986. V. 18, No. 2. P. 197–222.
3. Бабанов А.М. Семантическая модель «Сущность – Связь – Отображение» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 77–91.
4. Бабанов А.М., Квач Е.С. «IS-THE»-отношения в семантических моделях данных: основные понятия и разновидности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 69–78.
5. Palomäki J., Kangassalo H. That IS-IN Isn't IS-A: A Further Analysis of Taxonomic Links in Conceptual Modelling // Advances in Knowledge Representation. 2012. P. 3–18.
6. Smith J., Smith D. Database Abstractions: Aggregation and Generalization // ACM Transactions on Database Systems. 1977. V. 2, No. 2. P. 105–133.
7. Halpin T. and Morgan T. Information Modeling and Relational Databases. Second Edition. Morgan Kaufman, 2008.
8. Coronel C., Morris S., Rob P. Database Systems: Design, Implementation, and Management. 10th edition. Course Technology. 2013.

Бабанов Алексей Михайлович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: babanov2000@mail.ru

Квач Елена Сергеевна. E-mail: kvachelena93@gmail.com

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 29 января 2016 г.

Babanov Alexey M., Kvach Elena S. (Tomsk State University, Russian Federation).

«IS-THE»-relations in semantic data models: prerequisites and construction rules of «IS-THE»-clusters.

Key words: «IS-THE»-relation; «IS-THE»-cluster; specialization; generalization; semantic data model; ERM-model.

DOI: 10.17223/19988605/36/8

«IS-THE»-cluster is a system of classes constructed for restrictions of the same superclass concept; such, that all subclass concepts use the same mapping in the bases of them subtyping. Such mapping can be named discriminating; in fact it is this characteristic of superclass objects that determines their hits in subclasses.

At data schema construction people use two different approaches – from top to down and from below upwards. So it is provided both a method of specialization, and a method of generalization for clusters. The first method makes a start from presence of superclass structure and generates a necessary set of subclass structures, the second, having initially structures of subclasses, builds structure for a superclass.

When only the structure for a superclass was designed, one can determine need for its specialization and detachment of separate structures for subclasses on the basis of the following signs:

- superclass is swelled from optional attributes and relationships;
- part of optional attributes and relationships are fixed only if superclass instance satisfies one condition from the fixed set of conditions;
- if superclass instance does not satisfy any condition from the fixed set of conditions superclass mandatory attributes and relationships are fixed only.

Necessary condition for «IS-THE»-cluster designing from below upwards is presence of classes, whose concepts are close. And further there is a question whether it is necessary to unite these classes in one or several clusters or to leave their untied.

«IS-THE»-clusters creation in this case is justified, if:

- any business process needs for union of instances of various, but close concepts;
- an object of application domain is represented by data in several classes, and it is necessary to restore unity of this object.

If at ERM-schema designing one makes a resolve that specialization use is necessary, the designer can adhere to the following technique.

1. To choose a class which will be a superclass of «IS-THE»-cluster, to determine all its mappings to other classes.
2. To group mappings according to their domain: one group is formed from mappings defined on the superclass, other groups of mappings will be defined on some subsets of the superclass.
3. To specify for each subset a kind of detachment (dichotomizing or by basis modification). To determine mapping, which instances form each subset. This mapping is discriminating for created «IS-THE»-cluster. In case of detachment by basis modification should establish a correspondence between each subset and discriminating mapping image.
4. The superclass has still only mappings of its group. Each subset distinguished on the second step is a subclass of constructed «IS-THE»-cluster. This subclass is a domain of all mappings of corresponding group.
5. To define integrity constraints for constructed «IS-THE»-cluster and subclass mappings.

If at ERM-schema designing one makes a resolve that generalization use is necessary, the designer can adhere to the following technique.

1. To find the nearest general concept-ancestor to given classes with close concepts.
2. To determine specific difference of each initial concept-descendant and mapping participating in it.

If the same mapping appears in all specific differences, and in the case of dichotomizing for one concept-descendant its image is present, and for another concept-descendant is absent, and in case of basis modification concepts-descendants differ in the images, this mapping is discriminating, and one «IS-THE»-cluster is created.

3. If not all variants of discriminating mapping images correspond to initial concepts-descendants, it is necessary to think whether to add to the schema corresponding subclasses.

4. To create a superclass and to transfer on a level of the superclass all common mappings of subclasses, including discriminating mapping.

5. To define integrity constraints for constructed «IS-THE»-cluster and superclass mappings.

The techniques submitted in this article are based on ERMM rules of data structurization and integrity constraint definition concerning representation of «IS-THE»-clusters.

REFERENCES

1. Brachman, R.J. (1983) What IS-A Is and Isn't: An Analysis of Taxonomic Links in Semantic Networks. *IEEE Computer*. 16(10). pp. 3036. DOI: 10.1109/MC.1983.1654194
2. Teorey, T., Yang, D. & Fry, J. (1986) A Logical Design Methodology for Relational Databases Using the Extended Entity-Relationship Model. *Computing Surveys*. 18(2). pp. 197-222. DOI: 10.1145/7474.7475
3. Babanov, A. M. (2007) Semanticheskaya model' "Sushchnost' – Svyaz' – Otobrazhenie" [Semantic model "Entity – Relationship – Mapping"]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(1). pp. 77-91.
4. Babanov, A. M. & Kvach, E.S. (2016) "IS-THE"-relations in semantic data models: basic notions and variants. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 6978. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/34/8
5. Palomäki, J. & Kangassalo, H. (2012) That IS-IN Isn't IS-A: A Further Analysis of Taxonomic Links in Conceptual Modelling. *Advances in Knowledge Representation*. pp. 3-18. DOI: 10.5772/36484
6. Smith, J. & Smith, D. (1977) Database Abstractions: Aggregation and Generalization. *ACM Transactions on Database Systems*. 2(2). pp. 105-133. DOI: 10.1145/320544.320546
7. Halpin, T. & Morgan, T. (2008) *Information Modeling and Relational Databases*. 2nd ed. Morgan Kaufman.
8. Coronel, C., Morris, S. & Rob, P. (2013) *Database Systems: Design, Implementation, and Management*. 10th ed. Course Technology.

УДК 004.89

DOI: 10.17223/19988605/36/9

М.Н. Головчинер, А.Ж. Дылыкова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ ВЫЯВЛЕНИЯ ДОМИНАНТНЫХ ЛИЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗЛИЧНЫХ КАТЕГОРИЙ РЕСПОНДЕНТОВ

Рассмотрена возможность применения аппарата нейронных сетей для решения задачи классификации в области психодиагностики. В качестве исходных данных используются результаты тестирования заключенных по методике Лири. В статье приводится структурно-функциональная схема созданного программного комплекса, описываются этапы его функционирования, виды нейронных сетей, используемых на каждом из этапов работы комплекса.

Ключевые слова: психодиагностика; личностная характеристика; классификация; кластеризация; персептрон; сеть Кохонена; слой Гроссберга; сеть встречного распространения.

В настоящее время нейронные сети (НС) различной архитектуры используются для решения широкого круга задач (прогнозирование, распознавание образов, классификация, сжатие данных и др.), в различных сферах деятельности [1]. Применение НС «в области медицины и, особенно, психологии за рубежом встречается значительно реже, а в отечественной практики оно представлено в основном единичными исследованиями» [2]. Отсутствие публикаций применительно к этим областям можно объяснить тем, что отдельные предпринимавшие попытки создания нейросетевых психологических моделей оказались неудачными, так как нейронные сети при тестировании показывали неприемлемо большие погрешности или не удалось подтвердить верность полученных результатов [3]. Поэтому авторы надеются, что их исследование по применению нейросетевых технологий для решения одной задачи в области психодиагностики представляют определенный интерес.

Была поставлена задача с помощью НС выявить наличие доминантных личностных черт респондентов, объединенных в группы, которые (личностные черты) можно было бы рассматривать как основу для классификации с дальнейшим прогнозированием поведения личности.

Респондентами выступали заключенные одной из томских колоний. Основой для формирования групп (возможных классов) выбраны статьи, по которым респонденты были осуждены. В качестве исходных данных взяты результаты психодиагностического тестирования по методике Т. Лири [4].

Выбор данной методики тестирования определяется тем, что для обучения НС сети требуется большой объем обучающей выборки. Тестирование в данной колонии проводится по нескольким психодиагностическим методикам, однако основной, применяемой ко всем заключенным, является методика Лири. Остальные методики являются вспомогательными и количество респондентов недостаточно для формирования обучающих выборок достаточного объема.

Методика Лири определяет степень выраженности следующих типов отношения тестируемого к окружающим:

- 1) авторитарный;
- 2) эгоистичный;
- 3) агрессивный;
- 4) подозрительный;
- 5) подчиняемый;
- 6) зависимый;
- 7) дружелюбный;
- 8) альтруистический.

Тест содержит 128 пунктов по 16 вопросов на каждую характеристику.

Исследование включало два этапа.

На первом этапе решалась задача возможности выявления набора личностных черт, которые могли бы выступить основой для классификации. Данное исследование (решение задачи классификации) проводилось с использованием нейронной сети типа *персептрон* [5–7].

На втором этапе (при условии получения положительных результатов классификации) с помощью *сети встречного распространения* [5–7], объединяющей *сеть Кохонена* и *слой Гроссберга*, решалась задача кластеризации, результаты которой могли бы подтвердить или опровергнуть результаты классификации.

1. Этап 1. Классификация

Поскольку комбинации личностных характеристик, которые могли бы лечь в основу возможной классификации, заранее неизвестны, необходимо реализовать цикл работы персептрона на множествах выборок из первоначальных тестов, причем размеры входных векторов, как правило, влияют на структуру персептрона. Поэтому для автоматизации работ на данном этапе создан программный комплекс, структурно-функциональная схема которого представлена на рис. 1.

Комплекс позволяет генерировать входные данные в определенном формате, перебирая комбинации характеристик, подающиеся на вход нейронной сети, и включает следующие компоненты:

1. Подготовка входных наборов данных и создание персептрона.
2. Обучение и тестирование персептрона.
3. Запись результатов тестирования.

Подготовка входных наборов данных и создание персептрона. На каждом шаге работы на вход системы пользователь (аналитик) подает комбинацию статей для анализа (комбинации по двум определенным статьям, по трем и т.д.). Далее на этом шаге:

- 1) строится персептрон;
- 2) на вход системы подаются соответствующие массивы тестов.



Рис. 1. Структурно-функциональная схема программного комплекса

Создание персептрона. Общая конфигурация персептрона представлена на рис. 2.

Количество нейронов выходного слоя равно количеству анализируемой группы статей (две, три и т.д.).

Сеть включает один скрытый слой. Первоначальное количество нейронов скрытого слоя $k(n)$ определяется по соответствующей формуле и в процессе анализа результатов работы сети может быть изменено.

В качестве активационной функции выбрана логистическая функция (сигмоид) $y = \frac{1}{1+e^{-cs}}$, где $C > 0$ – коэффициент ширины сигмоида по оси абсцисс.

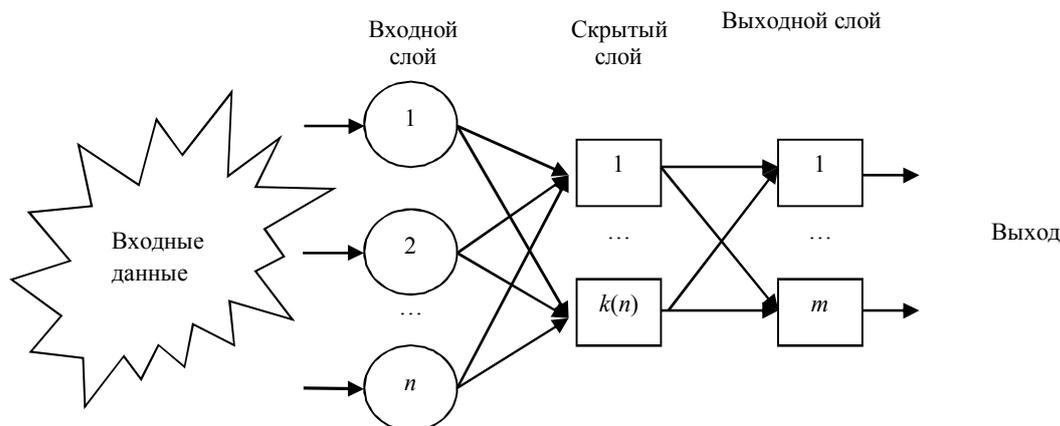


Рис. 2. Структура перцептрона

Обучение и тестирование перцептрона. На очередном такте работы сеть обучается и тестируется на соответствующей комбинации личностных характеристик.

Поскольку длины входных векторов (параметр n на рис. 2) на каждом такте могут различаться, при смене количества анализируемых характеристик перцептрон перестраивается путем изменения количества $k(n)$ нейронов скрытого слоя.

Обучение перцептрона осуществляется методом обратного распространения ошибки.

Результаты тестирования оцениваются в зависимости от указанной аналитиком точности. Если разница между результатом и ожидаемым значением меньше точности, то полагается, что сеть выдала верный результат. В противном случае на текущем такте аналитик может повторить обучение и тестирование, увеличив количество нейронов скрытого слоя.

Сами результаты записываются в файл и далее могут быть отображены на лист Excel [8].

2. Этап 2. Кластеризация

Задача кластеризации – объединение объектов в кластеры (группы) – родственна задаче классификации с одним отличием – отсутствием признаков переменной. Кластеризация осуществляется с использованием одного из критериев, определяющих степень близости объектов по совокупности параметров, например Евклидово расстояние.

Нейронная сеть Кохонена (рис. 3) является одной из самых популярных сетей кластеризации. Особенность сети заключается в том, что основу ее обучения составляет конкуренция между нейронами. Обучение сети осуществляется без учителя, т.е. без заранее определенных групп кластеров. В процессе обучения сеть самостоятельно пытается разделить представленную совокупность объектов на группы.

При подаче произвольного входного вектора сеть активирует лишь один нейрон (победитель), связанный с одним из кластеров. Поскольку в рамках данного исследования цель использования сети Кохонена – подтверждение результатов классификации, полученных перцептроном, на вход слоя Кохонена подаются вектора, составленные только из комбинаций доминантных характеристик, разделяющих классы респондентов.

Чтобы убедиться в адекватности кластеризации, осуществленной сетью Кохонена, т.е. в соответствии сформированных кластеров классам (статьям) респондентов, сеть Кохонена была объединена с сетью (звездой) Гроссберга в сеть встречного распространения (СВР), схема которой представлена на рис. 4.

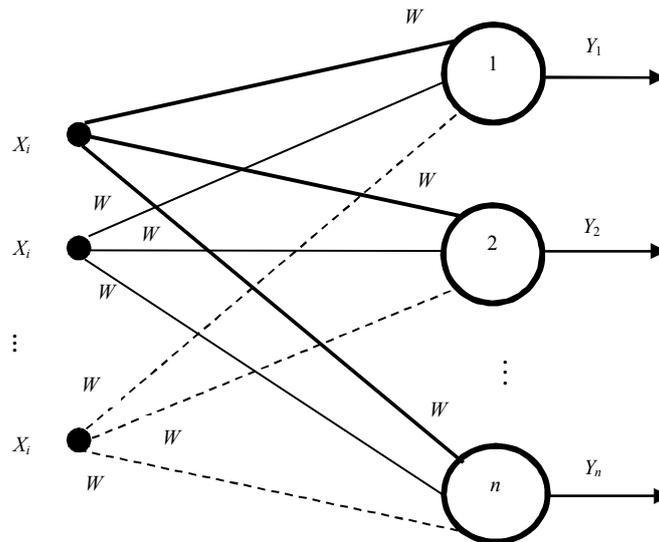


Рис. 3. Структура сети Кохонена

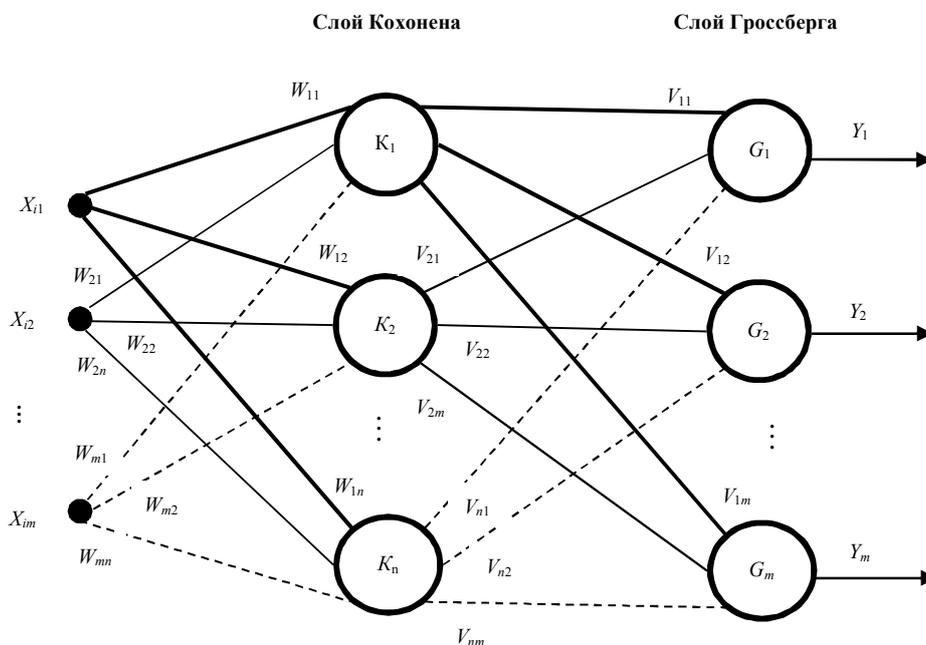


Рис. 4. Структура сети встречного распространения

Слой Гроссберга предназначен для формирования требуемых выходных векторов по окончании обучения слоя Кохонена (формирование кластеров входных векторов).

По окончании обучения слоя Кохонена на вход СВР подается произвольный вектор, который выступает в качестве эталона выходного вектора слоя Гроссберга. Таким образом, слой Гроссберга обучается с учителем. Обучающая процедура заключается в том, что подстройке подвергаются только веса нейронов слоя Гроссберга, которые соединены с нейроном-победителем слоя Кохонена.

По окончании обучения, если оно прошло успешно, на выходе СВР будет построен эталон кластера, к которому сеть отнесла входной вектор. В терминах изучаемой предметной области если распределение заключенных по кластерам после завершения функционирования СВР «адекватно», то выходные векторы СВР можно считать эталонами ответов на вопросы для осужденного по соответствующей статье УК РФ. Распределение считается «адекватным», если совпадает с реальным более чем на 80%.

Реализация этапа кластеризации включает построение СВР, обучение и тестирование.

При построении сети количество классов, проанализированных персептроном, определяет количество нейронов в слое Кохонена, а размер входных векторов – в слое Гроссберга.

В таблице представлены результаты исследований по выявлению доминантных личностных характеристик при сравнительном анализе заключенных по двум статьям. В качестве погрешности классификации использовалась доля неверно распознанных респондентов в тестовой выборке.

Результаты исследования по двум статьям

Первая статья	Доминантные разделяющие личностные характеристики, выявленные перцептронном	Погрешность классификации перцептрона	Погрешность кластеризации слоя Кохонена	Вторая статья
Убийство	Эгоистичный	0,27	0,22	Умышленное причинение тяжкого вреда здоровью
Убийство	Эгоистичный, авторитарный, агрессивный	0,22	0,34	Кража
Убийство	Авторитарный, подчиняемый	0,32	0,4	Незаконные приобретение, хранение, перевозка, изготовление, переработка наркотических средств, психотропных веществ или их аналогов
Умышленное причинение тяжкого вреда здоровью	Подозрительный	0,27	0,2	Кража
Умышленное причинение тяжкого вреда здоровью	Подчиняемый, эгоистичный	0,43	0,28	Незаконные приобретение, хранение, перевозка, изготовление, переработка наркотических средств, психотропных веществ или их аналогов
Кража	Авторитарный, зависимый, альтруистический	0,16	0,3	Незаконные приобретение, хранение, перевозка, изготовление, переработка наркотических средств, психотропных веществ или их аналогов

Очевидно, что для решения задачи по выявлению наличия доминантных характеристик достаточно проводить сравнительный анализ тестовых массивов только по двум статьям. Однако задачу прогнозирования необходимо решать на возможно более полном наборе классов, что позволяет осуществить данный программный комплекс.

Заключение

В настоящей статье представлено описание исследовательских работ по проверке применимости технологии нейронных сетей к задаче выявления личностных характеристик, определяющих различие в психологических портретах разных категориях респондентов (доминантных личностных характеристик). Респондентами рассматривались группы осужденных по различным статьям УК РФ. В качестве исходных данных для проведения исследований были взяты результаты психодиагностического тестирования осужденных по методике Лири, а в качестве инструментария – нейронная сеть типа перцептрон и сеть встречного распространения, объединяющая сеть Кохонена и слой Гроссберга.

Исследования проводились на специально созданном программном комплексе, позволяющем автоматизировать формирование вариантов тестов, создание требуемых конфигураций сетей, процессы обучения и тестирования сетей, запоминания и визуализации результатов.

Приведенные в статье примеры результатов исследований дают основания рассматривать описанный подход к решению определенного класса задач психодиагностики как достаточно перспективный, способный заинтересовать специалистов-практиков соответствующих направлений психологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ясницкий, Л.Н. Нейронные сети – инструмент для получения новых знаний: успехи, проблемы, перспективы // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2015. № 5. С. 48–56. URL: <http://www.permai.ru/files/publications/193.pdf> (дата обращения: 20.03.16).
2. Березин М.А., Пашков С.В. Опыт применения искусственных нейронных сетей для целей дифференциальной диагностики и прогноза нарушений психической адаптации // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Компьютерная психология. 2015. № 1. С. 10–14.

терные технологии, управление, радиоэлектроника. 2006. № 14 (69). С. 41–45. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/opyt-primeneniya-iskusstvennyh-neyronnyh-setey-dlya-tseyey-differentsialnoy-diagnostiki-i-prognoza-narusheniy-psiicheskoy-adaptatsii#ixzz43eB2lrr9> (дата обращения: 25.03.16).

3. Мхитарян К. Рецензия на статью Л.Н. Ясницкого, Ю.А. Михалевой, Ф.М. Черепанова «Возможности методов искусственного интеллекта для выявления и использования новых знаний на примере задачи управления персоналом» // Журнал формирующихся направлений науки. 2014. Вып. 6. URL: <http://www.unconv-science.org/pdf/6/mkhitaryan-ru.pdf> (дата обращения: 20.03.16).
4. Методика диагностики межличностных отношений Лири. URL: http://azps.ru/tests/tests_liri.html (дата обращения: 15.03.16).
5. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М. : Финансы и статистика, 2002. 344 с.
6. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М. : Мир, 1992. 118 с.
7. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. 2-е изд. М. : Горячая линия-Телеком, 2002. 382 с.
8. Работа с Com сервером Excel. URL: http://wladm.narod.ru/C_Sharp/comexcel.html (дата обращения: 15.03.16).

Головчинер Михаил Наумович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: golovchiner@mail.ru

Дылыкова Аюна Жимбеевна. E-mail: dylykova2306@gmail.com

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 марта 2016 г.

Golovchiner Michael Naumovich, Dylykov Ayuna Rymbaevna (Tomsk State University, Russian Federation).

The use of neural networks in the task of identifying the dominant personal characteristics of different categories of respondents.

Keywords: psychodiagnostics; personal characteristic; classification; clusterization; perceptron; Kohonen network; Grossberg layer; counter propagation network.

DOI: 10.17223/19988605/36/9

In the article the description of research papers on the applicability check of neural network technology to the problem of the personal characteristics is presented. The personal characteristics define the distinction in psychologic portraits of various categories of respondents (dominant personal characteristics).

As initial data for carrying out the research, the results of psychodiagnostic testing of respondents by means of Leary's procedure were taken and the toolkit is comprised of the perceptron neural network and the network of counter propagation combining the Kohonen network and the Grossberg layer.

Research includes two stages.

Stage 1. Classification. The problem of detection possibility of a set of personal traits which could act as a basis for classification is solved. The research was carried out with the use of a perceptron neural network. As combinations of personal characteristics which could be a basis of possible classification are unknown in advance, it is necessary to realise a perceptron cycle on sets of samples from primary tests, and the measurements of input vectors, as a rule, influence on the perceptron structure.

Therefore, for automation of process at the given stage (preparation of input data sets, neural network generation and training, and classification results display) the specialised program complex is created.

Stage 2. Clusterization. At the second stage (provided that the positive results of classification are obtained) by means of a counter propagation network the clusterization problem is solved, which results could confirm or deny the results of classification.

The examples of research results allow considering the described approach to the solution of a certain class of problems of psychodiagnostics as perspective enough and capable to interest practitioners of the corresponding directions of psychodiagnostics.

REFERENCES

1. Yasnitsky, L.N. (2015) Neyronnye seti – instrument dlya polucheniya novykh znaniy: uspekhi, problemy, perspektivy [Neural network – a tool for gaining new knowledge: achievements, problems, prospects]. *Neurokompyutery: razrabotka, primeneniye*. 5. pp. 48-56. [Online] Available from: <http://www.permai.ru/files/publications/193.pdf>. (Accessed: 15th March 2016).
2. Berebin, M.A. & Pashkov, S.V. (2006) Opyt primeneniya iskusstvennykh neyronnykh setey dlya tseyey differentsial'noy diagnostiki i prognoza narusheniy psichicheskoy adaptatsii [Experience of application of artificial neural networks for the purposes of differential diagnosis and prognosis of mental adaptation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika – Uzhno-Yralsk State University Journal of Computer technology, Control, Radio Electronics*. 14(69). pp.41-45.
3. Mkhitaryan, K. (2014) Retseziya na stat'yu L.N. Yasnitskogo, Yu.A. Mikhalevoy, F.M. Cherepanova “Vozmozhnosti metodov iskusstvennogo intellekta dlya vyyavleniya i ispol'zovaniya novykh znaniy na primere zadachi upravleniya personalom” [Review of the article L.N. Yasnitsky, Y.A.Mikhaleva, F.M.Cherepanova “The possibility of artificial intelligence methods for detection and use of new knowledge to the problem of personnel management”]. *Zhurnal formiruyushchikhsya napravleniy nauki – International Journal of Unconventional Science*. 6. pp. 42-43. [Online] Available from: <http://www.unconv-science.org/pdf/6/mkhitaryan-ru.pdf>. (Accessed: 15th March 2016).
4. AZPS.ru (n.d.) *Metodika diagnostiki mezhlichnostnykh otnosheniy Liri* [The technique of diagnostics of interpersonal relations Leary]. [Online] Available from: http://azps.ru/tests/tests_liri.html. (Accessed: 15th Mach 2016).
5. Osovskiy, S. (2002) *Neyronnye seti dlya obrabotki informatsii* [Neural network for information processing]. Moscow: Finansy i statistika.
6. Wasserman, P. (1992) *Neyrokompyuternaya tekhnika: Teoriya i praktika* [Neurocomputer technique: Theory and practice]. Moscow: Mir.
7. Kруглов, V.V. & Борисов, V.V. (2002) *Iskusstvennye neyronnye seti. Teoriya i praktika* [An artificial neural network. Theory and practice]. 2nd ed. Moscow: Goryachaya liniya.
8. Narod. ru. (n.d.) *Rabota s Som serverom Excel* [Work with the Com server Excel]. [Online] Available from: http://wladm.narod.ru/C_Sharp/comexcel.html. (Accessed: 15th March 16).

А.С. Истомин, Н.А. Спирин, В.В. Лавров, М.А. Бякова

Разработка программного обеспечения для диагностики вида отклонения доменной плавки от нормального режима

Рассмотрены этапы разработки информационно-логической системы, позволяющей распознать наличие отклонения доменной плавки от нормального режима. Для этого проведено исследование влияния параметров хода доменной плавки на вероятность возникновения отклонения от нормального режима. Полученный программный продукт позволяет оперативно выявлять наличие отклонения, определять его тип и рекомендовать меры для ликвидации таких отклонений.

Ключевые слова: доменное производство; информационно-логическая система; разработка программного обеспечения; диагностика хода доменной плавки.

Современный процесс выплавки чугуна в доменной печи подвержен влиянию многих переменных контролируемых и неконтролируемых факторов, которые вызывают нарушения хода печи и ее теплового состояния и требуют высокой квалификации технологического персонала при управлении доменной плавкой.

Одним из способов диагностики и управления ходом доменной печи в настоящее время является использование экспертных систем, включающих в себя как детерминированные знания о процессе, так и формализованный практический опыт специалистов-доменщиков. В общем случае такие системы должны иметь навыки суждений о ходе доменной плавки по различным признакам, правильно анализировать их и помогать производственному персоналу своевременно предупреждать возможные отклонения от нормального режима, применяя различные технологические приемы воздействия на ход доменной плавки. Для этих целей существует множество математических моделей, но в большинстве случаев их основной проблемой является недостоверность значений входящих в них параметров. До сих пор актуальными остаются вопросы создания информационно-логической системы распознавания вида отклонения доменной плавки от нормального режима. Логические основы распознавания вида отклонения от нормального режима доменной плавки изложены в работах [1–15].

Для анализа данных, необходимых для выявления расстройств хода печи, необходимо в комплексе рассмотреть показатели плавки и работу печи в целом. Делая вывод на основе данных о химическом составе газа, качестве материалов, тепловом состоянии печи и других сведений об условиях плавки, необходимо выявить основные факторы и увязать их с изменениями технологических параметров.

Целью контроля над ходом доменной печи является своевременное принятие мер для установления причин расстройства печи и восстановления нормального хода в максимально короткие сроки. Поэтому главными задачами являются предупреждение нарушений и наиболее быстрое восстановление нормальной работы печи в случае их возникновения.

1. Постановка целей

Разработанный программный продукт проводит анализ работы печи по таким параметрам, как: температура периферийных газов, температура газов по газоотводам печи, параметры дутья, колошникового газа и перепады давления, а также распределение температур по диаметру колошника и состав продуктов доменной плавки. На основе значений этих параметров проводится расчет, результатом которого является вывод о состоянии хода печи и в случае отклонения – о возможной причине нарушения хода.

Программа предназначена для оперативного предоставления производственному персоналу полного объема информации о ходе процесса плавки. Ее использование позволит упростить управление

технологическим процессом, повысить эффективность производства, уменьшить вероятность простоев оборудования и аварий.

2. Функциональное моделирование

Первым этапом в разработке программного продукта было создание функциональной модели. Ее разработка была выполнена в программе AllFusion Process Modeler (BPwin) по стандарту IDEF0 (Integrated computer aided manufacturing DEfinition) [16]. Использование методики IDEF0 позволило создать функциональную структуру программного комплекса, выявить производимые им действия и связи между этими действиями, управляющие воздействия и механизмы выполнения каждой функции, что в конечном итоге позволило на ранней стадии проектирования предотвратить возможные ошибки.

Общее количество декомпозированных блоков функциональной модели составляет 90. Фрагмент диаграммы 1-го уровня функциональной модели подсистемы прогнозирования возникновения отклонений в ходе доменной плавки, представленный на рис. 1, включает следующие функции:

– *Сбор и первичная обработка данных (A1)* – обеспечивает автоматическое наполнение системы данными из АСУ ТП и корпоративной информационной системы (КИС). Сбор первичных данных производится в строго регламентированные моменты времени, которые установлены согласно требованиям инженерно-технологического персонала доменного цеха. Выходная информация служит источником для всех других подсистем.

– *Определить признаки нормальной работы доменной печи (A2)* – обеспечивает пересчет и анализ признаков отклонения параметров: отклонение расхода дутья; отклонение давления дутья; отклонение температуры дутья; отклонение общего перепада давления; отклонение нижнего перепада давления; отклонение верхнего перепада давления; окружную неравномерность температуры газа; распределение температуры колошниковога газа; отклонение усредненной температуры колошниковога газа; отклонение содержания Si в чугуне; отклонение содержания CO₂ колошниковога газа; отклонение температуры чугуна; отклонение основности шлака.

– *Определить признаки отклонения от нормального режима доменной плавки (A3)* – обеспечивает пересчет и анализ таких отклонений, как: периферийный газовый поток; центральный газовый поток; горячий ход плавки; холодный ход плавки; тугой ход плавки; верхние подвисяния шихты; нижние подвисяния шихты; количество срабатываемых подач.

– *Формирование рекомендаций по технологии ведения доменной плавки (A4)* выполняется на основании выявленных отклонений и происходит формирование рекомендации по корректировке ведения плавки.

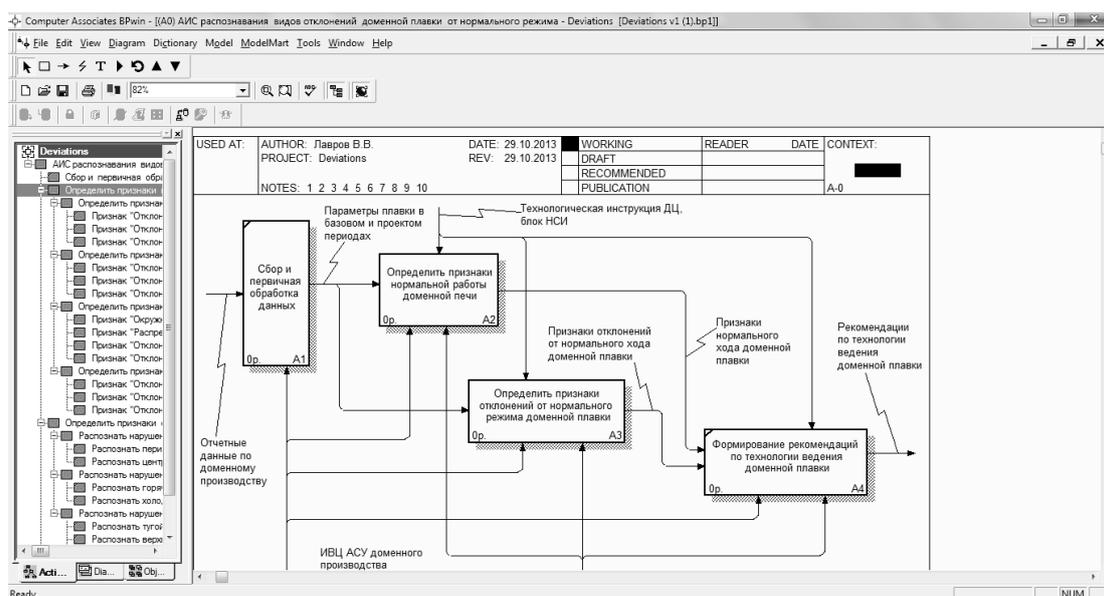


Рис. 1. Первый уровень функциональной модели информационной системы по распознаванию видов отклонений доменной плавки

Результаты функционального моделирования позволили в дальнейшем перейти к следующим этапам разработки системы – созданию архитектуры и реализации программного обеспечения системы.

3. Создание программного обеспечения

Следующим этапом в создании программного продукта является определение его архитектуры. На рис. 2 продемонстрирована архитектура программного обеспечения информационной системы, в которой выделены основные компоненты ее программной реализации.

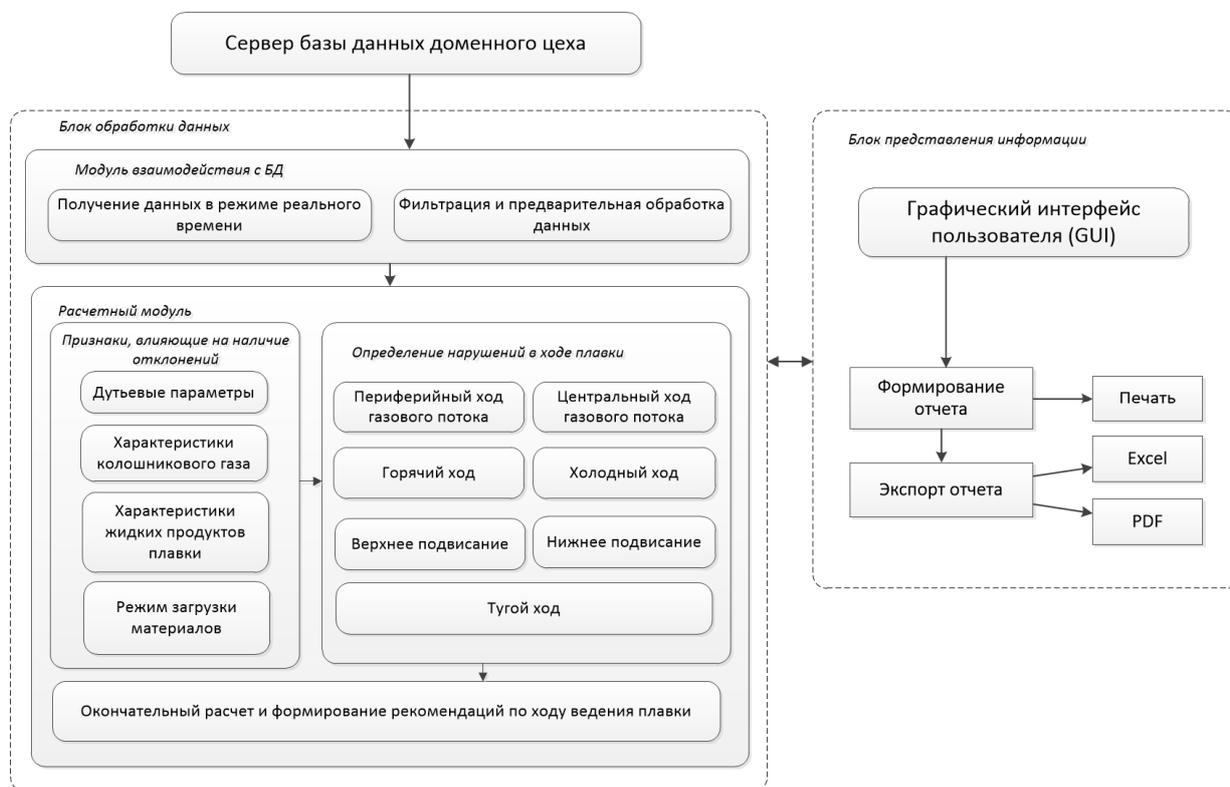


Рис. 2. Архитектура программного обеспечения

Архитектуру программного продукта условно можно разделить на несколько частей, первая представляет собой математическую библиотеку на основе проведенных и формализованных расчётов. Используя предварительно обработанный набор данных, расчётный модуль выполняет начальную стадию вычислений, суть которой заключается в том, чтобы проанализировать максимум возможных параметров, влияющих на возможность того или иного нарушения процесса плавки, а затем выполняет финальный расчет, на основании которого можно будет сделать вывод о наметившейся тенденции к определенному типу отклонения хода плавки. Вторая часть – это модуль, ответственный за работу с базой данных; он решает такие задачи, как обеспечение приложения данными в режиме реального времени, фильтрация данных, их усреднение и предоставление в том виде, в котором их можно было бы использовать в алгоритме. Другая часть представляет пользовательский интерфейс, который включает в себе основные функции для слежения за состоянием хода доменной печи. На текущий момент эта часть реализована в виде настольного приложения, однако благодаря такому архитектурному подходу в любой момент презентационная логика может быть легко реализована, например, в виде web-приложения или службы, уведомляющей о состоянии печи посредством мобильных устройств.

Программное обеспечение «Распознавание вида отклонений доменной плавки» разработано в соответствии с современными принципами построения прикладных программ (функциональность, расширяемость, интеграция с базами данных, интуитивно-понятный пользовательский интерфейс, безопасность, оценивание информации). Программный модуль является частью системы оптимизации тех-

нологического процесса доменной плавки, входит в состав автоматизированной информационной системы анализа и прогнозирования производственных ситуаций доменного цеха ОАО «ММК» и предназначен для инженерно-технологического персонала.

В основе программной реализации лежит технология .NET, что дает дополнительную свободу при выборе платформы, а также языка программирования. Программный продукт написан на языке C# с использованием среды разработки Microsoft Visual Studio 2012 [17].

4. Описание программного продукта

Программный продукт производит следующие действия. Сначала программа загружает из базы данных значения параметров, используемых в расчёте, в частности температуру газов по газоотводам печи, температуру периферийных газов, параметры дутья, параметры колошниковога газа и перепады давления, распределение температур по диаметру колошника, состав жидких продуктов доменной плавки. Далее используется созданная математическая библиотека, с помощью которой пересчитываются и анализируются значения признаков и весовых функций.

Для удобства использования рассматриваемые признаки объединены в следующие группы:

- признаки, характеризующие дутьевые параметры;
- колошниковый газ;
- жидкие продукты плавки;
- режим загрузки материалов.

Программа производит расчёт весовых функций для распознавания вероятности:

- нормального режима работы доменной печи;
- нарушения устойчивости газового потока (наличие периферийного или центрального газового потока);
- нарушение теплового режима доменной плавки (горячий или холодный ход);
- нарушение ровного схода шихты в доменной печи (тугой ход, верхнее или нижнее подвисяние шихты).

Результат вычисления весовых функций, свидетельствующий о вероятности наличия или отсутствия соответствующих отклонений в ходе доменной плавки, предоставляется пользователю в числовом и графическом виде.

В качестве примера на рис. 3 представлено главное окно программы, в котором отражено состояние работы доменной печи. При анализе учитываются три типа нарушений: нарушения теплового режима, нарушения газового хода и нарушения режима схода шихты. Для каждого из отклонений указано его состояние, а также есть возможность предоставления подробной информации по отклонению. На форме, изображенной на рис. 3, в виде графиков показана информация о параметрах, влияющих на вероятность возникновения определенного отклонения.

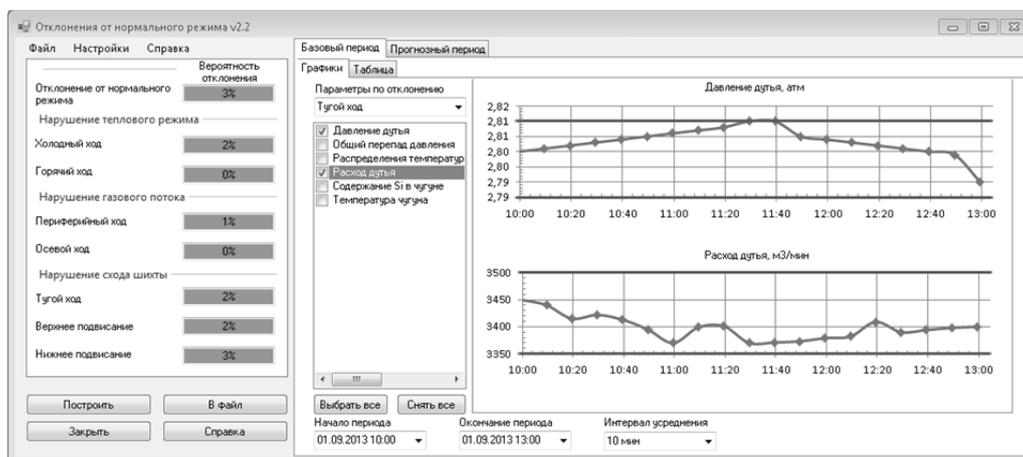


Рис. 3. Фрагмент окна программного обеспечения для распознавания вида отклонений доменной плавки от нормального режима

Заключение

Разработанный программный продукт позволяет пользователю оперативно выявлять наличие отклонения от нормального хода плавки и определять его тип по фактическим данным работающей печи, предоставляет ему возможность в любой момент просмотреть графическую информацию по каждому из параметров, используемых при расчете отклонений. Использование информационно-логической системы помогает производственному персоналу осуществлять диагностику хода печи в режиме реального времени, а также решать оперативные задачи управления технологией доменной плавки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев В.И., Краснобаев В.А., Сарапулов Ю.А., Павлов Е.А. Экспертная система для диагностики и регулирования хода доменной печи // Международная научно-техническая конференция «Теория и практика производства чугуна». Украина; Кривой Рог, 2004. С. 484–487.
2. Френкель М.М., Федулов Ю.В., Белова О.А., Краснобаев В.А. Экспертная система управления ходом доменной плавки // Сталь. 1992. № 7. С. 15–18.
3. Спиринов Н.А., Ипатов Ю.В., Лобанов В.И. и др. Информационные системы в металлургии / под ред. Н.А. Спирина. Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2001. 617 с.
4. Спиринов Н.А., Лавров В.В., Рыболовлев В.Ю., Краснобаев А.В., Онорин О.П., Косаченко И.Е. Модельные системы поддержки принятия решений в АСУ ТП доменной плавки металлургии / под ред. Н.А. Спирина. Екатеринбург : УрФУ, 2011. 462 с.
5. Онорин О.П., Спиринов Н.А., Терентьев В.Л. и др. Компьютерные методы моделирования доменного процесса / под ред. Н.А. Спирина. Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2005. 301 с.
6. Юсфин Ю.С. Металлургия чугуна / под ред. Ю.С. Юсфина. М. : ИКЦ «Академкнига», 2004. 774 с.
7. Blast furnace Phenomena and modelling / ed. by Yasuo Omori. London ; New York : Elsevier applied science, 1987. 631 p.
8. Lida O., Taniyochi S., Hetani T. Применение управляющей системы и искусственным интеллектом в доменном производстве. // Kawasaki Steel Techn Dept. 1992. No. 26. P. 30–37.
9. Power D.J. Web-based and model-driven decision support systems: concepts and issues // Americas Conference on Information Systems. Long Beach, California, 2000.
10. Vapaavuori E. Application of expert systems and knowledge based systems to support operation of iron blast furnace // Expert systems with applications, 1997. V. 12, No. 3. P. II.
11. Ueda S., Natsui S., Ariyama T., Nogami H., Yagi J.I. Recent progress and future perspective on mathematical modelling of blast furnace // ISIJ International, 2010. V. 50, No. 7. P. 914–923.
12. Matsuzaki S., Nishimura T., Shinotake A., Kunitomo K., Naito M., Sugiyama T. Development of mathematical model of blast furnace // Nippon steel technical report. July 2006. No. 94. P. 87–95.
13. Hera P., Birlan F., Oprescu F., Alexandru E.-M., Hera M. Modeling of metallurgical continuous processes in the blast furnace // U.P.B. Scientific Bulletin. Series B. 2011. V. 73, Issue 4. P. 171–182.
14. Masakazu I., Kazuhiro O., Tetsui H. Numerical Study on Metal/Slag Drainage Rate Deviation during blast furnace tapping // ISIJ International, 2009. V. 49, No. 8. P. 1123–1132.
15. Емельянов С.В., Коровин С.К., Мышляев Л.П., Рыков А.С., Евтушенко В.Ф., Кулаков С.М., Бондарь Н.Ф. Теория и практика прогнозирования в системах управления. Кемерово ; Москва : Издат. объединение «Российские университеты» : Кузбассвузиздат – АСТШ, 2008. 487 с.
16. Дубейковский В.И. Эффективное моделирование с СА ERwin Process Modeler (BPwin; AllFusion Process Modeler). М. : Диалог-МИФИ, 2009. 384 с.
17. Троелсен Э. Язык программирования C# 5.0 и платформа .NET 4.5 / пер. с англ. 6-е изд. М. : Вильямс, 2013. 1312 с.

Истомин Александр Сергеевич. E-mail: Pyfhon@live.com

Спиринов Николай Александрович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: n.a.spirin@urfu.ru

Лавров Владислав Васильевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: v.v.lavrov@urfu.ru

Бякова Мария Андреевна. E-mail: byakova1994@mail.ru

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Поступила в редакцию 28 апреля 2016 г.

Istomin Alexander S., Spirin Nikolai A., Lavrov Vladislav V., Byakova Maria A. (Ural Federal University, Russian Federation).

Software development for diagnostics of deviation type of blast furnace from normal mode.

Keywords: blast-furnace production; information-logical system; software development; diagnostics progress blast-furnace production.

DOI: 10.17223/19988605/36/10

Considered the task of creating software to diagnose deviations from normal mode to blast smelting is solved on the basis of a study of the practical experience of melting specialists from Magnitogorsk Iron and Steel Works. Usually approach to solve such problems is

to create expert systems on the basis of various signs giving advice on keeping the melting. However, since the blast smelting process has enormous complexity, many issues are still unresolved. Among them the task of diagnosis progress of blast furnace to identify deviations from the normal mode with an aim to timely take measures to eliminate the causes of disorders of the furnace smelting process. To accomplish this, a mathematical model was created, which was presented in earlier works. Concerning this article, here is a description of the process of creating software based on above-mentioned mathematical model.

The developed software analyzes the operation of the furnace by parameters such as the temperature of the peripheral gas, flue gas temperature, blast furnace gas and the pressure drops and the temperature distribution on the furnace top diameter and composition of blast furnace products. Based on these parameters, the calculation is performed, which resulted in a conclusion about the state of the furnace in case of deviation - about possible reason for disturbances of melting process.

Software development is performed on already well-established methodology. In this case, the first step is functional modeling. Relying on the principle of decomposition, it allows you to split the task into manageable lots of smaller tasks and to begin addressing them. Developed functional model contains 90 blocks on 3 levels of decomposition.

The next step is to describe the architecture of the software under development. According to this description, the software consists of two blocks: data processing unit, using the module for communicate with the database, gets preprocessed data set, then calculates it using the above-mentioned mathematical model. The result is displayed in the unit that present information, which is able to present these results in various forms.

During creating a software, modern development tools are used. Software implementation based on .NET technology. The application was developed using C# language in the development environment Microsoft Visual Studio 2012.

The resulting software allows quickly identify deviations from normal (including disturbances of the thermal conditions, disturbances of the gas stream and disturbance of charge descent), and identify the probability of their occurrence, as well as able to indicate possible ways to restoring the required operating mode of the blast furnace.

REFERENCES

1. Solovev, V.I., Krasnobaev, V.A., Sarapulov, U.A. & Pavlov, E.A. (2004) [Expert system for diagnosis and management of a blast furnace melting operation]. *Teoriya i praktika proizvodstva chuguna* [Theory and practice of ironmaking]. International Scientific and Technical Conference. May 24–27, 2004. Ukraine; Krivoy Rog. pp. 484-487. (In Russian).
2. Frenkel, M.M., Fedulov, U.V., Belova O.A. & Krasnobaev V.A. (1992) Ekspertnaya sistema upravleniya khodom domennoy plavki [Expert system for management of blast furnace melting operation]. *Stal' – Steel*. 7. pp.15-18.
3. Spirin, N.A., Ipatov, U.V. & Lobanov, V.I. (2001) *Informatsionnye sistemy v metallurgii* [Information systems in metallurgy]. Ekateriburg: USTU.
4. Spirin, N.A., Lavrov, V.V., Ribolovlev, V.U., Krasnobaev, V.A., Onorin, O.P. & Kosachenko, I.E. (2011) *Model'nye sistemy podderzhki prinyatiya resheniy v ASU TP domennoy plavki metallurgii* [Model Decision Support System in APCS metallurgy blast furnace]. Ekateriburg: South Ural Federal University
5. Onorin, O.P., Spirin, N.A., Terentiev, V.L. (2005) *Kompyuternye metody modelirovaniya domennogo protsessa* [Computer modeling techniques blast furnace process]. Ekateriburg: USTU
6. Jusfin, U.S. (2004) *Metallurgiya chuguna* [Ironmaking]. Moscow: Akademkniga.
7. Omori, Y. (ed.) (1987) *Blast furnace Phenomena and modeling*. London and New York.
8. Lida, O., Taniyochi, S. & Hetani, T.(1992) Application of a techniques to blast furnace operation. *Kawasaki Steel Techn Dept*. 26. pp. 30-37.
9. Power, D.J. (2000) Web-based and model-driven decision support systems: concepts and issues. *Americas Conference on Information Systems*. Long Beach, California.
10. Vapaavuori, E. (1997) Application of expert systems and knowledge based systems to support operation of iron blast furnace. *Expert Systems with Applications*. 12(3). pp. II. DOI: 10.1016/S0957-4174(97)83777-3
11. Ueda, S., Natsui, S., Ariyama, T., Nogami, H. & Yagi, J.I. (2010) Recent progress and future perspective on mathematical modelling of blast furnace. *ISIJ International*. 50(7). pp. 914-923. DOI: 10.2355/isijinternational.50.914
12. Matsuzaki, S., Nishimura, T., Shinotake, A., Kunitomo, K., Naito, M. & Sugiyama, T. (2006) Development of mathematical model of blast furnace. *Nippon steel technical report*. 94. pp. 87-95.
13. Hera, P., Birlan, F., Opreacu, I., Alexandru, E.-M. & Hera, M. (2011) Modeling of metallurgical continuous processes in the blast furnace. *U.P.B. Scientific Bulletin*, Series B. 73(4). pp. 171-182.
14. Masakazu, I., Kazuhiro, O. & Tetsui, H. (2009) Numerical Study on Metal/Slag Drainage Rate Deviation during blast furnace tapping. *ISIJ International*. 49(8). pp. 1123-1132. DOI: 10.2355/tetsutohagane.96.353
15. Emelyanov, S.V., Korovin, S.K., Myshlyayev, L.P., Rykov, A.S., Evtushenko, V.F., Kulakov, S.M. & Bondar, N.F. (2008) *Teoriya i praktika prognozirovaniya v sistemakh upravleniya* [Theory and practice of forecasting in control systems]. Kemerovo: Russian Universities, Kuzbassvuzizdat – ASTSH.
16. Dubeykovsky, V.I. (2009) *Effective modeling with CA ERwin Process Modeler (BPwin; AllFusion Process Modeler)*. Dialog-MEPI.
17. Troelsen, A. (2013) *Pro C# 5.0 and the .NET 4.5 Framework*. 6th ed.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАБАНОВ Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета. E-mail: babanov2000@mail.ru

БАХОЛДИНА Мария Алексеевна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

БЕРЕЗИН Дмитрий Владимирович – магистрант факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: berezin14@mail.ru

ГОЛОВЧИНЕР Михаил Наумович – кандидат технических наук, доцент кафедры программирования Томского государственного университета. E-mail: golovchiner@mail.ru

БЯКОВА Мария Андреевна – студентка института материаловедения и металлургии Уральского федерального университета (г. Екатеринбург). E-mail: byakova1994@mail.ru

ГОРЦЕВ Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru

ДЫЛЬКОВА Аюна Жимбеевна – магистрант факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: dylykova2306@gmail.com

ИСТОМИН Александр Сергеевич – аспирант кафедры «Теплофизика и информатика в металлургии» института материаловедения и металлургии Уральского федерального университета (г. Екатеринбург). E-mail: pyfhon@live.com

КВАЧ Елена Сергеевна – магистрант кафедры программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета. E-mail: kvachelena93@gmail.com

ЛАВРОВ Владислав Васильевич – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры «Теплофизика и информатика в металлургии» института материаловедения и металлургии Уральского федерального университета (г. Екатеринбург). E-mail: v.v.lavrov@urfu.ru

МАНСИМОВ Камиль Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лабораторией «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: mansimov@front.ru

МАСТАЛИЕВ Рашад Огтай оглы – доктор философии по математике, ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

МЕДВЕДЕВ Геннадий Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета (г. Минск). E-mail: MedvedevGA@bsu.by

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – кандидат технических наук, доцент кафедры исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ПОДДУБНЫЙ Василий Васильевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета. E-mail: vvpoddubny@gmail.com

РЫЖИКОВ Юрий Иванович – Заслуженный деятель науки РФ, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры математического и программного обеспечения Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского (г. Санкт-Петербург); ведущий научный сотрудник лаборатории применения информационных технологий в системном анализе и моделировании Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук. E-mail: ryzhbox@yandex.ru

СИРОТИНА Мария Николаевна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: mashuliagol@mail.ru

СПИРИН Николай Александрович – заслуженный работник высшей школы РФ, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Теплофизика и информатика в металлургии» Института материаловедения и металлургии Уральского федерального университета (г. Екатеринбург). E-mail: n.a.spirin@urfu.ru

УЛАНОВ Александр Викторович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского (г. Санкт-Петербург). E-mail: ulanov246@rambler.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2016. № 3 (36)

Редактор Н.А. Афанасьева
Корректор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано к печати 15.09.2016 г. Формат 60x84^{1/8}.

Гарнитура Times.

Печ. л. 13; усл. печ. л. 12,1.

Тираж 250 экз. Заказ № 2062.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета

634050, г. Томск, Ленина, 36

Тел. 8+(382-2)-53-15-28

Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru